

مدل ریاضی انتشار ترک هیدرولیکی در سنگ شکننده با در نظر گرفتن اثر اندرکنش (مضروبی) پارامترهای اینرسی و گرانروی

علی عسگری (دکتری)

علی اکبر گلشانی* (استادیار)

دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

علی لکی روحانی (استادیار)

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه زنجان

مهندسی عمران شریف، تابستان ۱۳۹۵ (ص. ۵۹-۶۶)
دوری ۲ - ۳۲، شماره ۱/۲، ص. ۵۹-۶۶

در این نوشتار، یک روش تحلیلی برای حل مسئله شکست هیدرولیکی در حالت کرنش صفحه برای سنگ شکننده نفوذناپذیر و سختی زیاد و تحت شرایط متقارن ارائه شده است. جریان سیال غیرقابل تراکم و آرام فرض شده و ترک در همه زمانها کاملاً از سیال پر شده است. انتشار ترک در چارچوب مکانیک شکست خطی (LEFM) است. این مسئله توسط گاراگاش در سال ۲۰۰۶ در مجله‌ی «Engineering Fracture Mechanics» بدون در نظر گرفتن اثر اندرکنش پارامترهای اینرسی و گرانروی بررسی شده است. در این پژوهش با در نظر گرفتن اثر مذکور، بازشدگی، فشار داخلی سیال در ترک، و میزان رشد ترک تحت تریق سیال از روش اغتشاش تعیین و نتایج این کار با اسناد موجود مقایسه و بررسی شده است.

واژگان کلیدی: شکست هیدرولیکی، سنگ‌های شکننده، سختی، اندرکنش گرانروی و اینرسی، روش اغتشاش.

ali.asgari@modares.ac.ir
golshani@modares.ac.ir
rou001@znu.ac.ir

۱. مقدمه

رژیم‌ها براساس مکانیزم هدررفت انرژی نام‌گذاری می‌شوند، که مهم‌ترین آن‌ها در شکست هیدرولیکی عبارت‌اند از: ۱. رژیم سختی که بیشترین هدررفت انرژی تولیدشده ناشی از تریق سیال، پارامتر سختی محیط و سیستم است؛ ۲. رژیم گرانروی که مقاومت سیال در مقابل جریان باعث هدررفت انرژی می‌شود. اگرچه در پژوهشی در سال ۱۹۸۵، یک روش عددی برای حل مسئله در یک رژیم مابین سختی و گرانروی ارائه^[۷] و بعدها روش مذکور در پژوهش دیگری در سال ۲۰۰۱^[۱۲] بازبینی شده است؛ ولی بسیاری از پژوهشگران برای ساده‌تر شدن تحلیل مسئله، آن را به صورت یکی از رژیم‌های سختی (هدررفت انرژی ناشی از چقرمگی یا سختی بالای سنگ)^[۱۷] یا گرانروی (هدررفت انرژی ناشی از گرانروی یا اینرسی بالای سیال)^[۱۵، ۱۲، ۱۱، ۹] در نظر گرفته‌اند. پژوهشگرانی نیز (۱۹۹۰)^[۱۸] رشد ترک هیدرولیکی را به صورت کرنش مسطح تحت شرایط گرانروی قابل اغماض بررسی و از حل خودمشابه با فرض رژیم نیروی اینرسی سیال در مقایسه‌ی نیروی گرانروی سیال استفاده کرده‌اند. همچنین برخی دیگر از پژوهشگران از اثر اینرسی سیال در رشد ترک هیدرولیکی صرف‌نظر کرده‌اند،^[۲۳] که در این شرایط می‌توان جریان سیال را با تئوری لزجت مدل کرد.^[۱۹] در سال ۲۰۰۶ نیز، یک راه حل صریح برای انتشار ترک هیدرولیکی در رژیم سختی ارائه و فرض شده است که در تحلیل مذکور، انرژی اتلافی ناشی از جریان

مدل‌کردن شکست هیدرولیکی یکی از چالش برانگیزترین و مهم‌ترین مسئله در زمینه ژئوتکنیک است، که پژوهشگران زیادی را از سال ۱۹۵۰ به خود جذب کرده است.^[۲-۱] از طرف دیگر، با توجه به کاربردهای مهم از قبیل: تحریک مخازن زیرزمینی نفتی برای استحصال بیشتر نفت و گاز،^[۲] استخراج گرما از مخازن زمین گرمایی،^[۵] حفاری‌های ویژه در صنعت معدن، و دفن زباله‌های هسته‌یی و... مورد مطالعات جدی پژوهشگران قرار گرفته و مسئله‌ی ذکرشده را با جنبه‌های مختلف تحلیلی و عددی بررسی کرده‌اند.

اخیراً پژوهش‌های جدی و تلاش‌گرایانه‌یی بر روی چگونگی تأثیر پارامترهای مختلف در شکست هیدرولیکی در رژیم‌های مختلف با روش‌های تحلیلی و عددی بررسی شده است.^[۱۳-۶] بررسی‌های تحلیلی و یا نیمه‌تحلیلی بر روی یک شکست با هندسه‌ی ساده (صفحه‌یی یا دیسک‌شکل) در یک سنگ هموزن با تنش برجای یکنواخت بسیار پیچیده است، که به طبیعت مدل‌سازی ریاضی مسئله بر می‌گردد،^[۱۷] و ممکن است برای دست‌یابی به چنین حل‌هایی، نیاز به فرض کردن رشد شکست هیدرولیکی در یک رژیم خاص باشد.

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۱۱/۱۶، اصلاحیه ۱۳۹۳/۷/۲۶، پذیرش ۱۳۹۳/۸/۴.

سیال گرانروی در داخل ترک در مقایسه با انرژی اتلافی ناشی از سختی سنگ ناچیز است. همچنین، روش ارائه شده برای حل حالتی که پارامتر ایزرسی در مقابل سختی سنگ کوچک باشد (مقیاس سختی)، به کار رفته و در نهایت با استفاده از اصل برهم نهی و بدون در نظر گرفتن آثار اندرکنشی، مسئله در حالت گرانروی و ایزرسی کوچک تحلیل شده است.^[۱۷] در این نوشتار با استفاده از روش اغتشاش این اثر در نظر گرفته شده است.

این نکته حائز اهمیت است که استخراج گرما از مخازن زمین گرمایی از طریق تزریق سیال با گرانروی کم انجام می شود،^[۱۷] که ارتباط تحلیل مدل در این نوشتار با کاربرد شکست هیدرولیکی را در رژیم سختی تضمین می کند.

۲. فرمول بندی ریاضی

۱.۲. تعریف مسئله

مطابق با شکل ۱، ترک هیدرولیکی به طول $2\ell(t)$ در یک محیط سنگی شکننده با مدول یانگ E ، ضریب پواسون ν و چقرمگی K_{IC} در نظر گرفته شده است. به دلیل تقارن این ترک، نیمی از مدل در تحلیل منظور شده است. سیال با گرانروی μ و با دبی $Q(t)$ تزریق شده است، که باعث فشار داخلی $P_f(x, t)$ در سطوح ترک شده است. با توجه به اینکه محیط تحت تنش محدودکننده σ_0 قرار دارد، در نتیجه فشار خالص در داخل ترک برابر با $P(x, t) = P_f(x, t) - \sigma_0$ است. تئوری مکانیک شکست کشسان خطی (LEFM) برای تعیین بازشدگی ترک $w(x, t)$ ، فشار خالص $P(x, t)$ و رشد ترک $\ell(t)$ بر حسب زمان t و مختصات محلی x به کار گرفته شده است.

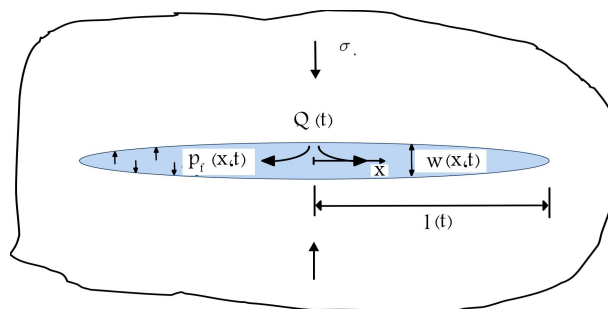
دیگر فرضیات مسئله و شرایط مرزی آن مطابق نوشتار کاراگاش،^[۱۷] در نظر گرفته شده است.

۲.۲. معادلات حاکم

معادلات حاکم در مدل شکست هیدرولیکی شامل معیار رشد ترک، معادله حالت کشسانی و معادله حرکت سیال است. این معادلات بر حسب طول نیم ترک، $0 \leq x \leq \ell$ ، بازشدگی ترک، سرعت متوسط سیال، و فشار خالص سیال با در نظر گرفتن شکل متقارن مدل بیان شده اند.

۱.۲.۲. پیوستگی و بقای جرم

جریان سیال در ترک با قانون بقای جرم و اندازه حرکت مدل می شود. در این حالت حجم سیال ورودی یا تزریقی $(V(t))$ برابر است با حجم بازشده ترک



شکل ۱. مدل شکست هیدرولیکی در حالت کرنش صفحه‌یی.

(رابطه ۱):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_x^\ell w dx = wv, \quad \int_0^\ell w dx = \frac{1}{4} V(t), \quad V(t) = \int_0^t Q dt. \quad (1)$$

۲.۲.۲. معادله حرکت سیال

فرض شده است که حرکت سیال در جهت رشد ترک امتداد یافته و جریان سیال در ترک آرام و سیال غیرقابل تراکم است (رابطه ۲):^[۱۸،۱۹]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\mu' v}{w^2} \right) \quad (2)$$

با صرف نظر کردن از ترم سمت چپ معادله روان سازی^۱، رابطه ۲ به معادله پویزی^۲ به صورت رابطه ۳ در می آید:^[۱۹]

$$v = -\frac{w^2}{\mu'} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (3)$$

۳.۲.۲. معادله حالت کشسانی

این معادله، بازشدگی ترک را با فشار خالص سیال داخل ترک با یک رابطه انتگرالی مربوط می سازد. رابطه انتگرالی به شکل رابطه ۴ و به صورت یک معادله انتگرالی منفرد است. فرض رابطه این است که ترک به شکل شبه استاتیکی رشد می کند:^[۲۱]

$$w(x, t) = \frac{4}{\pi E'} \int_0^\ell G\left(\frac{x}{\ell}, \frac{x'}{\ell}\right) P(x', t) dx', \quad (4)$$

$$G(\xi, \xi') = \ln \left| \frac{\sqrt{1-\xi'^2} + \sqrt{1-\xi'^2}}{\sqrt{1-\xi'^2} - \sqrt{1-\xi'^2}} \right|.$$

۴.۲.۲. معیار انتشار ترک

مطابق با مکانیک شکست کشسان خطی برای مود شکست اول، $K_I = K_{IC}$ ، بازشدگی ترک در رأس با عبارت حدی ریشه‌ی دوم بیان می شود (رابطه ۵):^[۲۲]

$$w = \frac{K_I'}{E'} (\ell - x)^{1/2}, \quad \ell - x \ll \ell. \quad (5)$$

که در آن‌ها، E' ، μ' و K_I' به این صورت است:

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad \mu' = 12\mu, \quad K_I' = 4 \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} K_{IC}.$$

۳.۲. فرمول‌های بی‌بعد

برای ساده سازی حل معادلات ۱ الی ۵، یک سری تغییر متغیرهایی به صورت روابط ۶ استفاده شده است، که معادلات را بی‌بعد و مقیاس شده می کنند و در نتیجه حل مسئله ساده تر می شود:^[۲۳،۲۴،۱۷،۱۶،۷،۲]

$$w(x, t) = \varepsilon(t) L(t) \Omega(\xi, t), \quad \ell(t) = L(t) \gamma(t),$$

$$P(x, t) = \varepsilon(t) E' \Pi(\xi, t), \quad \varepsilon(t) = L^{-2}(t) V(t),$$

$$v(x, t) = t^{-1} L(t) \vartheta(\xi, t), \quad \bar{\vartheta}(\xi, t) = \vartheta(\xi, t) / \gamma(t),$$

$$\bar{\Omega}(\xi, t) = \Omega(\xi, t) / \gamma(t) \quad (6)$$

که در آن‌ها، $\Pi(\xi, t)$ ، $\Omega(\xi, t)$ ، $\xi = x/\ell(t) \in [0, 1]$ و $\gamma(t)$ به ترتیب مختصات مکانی، بازشدگی ترک، فشار خالص و نیم طول مقیاس شده ترک است. لازم به ذکر است که «علامت بار»، نشانه‌ی مقیاس سازی مجدد آن کمیت است.

۳. ایده و روش حل

در این پژوهش، از روش اغتشاش^۲ برای یافتن جواب تقریبی انتشار صفحه‌ی ترک هیدرولیکی استفاده شده است. این روش موقعی برای حل معادلات غیرخطی به‌کار می‌رود که یک یا چند پارامتر کوچک در معادلات وجود داشته باشد.^[۱۲۵] بنابراین، با توجه به پارامترهای بی‌بعد G_k ، G_μ و G_ρ می‌توان چنین فرض کرد:

$$f(\xi, G_i) = \{\bar{\Omega}(\xi, G_i), \Pi(\xi, G_i), \bar{\vartheta}(\xi, G_i), \gamma(G_i)\}, \quad i = k, \mu, \rho$$

$$f(\xi, G_i) = f_0(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{i_1 \geq i_2 \geq \dots \geq i_n \\ i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, 3 \text{ or } k, \mu, \rho}} (G_{i_1} G_{i_2} \dots G_{i_n} f^{(i_1 i_2 \dots i_n)}(\xi)) \quad (12)$$

۴. حل در مقیاس سختی با نرخ تزریق ثابت

در این مقیاس $G_k = 1$ است و متعاقباً حل در مقیاس سختی، با استفاده از روش اغتشاش به دو پارامتر گرانروی G_μ و اینرسی G_ρ بستگی دارد. بنابراین رابطه‌ی ۱۲ در حل مقیاس سختی به صورت رابطه‌ی ۱۳ کاهش می‌یابد:

$$f(\xi, G_i) = f_0(\xi) + G_\mu f_1^\mu(\xi) + G_\rho f_1^\rho(\xi) + G_\mu G_\rho f_1^{\mu\rho}(\xi) + \dots \quad (13)$$

که در آن، $f_1^{\mu\rho}(\xi)$ اولین ترم اندرکنشی بین پارامترهای اینرسی و گرانروی سیال است. با جایگذاری رابطه‌ی ۱۳ در معادلات ۷ الی ۹، و مرتب‌کردن آن‌ها براساس ضرایب $1, G_\mu, G_\rho, G_\mu G_\rho$ در مقیاس سختی $G_k = 1$ ، این ترم‌ها را خواهیم داشت (روابط ۱۴ الی ۱۷):

-- ترم گرانروی و اینرسی صفر $f_0(\xi)$ (رابطه‌ی ۱۴):

$$1: \int_{\xi} \bar{\Omega}_0 d\xi + \frac{2}{3} \xi \bar{\Omega}_0 - \bar{\Omega}_0 \bar{\vartheta}_0 = 0,$$

$$2\gamma_0^2 \int_{\xi} \bar{\Omega}_0 d\xi - 1 = 0,$$

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi} = 0,$$

$$\bar{\Omega}_0(\xi) = L^{-1} \{\Pi_0\}(\xi),$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} (1 - \xi)^{-1/2} \bar{\Omega}_0 = \gamma_0^{-1/2}. \quad (14)$$

-- ترم گرانروی کوچک و اینرسی صفر $f_1^\mu(\xi)$ (رابطه‌ی ۱۵):

$$G_\mu: \left(-\bar{\Omega}_0 \bar{\vartheta}_0 + \frac{2}{3} \xi \bar{\Omega}_0 + \int_{\xi} \bar{\Omega}_0 d\xi \right) \gamma_{1\mu}$$

$$+ \left(-\bar{\Omega}_0 \bar{\vartheta}_{1\mu} - \bar{\Omega}_{1\mu} \bar{\vartheta}_0 + \frac{2}{3} \xi \bar{\Omega}_{1\mu} + \int_{\xi} \bar{\Omega}_{1\mu} d\xi \right) \gamma_0 = 0,$$

با به‌کارگیری تغییر متغیرهای ذکرشده، معادلات ۱ الی ۵ به صورت معادلات ۷ الی ۱۰ در می‌آیند:

• معادله‌ی بقای جرم (معادله‌ی ۷):

$$\frac{t\dot{V}}{V} \int_{\xi} \bar{\Omega} d\xi + \frac{t\dot{L}}{L} \xi \bar{\Omega} + \Psi_T = \bar{\Omega} \bar{\vartheta},$$

$$\int_{\xi} \bar{\Omega} d\xi = \frac{1}{2\gamma^2},$$

$$\Psi_T = t \int_{\xi} \left[\dot{\bar{\Omega}} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \left(\bar{\Omega} - \xi \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \xi} \right) \right] d\xi. \quad (7)$$

• معادله‌ی ممتنم (معادله‌ی ۸):

$$-\frac{\partial \Pi}{\partial \xi} = G_\rho \gamma^2 \bar{\vartheta} \left[\frac{t\dot{L}}{L} \left(1 - \frac{\xi}{\bar{\vartheta}} \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi} \right) - 1 + \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi} + \Phi_T \right] + G_m \frac{\bar{\vartheta}}{\bar{\Omega}^2},$$

$$\Phi_T = \frac{t\dot{\gamma}}{\gamma} \left(1 - \frac{\xi}{\bar{\vartheta}} \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi} \right) + \frac{t\dot{\vartheta}}{\bar{\vartheta}}. \quad (8)$$

• معادله‌ی حالت کشسانی و معیار انتشار ترک (معادله‌ی ۹):

$$\bar{\Omega}(\xi, t) = L^{-1} \{\Pi\}(\xi, t) = \frac{1}{\pi} \int_{\xi} G(\xi, \xi') \Pi(\xi', t) d\xi',$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} (1 - \xi)^{-1/2} \bar{\Omega} = G_k \gamma^{-1/2}. \quad (9)$$

که در آن‌ها، Ψ_T و Φ_T ترم‌های گذرای بخش معادلات پیوستگی (معادله‌ی ۷) و مومتنم (معادله‌ی ۸) هستند. همچنین G_k, G_μ, G_ρ در معادلات ۸ و ۹، به صورت معادله‌ی ۱۰ بیان می‌شوند:

$$G_k = \frac{K' L'^2}{E' V}, \quad G_\mu = \frac{\mu' L'}{E' t V^2}, \quad G_\rho = \frac{\rho L'}{E' t^2 V}. \quad (10)$$

این پارامترها بی‌بعد هستند و به آن پارامترهای مقیاس شده می‌گویند. برای توضیحات بیشتر در مورد پارامترها و روابط بین آن‌ها می‌توان به نوشتار گاراگاش^[۱۷] رجوع کرد.

در صورتی که مقیاس سختی مدنظر باشد، آنگاه $G_k = 1$ ؛ و اگر مقیاس گرانروی و یا اینرسی ملاک باشد، آنگاه به ترتیب $G_\mu = 1$ و $G_\rho = 1$ در نظر گرفته می‌شوند.

در نهایت، پارامترهای $t\dot{L}/L$ و $t\dot{V}/V$ در معادلات ۷ و ۸ را می‌توان با اهراتور زمان مطابق با به‌کارگیری رابطه‌ی ۱۱ جایگزین کرد:

$$t \frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{t\dot{G}_k}{G_k} \right) G_k \frac{\partial}{\partial G_k} + \left(\frac{t\dot{G}_\mu}{G_\mu} \right) G_\mu \frac{\partial}{\partial G_\mu} + \left(\frac{t\dot{G}_\rho}{G_\rho} \right) G_\rho \frac{\partial}{\partial G_\rho} \quad (11)$$

که در آن علامت نقطه در بالای پارامترهای مقیاسی به منظور مشتق آن نسبت به زمان t است.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi} - \frac{1}{\bar{\varphi}} \right) \bar{\vartheta} \cdot \bar{\Omega} \cdot \gamma \cdot \bar{\gamma} + 2 \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} (\bar{\Omega} + \bar{\Omega}_{\nu\mu}) \bar{\Omega}_{\nu\rho} - \frac{\partial \Pi_{\nu\rho}}{\partial \xi} \bar{\Omega} \cdot \\ & - 2 \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi} \xi \bar{\Omega} \cdot \gamma \cdot \bar{\gamma} + \bar{\vartheta}_{\nu\rho} - \frac{\bar{\varphi}}{\bar{\varphi}} \bar{\Omega} \cdot \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi} \xi \gamma \cdot \gamma_{\nu\mu} \\ & - \frac{\bar{\varphi}}{\bar{\varphi}} \bar{\Omega} \cdot \frac{\partial \bar{\vartheta}_{\nu\mu}}{\partial \xi} \xi \gamma \cdot \bar{\gamma} - \frac{\bar{\varphi}}{\bar{\varphi}} \bar{\Omega} \cdot \bar{\Omega}_{\nu\mu} \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi} \xi \gamma \cdot \bar{\gamma} + \frac{\partial \Pi_{\nu\mu\rho}}{\partial \xi} \bar{\Omega} \cdot \\ & + 2 \frac{\partial \Pi_{\nu\mu}}{\partial \xi} \bar{\Omega} \cdot \bar{\Omega}_{\nu\rho} - \frac{\bar{\varphi}}{\bar{\varphi}} \bar{\Omega} \cdot \bar{\vartheta} \cdot \gamma \cdot \gamma_{\nu\mu} - 2 \bar{\Omega} \cdot \bar{\Omega}_{\nu\mu} \bar{\vartheta} \cdot \gamma \cdot \bar{\gamma} \\ & \left(\frac{1}{\bar{\varphi}} + \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi} \right) + 2 \frac{\partial \Pi_{\nu\rho}}{\partial \xi} \bar{\Omega} \cdot \bar{\Omega}_{\nu\mu} + 2 \bar{\Omega} \cdot \bar{\vartheta} \cdot \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi} \gamma \cdot \gamma_{\nu\mu} \\ & + 2 \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \bar{\Omega} \cdot \bar{\Omega}_{\nu\mu\rho} - \frac{1}{\bar{\varphi}} \bar{\Omega} \cdot \bar{\vartheta}_{\nu\mu} \gamma \cdot \bar{\gamma} + \bar{\Omega} \cdot \bar{\vartheta} \cdot \frac{\partial \bar{\vartheta}_{\nu\mu}}{\partial \xi} \gamma \cdot \bar{\gamma} \\ & + \bar{\Omega} \cdot \bar{\vartheta}_{\nu\mu} \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi} \gamma \cdot \bar{\gamma} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{\nu\mu\rho}(\xi) &= L^{-1} \{ \Pi_{\nu\mu\rho} \}(\xi), \\ \gamma_{\nu\mu\rho} &= \lim_{\xi \rightarrow 1} \left(-\frac{2 \bar{\Omega}_{\nu\rho} \gamma_{\nu\mu}}{\bar{\Omega}} - \frac{2 \bar{\Omega}_{\nu\rho} \bar{\Omega}_{\nu\mu} \gamma}{\bar{\Omega}^2} \right. \\ & \left. - \frac{2 \bar{\Omega}_{\nu\mu\rho} \gamma}{\bar{\Omega}} - \frac{2 \bar{\Omega}_{\nu\mu} \gamma_{\nu\rho}}{\bar{\Omega}} \right). \end{aligned} \quad (17)$$

دسته‌ی معادلات انتگرالی - دیفرانسیلی ذکر شده (رابطه ۱۷) به صورت متوالی از رابطه‌های ۱۴ الی ۱۷ حل می‌شوند. برای مختصرسازی در اینجا از آوردن جزئیات و روند حل صرف نظر شده است (رابطه‌های ۱۸ الی ۲۰):

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \pi^{1/2} \sqrt{1 - \xi^2}, & \Pi &= \frac{\pi^{1/2}}{\lambda}, \\ \bar{\vartheta} &= \frac{1}{\bar{\varphi}} \xi + \frac{1}{\bar{\varphi}} \frac{\cos^{-1}(\xi)}{\sqrt{1 - \xi^2}}, & \gamma &= \frac{2}{\pi^{2/2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \Pi_{\nu\mu} &= -\frac{2 \arccos(\xi) \xi}{\pi^{2/2} \sqrt{1 - \xi^2}} + \frac{\ln(1 - \xi^2)}{\pi^{2/2}} + \frac{\ln(\xi^2 - 1)}{3 \pi^{2/2}} \\ & + \frac{1 + 4 \lambda \ln(2)}{9 \pi^{2/2}} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}_{\nu\mu} &= \frac{\lambda}{\sqrt{\pi}} \pi^{1/2} \left(2\pi - 4\xi \arcsin(\xi) - \left(\frac{5}{\bar{\varphi}} - \ln 2 \right) \sqrt{1 - \xi^2} \right. \\ & \left. - \frac{3}{\bar{\varphi}} \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \xi^2} + \sqrt{1 - \xi^2}}{1 - \sqrt{1 - \xi^2} - \sqrt{1 - \xi^2}} \right) \right), \end{aligned}$$

$$\gamma_{\nu\mu} = -2,722.$$

...

$$\begin{aligned} \Pi_{\nu\rho} &= -\frac{2 \ln(2)}{\pi^{2/2}} + \frac{5}{18} \frac{\xi^2}{\pi^{2/2}} + \frac{1}{6} \frac{(1 + 2\xi^2) \arccos(\xi)^2}{\pi^{2/2} (\xi^2 - 1)} \\ & + \frac{\arccos(\xi) \xi}{\pi^{2/2} \sqrt{1 - \xi^2}} + 0,195207, \\ \gamma_{\nu\rho} &= 0,166199. \end{aligned} \quad (20)$$

برای تعیین ترم‌های ذکر شده‌ی $f_0(\xi)$ ، $f_1^{\mu}(\xi)$ و $f_1^{\rho}(\xi)$ ، برنامه‌ی با نرم‌افزار Maple نوشته شده است. به دلیل پیچیدگی حل ترم اندرکنشی $f^{\mu\rho}(\xi)$ وجود انتگرال‌های منفرد، استفاده از حل عددی الزامی بوده است. بنابراین برای حل چنین انتگرال‌هایی از یک روش عددی استفاده می‌شود. در این مرحله با تعیین ترم‌های مختلف، می‌توان به حل کلی مسئله دست یافت؛ به‌طور

$$\begin{aligned} 2 \gamma_{\nu\mu} \int \bar{\Omega} \cdot d\xi + \gamma \cdot \int \bar{\Omega}_{\nu\mu} d\xi &= 0, \\ 2 \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \bar{\Omega} \cdot \bar{\Omega}_{\nu\mu} + \frac{\partial \Pi_{\nu\mu}}{\partial \xi} \bar{\Omega} \cdot \bar{\Omega}_{\nu\mu} + \bar{\vartheta} &= 0, \\ \bar{\Omega}_{\nu\mu}(\xi) &= L^{-1} \{ \Pi_{\nu\mu} \}(\xi), \\ \lim_{\xi \rightarrow 1} (1 - \xi)^{-1/2} \bar{\Omega}_{\nu\mu} &= -\frac{1}{\bar{\varphi}} \gamma_{\nu\mu} \gamma \cdot \bar{\gamma}^{-2/2}. \end{aligned} \quad (15)$$

-- ترم گرانروی صفر و اینرسی کوچک $f_1^{\rho}(\xi)$ (رابطه‌ی ۱۶):

$$\begin{aligned} G_{\rho} : & \left(-\bar{\Omega}_{\nu\rho} \bar{\vartheta} + \frac{2}{\bar{\varphi}} \int \bar{\Omega} \cdot d\xi + \frac{2}{\bar{\varphi}} \xi \bar{\Omega} \cdot -\bar{\Omega} \cdot \bar{\vartheta} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\bar{\varphi}} \int \xi \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \xi} d\xi \right) \gamma_{\nu\rho} + \left(-\bar{\Omega}_{\nu\rho} \bar{\vartheta} + \frac{2}{\bar{\varphi}} \int \bar{\Omega}_{\nu\rho} d\xi \right. \\ & \left. + \frac{2}{\bar{\varphi}} \xi \bar{\Omega}_{\nu\rho} - \bar{\Omega} \cdot \bar{\vartheta}_{\nu\rho} \right) \gamma \cdot \bar{\gamma} = 0, \\ \frac{\partial \Pi_{\nu\rho}}{\partial \xi} &= \frac{1}{\bar{\varphi}} \gamma \cdot (2\xi - 3\bar{\vartheta}) \left(\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi} \right) + \frac{1}{\bar{\varphi}} \gamma \cdot \bar{\vartheta} - 2 \frac{\partial \Pi}{\partial \xi} \frac{\bar{\Omega}_{\nu\rho}}{\bar{\Omega}}, \\ 2 \gamma_{\nu\rho} \int \bar{\Omega} \cdot d\xi + \gamma \cdot \int \bar{\Omega}_{\nu\rho} d\xi &= 0, \\ \bar{\Omega}_{\nu\rho}(\xi) &= L^{-1} \{ \Pi_{\nu\rho} \}(\xi), \\ \gamma_{\nu\rho} &= \lim_{\xi \rightarrow 1} \left(-\frac{2 \bar{\Omega}_{\nu\rho} \gamma}{\bar{\Omega}} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

-- ترم اندرکنش $f^{\mu\rho}(\xi)$ (رابطه‌ی ۱۷):

$$\begin{aligned} G_{\mu} G_{\rho} : & \left(\frac{2}{\bar{\varphi}} \int \bar{\Omega}_{\nu\mu\rho} d\xi - \bar{\Omega} \cdot \bar{\vartheta}_{\nu\mu\rho} - \bar{\Omega}_{\nu\mu} \bar{\vartheta}_{\nu\rho} - \bar{\Omega}_{\nu\rho} \bar{\vartheta}_{\nu\mu} - \bar{\Omega}_{\nu\mu\rho} \bar{\vartheta} \right. \\ & \left. + \frac{2}{\bar{\varphi}} \xi \bar{\Omega}_{\nu\mu\rho} \right) \gamma \cdot \bar{\gamma} + \left(\frac{2}{\bar{\varphi}} \xi \bar{\Omega}_{\nu\mu} + \frac{2}{\bar{\varphi}} \int \bar{\Omega}_{\nu\mu} d\xi \right. \\ & \left. + \frac{1}{\bar{\varphi}} \int \xi \frac{\partial \bar{\Omega}_{\nu\mu}}{\partial \xi} d\xi - \bar{\Omega} \cdot \bar{\vartheta}_{\nu\mu} - \bar{\Omega}_{\nu\mu} \bar{\vartheta} \right) \gamma_{\nu\rho} \\ & + \left(-\bar{\Omega} \cdot \bar{\vartheta} + \frac{2}{\bar{\varphi}} \xi \bar{\Omega} \cdot + \frac{2}{\bar{\varphi}} \int \bar{\Omega} \cdot d\xi \right. \\ & \left. + \frac{1}{\bar{\varphi}} \int \xi \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \xi} d\xi \right) \gamma_{\nu\mu\rho} + \left(-\bar{\Omega} \cdot \bar{\vartheta}_{\nu\rho} - \bar{\Omega}_{\nu\rho} \bar{\vartheta} \right. \\ & \left. + \frac{2}{\bar{\varphi}} \xi \bar{\Omega}_{\nu\rho} + \frac{2}{\bar{\varphi}} \int \bar{\Omega}_{\nu\rho} d\xi \right) \gamma_{\nu\mu} = 0, \\ \frac{1}{\bar{\varphi}} \gamma \cdot \int \bar{\Omega}_{\nu\mu\rho} d\xi + \gamma \cdot \gamma_{\nu\mu} \int \bar{\Omega}_{\nu\rho} d\xi + \gamma \cdot \gamma_{\nu\rho} \int \bar{\Omega}_{\nu\mu} d\xi \\ & + \gamma \cdot \gamma_{\nu\mu\rho} \int \bar{\Omega} \cdot d\xi + \gamma_{\nu\mu} \gamma_{\nu\rho} \int \bar{\Omega} \cdot d\xi = 0, \end{aligned}$$

مثال، میزان بازشدگی ترک از رابطه‌ی ۲۱ تعیین شده است:

$$\Omega(\xi, G_i) = (\bar{\Omega}_0 + G_\mu \bar{\Omega}_1^\mu + G_\rho \bar{\Omega}_1^\rho + G_\mu G_\rho \bar{\Omega}_1^{\mu\rho} + \dots) \times (\gamma_0 + G_\mu \gamma_1^\mu + G_\rho \gamma_1^\rho + G_\mu G_\rho \gamma_1^{\mu\rho} + \dots) \quad (21)$$

۵. بحث و نتایج

در این نوشتار راه حل کلی مسئله با در نظر گرفتن اندرکنش بین پارامترهای اینرسی و گرانروی ارائه شده است. بنابراین اگر یکی از پارامترهای اینرسی یا گرانروی صفر در نظر گرفته شود، آنگاه هیچ اندرکنشی بین پارامترها وجود ندارد و به حل ارائه شده در نوشتار گاراگاش [۱۷] منتهی می‌شود.

شکل ۲، ترم‌های مرتبه‌ی صفر، اول، و مضروبی (ترم اندرکنشی) از بازشدگی مقیاس شده‌ی مجدد ($\bar{\Omega}$)، و فشار خالص سیال داخل ترک را نشان می‌دهد. همانطور که در بخش پیشین اشاره شده است، در این پژوهش، به دلیل پیچیدگی دسته‌ی معادلات مربوط به ترم‌های اندرکنشی، به‌ناچار از روش‌های عددی استفاده شده است. برای حل این معادلات انتگرالی، از روش نیوتن - کانتز و نقاط میانی و همچنین از روش سعی و خطا استفاده شده است. کد عددی این روش‌ها در نرم افزار Maple قابل دسترسی است.

شکل ۳، روند تغییرات طول نیم‌ترک (γ)، بر حسب مقادیر مختلفی از گرانروی $\{0, 0.1, 0.3, 0.5, 0.8\}$ ، $G_\mu =$ اینرسی $G_\rho =$ را با در نظر گرفتن اثر اندرکنش بین پارامترهای ذکر شده

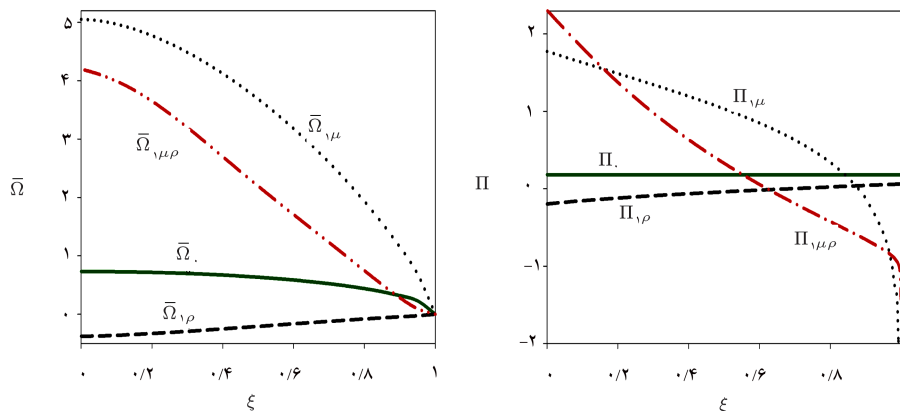
نشان می‌دهد. با توجه به شکل مذکور، طول نیم‌ترک با افزایش گرانروی کاهش و در صورت افزایش پارامتر اینرسی در حالت گرانروی پایین $G_\mu < 0.1$ ، افزایش یافته و در مقادیر بزرگ‌تری از گرانروی، افزایش پارامتر اینرسی منجر به کاهش طول نیم‌ترک شده است. از طرف دیگر، اثر کاهنده‌ی پارامتر گرانروی بیشتر از اثر افزایش‌دهنده‌ی اینرسی است؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که آثار گرانروی سیال در فرایند تریقی شکست هیدرولیکی بیشتر از آثار پارامتر اینرسی است.

شکل ۴، مقایسه‌ی بین بازشدگی مقیاس شده‌ی مجدد ($\bar{\Omega}$)، و فشار خالص سیال داخل ترک (II)، با در نظر گرفتن اثر ترم اندرکنشی (این پژوهش) و بدون این اثر [۱۷] را نشان می‌دهد. در شکل مذکور به‌خوبی مشاهده می‌شود که در نظر گرفتن ترم مضروبی تا چه اندازه می‌تواند مؤثر باشد.

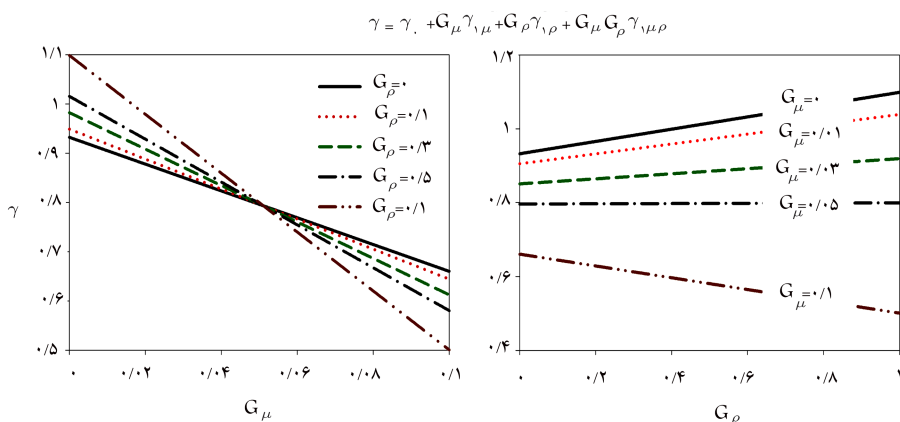
شکل ۵، میزان بازشدگی ($\Omega = \gamma \bar{\Omega}$)، و فشار خالص سیال (II) مقیاس شده‌ی ترک از حل مرتبه‌ی ۰ و ۱، را با در نظر گرفتن اثر اندرکنش برای مقادیر مختلفی از پارامترهای اینرسی سیال (G_ρ) و گرانروی سیال (G_μ) نشان می‌دهد.

با توجه به شکل ۵الف، فشار خالص در جهت رشد ترک در حالت یک سیال با گرانروی ناچیز و بدون اینرسی $G_\rho = 0$ ، کاهش می‌یابد. در صورتی که در یک سیال غیرگرانروی و با اینرسی پایین، روند فشار خالص به‌صورت افزایشی خواهد بود (شکل ۵ب). این اثر مطابق با قاعده‌ی برنولی قابل توجیح است [۱۸].

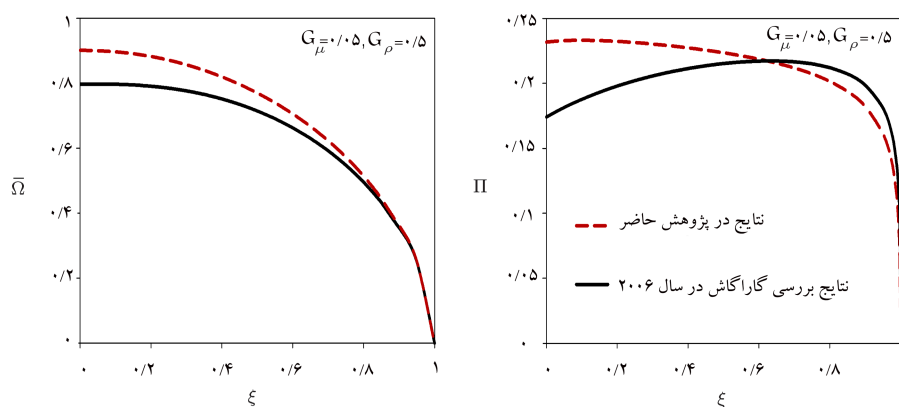
در نظر گرفتن اثر توأم اینرسی و گرانروی باعث می‌شود که یک مقدار بیشینه در روند منحنی فشار - مکان به‌وجود آید (شکل ۵الف). در این صورت در



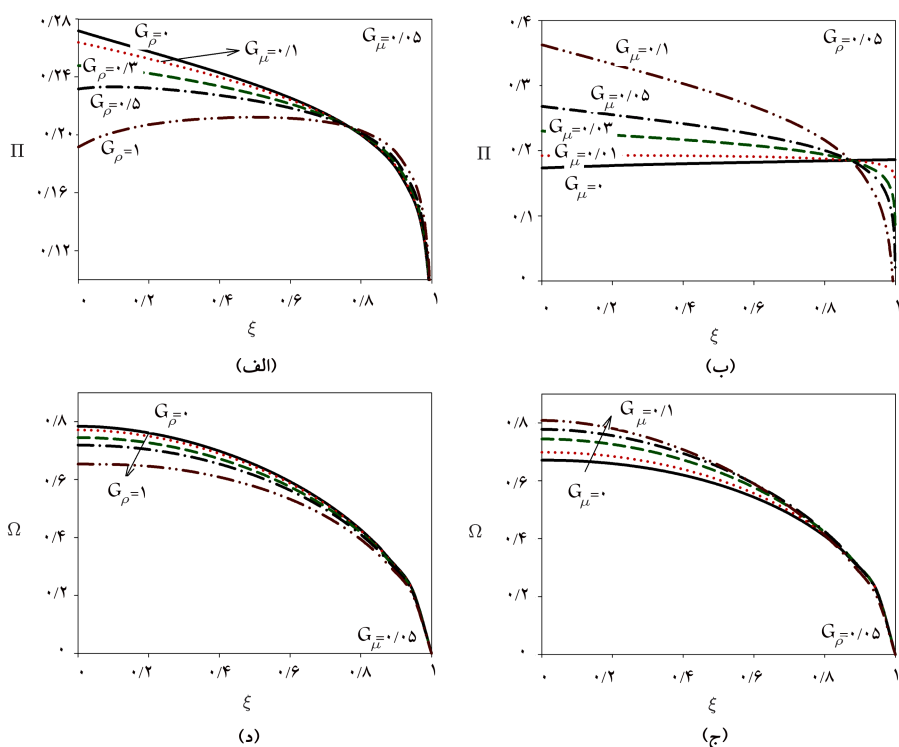
شکل ۲. ترم‌های مرتبه‌ی صفر، اول، و مضروبی (ترم اندرکنشی) از بازشدگی مقیاس شده‌ی مجدد ($\bar{\Omega}$)، و فشار خالص سیال داخل ترک.



شکل ۳. روند تغییرات طول نیم‌ترک (γ)، بر حسب مقادیر مختلفی از پارامترها گرانروی (G_μ)، و اینرسی (G_ρ)، با در نظر گرفتن اثر اندرکنشی.



شکل ۴. مقایسه‌ی بازشدگی مقیاس‌شده‌ی مجدد ($\bar{\Omega}$)، و فشار خالص سیال داخل ترک (II)، با در نظر گرفتن اثر اندرکنش بین پارامترهای گرانروی و اینرسی (این پژوهش) و بدون اثر اندرکنشی. [۱۷]



شکل ۵. روند تغییرات بازشدگی ترک ($\Omega = \gamma \bar{\Omega}$)، و فشار خالص سیال داخل ترک (II)، بر حسب مقادیر مختلفی از پارامترهای گرانروی (G_μ)، و اینرسی (G_ρ)، با در نظر گرفتن اثر اندرکنشی.

۶. نتیجه‌گیری

در این پژوهش، روش تحلیلی اغتشاش برای تعیین میزان انتشار، بازشدگی و فشار سیال داخلی ترک در سنگ‌های شکننده در حالت کرنش صفحه‌یی ارائه شده است. اثر اندرکنش پارامترهای گرانروی و اینرسی در میزان رشد و بازشدگی ترک برای مقادیر مختلفی از G_μ و G_ρ لحاظ شده است. از این روش می‌توان برای در نظر گرفتن اثر سختی ($G_k \neq 1$) در رژیم‌های مختلف دیگر نیز استفاده کرد. در مطالعات آتی، برای تعیین حل کلی‌تری از رژیم‌های ترکیبی سختی و گرانروی (مطابق با رابطه‌ی ۱۲)، از روش اغتشاش با توجه به کارآمد بودن آن استفاده خواهد شد.

سطوح پرفشار ترک (اطراف محل پیشینه‌ی فشار)، میزان بازشدگی ترک تمایل به افزایش دارد، که نهایتاً شکل بازشدگی در مقادیر بالاتری از G_ρ شبیه قطره‌ی اشک می‌شود. افزایش اثر پارامتر اینرسی موجب کاهش فشار در اطراف محل تزریق و میانه‌ی ترک و افزایش فشار در اطراف نوک می‌شود، در حالی که با افزایش گرانروی اختلاف بین فشار نوک و محل تزریق در یک اینرسی ثابت افزایش می‌یابد. با توجه به شکل‌های ۵ج و ۵د، افزایش پارامتر اینرسی و گرانروی به ترتیب باعث کاهش و افزایش میزان بازشدگی مقیاس‌شده در ترک می‌شود. ممکن است این نتیجه به دلیل وجود ترم اندرکنشی برای مقادیر دیگری از G_μ و G_ρ تغییر کند.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از راهنمایی‌های ارزنده‌ی پروفسور دمیتری گاراگاش از دانشگاه Dal-housie کانادا برای واضح‌تر شدن روند این پژوهش سپاسگزارند.

فهرست علائم

پارامترهای مسئله

E : مدول یانگ؛

ν : ضریب پواسون؛

ρ : جرم مخصوص سیال؛

μ : گرانروی دینامیکی؛

K_{IC} : چقرمگی؛

E' : مدول یانگ مؤثر - کرنش صفحه‌یی؛

μ' : گرانروی مؤثر؛

K' : سختی مؤثر سنگ؛

σ_c : تنش محدودکننده‌ی محیطی؛

$Q(t)$: دبی سیال ورودی؛

Φ_T, Ψ_T : ترم‌های گذرای معادلات پیوستگی و ممنتم؛

G : تابع کرنل؛

$V(t)$: حجم ترک.

متغیرهای اصلی، بی بعد و مقیاس شده

t : زمان؛

x, ξ : مختصات مکانی؛

$w(x, t), \Omega(\xi), \bar{\Omega}(\xi)$: بازشدگی ترک؛

$P(x, t), \Pi(\xi)$: فشار خالص سیال در ترک؛

$\ell(t), \gamma$: طول نیم ترک؛

$v(x, t), \vartheta(\xi), \bar{v}(\xi)$: سرعت متوسط سیال.

پارامترهای مقیاس شده

L : طول مقیاسی ترک؛

ε : پارامتر مقیاسی کوچک؛

$f(\xi)$: حل مقیاس شده؛

$f_0(\xi)$: حل مرتبه‌ی صفر؛

$f_{1\mu}(\xi)$: ترم مرتبه‌ی اول با گرانروی؛

$f_{1\rho}(\xi)$: ترم مرتبه‌ی اول با اینرسی؛

$f_{1\mu\rho}(\xi)$: ترم مرتبه‌ی اول اندرکنشی.

پانویس‌ها

1. lubrication approximation
2. Poiseuille equation
3. perturbation method (PM)

منابع (References)

1. Geertsma, J. and De Klerk, F. "A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures", *Journal of Petroleum Technology*, **21**(12), pp. 1571-1581 (1969).
2. Kristianovitch, S. and Zheltov, Y. "Formation of vertical fractures by means of highly viscous fluids", in: *Proceedings of the 4th World Petroleum Congress*, pp. 579 (1955).
3. Nilson, R.H. "Gas-driven fracture propagation", *J. Appl. Mech., United States*, **48**(4), pp. 757-762 (1981).
4. Economides, M.J., Nolte, K.G. and Ahmed, U., *Reservoir Stimulation*, Wiley Chichester (2000).
5. Spence, D.A. and Turcotte, D.L. "Magma driven propagation of cracks", *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, **90**(B1), pp. 575-580 (1985).
6. Detournay, E. and Garagash, D. "The near-tip region of a fluid-driven fracture propagating in a permeable elastic solid", *Journal of Fluid Mechanics*, **494**, pp. 1-32 (2003).
7. Spence, D. and Sharp, P. "Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow", *Proceedings of the Royal Society of London, A. Mathematical and Physical Sciences*, **400**(1819), pp. 289-313 (1985).
8. Lister, J.R. "Buoyancy-driven fluid fracture: The effects of material toughness and of low-viscosity precursors", *J. of Fluid Mech.*, **210**, pp. 263-280 (1990).
9. Carbonell, R., Desroches, J. and Detournay, E. "A comparison between a semi-analytical and a numerical solution of a two-dimensional hydraulic fracture", *International Journal of Solids and Structures*, **36**(31-32), pp. 4869-4888 (1999).
10. Savitski, A. and Detournay, E. "Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: Asymptotic solutions", *International Journal of Solids and Structures*, **39**(26), pp. 6311-6337 (2002).
11. Garagash, D.I. and Detournay, E. "Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture: Small toughness solution", *Journal of Applied Mechanics*, **72**(6), pp. 916-928 (2005).
12. Garagash, D. and Detournay, E. "Viscosity-dominated regime of a fluid-driven fracture in an elastic medium", in: IUTAM Symposium on Analytical and Computa-

- tional Fracture Mechanics of Non-Homogeneous Materials, Springer, pp. 25-29 (2002).
13. Garagash, D. and Detournay, E. "An analysis of the influence of the pressurization rate on the borehole breakdown pressure", *International Journal of Solids and Structures*, **34**(24), pp. 3099-3118 (1997).
 14. Adachi, J.I., *Fluid-Driven Fracture in Permeable Rock*, In University of Minnesota, 162 p. (2001).
 15. Adachi, J. and Detournay, E. "Self-similar solution of a plane-strain fracture driven by a power-law fluid", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **26**(6), pp. 579-604 (2002).
 16. Adachi, J.I. and Detournay, E. "Plane strain propagation of a hydraulic fracture in a permeable rock", *Engineering Fracture Mechanics*, **75**(16), pp. 4666-4694 (2008).
 17. Garagash, D.I. "Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture during injection and shut-in: Asymptotics of large toughness", *Engineering Fracture Mechanics*, **73**(3), pp. 456-481 (2006).
 18. Huang, N., Szewczyk, A. and Li, Y. "Self-similar solution in problems of hydraulic fracturing", *Journal of Applied Mechanics*, **57**(4), pp. 877-881 (1990).
 19. Batchelor, G., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge Univ. Press, Bentley House, London (1967).
 20. Shapiro, R.A., *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow: 2*, New York, Ronald Press Co., 1185 p. (1954).
 21. Sneddon, I.N., Lowengrub, M. and Mathematician, P., *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*, Wiley New York, 221 pp. (1969).
 22. Rice, J.R., *Mathematical Analysis in the Mechanics of Fracture*, Chapter 3 of Fracture: An Advanced Treatise, **2**, Mathematical Fundamentals, Academic Press, N.Y., pp. 191-311 (1968).
 23. Detournay, E. "Propagation regimes of fluid-driven fractures in impermeable rocks", *International Journal of Geomechanics*, **4**(1), pp. 35-45 (2004).
 24. Garagash, D.I. "Propagation of a plane-strain hydraulic fracture with a fluid lag: Early-time solution", *International Journal of Solids and Structures*, **43**(18-19), pp. 5811-5835 (2006).
 25. Van Dyke, M.D., *Perturbation Methods in Fluid Dynamics*, Parabolic Press (1975).