

بررسی روش‌های تعیین علامت راه‌حل پیش‌بینی در روش طول کمان در عضوهای خرابی دو بُعدی

حمید ملکی (کارشناس ارشد)

مجید بوقیان* (دانشیار)

دانشکده‌ی هندی‌ عمران، دانشگاه تبریز

مهندسی عمران شریف، (بهار ۱۳۹۵)
دوره‌ی ۲ - ۳۲، شماره‌ی ۱/۲، ص. ۱۲۷-۱۲۶، (پادداشت نشی)

تحلیل پایداری سازه‌های لاغر نیازمند انجام دادن تحلیل غیرخطی هندسی است. با دنبال کردن مسیر غیرخطی تعادل، تشخیص پدیده‌ی فروریختگی و بارکمانش و در نتیجه، ظرفیت باربری سازه ممکن می‌شود. روش طول کمان یکی از قوی‌ترین روش‌ها در ترسیم مسیر غیرخطی است. در این پژوهش، روش‌های تعیین علامت راه‌حل پیش‌بینی و تأثیر این روش‌ها در عملکرد روش طول کمان مورد بررسی قرار گرفته است. در مثال‌های انجام یافته، عملکرد هر یک از روش‌ها در عبور از نقاط بحرانی مورد بررسی قرار گرفته است. علاوه بر روش‌های موجود، یک روش پیشنهادی و جدیدی نیز معرفی شده است که صحت عملکرد این روش نیز در مثال‌ها بررسی شود. از دیگر متغیرهای تأثیرگذار در عملکرد روش طول کمان، متغیر مقیاسی است. در تحلیل سازه‌های خرابی، روش کنترل طول کمان با متغیر مقیاسی پیشنهاد شده، قادر به تحلیل و ترسیم نمودارهایی با نقاط ویژه است.

واژگان کلیدی: تحلیل غیرخطی، روش طول کمان، مسیر تعادل، تعیین علامت راه‌حل پیش‌بینی، متغیر مقیاسی.

۱. مقدمه

مورد روش یادشده، نوشتاری در سال ۱۹۷۹ بوده است.^[۶] این شیوه، برای گذر از نقطه‌ی حدی بار مناسب است. با این وجود، فن مزبور توانایی گذر از نقطه‌ی حدی تغییرمکان را ندارد. به عبارت دیگر، این روش نیز برای ترسیم مسیر کامل تعادل سازه در حالت رفتارهای برگشتی به عقب^۲ با شکست مواجه شده است. برخی پژوهشگران در پژوهش خود در سال ۲۰۱۴، بر روی روش نمودار تغییرمکان مطالعه و روش جدیدی ارائه کرده‌اند، و ضریب بار را با کمیته‌ساختن جابه‌جایی باقی‌مانده به دست آورده‌اند.^[۷] در پژوهش دیگری (۲۰۰۹) نیز عوامل گوناگونی برای گام نمودار معرفی و برای قسمت تکراری تحلیل غیرخطی، شماری از راهکارهای کنترلی پیشنهاد شده است. روش‌های پیشنهادی براساس هندسه‌ی مسیر ایستایی بنا شده‌اند.^[۸] برای پاسخ دادن به این نیاز، روش طول کمان ثابت پیشنهاد شده است. در برخی پژوهش‌ها، اولین آثار در این رابطه با به‌کارگیری یک معادله‌ی قیدی خطی به نحوی که تکرارها به صورت عمود بر مماس باشد، منتشر شده است.^[۹] به عبارت دیگر، در این شیوه به جای ثابت پنداشتن تراز بار یا تغییرمکان، فاصله‌ی بین هر نقطه‌ی تکرار از نقطه‌ی تعادلی گام پیشین همواره ثابت فرض می‌شود. از این رو، تکرارها بر روی مسیر دایره‌ی انجام می‌گیرند؛ تا در محل تلاقی با مسیر ایستایی، هم‌گرایی صورت پذیرد. در روش مزبور، نرخ هم‌گرایی از درجه‌ی دو است. سپس، این روش توسط چندین پژوهشگر با اصلاح معادله‌ی قیدی تغییر داده شده است. برای مثال، در پژوهشی در سال ۱۹۸۱، یک قید خطی متفاوت به کار برده شده است؛ چنانکه تغییرات تکرارشونده، عمود بر تغییرات سکانت باشند. دو اثر انجام یافته‌ی قبلی از اولین شیوه‌های خطی شده‌ی روش طول کمان بودند.^[۱۱] در پژوهش دیگری در همان

فرض رفتار ارتجاعی خطی، امکان آشکار شدن هرگونه اثر غیرخطی را منتفی می‌سازد، که در این صورت ممکن است اطلاعات بسیار مهمی مورد غفلت قرار گیرند. از طرفی اغلب سازه‌ها، پیش از رسیدن به حد مقاومت خود، پاسخ غیرخطی قابل ملاحظه‌ی را از خود نشان می‌دهند. در کاربرد تحلیل غیرخطی، عدم اطمینان در مورد رفتار واقعی سازه ممکن است کاهش یابد.^[۱]

تحلیل پایداری سازه‌های لاغر نیازمند انجام دادن تحلیل غیرخطی هندسی است.^[۲] با تحلیل غیرخطی سازه‌ها، می‌توان به تعیین بارهای کمانشی، واریسی مقدار تغییر شکل‌های واقعی سازه در خلال بارگذاری، مقدار مقاومت پس کمانشی سازه، و پاره‌ی از عامل‌های دیگر دست یافت. برای رسیدن به تمامی هدف‌های مزبور، نیاز به پیچیدن مسیر ایستایی کامل سازه است. این کار با یافتن نمودار بار- تغییرمکان انجام می‌پذیرد. برای این منظور، انواع روش‌های تحلیل غیرخطی به‌کار می‌رود.^[۳] یکی از شیوه‌های معمول در تحلیل غیرخطی، روش کنترل بار نمودار تکراری Newton-Raphson است. در این راهکار اندازه‌ی ضریب بار در هر گام بارگذاری ثابت می‌ماند.^[۴] به همین سبب، روش مزبور قادر به گذر از نقطه‌ی حدی^۱ بار نیست و لذا فقط قسمتی از منحنی به دست می‌آید.

از این رو برای غلبه بر مشکلات نقاط حدی، در پژوهشی در سال ۱۹۷۱، روش نمودار تغییرمکان پیشنهاد شده است.^[۵] در این راهکار، به جای ثابت نگه داشتن ضریب بار، مقدار یک درایه از بردار تغییرمکان ثابت می‌ماند. از دیگر موارد در

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۱۲/۳، اصلاحیه ۱۳۹۳/۶/۱۹، پذیرش ۱۳۹۳/۶/۲۹.

سال، تغییرات بیشتری با مطرح کردن روش طول کمان کروی انجام یافته،^[۱۲] و برای این منظور، از یک قید مرتبه‌ی دوم یا نرم اکلیدین نمو تغییرمکان بر حسب یک کمیت ثابت و معین استفاده شده است. مطابق روش ذکر شده، برای جلوگیری از مشکلاتی که از انتخاب ریشه‌ی مناسب به وجود می‌آیند، یک صورت خطی از روش طول کمان با استفاده از قید درجه‌ی دوم مشابه، در پژوهشی در سال ۱۹۸۶ پیشنهاد شده است.^[۱۳] علاوه بر این، در پژوهش دیگری در سال ۲۰۱۰، اصلاحیه‌ی بر روش Crisfield پیشنهاد و متغیری با تابعی به روش مذکور افزوده شد تا مشکلاتی که در روش طول کمان پیش می‌آید برطرف شود.^[۱۴] با این حال در برخی پژوهش‌ها، مشکلاتی در ترسیم دوباره‌ی مسیر تعادل با حالات متفاوت روش طول کمان گزارش شده است.^[۱۵-۱۷] برای برطرف کردن ناپایداری روش طول کمان در نزدیکی نقاط بحرانی، که قبلاً توسط برخی پژوهشگران (۱۹۹۰) ارائه شده است،^[۱۸] در پژوهشی در سال ۲۰۱۴،^[۱۹] روش تغییرمکان بررسی و معادله‌ی قیدی آن‌ها بهبود داده شده و تفسیر فیزیکی و هندسی از آن روش نیز ارائه شده است.

روش طول کمان، اغلب در ترسیم مسیر تعادل بعد از عبور از نقاط دوشاخگی و برگشتی دچار شکست می‌شود. دلیل آن عمدتاً این است که اصلاح جهت صحیح مسیر در حوالی چنین نقاطی به درستی انجام نمی‌گیرد. برای غلبه بر این موضوع، چندین معیار برای پیش‌بینی صحیح ارائه شده است. برخی از این معیارها در این نوشتار از طریق مثال‌های عددی در متن برای سازه‌های خرابایی دو بُعدی بررسی شده است. در پژوهش در سال ۱۹۹۶،^[۲۰] معیارهای ذکر شده ارائه شده است که نسبت به نقاط دوشاخگی^۲ و برگشتی حساس نیستند. بنابراین معیارهای مذکور در ترسیم کامل مسیر تعادل در صورت وجود چنین نقاطی، توانایی لازم را دارند. علاوه بر معیارهای مذکور، معیارهای دیگری نیز در برخی پژوهش‌ها پیشنهاد شده است.^[۲۱، ۲۲] پیشرفت‌ها و بهسازی‌های متعدد اخیر برای کنترل روش طول کمان جهت حل مسائل در نزدیکی نقاط ویژه انجام شده است، که از جمله می‌توان به پژوهشی در سال ۱۹۹۷ اشاره کرد.^[۲۳] برخی پژوهشگران نیز مروری بر روش‌های طول کمان ارائه داده و بیان کرده‌اند که روش‌های نومی - تکراری در معادلات قیدی‌شان تفاوت دارند، و نیز اذعان داشته‌اند که یک روش برای حل تمامی مسائل غیرخطی فائق می‌آید. همچنین پیشنهاد داده‌اند که معادلات حاکم بر اجزاء محدود با معادلات قیدی در یک معادله‌ی ماتریسی ترکیب شوند و به کار روند.^[۲۴]

از دیگر کارها در سال‌های اخیر می‌توان به پژوهش‌هایی در سال‌های ۲۰۰۴ و ۲۰۰۸ اشاره کرد.^[۲۵، ۲۶] همچنین در پژوهش دیگری در سال ۲۰۱۳، یک مسئله‌ی گنبدی با ضخامت کم با استفاده از روش نوار محدود تحلیل شده است، که معادلات تعادل با استفاده از انرژی پتانسیل کلی و با حل روش طول کمان انجام شده است.^[۲۷] برخی پژوهشگران نیز برای حل مسائل پس‌کمانش و عبور از نقطه‌ی بحرانی قاب‌های دو بُعدی، با استفاده از روش‌های Scalar Homotopy، جابجایی حالت تعادل را به صورت تکراری بدون عکس‌کردن ماتریس جکوبی حل کرده‌اند. چون در روش Newton-Raphson نیاز به معکوس‌کردن در عبور از نقطه‌ی حدی منجر به تکین شدن^۴ ماتریس جکوبی می‌شود. آن‌ها با روش ذکر شده بدون استفاده از روش طول قوس از نقطه‌ی بحرانی مسیر را ادامه داده‌اند.^[۲۸]

در این نوشتار روش پیشنهادی برای تعیین علامت راه حل پیش‌بینی در روش طول کمان ارائه شده است. ابتدا نتایج حاصل از روش ارائه شده با نتایج روش‌های موجود مطابقت داده شده است. سپس مسائلی را که برخی روش‌های قبلی نمی‌توانستند مسیر را ادامه دهند، این روش توانایی عبور از نقاط ویژه را دارد. معمولاً ۴ نوع منبع غیرخطی در مسائل سازه‌ی در نظر گرفته شده است: غیرخطی هندسی، غیرخطی مصالح، غیرخطی نیرو، و غیرخطی شرایط مرزی. در

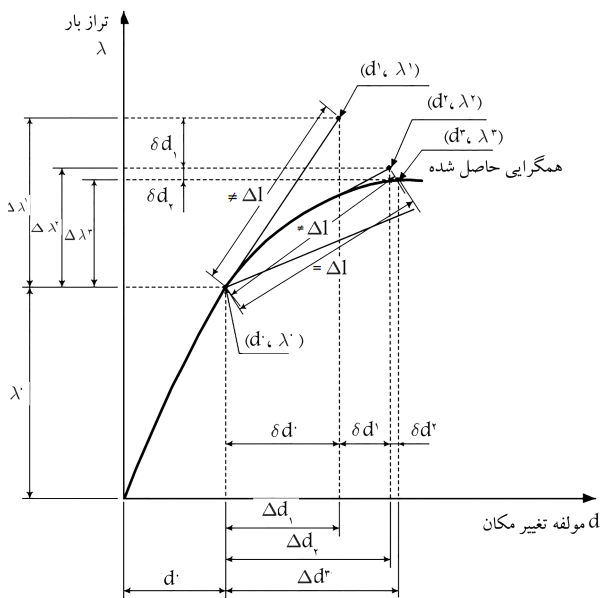
این پژوهش فقط منبع غیرخطی هندسی مورد نظر مؤلفان بوده است. عملاً در سازه‌های فضا کار از جمله گنبد‌های چلیپکی، چنین رفتار غیرخطی هندسی تحت اثر بارهای وارده مشاهده می‌شود.

در بند ۲، به روش کنترل طول کمان اشاره و معادله‌ی قیدی ارائه شده است. در ادامه، روش پیش‌بینی - اصلاح ذکر شده است. در بند ۳، از انواع روش کنترل طول کمان، روش کنترل طول کمان خطی توضیح داده شده است. در بند ۴، معادله‌ی پیش‌بینی مسیر ارائه شده است که منجر به تعیین علامت این معادله جهت عبور از نقطه‌ی ویژه می‌شود. در بند ۵، سه روش معمول برای انتخاب علامت معادله خلاصه‌وار ذکر شده است. ایرادهای این روش‌ها در برخی مسائل آورده شده است. به طور مثال روش Crisfield می‌تواند از نقاط حدی عبور کند، ولی وقتی به دوشاخگی و یا به نقاط برگشت به عقب می‌رسد، دچار مشکل می‌شود. در ادامه، روش پیشنهادی مؤلفان ارائه شده است. روش Feng و روش مؤلفان هر دو می‌توانند ایرادهای دو روش معمول را برطرف کنند. با این تفاوت که روش Feng از حاصل ضرب داخلی تغییرمکان‌ها و روش ارائه شده از علامت حاصل ضرب داخلی تغییرمکان‌ها و کار نموی بهره گرفته شده است. در بند ۶، روش متغیر مقیاسی و در بند ۷، معیار هم‌گرایی ارائه شده است. در بندهای بعدی مثال‌ها، تحلیل و نتیجه‌گیری انجام شده است.

۲. روش کنترل طول کمان

روش‌های کنترل بار و تغییرمکان در صورت وجود نقاط حدی و تغییر جهت نمی‌توانند مسیر کامل تعادل را ترسیم کنند. روش کنترل طول کمان جهت اعمال و پوشش نقاط بحرانی در ترسیم کامل نمودار پاسخ بار - تغییرمکان در نظر گرفته شده است. نقطه‌ی شروع کنترل طول کمان، معادله‌ی تعادل در فرم باقیمانده‌ی r است. با توجه به شکل ۱ می‌توان رابطه‌ی ۱ را نوشت:

$$r(d, \lambda) = q_i(d) - \lambda q_e = 0 \quad (1)$$



شکل ۱. روش طول کمان خطی.^[۲]

۳. روش طول کمان خطی^۶

ساده‌ترین روش، حل مستقیم رابطه‌ی ۸ است.^[۱۳] یکی از اولین امکان‌ها، پیدا کردن یک عبارت برای δd و جایگزینی آن در $\delta \lambda$ است. در نتیجه، از رابطه‌ی ۶ می‌توان رابطه‌ی ۹ را برای δd نوشت:

$$\delta d^i = -K_t^{-1} r^i + \delta \lambda^i K_t^{-1} q_e \quad (9)$$

با استفاده از دو بردار تغییرمکان تکراری δd و δd_t و براساس تعاریف رابطه‌ی ۱۰، می‌توان رابطه‌ی ۱۱ را نوشت:

$$\delta \bar{d}^i = -K_t^{-1} r^i, \quad \delta d_t^i = K_t^{-1} q_e \quad (10)$$

$$\delta d^i = \delta \bar{d}^i + \delta \lambda^i \delta d_t^i \quad (11)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی ۱۱ در رابطه‌ی ۷، رابطه‌ی ۱۲ نتیجه می‌شود:

$$\gamma (\Delta d^i)^T (\delta \bar{d}^i + \delta \lambda^i \delta d_t^i) + \gamma \Delta \lambda^i \delta \lambda^i \psi^T q_e^T q_e = -\frac{a^i}{\gamma} \quad (12)$$

که رابطه‌ی ذکرشده به نوبه‌ی خود، حل تراز بار تکرار $\delta \lambda$ را نتیجه می‌دهد (رابطه‌ی ۱۳):

$$\delta \lambda^i = \frac{-(a^i/\gamma) - (\Delta d^i)^T \delta \bar{d}^i}{(\Delta d^i)^T \delta d_t^i + \Delta \lambda^i \psi^T q_e^T q_e} \quad (13)$$

تغییرمکان و تراز بار نموی جدید از روابط ۱۴ و ۱۵ به دست می‌آیند:

$$\Delta d^{i+1} = \Delta d^i + \delta d^i \quad (14)$$

$$\Delta \lambda^{i+1} = \Delta \lambda^i + \delta \lambda^i \quad (15)$$

۴. راه‌حل پیش‌بینی^۷

راه‌حل پیش‌بینی، جهت اولین حضور در پیدا کردن مسیر تعادل را نمایان می‌سازد. متداول‌ترین و عمومی‌ترین نظریه برای به‌دست آوردن یک عبارت برای پیش‌بینی، استفاده از روش اویار است. با توجه به شکل ۲ می‌توان رابطه‌ی ۱۶ را نوشت:

$$\Delta d^1 = K_t^{-1} \Delta q_e \quad (16)$$

که در آن، K_t ماتریس سختی مماسی در شروع تکرار است. اندیس بالایی بردار تغییرمکان نموی Δd برای تعداد تکرار مرحله‌ی پیش‌بینی همیشه $i = 1$ باقی می‌ماند. در نتیجه این قرارداد اتخاذ شده است.

نیروی خارجی نموی Δq_e از رابطه‌ی ۱۶ را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۱۷ بیان کرد:

$$\Delta q_e = \Delta \lambda^1 q_e \quad (17)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی ۱۷ در رابطه‌ی ۱۶، رابطه‌ی ۱۸ نتیجه می‌شود:

$$\Delta d^1 = \Delta \lambda^1 K_t^{-1} q_e \quad (18)$$

با یادآوری تعریف δd_t از روابط ۱۱ و ۱۸، می‌توان رابطه‌ی ۱۹ را بیان کرد:

$$\Delta d^1 = \Delta \lambda^1 \delta d_t^1 \quad (19)$$

که در آن، q_i بردار نیروی داخلی سازه است، که تابعی از تغییرمکان گره‌ی d است و q_e بردار نیروی خارجی و λ متغیر تراز بار است. علاوه بر تعادل رابطه‌ی ۱، یک قید اضافی نیز برای کامل کردن مجموعه‌ی روابط باید افزوده شود. این معادله‌ی قیدی طول کمان s است که به صورت رابطه‌ی ۲ تعریف می‌شود:

$$s = \int ds \quad (2)$$

که برای ds می‌توان رابطه‌ی ۳ را نوشت:

$$ds = \sqrt{dd^T \cdot dd + d\lambda^T \cdot \psi^T \cdot q_e^T \cdot q_e} \quad (3)$$

که در آن، dd دفرانسیل بردار تغییرمکان گره‌ی، $d\lambda$ دفرانسیل متغیر تراز بار، ψ متغیر مقیاسی و q_e بردار نیروی خارجی است.

سپس روش طول کمان به منظور پیدا کردن محل تقاطع طول کمان داده‌شده‌ی s با معادله‌ی تعادل ارزیابی می‌شود. به طوری که می‌توان رابطه‌ی ۴ را نوشت:

$$r(s) = q_i(d(s)) - \lambda(s) q_e = 0 \quad (4)$$

چنان‌که در ادامه ملاحظه خواهد شد، برای حل رابطه‌ی ۴ از روش پیش‌بینی - اصلاح^۵ استفاده می‌شود. در ابتدا، صورت دفرانسیلی رابطه‌ی ۳ را می‌توان به شکل نموی جایگزین کرد به طوری که می‌توان رابطه‌ی ۵ را نوشت:

$$a^i = (\Delta d^i)^T \Delta d^i + (\Delta \lambda^i)^T \psi^T q_e^T q_e - \Delta l^i = 0 \quad (5)$$

که در آن، Δl شعاع ثابت تقاطع موردنظر با مسیر تعادل است. همچنین به عنوان طول نموی نیز معروف است (شکل ۱). اندیس i نشان‌گر مرحله‌ی تکرار نام برای طول کمان است. در ارتباط با شکل ۱، بردار Δd و کمیت عددی $\Delta \lambda$ نموی هستند و به آخرین هم‌گرایی موقعیت تعادل بر می‌گردند. ضمناً δd و $\delta \lambda$ به ترتیب بردار تغییرمکان تکراری و تراز بار و وابسته به تکرار گام قبلی هستند. علاوه بر این، متغیر مقیاسی ψ در رابطه‌ی ۵، برای ترکیب ابعاد مختلف جملات بار و تغییرمکان موردنیاز است.

ماهیت اصلی روش طول کمان در این است که تراز بار λ نیز متغیر است. بنابراین، کل مجهولات $n+1$ ، که n حالت از متغیرهای بردار تغییرمکان d و یک متغیر بار λ است. برای حل این معادلات، رابطه‌ی ۱ کل n معادله‌ی تعادل را مشخص می‌کند، در حالی که رابطه‌ی ۵، یک معادله‌ی قیدی را بیان می‌کند. این $n+1$ رابطه را می‌توان براساس اعمال روش تکرارشونده‌ی نیوتن - رفسون (روابط ۱ الی ۵) حل کرد. این ایده برای اولین بار در پژوهش‌هایی در سال ۱۹۸۱ و ۱۹۸۶ پیشنهاد شده است؛^[۱۳] هر چند که معادله‌ی قیدی متفاوت بوده است. سری ناقص تیلور از روابط ۱ و ۵ به ترتیب روابط ۶ و ۷ را نتیجه می‌دهد:

$$r^{i+1} = r^i + \frac{\partial r}{\partial d} \delta d^i + \frac{\partial r}{\partial \lambda} \delta \lambda^i = r^i + K_t \delta d^i - q_e \delta \lambda^i = 0 \quad (6)$$

$$a^{i+1} = a^i + \frac{\partial a}{\partial d} \delta d^i + \frac{\partial a}{\partial \lambda} \delta \lambda^i = a^i + \gamma (\Delta d^i)^T \delta d^i + \gamma \Delta \lambda^i \delta \lambda^i \psi^T q_e^T q_e = 0 \quad (7)$$

روابط ۶ و ۷ را می‌توان در شکلی متفاوت (رابطه‌ی ۸) ترکیب کرد:

$$\begin{pmatrix} \delta d^i \\ \delta \lambda^i \end{pmatrix} = - \begin{bmatrix} K_t & -q_e \\ \gamma (\Delta d^i)^T & \gamma \Delta \lambda^i \delta \lambda^i \psi^T q_e^T q_e \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r^i \\ a^i \end{pmatrix} \quad (8)$$

در این باره، روش‌های مختلفی برای به‌دست آوردن راه‌حل رابطه‌ی ۸ وجود دارد.

امر نیز آن است که علامت دترمینان ماتریس سختی مماسی ($\det(K_t)$) در اطراف نقطه‌ی دوشاخگی از منفی به مثبت نوسان می‌کند. در نتیجه، ناتوان از دنبال کردن مسیر تعادل است. [۲۹، ۳۰]

۲.۵. پیروی کردن از علامت کار نموی (رابطه‌ی ۲۲)

$$\text{sign}(\Delta\lambda^1) = \text{sign}\left(\left(\delta d_t^1\right)^T q_e\right) \quad (22)$$

که در آن، δd_t^1 حل مماسی جاری تعریف شده در رابطه‌ی ۱۱ در شروع تکرارها و q_e بردار نیروی خارجی است. براساس اظهارنظر برخی پژوهشگران در پژوهش خود (۱۹۹۹)، این معیار نسبت به نقاط دوشاخگی حساس نیست و می‌تواند دنبال کردن مسیر تعادل را پس عبور از نقطه‌ی دوشاخگی ادامه دهد. با این حال، این معیار ثابت می‌کند که در شاخه‌ی نزولی از منحنی بار - تغییرمکان در مسائل «برگشتی به عقب» بی‌اثر است، که پیش‌بینی شیب مثبت با افزایش بار یک ترسیم به عقب^۹ ایجاد خواهد کرد. به عبارت دیگر، این روش در مسیر خود پس از عبور از یک نقطه‌ی برگشتی دو بار برگشت به عقب خواهد داشت. برخی از پژوهشگران پیشنهاد کرده‌اند که تعویض بین دو معیار قبلی برای غلبه بر رفتار بد در مجاورت نقاط حدی و برگشتی انجام گیرد. اما این کار هزینه‌ی اضافی محاسباتی را در پی خواهد داشت.

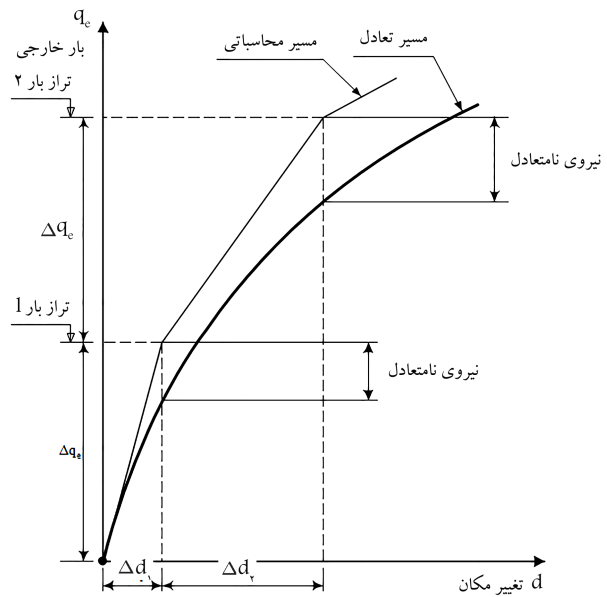
۳.۵. پیروی کردن از حاصل ضرب داخلی تغییرمکان‌ها

$$\text{sign}(\Delta\lambda^1) = \text{sign}\left(\left(\Delta d^1\right)^T \cdot \delta d_t^1\right) \quad (23)$$

که در آن، Δd^1 تغییرمکان نموی هم‌گراشده‌ی قبلی و δd_t^1 جواب مماسی جاری تعریف شده در رابطه‌ی ۱۱ است. این معیار که برای نقاط حدی، تغییر جهت و دوشاخگی حساسیت ندارد، در پژوهشی در سال ۱۹۹۶ توسط Feng و همکاران معرفی شده است. [۲۰] نکته‌ی کلیدی معیار این حقیقت است که Δd^1 اطلاعات دربارهِ تاریخچه‌ی مسیر تعادل جاری را با خود دارد. یگانه محدودیت این معیار، لزوم کوچک بودن Δd^1 به اندازه‌ی کافی است. با این حال، Feng ادعا کرده است که این محدودیت پیشتر توسط الگوریتم نیوتن - رفسون تحمیل شده است که در عمل، اندازه‌ی مورد نیاز Δd^1 برای پیش‌بینی دقیق مسیر همیشه بزرگ‌تر از شعاع هم‌گرایی لازم روش نیوتن - رفسون خواهد بود. با وجود این، در پژوهش Feng و همکاران، هیچ نشانه‌ی برای اندازه‌ی بیشینه‌ی Δd^1 مورد نیاز برای درستی کارکرد معیار وجود ندارد. علاوه بر این، هیچ اطلاعاتی از اولین نمو Δd^1 نیز وجود ندارد. در نتیجه علامت اولین گام پیش‌بینی را نمی‌توان از رابطه‌ی ۲۳ تعیین کرد. یک راه‌حل استفاده از دترمینان ماتریس سختی مماسی اولیه ($\det(K_t)$) و سپس تبدیل به معیار پیشنهادی است. با این حال انتظار می‌رود در صورتی که سازه در ابتدای پیکربندی پایدار باشد، اولین تراز بار پیش‌بینی $\Delta\lambda^1$ مثبت خواهد بود.

۴.۵. پیروی کردن از علامت حاصل ضرب داخلی تغییرمکان‌ها و کار نموی

$$\text{sign}(\Delta\lambda^1) = \text{sign}\left(\left(\Delta d^1\right)^T \cdot \delta d_t^1 \cdot (q_e)^T \cdot \Delta d\right) \quad (24)$$



شکل ۲. روش تکراری پیش‌رونده‌ی اوپلر. [۲]

رابطه‌ی ۱۹ باید توسط طول نموی Δl محدود شود. از این رو با جای‌گذاری رابطه‌ی ۱۹ در رابطه‌ی ۵ و حل برای $\Delta\lambda$ در نهایت رابطه‌ی ۲۰ نتیجه می‌شود:

$$\Delta\lambda^1 = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{(\delta d_t^1)^T \delta d_t^1 + \psi^T q_e^T q_e}} \quad (20)$$

برای رابطه‌ی ۲۰ به دلیل داشتن علامت مثبت و منفی در عبارت، دو پیش‌بینی متفاوت امکان‌پذیر خواهد بود. معیارهای مختلفی برای تعیین علامت $\Delta\lambda^1$ جهت پیش‌بینی ادامه‌ی مسیر تعادل وجود دارد. ممکن است این تعیین علامت، بدیهی به نظر برسد اما در میانه‌ی روش، با انتخاب نادرست منجر به نتایج ناخواسته‌ی می‌شود. به عنوان مثال دو بار برگشت روی مسیر تعادل اتفاق بیفتد. سه گزینه‌ی عمومی‌تر و متداول‌تر برای تعیین اینکه $\Delta\lambda^1$ مثبت یا منفی باشد، در بخش ۶ ارائه شده است. یک روش پیشنهادی نیز در بخش ۶ ارائه و صحت عملکرد این روش در بخش مثال‌های عددی بررسی و نتایج حاصله با سه روش موجود مقایسه شده است.

۵. تعیین علامت راه‌حل پیش‌بینی

در این بخش سه روش تعیین علامت راه‌حل پیش‌بینی که تاکنون از سوی پژوهشگران مختلف ارائه شده است، بیان شده است. در ادامه، روش پیشنهادی جدیدی برای تعیین علامت راه‌حل پیش‌بینی که هدف این پژوهش است، ارائه شده است.

۱.۵. پیروی کردن از علامت دترمینان ماتریس سختی مماسی

$$\text{sign}(\Delta\lambda^1) = \text{sign}(\det(K_t)) \quad (21)$$

که در آن، K_t ماتریس سختی مماسی در شروع تکرارهاست. یعنی زمانی که $\Delta\lambda^1$ محاسبه می‌شود. این معیار از پرکاربردترین معیارهاست که در ابتدا در سال ۱۹۸۰ معرفی شده است، [۱۱] و در مجاورت نقاط حدی به خوبی عمل می‌کند. با این حال، در مجاورت نقاط دوشاخگی^۸ در اغلب موارد با شکست مواجه می‌شود. دلیل این

رابطه‌ی ۲۴، معیار پیشنهادی جدید در این پژوهش است که صحت عملکرد آن با مثال‌های اجراشده مورد بررسی قرار گرفته است. در واقع به رابطه‌ی ارائه‌شده‌ی Feng، قسمت Δd ، $(q_e)^T$ اضافه، بررسی‌های لازم انجام و نتایج مثبتی حاصل شده است.

۷. معیار هم‌گرایی

در یک روش تکراری - نموی مؤثر، باید برای ادامه یا پایان تکرارها، یک معیار هم‌گرایی تعیین شود. در تعیین معیار هم‌گرایی، اگر یک تکران سخت‌گیرانه انتخاب شود، موجب صرف تلاش بیش از حد در محاسبات برای دقت‌های غیرضروری خواهد شد. از سوی دیگر، اگر رواداری بیش از حد شل یا ضعیف باشد، اندازه‌ی خطاها ممکن است افزایش یابد و منجر به نتایج غیردقیق و ناصحیح شود. علاوه بر این، سؤال این است که آیا اندازه‌ی رواداری باید برای نیروهای نامتعادل تنظیم شود یا تغییرمکان‌ها؟ براساس تحلیل‌های غیرخطی انجام‌یافته توسط برخی پژوهشگران مشخص شده است که یک رواداری نسبتاً شل اعمال‌شده بر خطای نیرویی یا تغییرمکانی، بهتر از یک رواداری سخت‌گیرانه بر هر دوی آنهاست. برای این منظور، اندازه‌ی خطای ۱٪ برای معیارهای پیشینه، نیروی نامتعادل‌کننده یا تغییرمکان در نظر گرفته می‌شود. تعادل فقط زمانی محقق خواهد شد که از کنترل اندازه‌ی هر دو اکتان شود. از نظر ریاضی، معیار هم‌گرایی برای نیرو و تغییرمکان به صورت رابطه‌ی ۲۶ بیان می‌شود:

$$\frac{\sqrt{r \times d}}{\sqrt{f \times d}} < \varepsilon \quad (26)$$

که در آن، r ، f و d به ترتیب نیروی باقی‌مانده، بار خارجی و بردار تغییرمکان است. همچنین ε تکران شرایط تعادل بوده و در این مطالعه مقدار آن ۰٫۰۱٪ تنظیم شده است.

۸. مثال‌های عددی

مثال‌های عددی انتخاب‌شده در این بخش، مقایسه‌ی بین تأثیر معیارهای تعیین علامت راه‌حل پیش‌بینی بخش ۷ در روش طول کمان در عبور از نقاط ویژه و نیز بررسی متغیر مقیاسی ψ به صورت عددی و تأثیر آن در عملکرد روش طول کمان را فراهم می‌کنند. این تذکر لازم است که در تمامی مثال‌ها، واحد نیرو: نیوتن (N)، واحد تغییرمکان: میلی‌متر (mm)، واحد سطح: میلی‌متر مربع (mm^2) و واحد مدول ارتجاعی: نیوتن بر میلی‌متر مربع ($\frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$) است. ضمناً در تمامی مثال‌ها، مقدار مساحت میله‌های خرپایی $20 (\text{mm}^2)$ و مقدار مدول ارتجاعی $271 \times 10^5 (\frac{\text{N}}{\text{mm}^2})$ در نظر گرفته شده است.

۸.۱. سیستم خرپای دو عضوی متقارن با پدیده‌ی فروجهش

شکل ۴، یک سیستم خرپای دو عضوی متقارن را که در طی بارگذاری، پدیده‌ی فروجهش خواهد داشت، نشان می‌دهد. شکل ۵، منحنی بار - تغییرمکان گره ۲ را در جهت قائم با استفاده از هر ۳ روش تعیین علامت راه‌حل پیش‌بینی نشان می‌دهد. این تذکر لازم است که در این مثال، چون هر ۳ روش توانایی عبور مسیر در مواجهه با پدیده‌ی فروجهش را دارند، از یک نمودار برای هر ۳ روش ارائه شده است. شکل ۶، نمودار پاسخ بار - تغییرمکان را در صورت استفاده از رابطه‌ی پیشنهادی ۲۴ نشان می‌دهد، که با مقایسه‌ی شکل‌های ۵ و ۶ می‌توان به توانایی رابطه‌ی ۲۴

رابطه‌ی ۲۴، معیار پیشنهادی جدید در این پژوهش است که صحت عملکرد آن با مثال‌های اجراشده مورد بررسی قرار گرفته است.

در واقع به رابطه‌ی ارائه‌شده‌ی Feng، قسمت Δd ، $(q_e)^T$ اضافه، بررسی‌های لازم انجام و نتایج مثبتی حاصل شده است.

۶. متغیر مقیاسی ψ

معادله‌ی قیدی ۵، بر پایه‌ی روش طول کمان به صورت رابطه‌ی ۲۵ بیان می‌شود:

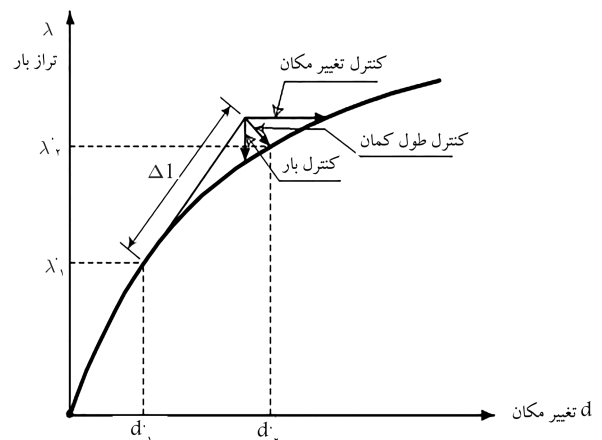
$$a^i = (\Delta d^i)^T \Delta d^i + (\Delta \lambda^i)^T \psi^T q_e^T q_e - \Delta l^i = 0 \quad (25)$$

که در آن، Δd بردار تغییرمکان نموی، $\Delta \lambda$ تراز بار نموی، Δl طول نموی و q_e بردار نیروی خارجی است. اما این بخش بر روی متغیر مقیاسی ψ متمرکز شده است. متغیر ψ تأثیر کنترل بار و تغییرمکان را در رفتار روش طول کمان تعیین می‌کند. بنابراین به عنوان مثال اگر:

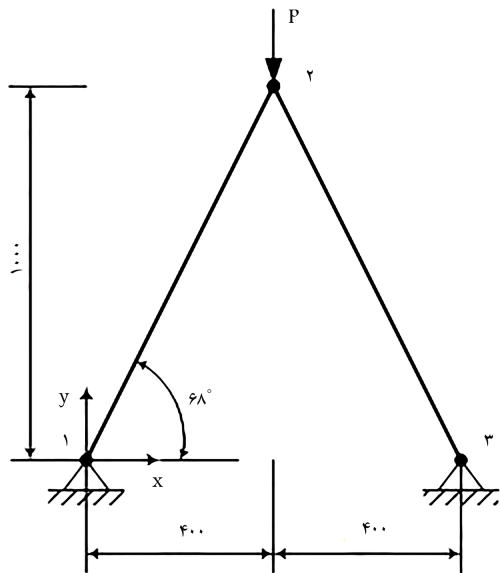
$\psi \rightarrow 0$: همانند کنترل تغییرمکان عمل می‌کند.

$\psi \rightarrow \infty$: همانند کنترل بار عمل می‌کند.

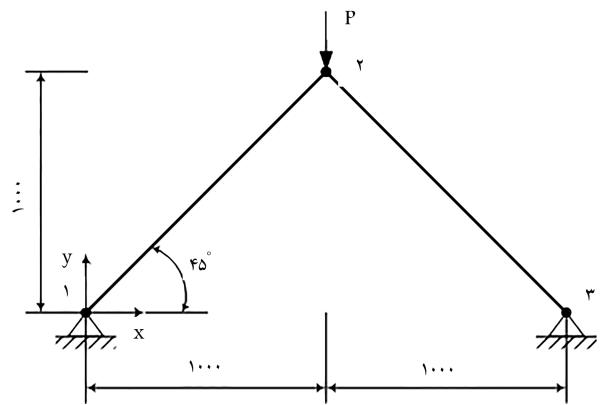
علاوه بر این، می‌توان گفت که روش‌های کنترل بار و تغییرمکان، حالت‌های خاصی از روش طول کمان هستند (شکل ۳). [۳۱] هدف اصلی ψ در رابطه‌ی ۲۵، تخصیص مقیاس بین جملات بار و تغییرمکان است. برای مثال هنگام استفاده از مقادیر بزرگ‌تر نیرو برای نتایج تغییرمکان‌های کوچک به کار می‌رود. نهایتاً به احتمال بسیار زیاد، استفاده از مقادیر واقعی در تحلیل زمانی اتفاق می‌افتد که سختی عناصر (آلمان‌های) سازه بالا باشد. بنابراین، نیروهای بزرگ برای به دست آوردن تغییرمکان‌های کوچک مورد نیاز می‌شود (یعنی 10^6 نیوتن برای به دست آوردن یک میلی‌متر تغییرمکان). در این حالت، اگر $\psi = 1$ باشد، جمله‌ی نیروی $\psi^T q_e^T q_e \Delta \lambda^2$ در معادله‌ی قیدی ۲۵، به سمت بی‌نهایت میل خواهد کرد، در صورتی که با جمله‌ی تغییرمکان $\Delta d^T \Delta d$ مقایسه شود. بنابراین، روش طول کمان شبیه کنترل بار رفتار خواهد کرد و موجب از دست رفتن توانایی آن برای غلبه بر نقاط حدی می‌شود. با این حال، عملاً به نظر می‌رسد که در مقابل، زمانی که $\psi \rightarrow 0$ به سمت صفر میل می‌کند، تأثیر کمی دارد و روش طول کمان هنوز هم قادر به عبور از نقاط حدی، چندشاخگی و برگشتی است. به عنوان یک نتیجه، برخی از نویسندگان



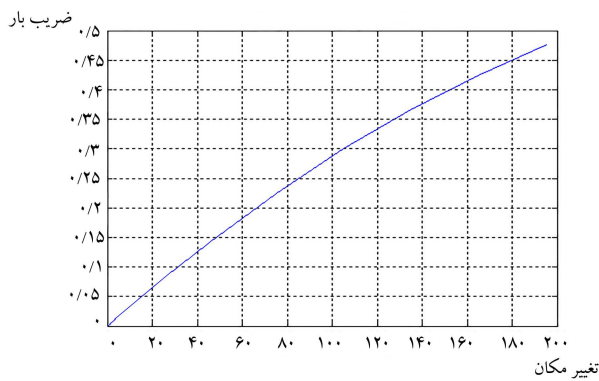
شکل ۳. روش‌های متفاوت دنبال کردن مسیر. [۲]



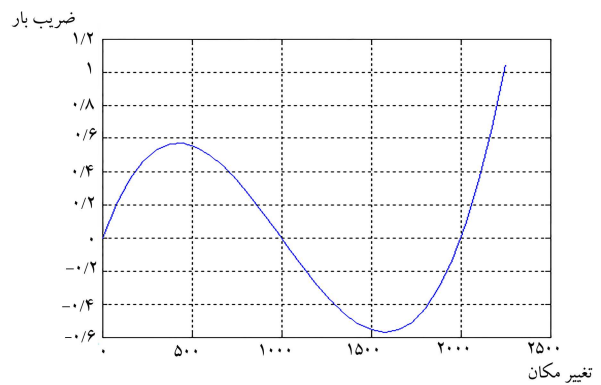
شکل ۷. سیستم خرابی دو عضوی متقارن با زاویه تند. [۲]



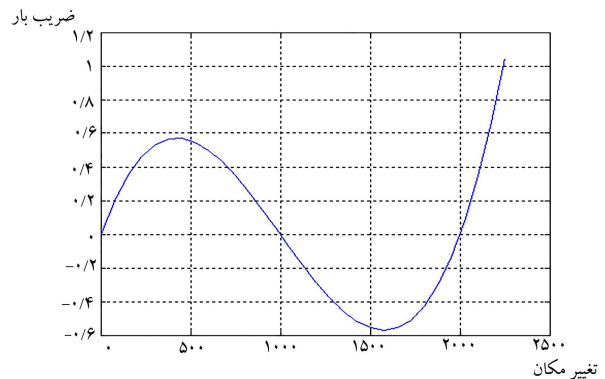
شکل ۴. سیستم خرابی دو عضوی متقارن. [۲]



شکل ۸. نمودار پاسخ بار - تغییر مکان با رابطه‌ی ۲۱.



شکل ۵. نمودار پاسخ بار - تغییر مکان.



شکل ۶. نمودار پاسخ بار - تغییر مکان با رابطه‌ی ۲۴.

به کار برده شده است. در شکل‌های ۸ الی ۱۰ می‌توان تأثیر ۳ معیار روابط ۲۱ الی ۲۳ را در صورت حضور نقاط حدی و دوشاخگی مشاهده کرد. وجود نقاط حدی مطابق مثال قبل در معیارهای روابط ۲۱ الی ۲۳ تأثیری ندارند و بنابراین روش طول کمان، ترسیم تمام مسیر اصلی را ادامه می‌دهد. اما روش طول کمان، با استفاده از معیار رابطه‌ی ۲۱ برای غلبه بر نقطه‌ی دوشاخگی ناتوان است. دلیل این امر آن است که علامت دترمینان ماتریس سختی وقتی به منفی تغییر می‌یابد، راه‌حل پیش‌بینی نقاط رو به پایین و تکرارها در مسیر تعادلی، که بیشتر ترسیم شده‌اند، هم‌گرا می‌شوند. بنابراین در این حالت، روش طول کمان در اطراف نقطه‌ی دوشاخگی تا اتمام پیشینه‌ی تعداد نمونه‌ها نوسان خواهد کرد. برای درک بهتر موضوع، موقعیت نقاط اول تا ششم روی مسیر تعادل پس از اجرای برنامه به صورت جدول ۱ خواهد بود. با توجه به نتایج به دست آمده از اجرای برنامه مشاهده می‌شود که علامت دترمینان ماتریس سختی در ۳ نقطه‌ی اول روی مسیر تعادل مثبت و در نقطه‌ی چهارم منفی است و سپس یک در میان از مثبت به منفی تغییر می‌یابد. لذا موقعیت نقاط در مسیر تعادلی که بیشتر ترسیم شده‌اند، هم‌گرا می‌شوند.

شکل ۱۱، نمودار پاسخ بار - تغییر مکان را با استفاده از رابطه‌ی ۲۴ نشان می‌دهد، که مجدداً بیانگر توانایی این رابطه در ترسیم کامل نمودار در صورت حضور نقاط حدی است.

در ترسیم نمودار بار - تغییر مکان در حالتی که سازه رفتار فروجهش داشته باشد، پی برد.

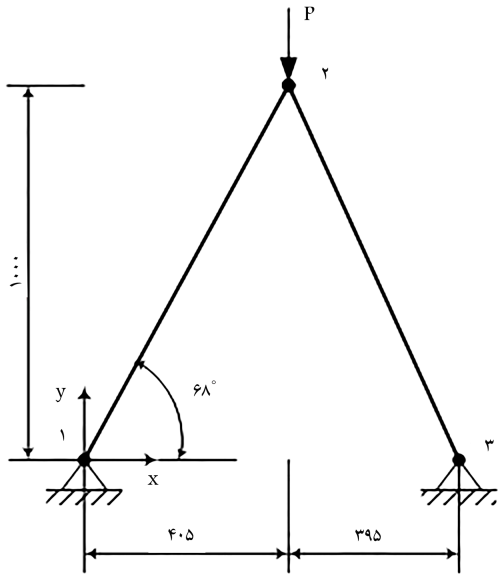
۲.۸. سیستم متقارن دو عضوی و با مسیر تعادل با نقاط حدی و دوشاخگی

اگر زاویه‌ی بین عضوهای خرابی شکل ۴، به ۶۸ درجه افزایش یابد (شکل ۷)، بدیهی است که منحنی بار - تغییر مکان برای گره ۲ در جهت قائم تغییر خواهد یافت. در این حالت دو نقطه‌ی حدی و دوشاخگی در مسیر تعادل ظاهر می‌شود و ۴ بار صفرشدن دترمینان ماتریس سختی اتفاق می‌افتد. این مثال، جهت مقایسه‌ی رفتار معیارهای متفاوت برای تعیین علامت گام پیش‌بینی و تأثیر آن‌ها در روش طول کمان

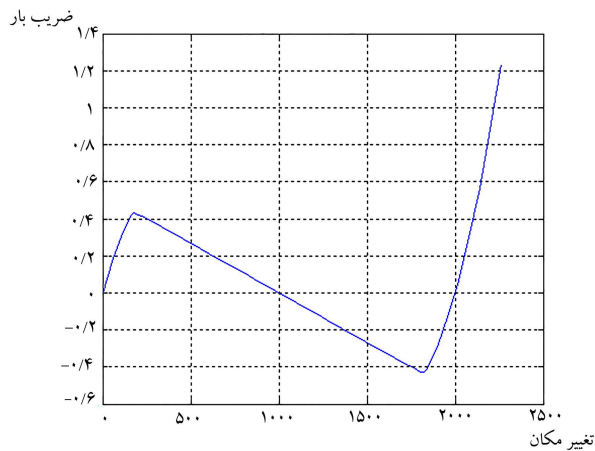
اگر تقارن سازهی خرابایی با جابه‌جایی چند میلی‌متری، در گره ۲ مطابق شکل ۱۲ حذف شود، نقاط دوشاخگی از بین می‌روند و کل مسیر تعادل را می‌توان با هر ۴ معیار ترسیم کرد. منحنی‌های نشان‌داده شده در شکل‌های ۱۳ الی ۱۶ با مسیر تعادل سازهی نامتقارن جدید مطابقت دارند.

۳.۸. سیستم متقارن شش عضوی با مسیر تعادل و نقاط حدی، دوشاخگی و برگشتی

تا به حال، رفتار روش طول کمان با استفاده از معیارهای روابط ۲۱ الی ۲۴ در حضور نقاط حدی و دوشاخگی امتحان شده است. با کمک سازهی خرابایی متقارن شکل ۱۷، عملکرد معیارها در مواجهه با نقاط برگشتی مورد بررسی قرار گرفته است. شکل‌های ۱۸ الی ۲۰ نمودار پاسخ بار- تغییر مکان گره ۴ در جهت قائم مربوط به سازهی شکل ۱۷ را نشان می‌دهند. هر یک از مسیرهای تعادل با استفاده از روش طول کمان خطی، اما با معیارهای متفاوت برای محاسبه‌ی علامت گام پیش‌بینی ترسیم شده‌اند. مسیر تعادل سازهی خرابایی در شکل ۱۷، ۸ نقطه‌ی حدی، ۲ نقطه‌ی



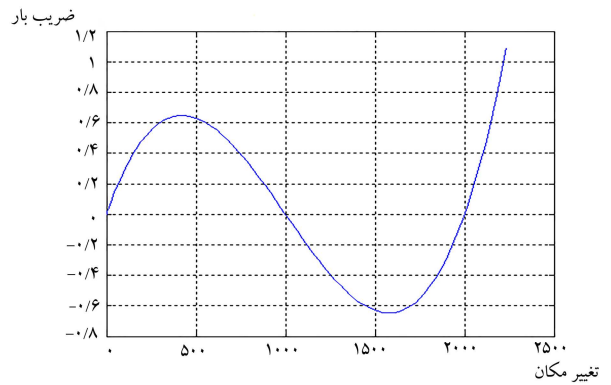
شکل ۱۲. سیستم خرابایی دو عضوی نامتقارن با زاویه‌ی تند [۲].



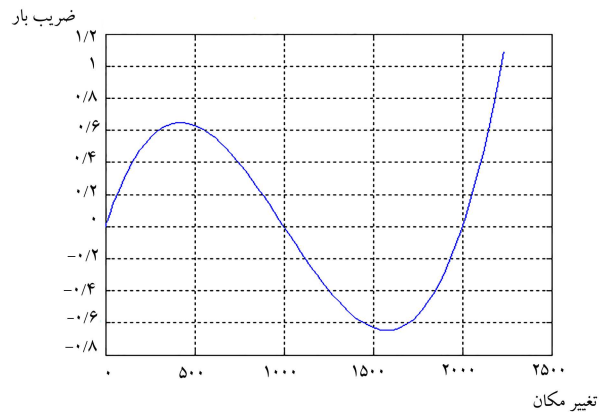
شکل ۱۳. نمودار پاسخ بار- تغییر مکان خرابایی دو عضوی نامتقارن با رابطه‌ی ۲۱.

جدول ۱. موقعیت نقاط روی مسیر تعادل با استفاده از رابطه‌ی ۲۱.

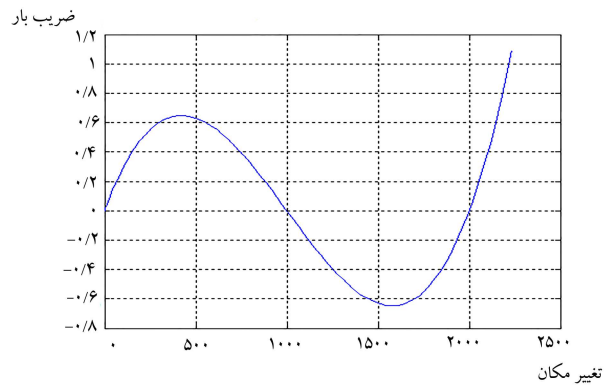
تراز بار و موقعیت برای نقطه‌ی اول روی مسیر تعادل	$\lambda = 0,1839$	$d = -60$
تراز بار و موقعیت برای نقطه‌ی دوم روی مسیر تعادل	$\lambda = 0,3337$	$d = -120$
تراز بار و موقعیت برای نقطه‌ی سوم روی مسیر تعادل	$\lambda = 0,4515$	$d = -180$
تراز بار و موقعیت برای نقطه‌ی چهارم روی مسیر تعادل	$\lambda = 0,3337$	$d = -120$
تراز بار و موقعیت برای نقطه‌ی پنجم روی مسیر تعادل	$\lambda = 0,4515$	$d = -180$
تراز بار و موقعیت برای نقطه‌ی ششم روی مسیر تعادل	$\lambda = 0,3337$	$d = -120$



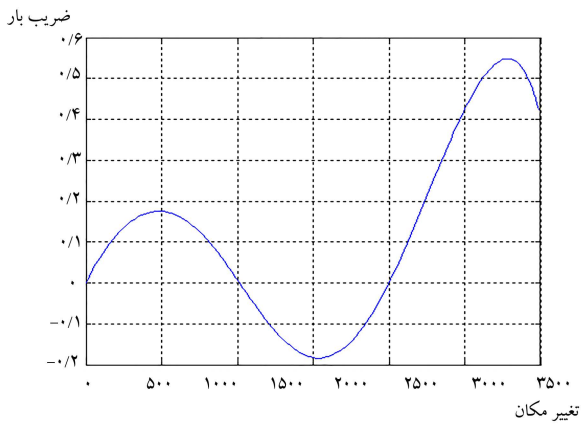
شکل ۹. نمودار پاسخ بار- تغییر مکان با رابطه‌ی ۲۲.



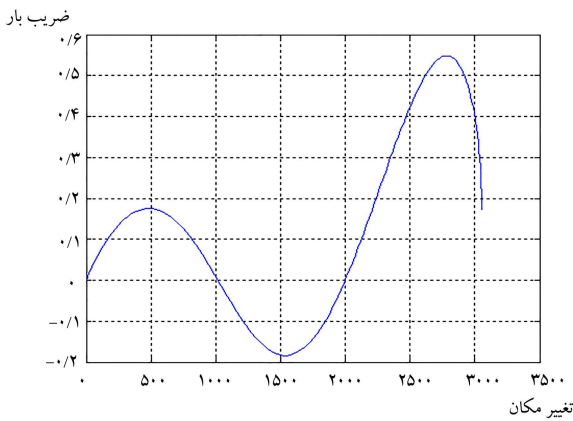
شکل ۱۰. نمودار پاسخ بار- تغییر مکان با رابطه‌ی ۲۳.



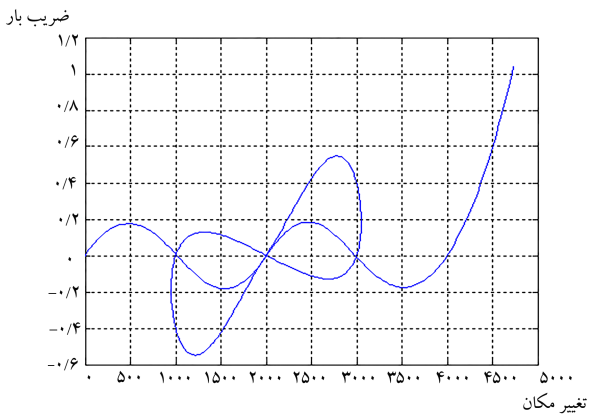
شکل ۱۱. نمودار پاسخ بار- تغییر مکان با رابطه‌ی ۲۴.



شکل ۱۸. نمودار پاسخ بار - تغییر مکان با رابطه‌ی ۲۱.

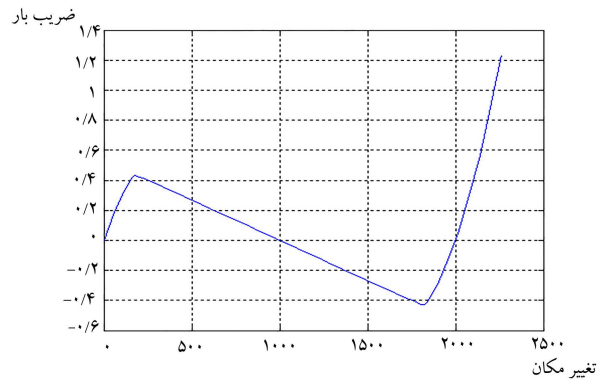


شکل ۱۹. نمودار پاسخ بار - تغییر مکان با رابطه‌ی ۲۲.

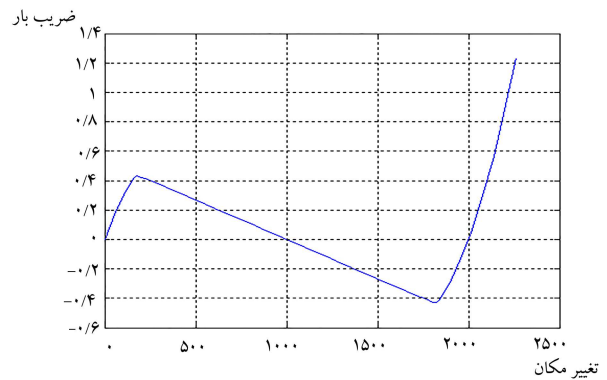


شکل ۲۰. نمودار پاسخ بار - تغییر مکان با رابطه‌ی ۲۳.

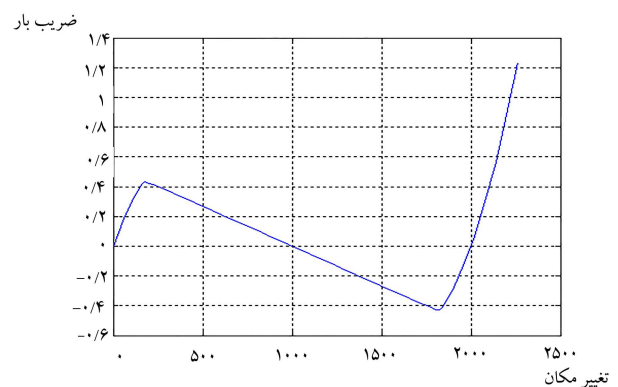
برگشتی و دست‌کم ۲ نقطه‌ی بحرانی دارد. این نتیجه توسط بررسی‌های انجام‌شده از کل مسیر تعادل در شکل ۲۰ به دست آمده است. همانند مثال ۸-۲، معیار رابطه‌ی ۲۱ در پیش‌بینی جهت گام پیش‌بینی ناتوان است و روش طول کمان در اطراف نقطه‌ی دوشاخگی اتفاق افتاده نوسان می‌کند. همه‌ی معیارها، علامت گام پیش‌بینی را در حین عبور از نقطه‌ی حدی تغییر می‌دهند. در حالی که معیار رابطه‌ی ۲۲ در پیش‌بینی جهت نمو بعدی در زمان عبور از نقطه‌ی برگشتی ناتوان است. علامت عبارت کار نموی $q_e (d_t^e)^T$ پس از عبور از نقاط گفته‌شده مطابق شکل ۱۹ تغییر



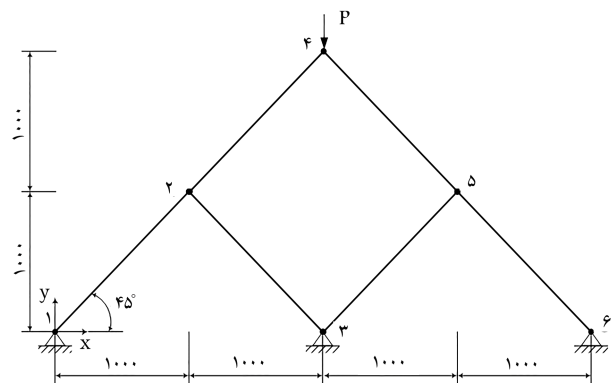
شکل ۱۴. نمودار پاسخ بار - تغییر مکان خرپای دو عضوی نامتقارن با رابطه‌ی ۲۲.



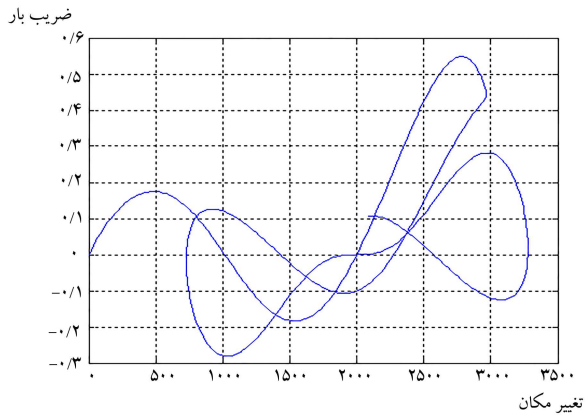
شکل ۱۵. نمودار پاسخ بار - تغییر مکان خرپای دو عضوی نامتقارن با رابطه‌ی ۲۳.



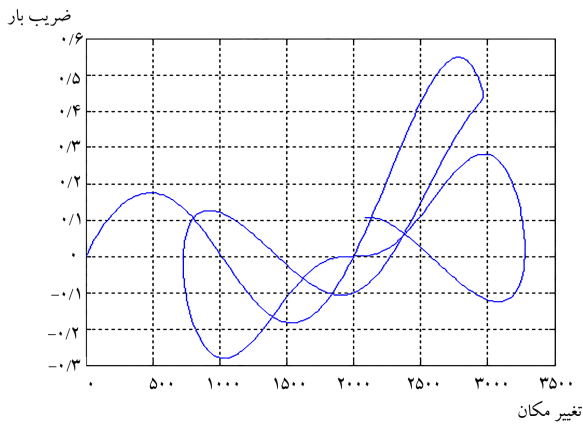
شکل ۱۶. نمودار پاسخ بار - تغییر مکان خرپای دو عضوی متقارن با رابطه‌ی ۲۴.



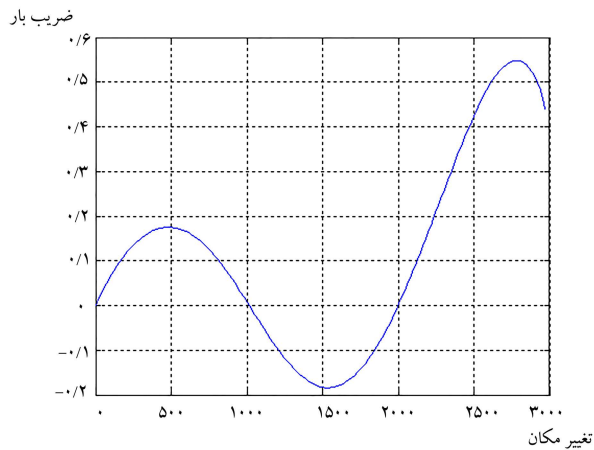
شکل ۱۷. سیستم خرپای ۶ عضوی متقارن. [۲]



شکل ۲۳. نمودار پاسخ بار - تغییر مکان خرپای ۶ عضوی نامتقارن با رابطه‌ی ۲۳.



شکل ۲۴. نمودار پاسخ بار - تغییر مکان خرپای ۶ عضوی نامتقارن با رابطه‌ی ۲۴.

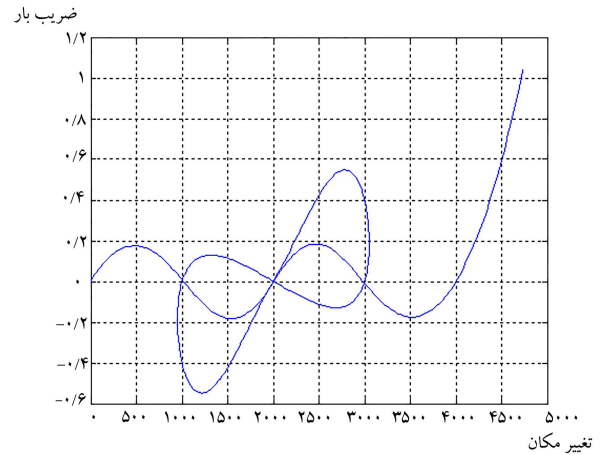


شکل ۲۵. نمودار پاسخ بار - تغییر مکان خرپای ۶ عضوی نامتقارن با رابطه‌ی ۲۵.

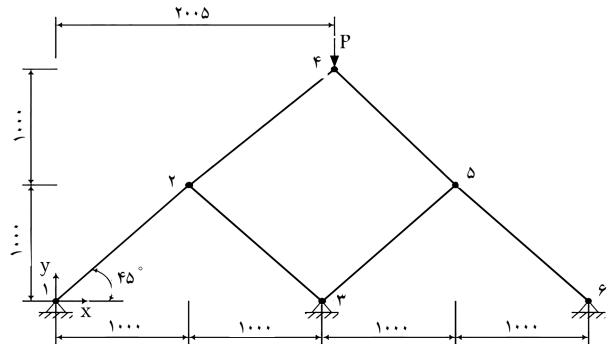
شکل ۲۶. نمودار پاسخ بار - تغییر مکان خرپای ۶ عضوی نامتقارن با رابطه‌ی ۲۲. ترسیم خواهد شد و معیارهای رابطه‌های ۲۱، ۲۳ و ۲۴ مطابق شکل‌های ۲۳، ۲۴ و ۲۵ منحنی را به صورت کامل ترسیم خواهند کرد. با این حال، نقطه‌ی برگشتی هنوز هم حضور دارد و معیار رابطه‌ی ۲۲ موجب می‌شود روش طول کمان در اطراف آن نقطه مطابق شکل ۲۶ نوسان کند.

زمانی که مثال اخیر با روش‌های غیر از Feng حل می‌شود، به دلیل برگشت به عقب، حل شدنی نبود و آن روش‌ها نمی‌توانستند مسیر را دنبال کنند. اما با روش ارائه شده، مسئله تحلیل شده است.

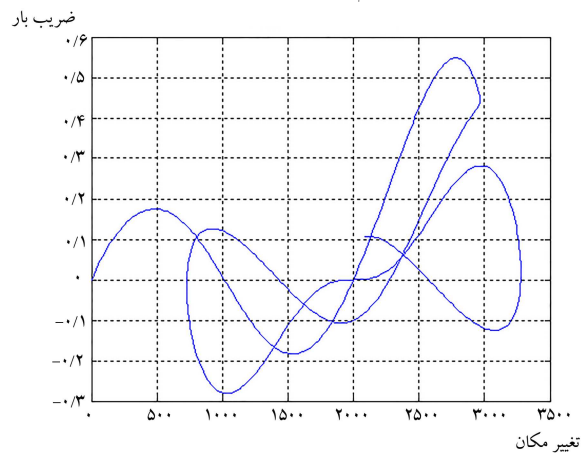
می‌باید. روش کنترل طول کمان در اطراف نقطه‌ی برگشتی شروع به نوسان می‌کند. در نهایت، از ۳ معیار مورد مطالعه، فقط سومین معیار نسبت به وجود نقاط دوشاخگی و برگشتی غیرحساس است. بنابراین معیار مذکور قادر به ترسیم کامل منحنی مسیر تعادل مطابق شکل ۲۰ است. همانند مثال‌های قبل شکل ۲۱، نمودار بار - تغییر مکان در صورت استفاده از معیار رابطه‌ی ۲۴ را نشان می‌دهد، که بیانگر توانایی ترسیم کامل مسیر تعادل با این معیار در حضور نقاط حدی، دوشاخگی، و برگشتی است. اگر یک جابه‌جایی کوچک در گره ۴ به اندازه‌ی ۵ میلی‌متر در جهت x برای ایجاد نامتقارنی مطابق شکل ۲۲ اعمال شود، مسیر تعادل جدید بدون نقاط دوشاخگی



شکل ۲۶. نمودار پاسخ بار - تغییر مکان خرپای ۶ عضوی نامتقارن با رابطه‌ی ۲۴.



شکل ۲۷. سیستم خرپای ۶ عضوی نامتقارن [۲].



شکل ۲۸. نمودار پاسخ بار - تغییر مکان خرپای ۶ عضوی نامتقارن با رابطه‌ی ۲۱.

جدول ۲. مقایسه‌ی تأثیر اندازه‌ی متغیر مقیاسی در عملکرد روش طول کمان خطی.

اندازه‌ی نمو تغییرمکان	اندازه‌ی نمو بار در	تعداد	متغیر مقیاسی
در اولین نمو Δd^1	اولین نمو $\Delta \lambda^1$	نموها	ψ
۰٫۰۰۴۵	$۱٫۵ \times ۱۰^{-۵}$	-	۱
۰٫۰۴۴۶	$۱٫۵ \times ۱۰^{-۴}$	-	۰٫۱
۰٫۴۴۶۲	۰٫۰۰۱۵	۱۲۲۸۷	۰٫۰۱
۴٫۴۱۳۴	۰٫۰۱۴۸	۲۵۸	۰٫۰۰۱
۳۰	۰٫۱۰۰۹	۷۴	۰

رفتار روش طول کمان، شبیه روش کنترل تغییرمکان خواهد شد. با این حال، می‌توان بیان کرد که دست‌کم در تحلیل سازه‌های خرپایی، روش کنترل طول کمان با $\psi = 0$ فقط در صورتی که معیار تعیین علامت گام پیش‌بینی درست داده شود، قادر به غلبه بر تمام نقاط ویژه خواهد بود.

۱۰. نتیجه‌گیری

روش طول کمان یکی از قوی‌ترین روش‌ها در ترسیم مسیر غیرخطی تعادل است. در بررسی مثال‌های عددی انجام‌شده در این پژوهش و عواملی که در عملکرد روش طول کمان مؤثر هستند، این نتایج را می‌توان استنتاج کرد:

۱. روش طول کمان در هنگام استفاده از هر ۳ معیار مطالعه‌شده در عبور از نقاط حدی غلبه می‌کند.
۲. در هنگام استفاده از دترمینان ماتریس سختی مماسی برای تعیین علامت گام پیش‌بینی روش طول کمان در اطراف نقاط دوشاخگی نوسان می‌کند.
۳. هنگام استفاده از اصل کار مجازی برای تعیین علامت گام پیش‌بینی راه‌حل موردنظر در اطراف نقاط برگشتی نوسان می‌کند.
۴. معیار حاصل‌ضرب داخلی تغییرمکان‌ها نسبت به نقاط دوشاخگی و برگشتی حساس نیست و لذا در هنگام استفاده از این معیار، روش طول کمان توانایی ترسیم مسیر کامل تعادل را دارد.
۵. معیار جدید ارائه‌شده در این پژوهش، در مواجهه با نقاط حدی، دوشاخگی، و برگشتی توانایی عبور از این نقاط را دارد و روش طول کمان توانایی ترسیم کامل مسیر تعادل را خواهد داشت.
۶. انتخاب متغیر مقیاسی مناسب ψ برای داشتن تأثیر زیاد در عملکرد روش طول کمان ثابت می‌شود. در مسائل تحلیل‌شده مربوط به مقادیر خاص، استفاده از $\psi = 0$ بهترین عملکرد روش را با توجه به هم‌گرایی و زمان محاسبات را ارائه می‌کند.

۹. اثر متغیر مقیاسی ψ

انتخاب یک مقدار اتفاقی و بی‌هدف برای متغیر مقیاسی ψ (به‌عنوان مثال عدد ۱) می‌تواند منجر به نتایج ناامیدکننده‌ی برای روش طول کمان خطی شود. این امر به ویژه، در رفتار سازه‌های واقعی با سختی بالا که برای به‌دست‌آوردن یک تغییرمکان کوچک به نیروهای خارجی زیادی نیاز دارند، اتفاق می‌افتد. جهت بررسی این امر، برنامه‌ی متلب^{۱۱} برای سازه‌ی خرپایی شکل ۷ با متغیرهای مقیاسی متفاوتی اجرا می‌شود، که برای بررسی تأثیرات متغیر مقیاسی در روش طول کمان خطی و مقایسه‌ی بین آن‌ها، جدول ۲ ارائه شده است. در صورتی که متغیر مقیاسی ψ در متن برنامه‌ی متلب به عدد ۱ تنظیم شود، جمله‌ی نیرو $q_e^T q_e^T \psi^2 \Delta \lambda^2$ در معادله‌ی قیدی ۵، اگر با جمله‌ی تغییرمکان $\Delta d^T \Delta d$ مقایسه شود، تمایل به بی‌نهایت شدن دارد. به‌عنوان یک نتیجه‌ی مستقیم، طول گام پیش‌بینی به طور چشم‌گیری مطابق جدول ۲ کاهش داده می‌شود و نیاز به نمونه‌های بیشتری جهت ترسیم همان منحنی شکل ۱۰ خواهد بود. علاوه بر این، روش طول کمان، رفتاری شبیه کنترل بار خواهد داشت و بنابراین در هنگام رسیدن به نقطه‌ی حدی، روش طول کمان نمی‌تواند مسیر را ادامه دهد. از سوی دیگر، اگر متغیر مقیاسی ψ همانند مثال‌های قبل، به صفر تنظیم شود، اندازه‌ی گام پیش‌بینی در مقادیر معقولی نگه داشته خواهد شد و تعداد نمونه‌های بسیار کمتری نسبت به حالت قبل جهت ترسیم مسیر کامل تعادل مورد نیاز است. علاوه بر این،

پانویس‌ها

۱. نقطه‌ی که در آن مماس بر مسیر تعادل افقی است، نقطه‌ی حدی نامیده می‌شود.
۲. نقاطی که مماس بر مسیر تعادلی عمودی است یا موازی محور بار باشد، نقاط تغییر جهت یا برگشت به عقب نامیده می‌شود (snap-back).
۳. هنگامی که از نقطه‌ی دو مسیر تعادل یا بیشتر عبور می‌کند، نقطه‌ی انشعاب یا دوشاخگی نامیده می‌شود. نقاط بحرانی شامل نقطه‌ی حدی و نقطه‌ی دوشاخگی است.
4. singular
5. predictor-corrector scheme
6. linearized arc-length method
7. the predictor solution
8. bifurcation
9. back tracing
10. the scaling parameter
11. Matlab

منابع (References)

1. McGuire, W., Gallagher, R. and Ziemian, R., *Matrix Structural Analysis*, John Wiley & Sons, 2nd ed., New York, Chapter 8, pp. 460 (2000).
2. Posada, L.M. "Stability analysis of two dimensional truss structures", Master Thesis, Stuttgart University (2007).
3. Rezaei Pazhand, M. and Taataar, M. "Improved arc-length method in nonlinear analysis of structures", *Journal of Ahvaz University*, 5(4), pp. 71-86 (2006).
4. Chen, W.F. and Lui, E.M., *Stability Design of Steel Frames*, Crc Press (1991).
5. Zienkiewicz, O.C. "Incremental displacement in nonlinear analysis", *International Journal of Numerical Meth-*

- ods in Engineering, **3**, pp. 587-592 (1971).
6. Batoz, J.L. and Dhatt, G. "Incremental displacement algorithms for nonlinear problems", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **14**(8), pp. 1262-1267 (1979).
 7. Rezaiee-Pajand, M., Salehi-Ahmadabad, M. and Ghalishooyan, M. "Structural geometrical nonlinear analysis by displacement increment", *Asian Journal of Civil Engineering (BHRC)*, **15**(5), pp. 633-653 (2014).
 8. Rezaei Pazhand, M., Taataar, M. and Moghaddasie, B. "Some geometrical bases for incremental-iterative methods", *IJE Transactions B: Applications*, **22**(3), pp. 245 (October 2009).
 9. Riks, E. "An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems", *International Journal of Solids and Structures*, **15**(7), pp. 529-551 (1979).
 10. Wempner, G.A. "Discrete approximation related to nonlinear theories of solids", *International Journal of Solids and Structures*, **7**(11), pp. 1581-1599 (1971).
 11. Ramm, E. "Strategies for tracing the non-linear response near limit-points", *Non-Linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, ed. W. Wunderlich, Springer-Verlag, Berlin, pp. 63-89 (1981).
 12. Crisfield, M.A. "A fast incremental/iterative solution procedure that handles Snap-through", *Computers & Structures*, **13**(1-3), pp. 55-62 (1981).
 13. Schweizerhof, K.H. and Wriggers, P. "Consistent linearization for path following methods in nonlinear Fe analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **59**(3), pp. 261-279 (1986).
 14. Sousa, C.A.G. and Pimenta, P.M. "A new parameter to arc-length method in nonlinear structural analysis", *Asociación Argentina de Mecánica Computacional, XXIX*, (artículo Completo) Eduardo Dvorkin, Marcela Goldschmit, Mario Storti (Eds.) Buenos Aires, Argentina, pp. 1841-1848 (2010).
 15. Carrera, E. "A study on arc-length-type methods and their operation failures illustrated by a simple model", *Computers and Structures*, **50**(2), pp. 217-229 (1994).
 16. Feng, Y.T., Peric, D. and Owen, D.R.J. "A new criterion for determination of initial loading parameter in arc-length methods", *Computers and Structures*, **58**(3), pp. 479-485 (1996).
 17. Ritto-Correa, M. and Camotim, D. "On the arc-length and other quadratic control methods: Established, less known and new implementation procedures", *Computers and Structures*, **86**(11-12), pp. 1353-1368 (2008).
 18. Yang, Y.B. and Shieh, M.S. "Solution method for nonlinear problems with multiple critical points", *AIAA Journal*, **28**(12), pp. 2110-2116 (1990).
 19. Leon, S.E., Lages, E.N., de Araújo, C.N. and Paulino, G.H. "On the effect of constraint parameters on the generalized displacement control method", *Mechanics Research Communications*, **56**, pp. 123-129 (2014).
 20. Feng, Y.T., Owen, D.R.J. and Peric, D. "Determination of travel directions in path-following methods", *Mathematical and Computational Modelling*, **58**, pp. 479-485 (1996).
 21. Kuo, S.R. and Yang, Y.B. "Tracing postbuckling path of structures containing multi-loops", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **38**(23), pp. 4053-4075 (1995).
 22. Yang, Y.B. and Shieh, M.S. "Solution method for nonlinear problems with multiple critical points", *American Institute of Aeronautics and Astronautics*, **28**(12), pp. 2110-2116 (1990).
 23. Feng, Y.T., Owen, D.R.J. and Peric, D. "On the sign of the determinant of the structural stiffness matrix for determination of loading increment in arc-length algorithms", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **13**(1), pp. 47-49 (1997).
 24. Leon, S.E., Paulino, G.H., Pereira, A., Menezes, I.F.M. and Lages, E.N. "A unified library of nonlinear solution schemes", *Applied Mechanics Reviews, ASME*, **64**(4), 26 p. (July 2011).
 25. Memon, B.A. and Su, X. "Arc-length technique for nonlinear finite element analysis", *Journal of Zhejiang University Science*, **5**(5), pp. 618-628 (2004).
 26. Verhoosel, C.V., Remmers, J.J.C. and Gutiérrez, M.A. "A dissipation-based arc length method for robust simulation of brittle and ductile failure", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **77**(9), pp. 1290-1321 (2008).
 27. Borković, A. "Analysis of snap behavior of shallow cylindrical shells using the finite strip method", *Archives for Technical Sciences*, **9**(1), pp. 43-51 (2013).
 28. Elgohary, T.A., Dong, L., Junkins, J.L. and Atluri, S.N. "Solution of post-buckling & limit load problems, without inverting the tangent stiffness matrix & without using arc-length methods", *Computer Modeling in Engineering and Sciences (CMES)*, **98**(6), pp. 543-563 (2014).
 29. Crisfield, M.A., *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Essentials John Wiley & Sons Ltd, West Sussex, England, **1**, pp. 1-75 and pp. 266-288 (1991).
 30. de Souza Neto, E.A. and Feng, Y.T. "On the determination of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurcations and snap-backs", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **179**(1-2), pp. 81-89 (1999).
 31. Ramm, E. "COMMAS E4 Manuscript", Advanced Computational Structural Mechanics, Institut für Baustatik and Baudynamik, Universität Stuttgart, pp. 45-105 (2006).
 32. Ramm, E. "The Risk/Wempner approach –an extension of the displacement control method in non-linear analysis", *Non-Linear Computational Mechanics*, ed. E. Hinton et al., Pineridge, Swansea, pp. 63-86 (1982).
 33. Al-Rasby, S.N. "Solution techniques in nonlinear structural analysis", *Computer and Structures*, **40**(4), pp. 985-993 (1991).