مجله‌ی علمی و پژوهشی شریف
آبان ۱۳۸۸، شماره‌ی پنجاهم، ص. ۴۵-۴۱، (یادداشت فنی)

حل عددی معادله‌ی گذرای خطی و غیرخطی فشار در مخازن نفتی تک‌فاز با روش اجزاء گرین

ابراهیم بی‌نیاز دلیجانی (دانشجوی کارشناسی ارشد)
سید محمودرضا پیشوایی (دانشیار)
دانشکده‌ی مهندسی شیمی و نفت، دانشگاه صنعتی شریف

در این مطالعه، حل عددی معادلات خطی و غیرخطی جریان یک‌بعدی نفت در محیط‌های همگن و ناهمگن با روش اجزاء گرین[۱] بررسی شده است. روش نوظهور اجزاء گرین مبتنی بر نظریه‌ی انتگرال تکین اجزاء مرزی[۲] است، اما به‌دلیل استفاده از ویژگی گسسته‌سازی حوزه‌ی حل روش اجزاء محدود[۳]، دارای ماتریس پراکنده و محدود است که حل آن راحت‌تر است. حل در این روش با به دست آوردن تابع بدون مرز گرین و تبدیل معادله دیفرانسیل موردنظر به معادله انتگرالی آغاز شده و سپس با گسسته سازی معادله انتگرالی، تشکیل معادلات المانی و در نهایت سرهم‌سازی این معادلات به همراه اعمال شرایط مرزی پایان می‌پذیرد. با استفاده از این روش، پس از حل مثال‌هایی از جریان خطی و غیرخطی، نتایج حاصله با جواب‌های تحلیلی در دسترس مقایسه شد.

واژگان کلیدی: شبیه سازی مخازن نفت، روش اجزاء گرین، روش اجزاء محدود، اجزاء مرزی.

biniaz@che.sharif.edu
pishvaie@sharif.edu

مقدمه

از روش‌های حل عددی به‌منظور نیل به محدوده‌یی از جواب برای معادلات دیفرانسیلی که جواب تحلیلی ندارند یا به‌دست آوردن آن دشوار و پیچیده است، استفاده می‌شود. روش اجزاء گرین مبتنی است بر انتگرال تکین[۴]، و از دقت مرتبه‌ی دوم برخوردار است. اگرچه دقت مرتبه‌ی دوم آن به‌ویژه برای حالات غیرخطی به‌لحاظ ریاضی ثابت نشده است، نتایج آن با روش‌هایی که از دقت مرتبه‌ی دوم برخوردارند به‌خوبی مطابقت دارد.[1] در حقیقت روش اجزاء گرین براساس توانایی‌های روش‌های اجزاء مرزی و اجزاء محدود توسعه یافته است. از آنجا که به‌کارگیری روش اجزاء مرزی در حل محیط‌های با ناهمگنی بالا همواره با مشکل مواجه است، روش اجزاء گرین برای رفع این اشکال با ویژگی‌های اجزاء محدود توسعه داده شده است. این روش برای نخستین بار در سال ۱۹۹۰ توسط محققینی ارائه شد[2] که مطالعاتی پیرامون کاربرد روش اجزاء گرین در زمینه‌های مختلف مهندسی انجام داده‌اند.[۳-۵]

از این روش اولین‌بار در مخازن نفت و به‌منظور بررسی دادهای چاه‌آزمایی استفاده شد. حل معادلات مربوط به جریان تک‌فازی نفت در حالت دوبعدی با روش اجزاء گرین و انطباق آن با داده‌های چاه‌آزمایی منجر به نتایج بسیار جالب و دقیقی شد.[6] پس از آن در سال ۲۰۰۰، محققین بعدی روش نسبتاً بهینه‌یی با عنوان روش اجزاء گرینِ مبتنی بر گرادیان[۵] را ارائه کردند.[7] در سال ۲۰۰۶، با استفاده از این روش به مدل‌سازی محیط‌هایی با ناهمگنی زیاد پرداخته شد که نتایج حاصل از آن در مقایسه با سایر روش‌ها بسیار مطلوب بود.[8]

تاریخ: دریافت ۱۳۸۶/۷/۲۴، داوری ۱۳۸۶/۱۱/۲۱، پذیرش ۱۳۸۷/۳/۸.

معادله‌ی حاکم و شرایط مرزی

معادله‌ی یک‌بعدی جریان فشار نفت را از طریق ترکیب معادلات پیوستگی و دارسی ارائه شده‌است[9]:

$$\frac{\partial}{\mu B}\left(\frac{k}{\mu B}\frac{\partial P}{\partial x}\right) - Q = \phi\left[\frac{c_r}{B}+\frac{d(1/B)}{dP}\right]\frac{\partial P}{\partial t} \qquad (1)$$

به‌طوری که در آن k نفوذپذیری (تراوایی) سیال، P فشار نفت، μ گران‌روی سیال، B ضریب حجمی تشکیل نفت، ϕ تخلخل، c_r تراکم‌پذیری سنگ و Q دبی تولید نفت است. شرایط مرزی با توجه به نوع آن (نوع اول، دوم و یا سوم) به‌شکل کلی $\gamma_1 p + \gamma_2 \frac{\partial p}{\partial x} = f(x)$ نوشته می‌شود که در آن γ_1 و γ_2 مقادیر ثابت و f(x) مقداری معین است. شرط اولیه نیز به‌صورت $p(x, t=0) = p_0(x)$ تعریف می‌شود که در آن $p_0(x)$ مقدار معلومی است.

معادله‌ی خطی

در ابتدا به‌منظور بررسی چگونگی حل با روش اجزاء گرین، فرض می‌شود که ضرایب موجود در معادله‌ی ۱ ثابت‌اند. با این فرض معادله‌ی ۱ مطابق معادله‌ی ۲ ساده می‌شود:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) - \frac{Q\mu B}{k} = \frac{\phi\mu c_r}{k}\frac{\partial P}{\partial t} \qquad (2)$$

حل در روش اجزاء گرین بر پایه‌ی یافتن: ۱. تابع بدون مرز گرین[۶] برای معادله‌ی دیفرانسیل، ۲. تبدیل معادله‌ی دیفرانسیل به نوع انتگرالی، ۳. گسسته‌سازی محدوده‌ی حل، ۴. تشکیل معادلات المانی[۷] و ۵. سرهم‌سازی این معادلات قرار دارد.[۱]

پس از استفاده از تابع بدون مرز گرین و قضیه‌ی دوم گرین، معادله‌ی انتگرالی متناظر با معادله‌ی دیفرانسیل به دست می‌آید. برای حل این معادله‌ی انتگرالی در روش اجزاء گرین، به‌جای گسسته‌سازی مرز حوزه (که در روش اجزاء مرزی استفاده می‌شود)، کل حوزه‌ی حل، مانند روش اجزاء محدود گسسته‌سازی می‌شود. سپس با تقریب متغیرهای فشار و مشتق آن در نقاط گرهی[۸] به‌وسیله‌ی توابع درون‌یابی، معادلات المانی به‌عنوان قلب روش اجزاء گرین تشکیل می‌شود. در این معادلات متغیر فشار و مشتق آن از مجهولات هستند.

تعداد معادلات در هر معادله‌ی المانی به تعداد نقاط گرهی اجزاء وابسته است. به‌عبارت دقیق‌تر به تعداد گره موجود در هر جزء، معادله‌ی جزئی وجود دارد. پس از سرهم‌سازی این معالات با کمک پیوستگی اجزاء، ماتریس نهایی حاصل می‌شود. پس از اعمال شرایط مرزی، ماتریس حل می‌شود.

از معادله‌ی $d^2G/dx^2 = \delta(x-x_i), -\infty \leq x \leq +\infty$ به‌عنوان «معادله‌ی مکمل» در حل معادله‌ی ۲ استفاده می‌شود. جواب این معادله $G(x,x_1) = (|x-x_i| + l)/2$ است که در آن l مقدار ثابت بوده و $(x-x_i)$ فاصله‌ی بین نقطه‌ی اعمال نیرو (x_i) و هر نقطه‌ی دلخواه دیگر (x) است. با استفاده از تساوی دوم گرین:

$$\int_{x_L}^{x_R} \left(P\frac{d^2G}{dx^2} - G\frac{d^2P}{dx^2}\right) dx = P\frac{dG}{dx}\bigg|_{x_L}^{x_R} - G\frac{dP}{dx}\bigg|_{x_L}^{x_R} \qquad (3)$$

و جایگذاری معادله‌ی ۲ و معادله‌ی مکمل در معادله‌ی ۳ در بازه‌ی $[x_1, x_2]$ که طول یک جزء است، رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$-2\lambda P_i + (H(x_2 - x_i) - H(x_i - x_R))P_2 - (H(x_1 - x_i) - H(x_i - x_1))P_1 - (|x_2 - x_i| + l)q_2 + (|x_1 - x_i| + l)q_1 + \int_{x_1}^{x^2} (|x - x_i| + l)\left(f_p + \frac{\phi\mu c_r}{k}\frac{dp}{dt}\right) dx = 0 \qquad (4)$$

که در آن، $q = dp/dx$ (مقدار λ هنگامی که x_i در یکی از نقاط مرزی x_1 و یا x_2 باشد برابر ۰/۵، و هنگامی که در درون بازه‌ی فوق باشد برابر ۱ است). H تابع هویساید است و مقدار l برابر با طول بلندترین جزء $(\tilde{l})$ قرار داده می‌شود. f_p برابر با $Q\mu B/k$ است. همچنین مقدار P_i در x_i حساب می‌شود. با تعاریف فوق و استفاده از نمایش تانسوری (شاخص تکراری)، معادلات المانی برای معادله‌ی ۴ به دست می‌آید:[۴]

$$R_{ij}p_j + L_{ij}q_j + T_{ij}\left(\frac{1}{\eta}\frac{dp_j}{dt} + f_{Pj}\right) = 0 \qquad i,j = 1,2 \qquad (5)$$

که در آن η معروف به «ثابت نفوذ[۹]» و برابر $\frac{k}{\phi\mu c_r}$ است. در معادله‌ی ۷ ماتریس‌های المانی چنین‌اند:[۴]

$$R_{ij} = (-1)^{(i+j-1)},\quad L_{ij} = \begin{bmatrix} \tilde{l} & -(\tilde{l}+l) \\ (\tilde{l}+l) & \tilde{l} \end{bmatrix},$$

$$T_{ij} = \frac{l}{6}\begin{bmatrix} 3\tilde{l}+l & 3\tilde{l}+2l \\ 3\tilde{l}+2l & 3\tilde{l}+l \end{bmatrix} \qquad (6)$$

همچنین در به دست آوردن معادله‌ی ۵، فشار و مشتق آن و مقدار f_p با کمک توابع درون‌یابی لاگرانژی مرتبه‌ی اول تقریب زده شده‌اند. معادله‌ی ۵ شکل گسسته‌ی معادله‌ی ۲ است که به تشکیل یک دستگاه معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول می‌انجامد. با تقریب dp_j/dt و باکمک تفاضل محدود α (گسسته‌سازی زمانی) داریم:

$$\alpha(R_{ij}p_j^2 + L_{ij}q_j^2 + T_{ij}f_{pj}^2) + (1-\alpha)(R_{ij}p_j^1 + L_{ij}q_j^1 + L_{ij}q_j^1 + T_{ij}f_{pj}^1) + T_{ij}\left(\frac{1}{\eta}\frac{p_j^2 - p_j^1}{\Delta t}\right) = 0 \qquad i,j = 1,2 \qquad (7)$$

که در آن بالانویس‌های ۱ و ۲ به‌ترتیب نشان‌گر مقدار متغیر در زمان‌های t_1 و $t_2 = t_1 + \Delta t$ هستند. با سرهم‌سازی معادله‌ی ۷ برای کل اجزاء و اِعمال شرایط مرزی ماتریس نهایی به‌دست می‌آید.

مثال ۱: میزان عملکرد روش اجزاء گرین با حل مثالی که جواب تحلیلی آن موجود است، بررسی می‌شود. با فرض هسته‌یی[۱۰] (مغزه‌یی) با طول $200\,cm$ با خصوصیات $k = 200\,md$، ϕ=٪۲۰، $c_r = 4 \times 10^{-5}\,atm$ و سیال (مایع) نفتی با ویژگی‌های $\mu = 2\,cp$، $B = 1/5$ ، $Q = 0$ و اعمال شرایط اولیه و مرزی مطابق رابطه‌ی ۱۰، جواب به‌صورت معادله‌ی ۱۱ حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} &P(x = 0\,cm, t > 0) = 250\,atm \\ &P(x = 200\,cm, t > 0) = 180\,atm \\ &P(x, t = 0) = 200\,atm \end{aligned} \qquad (8)$$

$$P(x,t) = -0/35x + 250 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-40n\pi cos(n\pi) + 140\,sin(n\pi) - 100n\pi)}{n^2\pi^2} exp\left(-\frac{n^2\pi^2\eta t}{40000}\right) sin\left(\frac{n\pi x}{200}\right)\right) \qquad (9)$$

در جدول ۱ میزان دقت داده‌های روش اجزاء گرین با جواب تحلیلی برای تعداد مختلف اجزاء مقایسه شده است. چنان که مشاهده می‌شود جواب تحلیلی

جدول ۱. مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش اجزاء گرین با جواب تحلیلی درحضور تعداد اجزاء متفاوت.

x (cm)	فشار تحلیلی	گرین (۱۰)	خطا (٪)	گرین (۲۰)	خطا (٪)	گرین (۱۰۰)	خطا (٪)
۲۰	۲۱۰/۳	۲۰۲/۴	۳/۷۷	۲۰۵/۲	۲/۴۰	۲۰۵/۹	۲/۱۰
۴۰	۲۰۰/۶	۲۰۰/۱	۰/۲۳	۲۰۰/۵	۰/۰۱	۲۰۰/۷	۰/۰۶
۶۰	۲۰۰/۰	۲۰۰/۰	۰/۰۰	۲۰۰/۱	۰/۰۳	۲۰۰/۱	۰/۰۴
۸۰	۲۰۰/۰	۲۰۰/۰	۰/۰۰	۲۰۰/۰	۰/۰۰	۲۰۰/۰	۰/۰۰
۱۰۰	۲۰۰/۰	۲۰۰/۰	۰/۰۰	۲۰۰/۰	۰/۰۰	۲۰۰/۰	۰/۰۰
۱۲۰	۲۰۰/۰	۲۰۰/۰	۰/۰۰	۲۰۰/۰	۰/۰۰	۲۰۰/۰	۰/۰۰
۱۴۰	۲۰۰/۰	۲۰۰/۰	۰/۰۰	۲۰۰/۰	۰/۰۱	۲۰۰/۰	۰/۰۱
۱۶۰	۱۹۹/۸	۲۰۰/۰	۰/۰۹	۱۹۹/۸	۰/۰۰	۱۹۹/۷	۰/۰۲
۱۸۰	۱۹۵/۹	۱۹۹/۱	۱/۶۲	۱۹۷/۹	۱/۰۳	۱۹۷/۷	۰/۹۰

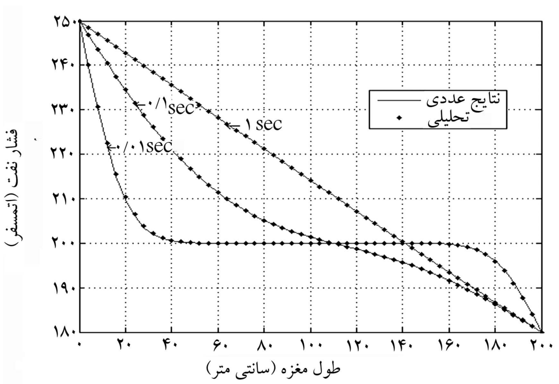
برای لحظه‌ی $t = 0{,}01$ و جواب روش اجزاء گرین با $\alpha = 0{,}7$ محاسبه شده است. اعداد داخل پرانتز نشان‌گر تعداد اجزاء مورد استفاده برای حل هستند. نتایج حاصله نشان‌گر دقت بالای روش، حتی برای تعداد اجزاء کم است. در به دست آوردن جدول ۱ ازگام زمانی $\Delta t = 0{,}01$ استفاده شده است.

برای نشان‌دادن تأثیر مقدارگام زمان بر روی جواب، از تعداد ۲۰ جزء استفاده شده است که نتایج حاصله در جدول ۲ ارائه شده است. برای مقایسه‌ی مقادیر فشار تحلیلی و عددی با مقادیر جدول ۱، از زمان $t = 0{,}01$ ثانیه استفاده شد. اعداد داخل پرانتز در جدول ۲ بیان‌گر گام‌های زمانی برحسب ثانیه‌اند. نتایج دو جدول ذکرشده به‌خوبی با یکدیگر انطباق دارند. با افزایش تعداد اجزاء و کاهش مقدارگام زمان، میزان دقت جواب‌های عددی به دست آمده افزایش می‌یابد. لازم به ذکر است که نتایج ارائه‌شده در جدول ۲ برای یک دوره‌ی زمانی بسیارکوچک (۰٫۰۱ ثانیه) تهیه شده‌اند و لذا، عدم تغییر مقادیر فشار در نقاط میانی (نظیر $x = 100, x = 120$) لزوماً به‌معنی دقت خوب روش گرین (نداشتن خطای گردکردن یا برشی) نیست.

در شکل ۱ نموداری از فشار تحلیلی و نتایج روش اجزاء گرین برای زمان‌های ۰٫۰۰۱، ۰٫۰۱ و ۱ ثانیه نشان داده شده است. برای به دست آوردن شکل با توجه به نتایج به‌دست آمده از جداول ۱ و ۲ از تعداد ۵۰ اجزء وگام زمانی ۰٫۰۰۱ ثانیه استفاده شده است. لازم به توضیح است که مقدار خطای عددی انباشته (نسبت به جواب تحلیلی) بسیارکوچک است و آن هم به‌دلیل انتخاب گام زمانی بسیارکوچک و تعداد اجزاء بسیار زیاد است.

جدول ۲. مقایسه‌ی نتایج روش اجزاء گرین و تحلیلی با گام‌های زمانی متفاوت، پس از گذشت ۰٫۰۱ ثانیه.

x (cm)	فشار تحلیلی	گرین (۰٫۰۱)	خطا (٪)	گرین (۰٫۰۰۱)	خطا (٪)	گرین (۰٫۰۰۰۱)	خطا (٪)
۲۰	۲۱۰٫۳	۲۰۵٫۲	۲٫۴۰	۲۰۹٫۶	۰٫۳۴	۲۱۰٫۲	۰٫۰۵
۴۰	۲۰۰٫۶	۲۰۰٫۵	۰٫۰۱	۲۰۰٫۲	۰٫۱۹	۲۰۰٫۲	۰٫۲۰
۶۰	۲۰۰٫۰	۲۰۰٫۱	۰٫۰۳	۲۰۰٫۰	۰٫۰۱	۲۰۰٫۰	۰٫۰۱
۸۰	۲۰۰٫۰	۲۰۰٫۰	۰٫۰۰	۲۰۰٫۰	۰٫۰۰	۲۰۰٫۰	۰٫۰۰
۱۰۰	۲۰۰٫۰	۲۰۰٫۰	۰٫۰۰	۲۰۰٫۰	۰٫۰۰	۲۰۰٫۰	۰٫۰۰
۱۲۰	۲۰۰٫۰	۲۰۰٫۰	۰٫۰۰	۲۰۰٫۰	۰٫۰۰	۲۰۰٫۰	۰٫۰۰
۱۴۰	۲۰۰٫۰	۲۰۰٫۰	۰٫۰۱	۲۰۰٫۰	۰٫۰۰	۲۰۰٫۰	۰٫۰۰
۱۶۰	۱۹۹٫۸	۱۹۹٫۸	۰٫۰۰	۱۹۹٫۹	۰٫۰۸	۱۹۹٫۹	۰٫۰۸
۱۸۰	۱۹۵٫۹	۱۹۷٫۹	۱٫۰۳	۱۹۶٫۲	۰٫۱۵	۱۹۵٫۹	۰٫۰۲



شکل ۱. مقایسه فشار تحلیلی و نتایج روش اجزاء گرین.

معادله غیرخطی

معادله‌ی ۱ در حالت کلی غیرخطی است. در این معادله روابط $B = B(p)$، $\mu = \mu(p)$ و $k = k(x)$ برقرارند. وقتی k تابعی از مکان باشد محیط متخلخل ناهمگن است. اگرچه ϕ تابعی از فشار است اما چون تابعیت ضعیفی به فشار دارد، از آن صرف‌نظر کرده و مقدار آن را ثابت فرض می‌کنند. معادله‌ی ۱ باید به شکل مناسبی برای استفاده در قضیه‌ی دوم گرین (معادله‌ی ۵) تبدیل شود تا با روش اجزاء گرین قابل حل باشد. با مشتق‌گیری از معادله‌ی ۱ و جابه‌جایی‌های لازم رابطه‌ی ۱۰ به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = -\frac{\partial ln\, k}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{Q}{k} + \frac{\phi\beta}{k}\frac{\partial P}{\partial t} \qquad (10)$$

که در آن k برابر $\frac{k(x)}{\mu(p)B(p)}$ و β مساوی با $\left(\frac{c_r}{B(p)} + \frac{d(1/B)}{dP}\right)$ است. با جایگذاری معادله‌ی ۱۰ و معادله‌ی مکمل در معادله‌ی ۳، شکل انتگرالی معادله‌ی ۱ در طول یک جزء $[x_1, x_2]$، به دست می‌آید:

$$-2\lambda P_i + (H(x_2 - x_i) - H(x_i - x_R))P_2 - (H(x_1 - x_i) - H(x_i - x_1))P_1 - (|x_2 - x_i| + l)q_2 + (|x_1 - x_i| + l)q_1 + \int_{x_1}^{x_2}(|x - x_i| + l)\left(-\frac{\partial ln\, k}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{Q}{k} + \frac{\phi\beta}{k}\frac{dP}{dt}\right)dx = 0 \qquad (11)$$

برای محاسبه‌ی انتگرال موجود در معادله‌ی ۱۱، باید پارامترها با توابع درون‌یابی تقریب زده شوند. این توابع باید دارای خصوصیات رابطه‌ی ۱۲ باشند تا انتگرال فوق بر حسب مقادیر گرهی محاسبه شود.

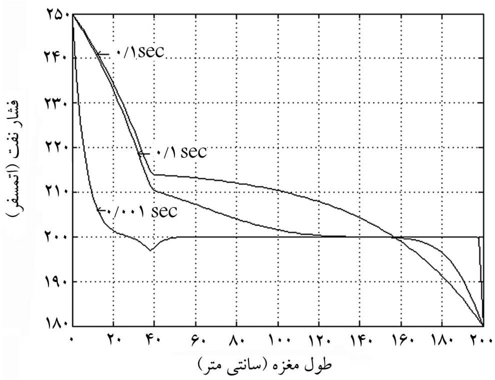
$$\Omega_i^e(\zeta_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}, \qquad \sum_{i=1}^{n}\Omega_i^e(\zeta) = 1 \qquad (12)$$

در روابط فوق $\zeta = (x - x_1)/l$ و Ω_i^e توابع درون‌یابی درجه‌ی اول لاگرانژی، $\Omega_1^e(\zeta) = 1 - \zeta$ و $\Omega_2^e(\zeta) = \zeta$، هستند. به دلیل دوگرهی بودن اجزاء مورد استفاده، از توابع درون‌یابی درجه‌ی اول برای تقریب استفاده شده است. در این خصوص، پارامترهای زیر تعریف و با توابع درون‌یابی در نقاط گرهی تقریب زده می‌شوند:

$$\theta^e = ln(k) = \Omega_j\theta_j, \qquad \psi^e = \frac{\phi\beta}{k} = \Omega_j\psi_j,$$
$$q^e = \frac{dP}{dx} = \Omega_j q_j, \qquad \lambda^e = \frac{1}{k} = \Omega_j\lambda_j, \qquad j = 1, 2 \qquad (13)$$

با قرار دادن این پارامترها در معادله‌ی ۱۱ و استفاده از نمایش تانسوری، معادله‌ی جزئی ۱۴ به‌دست می‌آید:

$$R_{ij}P_j + (L_{ij} - V_{inj}\theta_n)q_j + U_{ijn}\left(\psi_n\frac{\partial P_j}{\partial t} + \lambda_n Q_j\right) = 0$$
$$i, j, n = 1, 2 \qquad (14)$$



شکل ۲. نتایج روش اجزاء گرین برای مثال ۲.

ماتریس‌های المانی به‌صورت رابطه‌های ۱۵ و ۱۶ هستند:[۱۰]

$$V_{1nj}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-(3\tilde{l}+l) & -(3\tilde{l}+2l)\\ 3\tilde{l}+l & 3\tilde{l}+2l\end{bmatrix},\quad V_{2nj}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}-(3\tilde{l}+2l) & -(3\tilde{l}+l)\\ 3\tilde{l}+2l & 3\tilde{l}+l\end{bmatrix},$$

$$n,j=1,2 \qquad (15)$$

$$U_{1nj}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}4\tilde{l}+l & 2\tilde{l}+l\\ 2\tilde{l}+l & 4\tilde{l}+3l\end{bmatrix},\quad U_{2nj}=\frac{1}{12}\begin{bmatrix}4\tilde{l}+3l & 2\tilde{l}+l\\ 2\tilde{l}+l & 4\tilde{l}+l\end{bmatrix},$$

$$n,j=1,2 \qquad (16)$$

ماتریس‌های R و L در معادله‌ی ۶ تعریف شده‌اند و عبارات مندرج در رابطه‌های ۱۵ و ۱۶ از تعریف آنها مطابق زیر به‌دست آمده‌اند:

$$V_{inj}=\frac{1}{l}\int_{x_1}^{x_2}\left(|x-x_i|+\tilde{l}\right)\frac{d\Omega_n}{d\zeta}\Omega_j dx$$

$$U_{ijn}=\int_{x_1}^{x_2}\left(|x-x_i|+\tilde{l}\right)\Omega_j\Omega_n dx$$

معادله‌ی ۱۴ یک معادله‌ی غیرخطی است و برای حل آن باید از روش‌های حل دستگاه غیرخطی استفاده کرد. به‌طور رایج از روش‌های نیوتن ـ رافسون و پیکارد[۱۱] برای حل آنها استفاده می‌شود.[۱۱و۱] با استفاده از روش پیکارد و تفاضل محدود معادله‌ی ۱۴ به معادله‌ی ۱۷ تبدیل می‌شود.

$$\begin{aligned}&\alpha(R_{ij}P_j^2+(L_{ij}-V_{inj}\theta_n^{k+1})q_j^2+U_{ijn}\lambda_n^{k+1}Q_j^2)+\\&\omega(R_{ij}P_j^1+(L_{ij}-V_{inj}\theta_n^{k})q_j^1+U_{ijn}\lambda_n^{k}Q_j^1)+\\&U_{ijn}\left((\alpha\psi_n^{k+1}+\omega\psi_n^k)\frac{P_j^2-P_j^1}{\Delta t}\right)=0 \qquad i,j,n=1,2 \qquad (17)\end{aligned}$$

بالانویس‌های k و $k+1$ نشانگر مقدار متغیر در مراحل تکرارند، و ω برابر $1-\alpha$ است. ماتریس نهایی سرهم‌سازی شده به‌صورت رابطه‌ی ۲۰ است.

$$\left[A^{(k+1)}\right]\left\{\begin{matrix}P^{(2,k+1)}\\ q^{(2,k+1)}\end{matrix}\right\}=\left\{S^{(1,k)}\right\} \qquad (18)$$

در هر تکرار با توجه به مقادیر فشار محاسبه‌شده، ضرایب ماتریس A به‌روز می‌شود. سپس مقادیر مجهول P و q حساب می‌شوند. حلقه‌ی تکرار زمانی متوقف می‌شود که تفاوت مقادیر محاسبه‌شده با مقادیر قبلی از مقدار معینی کم‌تر باشد.

مثال ۲: مثال قبلی را با توجه به خواص سنگ و سیال زیر دوباره بررسی می‌کنیم.

$$\begin{aligned}&B=-2.2\times10^{-4}P+1.544,\qquad \mu=5\times10^{-4}P+0.4,\\&K=exp(-.02x) \qquad (19)\end{aligned}$$

سایر داده‌ها در مثال ۱ موجود است. همچنین فرض شده است چاهی در فاصله‌ی ۴۰ سانتی‌متری از لبه‌ی سمت چپ با دبی $0.3\,cm^3/s$ در حال تولید است. شرایط مرزی و اولیه طبق معادله‌ی ۱۰ تعریف می‌شوند. شکل ۲ نشان‌دهنده‌ی نمودار فشار با طول هسته (مغزه) است. این نتایج با تعداد ۱۰۰ جزء و گام زمانی ۰/۰۰۱ ثانیه به دست آمده است.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق، معادلات خطی و غیرخطی فشار نفت (تک‌بعدی) به‌روش اجزاء گرین حل شده‌اند. ابتدا شکل انتگرالی معادله‌ی دیفرانسیل به‌کمک قضیه‌ی دوم گرین به دست آمد؛ سپس با گسسته‌سازی حوزه‌ی حل و استفاده از توابع درون‌یابی مرتبه‌ی اول لاگرانژ، معادلات المانی برای سیستم حاصل شد. مقایسه‌ی نتایج عددی و تحلیلی نشانگر توانایی بالای روش مورد مطالعه در بازتولید نتایج تحلیلی است. همچنین حل معادلات غیرخطی با وجود تکینگی ایجاد شده به‌علت اعمال شرایط مرزی چاه به‌راحتی با روش اجزاء گرین امکان‌پذیر است.

فهرست علائم اختصاری

حروف انگلیسی

A: ماتریس نهایی
G: جواب معادله‌ی مکمل
H: تابع هویساید
i,j,n: شمارشگر
k: تعداد تکرار در حل معادله‌ی غیرخطی
K: نفوذپذیری مطلق
l: طول المان
$\tilde{l}$: بزرگ‌ترین مقدار طول المان
L,R,U,V: ماتریس‌های المانی
p: متغیر فشار
q: مشتق متغیر فشار
t: زمان
x: طول مکانی

حروف یونانی

α: ثابت گسسته‌سازی برای مشتق زمان
δ: تابع دلتای دیراک
ϕ: تخلخل
μ: گران‌روی
ω: برابر با $1-\alpha$
Ω_i: توابع درون‌یابی

پانوشت

1. green element method (GEM)
2. boundary element method
3. finite element method
4. singular integral
5. Q-based
6. free space green function
7. element equations
8. nodal point
9. diffusivity constant
10. core
11. picard

منابع

1. Taigbenu, A.E, "The Green Element Method", Massachusetts, Kluwer Academic Publishers, pp. 4 (1999).
2. Taigbenu, A.E, "A more efficient implementation of the boundary element theory", Proceedings of the Fifth International Conference on Boundary Element Technology, Delaware, pp. 355-366 (1990).
3. Taigbenu, A.E, "The green element method", *Int. J. Numer. Meth. Eng.,* pp.657-684 (1995).
4. Taigbenu, A.E., and Onyejekwe, O.O. "Green's function-based integral approaches to linear transient boundary-value problems and their stability characteristics (I)", *Appl. Math. Modelling,* **22**, pp. 687-702 (1998).
5. Onyejekwe, O.O. "An efficient green element algorithm for radial flow", *Appl. Math. Comput.,* **165**, pp.635-645 (2005).
6. Archer, R.A., and Horne, R.N. "Green element method and singularity programming for numerical well test analysis", **26**, pp. 537-564 (2002).
7. Pecher, R. et al. "New formulation of the green element method to maintain its second-order accuracy in 2D/3D", **25**, pp. 211-219 (2001).
8. Lorinczi, P. et al. "Modelling of highly-heterogeneous media using a flux-vector-based green element method", *Engineering Analysis with Boundary Elements,* **30**, pp. 818-833 (2006).
9. Aziz, K., and Settari, A. "Petroleum reservoir simulation," *Elsevier Applied Science,* (1979)
10. Taigbenu, A.E "Three green element models for the diffusion- advection equation and their stability characteristics", *Engineering Analysis with Boundary Elements,* **23**, pp. 577-589 (1999).
11. Onyejekwe. O.O. "A boundary-finite element equation solutions to flow in heterogeneous porous media", *Transport in Porous Media,* **31**, pp. 293-312 (1998).