

الگوریتم شبیه‌سازی تصادفی برای تعیین توزیع احتمالاتی و بیشینه‌ی پاسخ لرزه‌ی سیستم‌های دینامیکی

سپیده رحیمی (دانشجوی دکتری)

مسعود سلطانی محمدی* (دانشیار)

علی اکبر آقا کوجک (استاد)

دانشکده‌ی مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

مهندسی عمران شریف، (پاییز ۱۳۹۵)
دوره ۲ - ۳۲، شماره ۱/۳، ص. ۵۷-۴۷

با توجه به رفتار غیرخطی سیستم‌های سازه‌ی و تصادفی بودن تحریک ورودی، یکی از راه‌حل‌های منطقی برای تعیین پاسخ احتمالاتی سازه‌ها تحلیل تاریخی‌چپ زمانی تحت مجموعه‌ی از رکوردهاست. اما این موضوع مستلزم انجام تعداد زیادی تحلیل‌های دینامیکی است، که می‌تواند با هزینه‌ی محاسباتی زیادی همراه باشد. این در حالی است که نیاز به روشی ساده و نسبتاً دقیق جهت تعیین خصوصیات پاسخ سیستم است. بنابراین، توسعه‌ی یک روش محاسباتی که جایگزین روش‌های دقیق دینامیکی غیرخطی قرار گیرد، هدف این پژوهش است. در این پژوهش یک روش جامع و بسته‌ی مبتنی بر یک الگوریتم محاسباتی ساده برای تعیین توزیع احتمالاتی و بیشینه‌ی پاسخ سیستم‌های دینامیکی یک و چند درجه‌ی آزاد تحت تحریک‌های گوسی مانا و غیرمانا ارائه شده است. دقت روش مذکور در مقایسه با روش دقیق، از طریق تعداد زیادی تحویل دینامیکی غیرخطی ارزیابی شده است.

واژگان کلیدی: تغییرمکان هدف، روابط احتمالاتی، توزیع احتمالاتی پاسخ، مدل بوک - ون.

se.rahimi@modares.ac.ir
msoltani@modares.ac.ir
a_gha@modares.ac.ir

۱. مقدمه

مطرح است. از جمله‌ی این روش‌ها می‌توان به روش ضرایب تغییرمکان و روش طیف ظرفیت در دستورالعمل FEMA-۴۴۰ اشاره کرد.^[۷] با این حال، نتایج این دو روش نسبت به روش تحلیل دینامیکی غیرخطی، که دقیق‌ترین روش برای تعیین نیاز لرزه‌ی سازه‌هاست، دارای کاستی‌هایی است:

الف) به هر جهت این روش‌ها می‌توانند تقریب داشته باشند، به دلیل ماهیت آنها که مبتنی بر مطالعات پارامتریک و برازش روابط بر نتایج است. همچون مطالعات پارامتریکی که در FEMA-۴۴۰ و اصلاحاتی که روی ضرایب «روش ضرایب تغییرمکان» ارائه شده است.

ب) این روش‌ها فقط متمرکز بر مقدار میانه‌ی (یا بعضاً میانگین) تغییرمکان بیشینه‌ی پاسخ سازه هستند و اطلاعاتی در خصوص توزیع احتمالاتی پاسخ لرزه‌ی سازه‌ها و تأثیر عدم قطعیت‌های ناشی از انتخاب رکورد اعمالی^۱ ارائه نمی‌کنند. لذا پراکندگی پاسخ‌ها نامشخص است و در صورت نیاز به تعیین تغییرمکان هدف در یک سطح اطمینان دیگر مثلاً میانگین به علاوه‌ی ۱ انحراف معیار نتایج یا صدک ۸۴ قابل استفاده نیستند.

ج) این روش‌ها و مطالعات پارامتریک صورت‌گرفته برای توسعه‌ی آنها، عموماً برای منحنی‌های رفتاری و هیستریتیک خاص و محدود و همچنین ماهیت‌های

به‌طور کلی، دو روش متفاوت برای تعیین نیاز لرزه‌ی سازه‌ها موجود است. ۱. ارزیابی تعیینی پاسخ سازه تحت تعداد محدود رکورد اعمالی؛ ۲. براساس تئوری‌های احتمالاتی. اما نتایج روش اول با توجه به ماهیت تصادفی زلزله و تعداد محدود رکوردهای اعمال‌شده به سازه ممکن است بیان‌گر رفتار درست و کاملی از سازه نباشد. تصادفی بودن تحریک منجر به پیچیده‌شدن بررسی عملکرد سیستم می‌شود. از این رو در سال‌های اخیر، روش‌های احتمالاتی جایگزین مناسبی برای روش‌های تحلیل تعیینی شده‌اند. از جمله‌ی روش‌های آماری ذکر شده، می‌توان به روش شبیه‌سازی مونت‌کارلو اشاره کرد.^[۱] روش مونت‌کارلو نیازمند ابزاری دقیق جهت تولید عددی فرایندهای تصادفی بر پایه‌ی مکانیزم احتمالاتی است.^[۲] از دیگر روش‌های احتمالاتی می‌توان به روش المان محدود آماری،^[۳] روش طیفی،^[۴] و روش‌هایی براساس چگالی احتمالاتی،^[۵] اشاره کرد.

با استفاده از روش‌های احتمالاتی، خصوصیات آماری پاسخ سیستم، تحت مجموعه‌ی از رکوردهای مناسب ساخت‌گاه مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. از جمله این خصوصیات، تغییرمکان با سطح احتمال وقوع مشخص و بیشینه‌ی تغییرمکان (تغییرمکان هدف) است. برای یافتن بیشینه‌ی تغییرمکان یک سازه، روش‌های متفاوتی

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۵/۱، اصلاحیه ۲۳/۹/۱۳۹۳، پذیرش: ۱۳۹۳/۱۰/۹

خاصی از زلزله (مثلاً دور از گسل) صورت گرفته است، هر چند در سال‌های اخیر مطالعاتی برای اعمال این آثار صورت گرفته است (همچون پژوهش‌های ارائه شده در FEMA-۴۴۰)، با این حال مطالعات ذکر شده نیز پارامتریک بوده‌اند.

برای رفع کاستی‌های ذکر شده و در پژوهش‌های علمی عموماً روش تحلیل دینامیکی غیرخطی مورد توجه قرار می‌گیرد، که البته برای اعمال عدم قطعیت‌های رکورد به رکورد، این تحلیل‌ها باید تحت مجموعه‌ی وسیعی از رکوردهای زلزله مرتبط با ساخت‌گاه صورت گیرد. لذا روشی بسیار زمان‌بر و با هزینه‌ی محاسباتی بالاست و منجر به حلی بسته^۲ نخواهد شد. لذا در این پژوهش الگوریتمی با حل بسته و بدون نیاز به تکرار^۳ که تبعاً زمان و هزینه‌ی محاسباتی پایینی دارد، برای دست‌یابی به توزیع احتمالاتی پاسخ پیشینه‌ی سیستم‌های دینامیکی غیرخطی با هرگونه منحنی رفتاری که عدم قطعیت‌های مرتبط به رکوردهای زلزله به خوبی در آن لحاظ شده ارائه شده است.

با داشتن توزیع احتمالاتی پاسخ، برای هر سطح اطمینان و یا صدک دلخواه می‌توان تغییرمکان هدف را تعیین کرد. این الگوریتم، مبتنی بر بسط «تئوری ارتعاشات تصادفی» همراه با ساده‌سازی‌های و پیشنهاداتی است که برای کاربردی کردن آن ارائه شده است.

در این زمینه، بارباتو^۴ خصوصیات طیفی پاسخ لرزه‌ی سازه‌ی یک درجه‌ی آزاد و چند درجه‌ی آزاد را تحت تحریک با فرایند مانا و غیرمانا با استفاده از قوانین ارتعاشات تصادفی تعیین کرده است.^[۸] کاربرد این مطالعه محدود به سیستم‌های خطی بوده و این درحالی است که سیستم‌های غیرخطی همچنان به‌عنوان یک مسئله‌ی چالش‌برانگیز در تئوری ارتعاشات تصادفی مخصوصاً برای سیستم‌های چند درجه‌ی آزاد تحت تحریک‌های غیرمانا مطرح است. برای بررسی چنین سیستم‌هایی، شنک^۵ از روش شبیه‌سازی مونت کارلو برای بازه‌ی وسیعی از سیستم‌های سازه‌ی استفاده کرده است.^[۹] اما این روش بسیار زمان‌بر است و حل بسته و جامعی از پاسخ این سیستم‌ها در اختیار مهندسان قرار نمی‌دهد.

از این رو در این مطالعه سعی شده است که خصوصیات آماری پاسخ سیستم‌های یک و چند درجه‌ی آزاد غیرخطی تحت تحریک‌های مانا و غیرمانا توسط الگوریتم محاسباتی ساده‌ی مبتنی بر تئوری ارتعاشات تصادفی ارائه شود. سیستم‌هایی با مدل هیستریزیس بوک - ون^۶ (شامل مدل‌های مختلف هیستریزیس) تحت رکوردهای ورودی با چگالی طیفی مشخص که بیان‌گر مجموعه‌ی از رکوردها برای یک ناحیه‌ی مشخص است، مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. روابط ارائه شده برای سیستم‌های یک درجه‌ی آزاد و چند درجه‌ی آزاد تحت رکوردهای مانا و غیرمانا با چگالی طیفی مشخص اعتبارسنجی می‌شوند.

۲. مدل‌سازی سیستم

۱.۲. مدل‌سازی سیستم یک‌درجه‌ی آزاد

در این مطالعه سیستم یک درجه‌ی آزاد، توسط نوسان‌گری با مدل هیستریزیس بوک - ون، مدل شده است. یکی از مزیت‌های اصلی استفاده از این مدل، توانایی در نظر گرفتن مدل‌های هیستریزیس متفاوت با استفاده از تغییر در پارامترهای این مدل است. این مدل در ابتدا توسط بوک در سال ۱۹۶۷ معرفی و سپس در طی سال‌های ۱۹۷۶ تا ۱۹۸۰ گسترش داده شده است.^{[۱۰][۱۱]} معادله‌ی دیفرانسیل این

مدل به صورت روابط ۱ و ۲ است:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + \alpha kx(t) + (1 - \alpha)kz(t) = P(t) \quad (1)$$

$$\dot{z} = A\dot{x} - \beta|\dot{x}||z|^{n-1}z - \gamma\dot{x}|z|^n \quad (2)$$

معادله‌ی ۱، معادله‌ی دیفرانسیل حرکت سیستم یک درجه‌ی آزاد با سختی k ، جرم m ، میرایی c ، نسبت سختی پس از تسلیم به سختی قبل از تسلیم α و تغییرمکان x و z تغییرمکان مجازی با معادله‌ی دیفرانسیل ارائه شده در رابطه‌ی ۲ است. جهت حل مسئله، دو معادله‌ی ۱ و ۲ باید هم‌زمان حل شود. بنابراین تغییرات در پارامترهایی چون β ، γ ، n و A منجر به تولید مدل‌های هیستریزیس متفاوتی خواهد شد (شکل ۱). هر چه میزان n بیشتر باشد، مدل بوک - ون به مدل کشسان‌خمیری نزدیک‌تر می‌شود. تفاوت این مدل با مدل‌های چندخطی مانند کلاف و تاکدا این است که مدل‌های اخیر توسط یک معادله‌ی مشخص بیان نمی‌شوند، در حالی که مدل بوک - ون مدل همواری است که فقط با یک معادله بیان می‌شود. این مدل به علت توانایی تولید مدل‌های هیستریزیس متفاوت توسط یک معادله‌ی دیفرانسیلی هموار، در مباحث احتمالاتی بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد.^[۱۲]

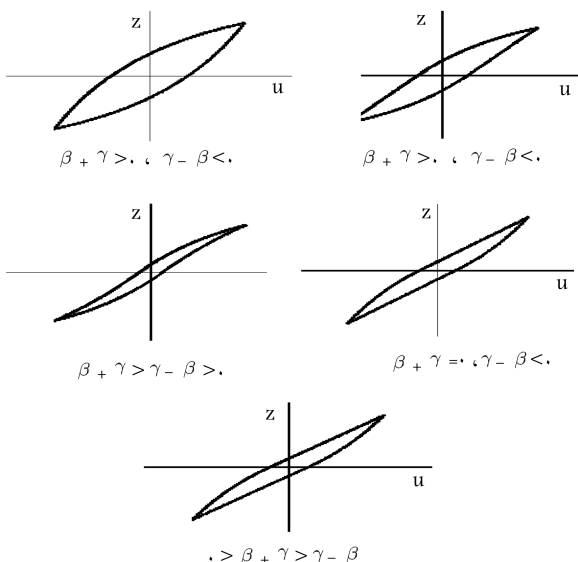
۲.۲. مدل‌سازی سیستم چند درجه‌ی آزاد

در این پژوهش، مدل ساختمان برشی برای یک سیستم چند درجه‌ی آزاد در نظر گرفته شده است (شکل ۲). این ساختمان تحت تحریک جانبی a_g است و در هر طبقه از مدل بوک - ون کلاسیک استفاده شده است. نیروی مقاوم در طبقه‌ی i ام برای جرم i ام به صورت رابطه‌ی ۳ است:

$$q_i = \alpha_i k_i u_i(t) + (1 - \alpha_i) k_i z_i(t) \quad (3)$$

و u_i تغییرمکان طبقه‌ی i ام است که از رابطه‌ی ۴ به دست می‌آید:

$$u_i = d_i - d_{i-1} \quad (4)$$



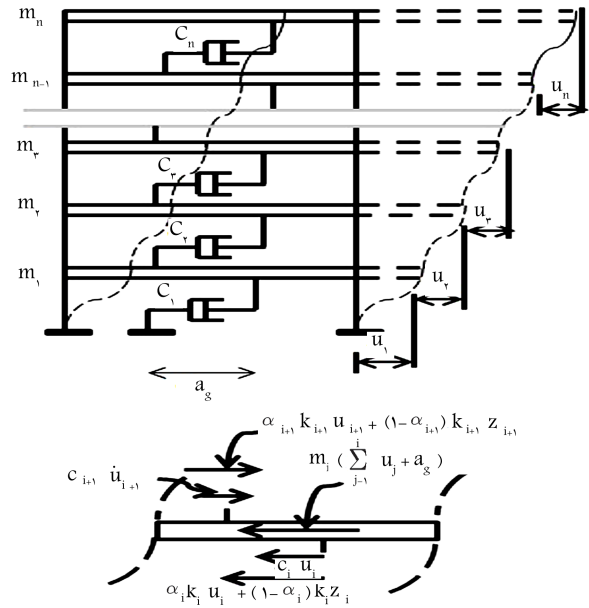
شکل ۱. مدل هیستریزیس برای مقادیر مختلفی از β ، γ .

۳.۲. تحریک ورودی

به دلیل حساس بودن پاسخ‌ها به رکورد ورودی و عدم انطباق شرایط ساخت‌گاهی محل ثبت رکورد با محل سازه‌ی مورد بررسی نمی‌توان از تعداد محدودی زلزله برای بررسی پاسخ سازه استفاده کرد و نیاز به تعداد زیادی رکورد زلزله است. ولی به دلیل محدود بودن تعداد رکوردهای ثبتی، نیاز به تولید شتاب نگاشت مصنوعی است. البته، الگوریتم پیشنهادی محدود به استفاده از شتاب نگاشت‌های مصنوعی نیست و برای یک مجموعه از رکوردهای واقعی، کافی است چگالی طیفی شتاب نگاشت‌ها تعیین شود و مورد استفاده قرار گیرد. اما در تهیه و صحت‌سنجی الگوریتم پیشنهادی از یک چگالی طیفی مشخص و مجموعه‌ی رکوردهای مصنوعی متناظر با آن استفاده شده است، که بتوان نتایج را با دقت بالاتری مورد مقایسه قرار داد. در اینجا، مجموعه‌ی شتاب نگاشت‌ها توسط فیلتر تاجیمی - کانای تولید شده‌اند. [۱۳ و ۱۴] مدل تاجیمی - کانای چگالی توانی طیفی سفید فیلترشده‌ی است (S_0)، که از یک لایه خاک با بسامد طبیعی (ω_g) و ضریب میرایی (ξ_g) عبور می‌کند. تابع چگالی طیفی این مدل به صورت رابطه‌ی ۸ است:

$$S_g(\omega) = \frac{\omega_g^2 + 4\xi_g^2\omega_g^2\omega^2}{(\omega_g^2 - \omega^2)^2 + 4\xi_g^2\omega_g^2\omega^2} S_0 \quad (8)$$

با استفاده از نتایج القادمسی، مقادیر S_0 (cm^2/sec^2)، ξ_g و ω_g (rad/sec) برای زمین آبرفتی به ترتیب ۹۴/۷۶، ۳۴/۰ و ۱۸/۳۴ در نظر گرفته می‌شود. [۱۵] برای شبیه‌سازی زلزله، الگوسازی فرایند زلزله الزامی است. در این پژوهش در راستای ساخت الگوی فرایند زلزله، الگوی تاجیمی - کانای به کار رفته است. جهت محاسبه‌ی پارامترهای این الگو وجود دست‌کم یک رکورد برای منطقه‌ی مورد مطالعه الزامی است. برای محاسبه‌ی پارامترهای الگوی تاجیمی - کانای، روش گشتاورهای طیفی مناسب است. ولی نتایج حاصل از این روش تقریبی هستند. اما دقیق‌تر آن است که پارامترها طوری انتخاب شوند که پس از انجام مراحل الگوسازی فرایند و به دنبال آن شبیه‌سازی، طیف‌های پاسخ حاصل از شتاب نگاشت‌های شبیه‌سازی شده و شتاب نگاشت‌های اصلی انطباق خوبی داشته باشند. بنابراین نتایج گشتاور طیفی به عنوان سعی اولیه، استفاده و با چندین مرحله‌ی سعی و خطا، مقدار دقیق‌تر پارامترها حاصل می‌شود. بدین ترتیب پارامترهای الگوی تاجیمی - کانای مشخص می‌شود و فرایند الگوسازی به انجام می‌رسد. به عبارت دیگر، با داشتن طیف هدف یک منطقه



شکل ۲. مدل ساختمان چند طبقه‌ی برشی و نیروی مقاوم در طبقه‌ی i ام.

که در آن، d_i تغییر مکان جرم i ام نسبت به زمین است. بنابراین معادله‌ی حرکت برای جرم i ام از رابطه‌ی ۵ به دست می‌آید:

$$m_i \left(\sum_{j=1}^i \ddot{u}_j + a_g \right) + c_i \dot{u}_i - c_{i+1} \dot{u}_{i+1} + q_i - q_{i+1} = 0 \quad (5)$$

که در آن $i = 1, \dots, ND$ تعداد کل جرم‌های متمرکز است. رابطه‌ی ۵ به صورت ماتریسی از رابطه‌ی ۶ به دست می‌آید:

$$[M] \{\ddot{U}\} + [C] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} + [G] \{Z\} = -[M_0] \{I\} a_g \quad (6)$$

که در آن ماتریس‌های M ، G و K از رابطه‌ی ۷ به دست می‌آیند.

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & m_{ND} & \\ & & & & m_{ND} \end{bmatrix}, \quad M_0 = \begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & m_{ND} & \\ & & & & m_{ND} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} (1-\alpha_1)k_1 & -(\alpha_2-\alpha_1)k_2 & & & \\ & (1-\alpha_2)k_2 & -(\alpha_3-\alpha_2)k_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & (1-\alpha_{ND-1})k_{ND-1} & -(\alpha_{ND}-\alpha_{ND-1})k_{ND} \\ & & & & (1-\alpha_{ND})k_{ND} \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_1 k_1 & -\alpha_2 k_2 & & & \\ & \alpha_2 k_2 & -\alpha_3 k_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \alpha_{ND-1} k_{ND-1} & -\alpha_{ND} k_{ND} \\ & & & & \alpha_{ND} k_{ND} \end{bmatrix} \quad (7)$$

و دست‌کم یک رکورد واقعی ثبت‌شده از آن منطقه، می‌توان الگوی تاجیمی - کانای منطقه را تعیین کرد. این عمل برای طیف‌های آئین‌نامه‌ی برای انواع خاک‌ها قابل محاسبه است.

تعیین انحراف معیار پاسخ مستلزم تعیین تابع پاسخ بسامدی سیستم بوک - ون است. تابع پاسخ بسامدی را می‌توان با استفاده از مبانی معادلات دیفرانسیل تعیین کرد. تابع پاسخ بسامدی خطی‌شده برای بوک - ون از رابطه‌ی ۱۵ به‌دست می‌آید (محاسبات مرتبط در پیوست ۱ ارائه شده است):

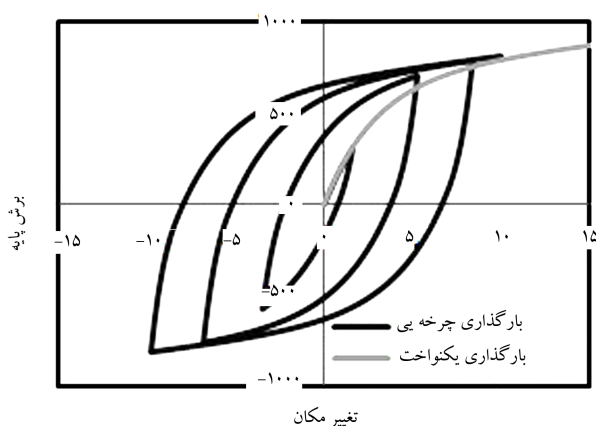
$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{\left(-\omega^2 + \alpha\omega + \frac{(1-\alpha)\omega^2 c_e}{\omega^2 + k_e^2}\right)^2 + \left(2\xi\omega - \frac{(1-\alpha)\omega^2 c_e k_e}{\omega^2 + k_e^2}\right)^2} \quad (15)$$

با استفاده از رابطه‌ی ۱۵، مقدار انحراف معیار تغییرمکان سیستم یک درجه‌ی آزاد و چند درجه‌ی آزاد تعیین می‌شود (رابطه‌ی ۱۶):

$$\sigma_u^2 = E[u^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{yy}(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega \quad (16)$$

که در آن، انحراف استاندارد تغییرمکان بستگی به تابع پاسخ بسامدی سیستم $H(\omega)$ و چگالی طیفی تحریک ورودی $S_g(\omega)$ دارد (رابطه‌ی ۷). دقت رابطه‌ی ۱۶ در مقایسه با روش دقیق، توسط تعداد زیادی تحلیل دینامیکی غیرخطی ارزیابی می‌شود. با استفاده از آنالیز حساسیت، خصوصیات آماری پاسخ حاصل از تحلیل تحت ۲۰۰، ۳۰۰ و ۴۰۰ رکورد، هم‌گرایی مناسب داشته‌اند. معیار هم‌گرایی میزان انحراف معیار پاسخ به‌دست‌آمده از آن تعداد رکوردهاست. تفاوت انحراف معیار پاسخ حاصل از ۳۰۰ رکورد نسبت به ۲۰۰ رکورد برابر ۱/۵٪ و تفاوت انحراف معیار پاسخ حاصل از ۴۰۰ رکورد نسبت به ۳۰۰ رکورد برابر ۰/۶٪ است. با توجه به این اختلاف کم، در این نوشتار، ۳۰۰ رکورد به‌عنوان تعداد موردنیاز برای تعیین مشخصات آماری پاسخ در نظر گرفته شده است. در ادامه، جهت کنترل رابطه‌ی ۱۶، ۶ سیستم با دوره‌های تناوب اولیه‌ی ۰/۴، ۰/۶، ۰/۸، ۱، ۱/۲ و ۱/۴ ثانیه در نظر گرفته شده است. رفتار سیستم یک درجه‌ی آزاد با مدل هیستریزس بوک - ون تحت یک شتاب سینوسی افزایشده (به‌صورت یک‌نواخت و چرخه‌ی) به‌صورت نمونه در شکل ۳ نشان داده شده است. مشخصات مدل بوک - ون سیستم یک درجه‌ی آزاد تحت رکوردهای مانا و غیرمانا با دوره‌ی تناوب ۰/۴ ثانیه به این صورت است:

$$k = 987, \quad m = 4, \quad \xi = 0.05, \quad \alpha = 0.05, \quad \beta = 0.66, \\ \gamma = -0.33, \quad n = 1, \quad A = 1$$



شکل ۳. رفتار سیستم یک‌درجه‌ی آزاد با دوره‌ی تناوب ۱ ثانیه.

۳. توزیع احتمالاتی پاسخ

۳.۱. توزیع احتمالاتی پاسخ تحت تحریک مانا

مشخصات آماری سیستم با مدل رفتاری بوک - ون، باید از معادلات مشتق جزئی (معادله‌های ۱ و ۲) تعیین شود. این معادلات به‌صورت غیرخطی هستند و حل دقیق ندارند. جهت دست‌یابی به حل بسته، نیاز به استفاده از روش‌های خطی‌سازی است. در این مطالعه سعی شده است که با استفاده از روابط خطی‌سازی موجود و ترکیب آن با روابط ارتعاشات تصادفی، توزیع احتمالاتی تغییرمکان با استفاده از یک رابطه تعیین شود. بدین منظور، معادلات دیفرانسیل حاکم بر مدل بوک - ون تبدیل به فرم خطی شده‌اند. پارامترهای مدل بوک - ون خطی‌شده توسط تئوری کمینه‌سازی مربع خطا به‌صورت رابطه‌ی ۹ حاصل شده است. [۱۶، ۱۷] معادله‌ی خطی رابطه‌ی ۲ به‌صورت رابطه‌ی ۹ است:

$$\dot{z} = c_e \dot{u} + k_e z \quad (9)$$

مقدار ضرایب خطی‌سازی از رابطه‌ی ۱۰ به‌دست می‌آیند:

$$c_e = A - \beta F_1 - \gamma F_2 \quad k_e = -\beta F_2 - \gamma F_2 \quad (10)$$

که در آن، مقادیر F_1, F_2, F_3, F_4 از روابط ۱۱ به‌دست می‌آیند:

$$F_1 = \frac{\sigma_z^n}{\pi} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) 2^{n/2} I_s \\ F_2 = \frac{\sigma_z^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) 2^{n/2} \\ F_3 = \frac{n\sigma_u \sigma_z^{n-1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) 2^{n/2} \times \left\{ \frac{2(1-\rho_{uz}^2)^{(n+1)/2}}{n} + \rho_{uz} I_s \right\} \\ F_4 = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \rho_{uz} \sigma_u \sigma_z^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) 2^{n/2} \\ I_s = 2 \int_l^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta, \quad l = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\rho_{uz}^2}}{\rho_{uz}^2} \right) \quad (11)$$

که در آن‌ها، $\sigma_z = \sqrt{E[z^2]}$ و $\sigma_u = \sqrt{E[\dot{u}^2]}$ ، $\rho_{uz} = \frac{E[\dot{u}z]}{\sqrt{E[\dot{u}^2]E[z^2]}}$ حالتی که سیستم چند درجه‌ی آزاد باشد، ضرایب خطی‌سازی به فرم ماتریسی تبدیل می‌شوند (روابط ۱۲ الی ۱۴):

$$\{\dot{Z}\} = [C_e] \{\dot{U}\} + [K_e] \{Z\} \quad (12)$$

$$\{Z\} = \begin{Bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{ND} \end{Bmatrix}, \quad \{\dot{U}\} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_{ND} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$[C_e] = \begin{bmatrix} c_{e1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_{eND} \end{bmatrix}, \quad [K_e] = \begin{bmatrix} k_{e1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_{eND} \end{bmatrix} \quad (14)$$

که در آن $A(t)$ ، تابع فیلتر زمانی تعینی (رابطه ۲۰) و $W(t)$ (رابطه ۲۱) فرایند تصادفی ماناست، که معمولاً موج سفید یا موج سفید فیلتر شده است. وقتی تابع فیلتر در ارتباط با فیلتر تاجیمی - کانای قرار گیرد، مدل غیرمانا حاصل می شود. تابع فیلتر زمانی به کار گرفته شده در این پژوهش، تابع نمایی شینوزیکا و ساتواست [۱۹]:

$$A(t) = \frac{1}{C} (e^{-B_1 t} - e^{-B_2 t}) \quad (20)$$

$$C = \max(e^{-B_1 t} - e^{-B_2 t}) \quad (21)$$

پارامترهای $B_1 = 0.85$ و $B_2 = 0.17$ هستند، که برای رکوردهایی با مدت زمان طولانی استفاده می شوند. رکوردهای مانای تولید شده در گام قبلی با استفاده از این فیلتر زمانی تبدیل به رکورد غیرمانا شده اند. نمونه ای از رکوردهای مانا و غیرمانا در شکل های ۷ و ۸ نشان داده شده است.

انحراف معیار پاسخ برای فرایند غیرمانا توسط معادل سازی آن با یک فرایند مانا قابل محاسبه است. این عمل برای یک نوسانگر ساده در مطالعات پیشین موجود است، اما برای سیستم بوک - ون خطی شده موجود نیست. در این نوشتار، انحراف معیار پاسخ برای یک فرایند غیرمانا، با توجه به پیچیدگی تابع پاسخ بسامدی سیستم بوک - ون، توسط روش جداسازی متغیرها تعیین شده است (رابطه ۲۲) (محاسبات مرتبط در پیوست ۲، ارائه شده است):

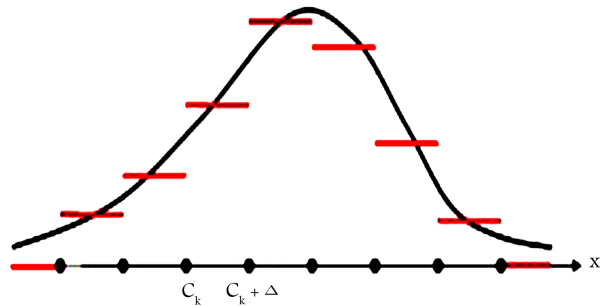
$$\sigma_{X'}^2(t) \approx A^2(t) \sigma_{X'}^2 \quad (22)$$

که در آن، $\sigma_{X'}^2$ واریانس پاسخ نوسانگر تحت موج سفید مانای فیلتر شده است.

حال با داشتن انحراف معیار پاسخ سیستم در حالت غیرمانا و تبدیل انحراف معیار سیستم غیرمانا به انحراف معیار معادل سیستم مانا، می توان از روابط احتمالاتی ارائه شده مربوط به مسائل مانا برای حل احتمالاتی مسائل غیرمانا نیز استفاده کرد. این روند تقریبی به میزان قابل توجهی، کاربرد مدل های غیرمانا را در فعالیت های مهندسی ساده می کند. این روش براساس تقریب فرایند غیرمانا توسط فرایند مانای معادل است. واریانس فرایند مانای معادل σ_{eq}^2 در یک دوره زمانی $[0, T_{eq}]$ برای فرایند غیرمانای $X(t)$ است. انحراف معیار و بازه زمانی معادل برای فرایند غیرمانا ارائه شده توسط میچالو، [۲۰] از رابطه ۲۳ به دست می آید:

$$\sigma_{eq}^2(n_1) = \frac{I(n_1 + 1)}{I(n_1)}, \quad T_{eq}(n_1) = \frac{I(n_1)}{\sigma_{eq}^2(n_1)}, \quad I(n_1) = \int_0^T \sigma_{X'}^2(t) dt \quad (23)$$

نتایج برای $n_1 = 3$ و یا $n_1 = 4$ ، با نتایج اصلی حدود ۱۰٪ اختلاف دارند. [۲۰] جهت کنترل رابطه پیشنهادی (رابطه ۲۲) برای تعیین تابع توزیع احتمالاتی تغییرمکان سیستم با مدل رفتاری بوک - ون تحت تحریک غیرمانا، همان ۶ سیستم با دوره های تناوب اولیه ۰.۴، ۰.۶، ۰.۸، ۱.۲، ۱.۷، ۲.۰ و ۲.۴ ثانیه در نظر گرفته شده است. مقدار ضرایب خطی سازی شده مربوط به هر سیستم تعیین و سپس تابع چگالی احتمالاتی تجربی تغییرمکان ها تحت اثر ۳۰۰ رکورد غیرمانا با چگالی حاصل از حل در حوزه بسامد مقایسه شده است (شکل ۹). همان طور که مشهود است، نتایج حل در حوزه بسامد با نتایج حاصل از ۳۰۰ رکورد غیرمانا انطباق خوبی با هم دارند.



شکل ۴. توزیع احتمالاتی تجربی.

برای سایر دوره های تناوب: ۰.۶، ۰.۸، ۱.۰، ۱.۲، ۱.۴ و ۱.۷ ثانیه مقدار سختی به ترتیب برابر با ۴۳۹، ۲۴۷، ۱۵۸، ۱۱۰ و ۸۱ و سایر پارامترها ثابت هستند. پاسخ این ۶ سیستم تحت ۳۰۰ رکورد مانا با استفاده از تحلیل دینامیکی غیرخطی تعیین و تابع توزیع احتمالاتی تغییرمکان تحت این ۳۰۰ رکورد، از رابطه تجربی ۱۷ حاصل شده است (شکل ۴):

$$f(u) = \frac{n_k}{N \Delta} \quad c_k \leq u \leq c_k + \Delta \quad (17)$$

که در آن، آزمایش N بار تکرار شده و مقدار متغیر تصادفی u حاصل از هر آزمایش ثبت می شود. محور u ها به فواصلی به طول Δ تقسیم شده و n_k تعداد u_i هایی است که در فاصله k ام، یعنی $[C_k, C_k + \Delta]$ قرار دارند. [۱۸] برای تعیین توزیع احتمالاتی تغییرمکان این ۶ سیستم به روش احتمالاتی، ابتدا مقدار ضرایب خطی سازی شده مربوط به هر سیستم تعیین و با قراردادن این ضرایب در رابطه ۱۵، تابع پاسخ بسامدی حاصل می شود. با توجه به مقدار انحراف معیار (رابطه ۱۶) و اینکه توزیع تغییرمکان تحت رکوردهای مانا با چگالی طیفی تاجیمی - کانای، گوسی و با میانگین صفر است، توزیع احتمالاتی تغییرمکان از رابطه ۱۸ به دست می آید:

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_u} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_u^2}} \quad (18)$$

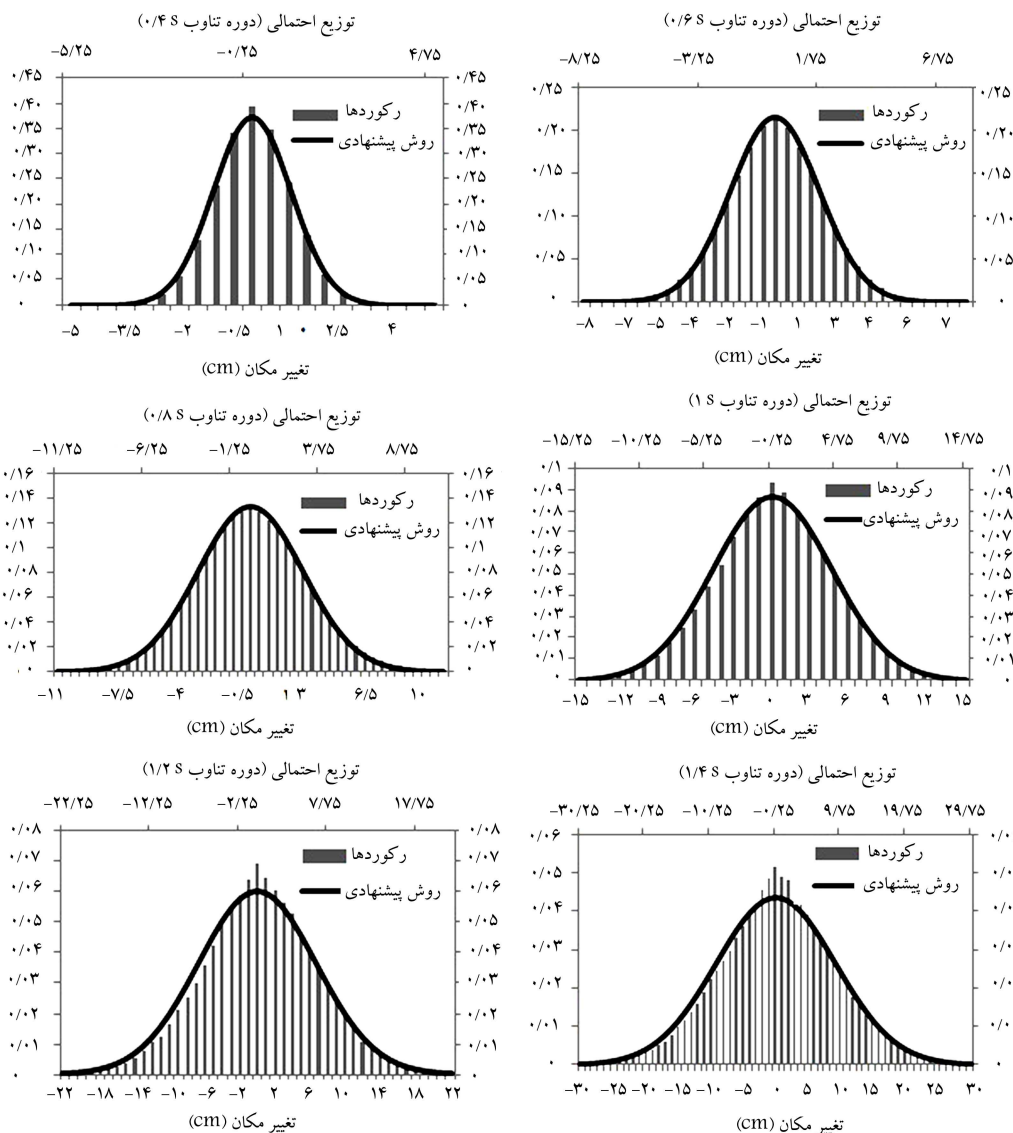
با استفاده از روابط ۱۷ و ۱۸، توزیع احتمالاتی تغییرمکان حاصل از تحلیل دینامیکی غیرخطی سیستم تحت اعمال رکوردها (توزیع تجربی) و حل در حوزه بسامد (روش پیشنهادی) تعیین می شود (شکل ۵).

همچنین جهت کنترل رابطه ۱۵، برای سیستم چند درجه ای آزاد، یک سیستم ۴ درجه ای آزاد در نظر گرفته شده است. توزیع احتمالاتی تغییرمکان نسبی در هر طبقه از سیستم ۴ درجه ای آزاد به هر دو روش تجربی و حل در حوزه بسامد با استفاده از روش خطی سازی تعیین شده است (شکل ۶). با توجه به شکل ۶، رابطه ارائه شده در حوزه بسامد برای سیستم چند درجه ای آزاد نتایج خوبی را به نمایش گذاشته است. از آنجایی که تحلیل دینامیکی سازه ای چند درجه ای آزاد تحت ۳۰۰ رکورد زمان بر است، با استفاده از روش ارائه شده می توان توزیع پاسخ سیستم چند درجه ای آزاد را در مدت زمان بسیار کوتاهی و فقط با استفاده از روابط تحلیلی ارائه شده تعیین کرد.

۲.۳. توزیع احتمالاتی پاسخ تحت تحریک غیرمانا

به طور کلی یک تحریک غیرمانا به صورت رابطه ۱۹ قابل توصیف است:

$$F(t) = A(t) W(t) \quad (19)$$



شکل ۵. توزیع احتمالاتی تغییر مکان سیستم یک درجه‌ی آزاد تحت رکورد مانا.

کرد:

$$\bar{X}_e = ((2 \ln(\nu T))^{\gamma/2} + \frac{\gamma}{(2 \ln(\nu T))^{\gamma/2}}) \sigma_X$$

$$\sigma_{\bar{X}_e} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{6} (2 \ln(\nu T))^{\gamma/2}} \right) \sigma_X$$

$$\nu = \frac{\sigma_{\dot{X}}}{\pi \sigma_X}, \quad \gamma = 0.75772, \quad T = \text{time duration} \quad (24)$$

که در آن‌ها، $\sigma_{\dot{X}}$ ، σ_X به ترتیب انحراف معیار تغییر مکان و سرعت سیستم یک درجه‌ی آزاد هستند، که از رابطه‌ی ۲۵ حاصل می‌شوند:

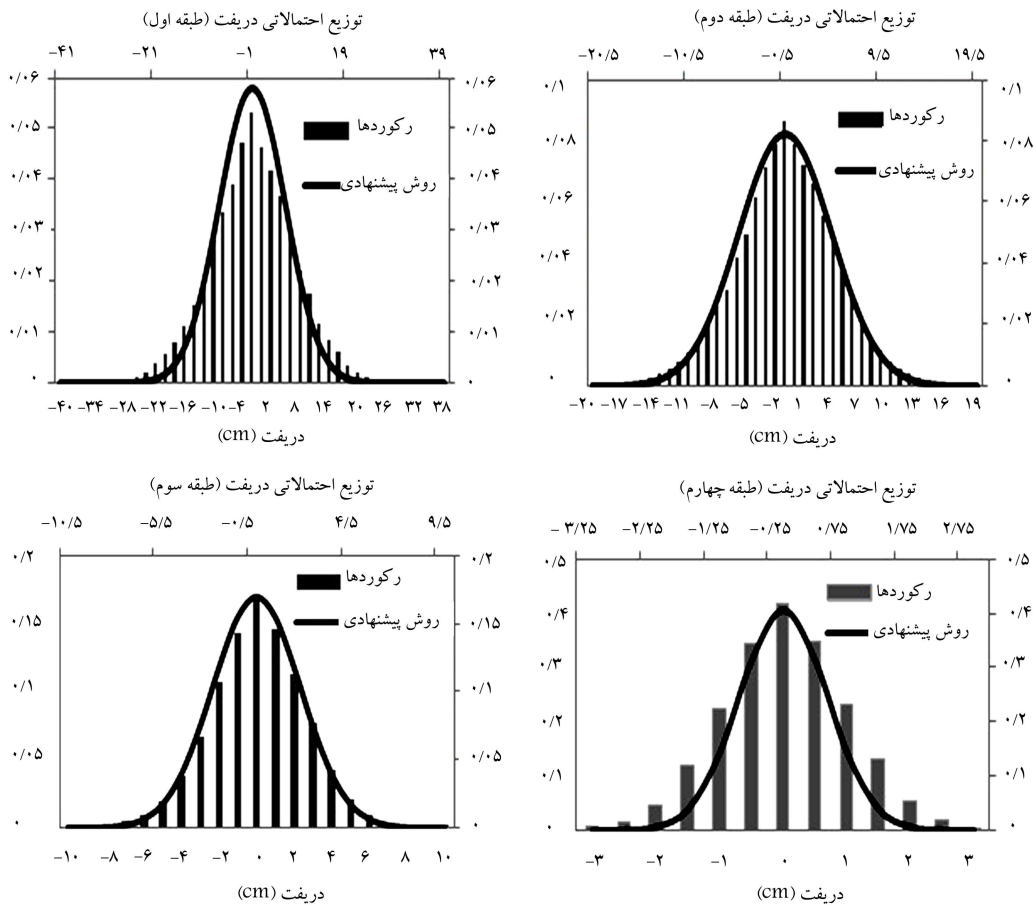
$$\sigma_{\dot{X}}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega$$

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)|^2 \omega^{-2} S_g(\omega) d\omega \quad (25)$$

۳.۳. میانگین بیشینه‌ی تغییر مکان سیستم تحت تحریک مانا و غیر مانا

غیر مانا

با توجه به اینکه میانگین بیشینه‌ی تغییر مکان (تغییر مکان هدف)، پارامتری مهم در ارزیابی عملکرد لرزه‌ی سازه است، در این مطالعه سعی شده است مقدار تغییر مکان هدف بدون نیاز به انجام تحلیل‌های دینامیکی و روش‌های تقریبی آئین‌نامه‌ی تعیین شود. جهت تعیین میانگین بیشینه‌ی تغییر مکان سیستم به صورت احتمالاتی، همان ۶ سیستم یک درجه‌ی آزاد در نظر گرفته شده و بیشینه‌ی تغییر مکان سیستم تحت هر ۳۰۰ رکورد تعیین و سپس مقدار متوسط و انحراف معیار این ۳۰۰ بیشینه‌ی تغییر مکان به دست آمده است. جهت حل در حوزه‌ی بسامد، با توجه به اینکه در قسمت قبل نشان داده شده است که توزیع احتمالاتی تغییر مکان تحت تحریک ورودی گوسی و مانا، گوسی است؛ بنابراین می‌توان از رابطه‌ی داونپورت^[۲۱] برای تعیین مقدار میانگین و انحراف معیار بیشینه‌ی تغییر مکان‌ها استفاده



شکل ۶. توزیع احتمالاتی تغییرمکان نسبی سیستم ۴ درجه‌ی آزاد تحت رکورد مانا.

با توجه به ماهیت غیرمانای زلزله، روابط باید برای سیستم تحت تحریک غیرمانا توسعه داده شوند تا قابلیت کاربرد در مسائل مهندسی زلزله را داشته باشند. در این حالت با استفاده از مقادیر انحراف معیار و زمان معادل مانا می‌توان پیشینه‌ی تغییرمکان را در حالت غیرمانا تعیین کرد:

$$\bar{X}_e = ((2 \ln(\nu T_{eq}))^{0.5} + \frac{\gamma}{(2 \ln(\nu T_{eq}))^{0.5}}) \sigma_{X_{eq}}$$

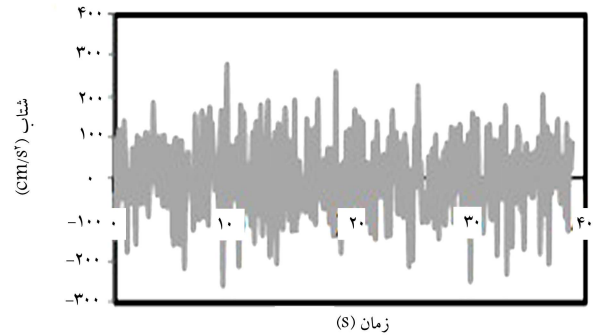
$$\sigma_{\bar{X}_e} = \left(\frac{\pi}{\sqrt{6} (2 \ln(\nu T_{eq}))^{0.5}} \right) \sigma_{X_{eq}} \quad (26)$$

رابطه‌ی ۲۶، مقدار میانگین پیشینه‌ی تغییرمکان را برای سیستم تحت تحریک غیرمانا ارائه می‌دهد. مقدار تغییرمکان هدف با استفاده از روش تقریبی آئین‌نامه‌ی نیز قابل محاسبه است. مقدار تغییرمکان هدف در گزارش FEMA-۴۴۰ از روابط ۲۷ و ۲۸ به‌دست می‌آیند:

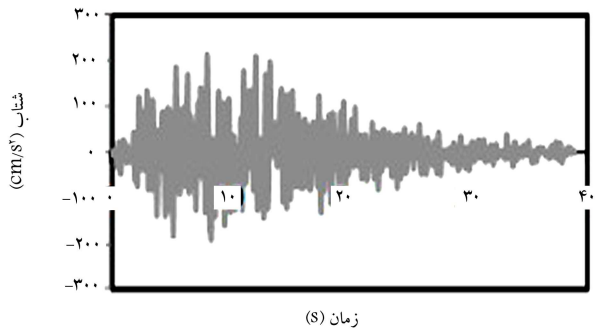
$$\delta_t = c_0 c_1 c_r S_a \frac{T_e^r}{\pi^r} g \quad (27)$$

$$c_1 = 1 + \frac{R-1}{aT_e^r}, \quad c_r = 1 + \frac{1}{\lambda^{0.05}} \left(\frac{R-1}{T_e} \right)^r, \quad R = \frac{S_a}{V_y/W} c_m \quad (28)$$

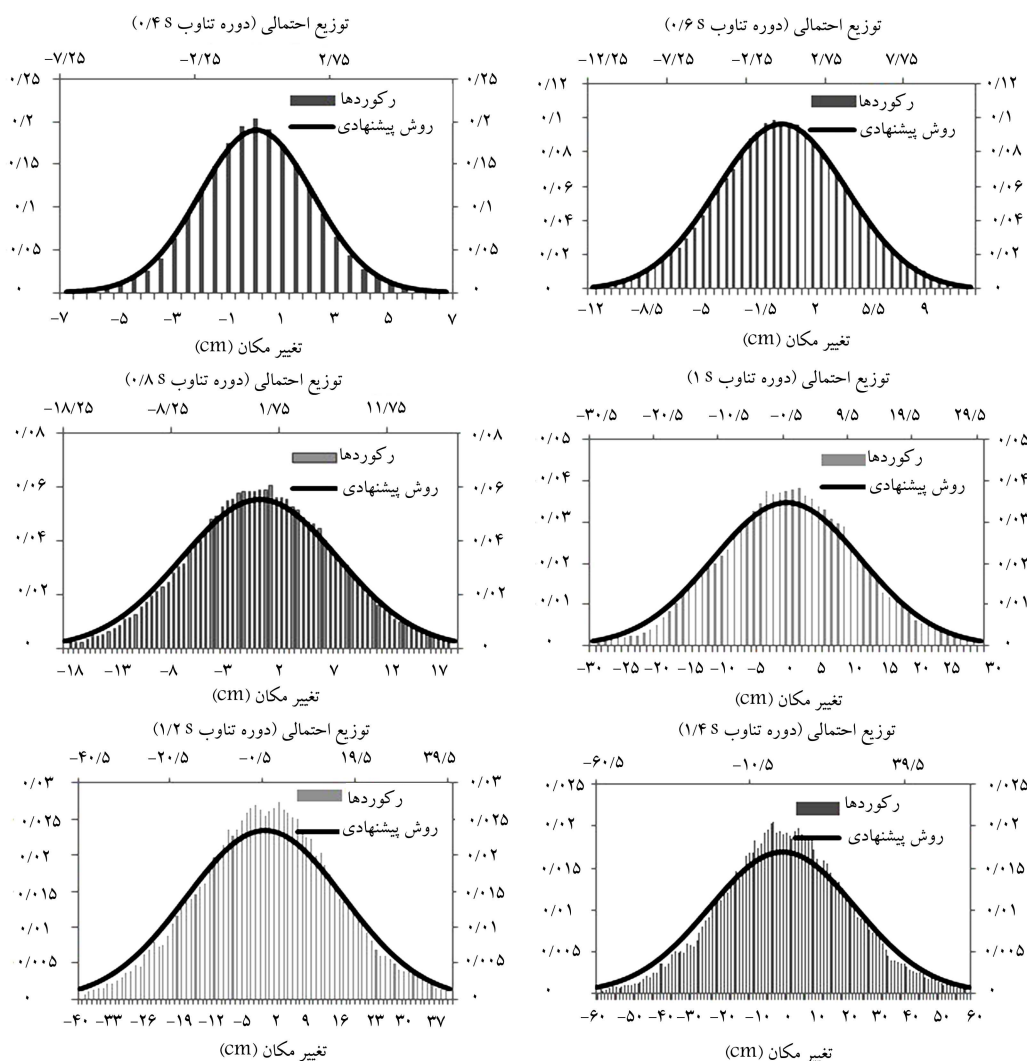
مقدار S_a در رابطه‌ی ۲۸، از طیف شتاب حاصل از 30° رکورد برای زمان تناوب مؤثر تعیین می‌شود. متوسط طیف پاسخ شتاب برای رکوردهای مصنوعی مانا در شکل ۱۰ ترسیم شده است.



شکل ۷. نمونه‌ی از شتاب‌نگاشت مصنوعی مانا.



شکل ۸. نمونه‌ی از شتاب‌نگاشت مصنوعی غیرمانا.

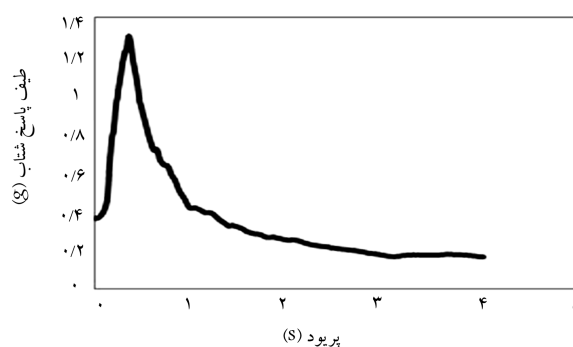


شکل ۹. توزیع احتمالاتی تغییر مکان سیستم یک درجه‌ی آزاد تحت رکورد غیرمانا.

از روش ضرایب تغییر مکان تعیین و با نتایج حاصل از به‌کارگیری رابطه‌ی ۲۶ مقایسه شده است (جدول ۱).

همان‌طور که از نتایج جدول ۱ مشهود است، نتایج هر سه روش، به میزان بیشینه‌ی ۱۰٪ با یکدیگر تفاوت دارند. این در حالی است که یک رابطه‌ی احتمالاتی، جایگزین ۳۰ مرتبه تحلیل دینامیکی غیرخطی شده است. بنابراین برای هر سیستم با مدل رفتاری بوک-ون، مقدار تغییر مکان هدف بدون انجام تحلیل دینامیکی زمان‌بر به راحتی قابل تعیین است.

مزیت اصلی روش ارائه‌شده نسبت به مدل FEMA در این است که در روش پیشنهادی، مقدار بیشینه‌ی تغییر مکان را می‌توان برای هر سطح اطمینانی به‌دست آورد (محاسبات مرتبط در پیوست ۳ ارائه شده است).



شکل ۱۰. طیف پاسخ شتاب رکوردهای مصنوعی.

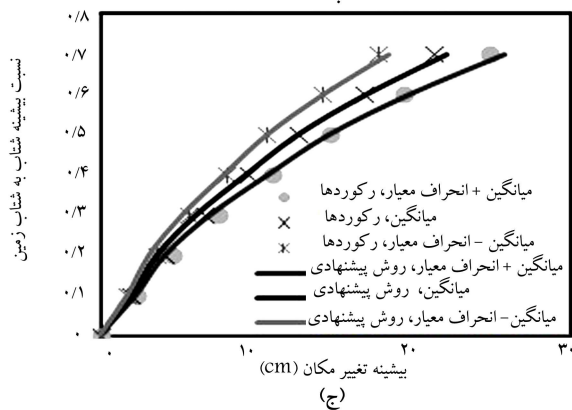
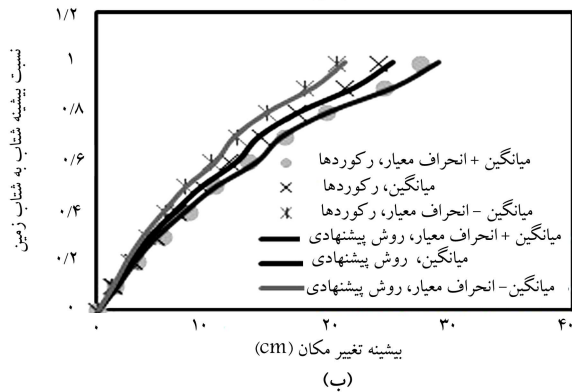
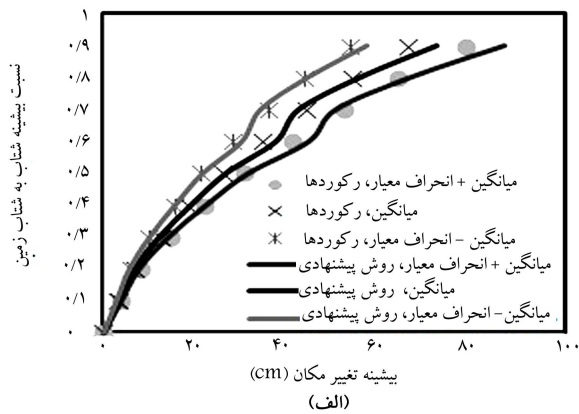
۴.۳. تعیین منحنی دینامیکی فزاینده

مناسب‌ترین روش برای بیان عملکرد سازه از حالت ارتجاعی تا فروریزش کلی سازه، روش دینامیکی فزاینده است. با این حال، با توجه به وابستگی بسیار زیاد پاسخ سازه به پارامترهای اولیه‌ی سازه چون ضریب میرایی، جرم، و همچنین خصوصیات

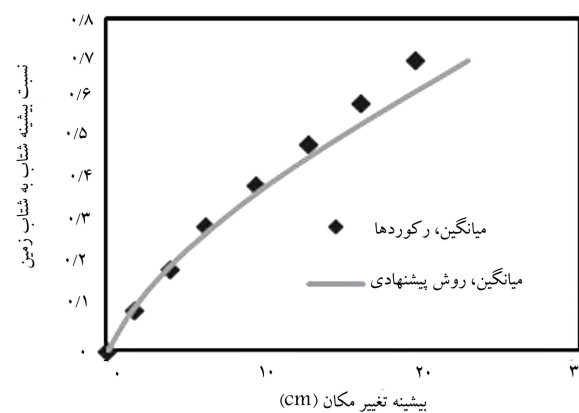
در این پژوهش تغییر مکان هدف سیستم با استفاده از روابط ارتعاشات تصادفی تعیین شده و با نتایج حاصل از تحلیل دینامیکی غیرخطی و همچنین نتایج روش ضرایب تغییر مکان در گزارش FEMA-۴۴۰ مقایسه شده است. بدین منظور همان ۶ سیستم یک درجه‌ی آزاد در نظر گرفته شده و میانگین بیشینه‌ی تغییر مکان (تغییر مکان هدف) تحت ۳۰ رکورد غیرمانا از تحلیل دینامیکی غیرخطی و همچنین با استفاده

جدول ۱. تغییر مکان هدف سیستم.

دورهی تناوب	تحلیل دینامیکی غیرخطی	روش ضرایب تغییر مکان	روش ارائه شده
۰٫۴	۴٫۳۵	۴٫۱۸	۴٫۱۸
۰٫۶	۷٫۷۴	۷٫۳۸	۶٫۹۸
۰٫۸	۱۱٫۸۴	۱۳٫۱۲	۱۲٫۹۸
۱	۱۷٫۲۵	۲۰٫۰۵	۱۸٫۱۲
۱٫۲	۲۳٫۹۲	۲۶٫۰۸	۲۶٫۳
۱٫۴	۳۹٫۹۳	۳۷٫۳	۳۸٫۷



شکل ۱۱. منحنی دینامیکی فزاینده.



شکل ۱۲. منحنی دینامیکی فزایندهی تحت رکوردهای واقعی.

محل ساخت نظیر خصوصیات خاک و حرکت زمین، تحلیل‌های دینامیکی فزاینده باید تحت مجموعه‌ی بزرگی از رکوردهای مختص ساخت‌گاه صورت گیرد تا عدم قطعیت‌های موجود در رکورد اعمالی در عملکرد سازه منظور شود. در روش پیشنهادی با توجه به تعیین مقدار میانگین بیشینه تغییر مکان و همچنین مقدار انحراف معیار مربوط به آن، منحنی دینامیکی فزاینده سیستم به صورت احتمالاتی قابل تعیین است. نتایج منحنی‌های دینامیکی فزاینده به صورت نمودارهایی با محورهایی چون مقیاس اسکالر شدت (IM) در مقابل پاسخ سازه‌ی بی‌انگیزنده پارامترهای نیاز مهندسی هستند (EDP)، نشان داده می‌شود.^[۲۲] معمولاً برای محور افقی، بیشینه تغییر مکان یا تغییر مکان نسبی سیستم دینامیکی و برای محور قائم، بیشینه شتاب زمین یا شتاب طیفی انتخاب می‌شوند. با توجه به الگوریتم پیشنهادی در این پژوهش، مقادیر متوسط پاسخ، متوسط به علاوه و منهای انحراف معیار در بیشینه شتاب‌های مختلف زمین قابل ترسیم است. بیشینه شتاب ضریبی از چگالی طیفی ورودی (بیشینه شتاب متناظر با مجذور S_k است) و بیشینه تغییر مکان باید از خصوصیات آماری سیستم تحت تحریک ورودی حاصل شود. به عنوان نمونه، منحنی دینامیکی حاصل از 30° تحلیل دینامیکی غیرخطی و همچنین حاصل از حل در حوزه‌ی بسامد برای سیستم یک درجه‌ی آزاد (حاصل یک بار تحلیل برای چگالی طیفی رکوردها) با این مشخصات:

$$\xi = 0.05, \quad \alpha = 0.1, \quad \beta = 0.7, \quad \gamma = -0.5, \quad n = 1$$

و برای ۳ دوره‌ی تناوب اولیه‌ی سیستم برابر با ۰٫۴، ۰٫۶ و ۰٫۳ ثانیه به ترتیب در شکل ۱۱ ارائه شده است.

همان‌طور که از شکل ۱۱ مشهود است، نتایج حاصل از 30° تحلیل دینامیکی غیرخطی با نتایج روش پیشنهادی که مبتنی بر حل در حوزه‌ی بسامد است، انطباق خوبی دارد. بنابراین می‌توان به جای استفاده از آنالیز زمان‌بر دینامیکی فزاینده، از حل در حوزه‌ی بسامد و با حجم محاسبات بسیار کمتر استفاده کرد و به نتایجی با دقت خوب رسید.

همچنین به منظور ارائه‌ی بهتر روابط و الگوریتم پیشنهادی و همچنین شناسایی بهتر کاربرد آن، نتایج حاصل از به‌کارگیری رکوردهای واقعی ارائه شده است. از این رو، ۲۰ رکورد واقعی در نظر گرفته شده است. مشخصات این رکوردها در پیوست ۴ موجود است. تمامی رکوردها به شتاب بیشینه یکسان مقیاس شده‌اند. با تعیین تابع چگالی طیفی رکوردها، میانگین پاسخ سیستم تحت رکوردهای واقعی قابل محاسبه است. منحنی دینامیکی افزایشی سیستم یک درجه‌ی آزاد تحت ۲۰ رکورد واقعی و همچنین از طریق حل در حوزه‌ی بسامد در شکل ۱۲ نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل ۱۲ مشهود است، نتایج حاصل از 20° تحلیل دینامیکی

غیرخطی با نتایج روش پیشنهادی که مبتنی بر حل در حوزه‌ی بسامد است، انطباق خوبی دارد و اختلاف مشاهده‌شده به علت تعداد کم رکوردها است.^[۲۳]

۴. نتیجه‌گیری

روشی تحلیلی برای تعیین توزیع احتمالاتی پاسخ و همچنین تغییرمکان هدف و منحنی دینامیکی فزاینده‌ی سیستم‌های دینامیکی یک درجه‌ی آزاد و چند درجه‌ی آزاد براساس بسط تئوری ارتعاشات تصادفی در محدوده‌ی غیرخطی و حل در

حوزه‌ی بسامد سیستم معادل خطی ارائه شده است. الگوریتم پیشنهادی، توزیع احتمالاتی تغییرمکان سازه و پیشینه‌ی آن را در قالب یک حل تحلیلی بسته ارائه می‌دهد. همچنین روش ارائه‌شده، به میزان قابل توجهی کاربرد مدل‌های غیرمانا را در فعالیت‌های مهندسی آسان می‌کند. این روش با استفاده از تقریب فرایند غیرمانا توسط فرایند مانا از مشکلات محاسباتی مربوط به فرایند غیرمانا می‌کاهد. مزیت اصلی این روش تعیین پیشینه‌ی پاسخ و همچنین نیاز لرزه‌ی سازه‌ها در یک سطح احتمال وقوع مشخص، بدون نیاز به انجام تحلیل‌های دینامیکی گسترده است. بر طبق نتایج تحلیلی به‌دست‌آمده، نتایج روش ارائه‌شده با نتایج حاصل از تعداد زیادی تحلیل دینامیکی غیرخطی انطباق خوبی دارد.

پانوشتها

1. record-to-record uncertainties
2. closed form
3. iteration
4. Barbato
5. Schenk
6. Bouc-Wen

منابع (References)

1. Di Sciuva, M. and Lomario, D. "A comparison between Monte Carlo and FORMs in calculating the reliability of a composite structure", *Composite Structures*, **59**(1), pp. 155-162 (2003).
2. Melchers, R.E. and Ahammed, M. "A fast approximate method for parameter sensitivity estimation in Monte Carlo structural reliability", *Computers and Structures*, **82**(1), pp. 55-61 (2004).
3. Noh, H.-C. and Park, T. "Monte Carlo simulation-compatible stochastic field for application to expansion-based stochastic finite element method", *Computers and Structures*, **84**(31-32), pp. 2363-2372 (2006).
4. Lei, Z. and Qiu, C. "Neumann dynamic stochastic finite element method of vibration for structures with stochastic parameters to random excitation", *Computers and Structures*, **77**(6), pp. 651-657 (2006).
5. Ghanem, R.G. and Spanos, P.D. "Spectral stochastic finite-element formulation for reliability analysis", *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **117**(10), pp. 2351-2372 (1991).
6. Li, J. and Chen, J.B. "The principle of preservation of probability and the generalized density evolution equation", *Structural Safety*, **30**(1), pp. 65-77 (2006).
7. FEMA 440, NEHRP, *Improvement of Nonlinear Static Seismic Analysis Procedures* (2005).
8. Barbato, M. and Conte, J. "Structural reliability applications of nonstationary spectral characteristics", *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, **137**(5), pp. 371-382 (2011).
9. Schenk, C.A. and Schuëller, G.I., *Uncertainty Assessment of Large Finite Element Systems*, Berlin, Springer (2005).
10. Bouc, R. "Forced vibration of mechanical system with hysteresis", In: *Proc. of 4th Conference on Nonlinear Oscillation, Prague, Czechoslovakia*. p. 315 (1967).
11. Wen, Y. "Method for random vibration of hysteretic systems", *J. Eng. Mech., ASCE*, **102**(2), pp. 249-263 (1967).
12. Ismail, M., Ikhrouane, F. and Rodellar, J. "The hysteresis Bouc-Wen model, a survey", *Computational Methods in Engineering*, **16**(2), pp. 161-188 (2009).
13. Kanai, K. "Semi-empirical formula for the seismic characteristics of the ground motion", *Bulletine of the Earthquake Research Institute Univ of Tokyo*, **35**, pp. 209-325 (1957).
14. Tajimi, H. "A statistical method of determining the maximum response of building structure during an earthquake", *Proc. of 2nd WCEE*, **2**, Science Council of Japan, Tokyo, pp. 781-798 (1967).
15. Elghadamsi, F.E., Mohraz, B. and Moayyad, P. "Time-dependent power spectral density of earthquake ground motions", *Int. J. Soil Dyn. And Earth. Eng.*, **7**(1), pp. 15-21 (1988).
16. Wen, Y. "Equivalent linearization for hysteretic systems under random excitation. Trans", *ASME J. APP. Mesh.*, **47**(1), pp. 150-154 (1988).
17. Foliente, G., Singh, M. and Noori, M. "Equivalent linearization of generally pinching hysteretic, degrading systems", *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, **25**(6), pp. 611-629 (1996).
18. Rice, J.A., *Mathematical Statistics and Data Analysis*, University of California, Berkeley (2007).
19. Shinozuka, M. and Sato, Y. "Simulation of non-stationary random processes", *J. Eng. Mech. Div.*, **93**(1), pp. 11-40 (1967).
20. Michaelov, G., Sarkani, S. and Lutes, L. "Extreme value of response to nonstationary excitation", *ASCE, J. Eng. Mech.*, **127**:4(352), pp. 352-363 (2001).
21. Davenport, A.G. "Note on the distribution of the largest value of a random function with application to gust loading", *Proc. Inst. Civ. Engrg.*, **28**(2), pp. 187-196 (1964).
22. Vamvatsikos, D. and Cornell, C.A. "Incremental dynamic analysis", *Earthquake Spectra*, **31**(3), pp. 491-514 (2002).
23. Rahimi, S. "Proposed a computational algorithm for simulating earthquake induced pounding on the behaviour of adjacent structures", Ph.D. Thesis, Tarbiat Modares university, Tehran, Iran (2014).

و در نهایت مربع تابع پاسخ بسامدی به این صورت است:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{\left(\alpha \omega^2 - \omega^2 + (\alpha - 1) \frac{c_e \omega^2 c_e}{\omega^2 + k_e}\right)^2 + \left(2\xi \omega - (\alpha - 1) \frac{c_e \omega c_e k_e}{\omega^2 + k_e}\right)^2}$$

۲. مقدار انحراف معیار سیستم بوک - ون خطی شده تحت تحریک با فرایند غیرمانا

شتاب‌نگاشت غیرمانا از ضرب یک شتاب‌نگاشت مانا در یک تابع زمانی حاصل می‌شود:

$$F = A(t).W$$

که در آن W شتاب‌نگاشت مانا و A فیلتر زمانی است، که شتاب‌نگاشت مانا را به غیرمانا تبدیل می‌کند. اگر شتاب‌نگاشت مانا چگالی طیفی $S_g(w)$ داشته باشد، چگالی طیفی شتاب‌نگاشت غیرمانا برابر است با (با استفاده از روش جداسازی متغیرها):

$$S_F(w, t) = A^T(t).S_g(w)$$

بنابراین برای یک سیستم یک درجه‌ی آزاد، واریانس در حالت غیرمانا به این صورت است:

$$\sigma_{X_{ns}}^2(t) = \int S_F(w, t).H^T(w)dw = \int S_g(w).A^T(t)H^T(w)dw$$

$$\sigma_{X_{ns}}^2(t) = \int S_F(w, t).H^T(w)dw = A^T(t) \int S_g(w).H^T(w)dw$$

$$\sigma_{X_{ns}}^2(t) = A^T(t)\sigma_{X_s}^2$$

که در آن $\sigma_{X_{ns}}^2$ و $\sigma_{X_s}^2$ به ترتیب، واریانس سیستم تحت تحریک مانا و غیرماناست.

۳. بیشینه‌ی تغییرمکان با احتمال وقوع مشخص

توزیع احتمالاتی تغییرمکان بیشینه برابر است با:

$$p(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln(x)-\mu)^2/2\sigma^2}$$

که در آن μ و σ به ترتیب مقدار میانگین تغییرمکان بیشینه و انحراف معیار تغییرمکان بیشینه هستند. توزیع تجمعی تغییرمکان بیشینه برابر است با:

$$CDF = \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \text{erf} \left(\frac{\ln(x) - \mu}{\sigma\sqrt{2}} \right)$$

با مساوی قرار دادن توزیع تجمعی با مقدار مشخصی مانند p ، مقدار تغییرمکان بیشینه‌ی سیستم با احتمال رخداد p درصد قابل محاسبه است.

۴. مشخصات رکوردهای واقعی

۱. تابع پاسخ بسامدی مدل بوک - ون خطی سازی شده در این پژوهش سیستم یک درجه‌ی آزادی با مدل رفتاری بوک - ون خطی شده به این صورت است:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \alpha kx + (\alpha - 1)kz = -m\ddot{u}_g(t)$$

$$\dot{z} = c_e \dot{x} + k_e z$$

اگر تحریک ورودی به صورت یک تابع نمایی در نظر گرفته شود، پاسخ‌ها به صورت نمایی به این صورت هستند:

$$\ddot{u}_g = e^{i\omega t}, \quad x = H(\omega)e^{i\omega t}, \quad \dot{x} = i\omega H(\omega)e^{i\omega t}$$

$$\dot{z} = c_e \dot{x} + k_e z \rightarrow \dot{z} - k_e z = c_e i\omega H(\omega)e^{i\omega t}$$

معادله‌ی به دست آمده از مشتق z ، یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی اول است. با استفاده از اپراتور دیفرانسیلی، ریشه‌ی معادله به این صورت خواهد بود:

$$D - k_e = 0 \rightarrow D = k_e \rightarrow k_e \neq i\omega$$

زمانی که ریشه‌ی معادله‌ی مرتبه‌ی اول با مقدار توان تابع نمایی سمت راست معادله برابر نباشد، پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل برابر با ضرب یک تابع چند جمله‌ی در تابع نمایی است. این چند جمله‌ی، هم‌درجه با ضریب تابع نمایی در سمت راست معادله است. از آنجایی که ضریب تابع نمایی یک ضریب ثابت است، پاسخ z به این صورت خواهد بود:

$$z = A e^{a t}$$

با جایگذاری z در معادله‌ی دیفرانسیل، مقدار A برابر خواهد بود با:

$$A = \frac{c_e i\omega H(\omega)}{(i\omega - k_e)}$$

با استفاده از ضرایب به دست آمده مقدار z برابر است با:

$$z = \frac{c_e i\omega H(\omega)}{(i\omega - k_e)} e^{i\omega t}$$

با جایگذاری مقدار z ، شتاب، سرعت و تغییرمکان در معادله‌ی بوک - ون به این صورت خواهد بود:

$$\ddot{u}_g = e^{i\omega t}, \quad x = H(\omega)e^{i\omega t}, \quad \dot{x} = i\omega H(\omega)e^{i\omega t}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 H(\omega)e^{i\omega t}, \quad z = \frac{c_e i\omega H(\omega)}{(i\omega - k_e)} e^{i\omega t}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + \alpha kx + (\alpha - 1)kz = -m\ddot{u}_g(t)$$

$$m(-\omega^2 H(\omega)e^{i\omega t}) + c(i\omega H(\omega)e^{i\omega t}) + \alpha k(H(\omega)e^{i\omega t})$$

$$+ (\alpha - 1)k \left(\frac{c_e i\omega H(\omega)}{(i\omega - k_e)} e^{i\omega t} \right) = -m e^{i\omega t}$$

با حذف تابع نمایی از دو طرف و فاکتورگیری از H ، این رابطه حاصل خواهد شد:

$$H(\omega) = \frac{-m}{[-m\omega^2 + ic\omega + \alpha k + (\alpha - 1)k \left(\frac{c_e i\omega}{i\omega - k_e} \right)]}$$

مؤلفه انتخابی	بیشینه شتاب مؤلفه		نوع خاک	ایستگاه	فاصله از گسل (km)	بزرگی	سال	محل	نام رکورد ID	شماره
	Y	X								
X	۰٫۱۱۶	۰٫۱۱۴	C	Fortuna-Fortuna Blvd	۲۳٫۶	۷٫۱	۱۹۹۲	Capr Mendocino	FOR	۱
X	۰٫۳۸۵	۰٫۵۴۹	C	Rio Dell Overpass-FF	۱۸٫۵	۷٫۱	۱۹۹۲	Capr Mendocino	RIO	۲
Y	۰٫۱۰۷	۰٫۱۳۴	C	Lamont 1061	۱۵٫۶	۷٫۱	۱۹۹۹	Duzce	۱۰۶۱	۳
X	۰٫۲۴۲	۰٫۲۷۳	C	NFaning Rd	۲۳٫۹	۶٫۷	۱۹۹۴	Northridge	FAR	۴
Y	۰٫۲۴	۰٫۱۶۲	C	Fletcher Dr	۲۹٫۵	۶٫۷	۱۹۹۴	Northridge	FLE	۵
Y	۰٫۱۲۶	۰٫۱۷	C	GHroy Aray#6	۱۹٫۹	۶٫۹	۱۹۸۹	Loma Prieta	G۰۶	۶
X	۰٫۲۴۴	۰٫۲۴	C	Anderson Dam(Downst)	۲۱٫۴	۶٫۹	۱۹۸۹	Loma Prieta	AND	۷
X	۰٫۰۶۴	۰٫۰۷۷	C	Anderson Dam(Abut)	۲۱٫۴	۶٫۹	۱۹۸۹	Loma Prieta	ADL	۸
X	۰٫۱۶	۰٫۱۷۹	C	Coyoto Lake Dam	۲۲٫۳	۶٫۹	۱۹۸۹	Loma Prieta	CLD	۹
Y	۰٫۵۶۴	۰٫۵۱۴	C	Castaic-Old Ridge Route	۲۲٫۶	۶٫۷	۱۹۹۴	Northridge	ORR	۱۰
Y	۰٫۲۳۹	۰٫۱۶۸	C	LA-Baldwin Hills	۳۱٫۳	۶٫۷	۱۹۹۴	Northridge	BLD	۱۱
X	۰٫۶۱۷	۰٫۴۴	C	Beverly Hills-12520 Mulhol	۲۰٫۸	۶٫۷	۱۹۹۴	Northridge	MU۲	۱۲
Y	۰٫۱۶۳	۰٫۲۴۵	C	Big Tujunga, Angeles Nat F	۲۴	۶٫۷	۱۹۹۴	Northridge	TUJ	۱۳
X	۰٫۲۵۶	۰٫۲۲۲	C	La-Century City C North	۲۵٫۷	۶٫۷	۱۹۹۴	Northridge	CCN	۱۴
X	۰٫۲۲۵	۰٫۱۸۵	C	LA-Chalon Rd	۲۳٫۷	۶٫۷	۱۹۹۴	Northridge	CHL	۱۵
X	۰٫۱۲۷	۰٫۱۵۷	C	Sunland-Mt Gleason Ave	۱۷٫۷	۶٫۷	۱۹۹۴	Northridge	GLE	۱۶
Y	۰٫۱۲	۰٫۱۶۳	C	urbank-Howard Rd	۲۰	۶٫۷	۱۹۹۴	Northridge	HOW	۱۷
X	۰٫۱۳۶	۰٫۲۴۶	C	Hollywood-Willoughby A	۲۵٫۷	۶٫۷	۱۹۹۴	Northridge	WIL	۱۸
X	۰٫۱۵۱	۰٫۱۳۹	C	Vasquez Rocks Park	۲۴٫۲	۶٫۷	۱۹۹۴	Northridge	VAS	۱۹
X	۰٫۳۲۴	۰٫۲۶۸	C	Castaic-Old Ridge Route	۲۴٫۹	۶٫۶	۱۹۷۱	San Fernando	SORP	۲۰