

# مدل سازی رفتار سخت شدگی المان های بتن مسلح تقویت شده با FRP در کشش خالص

سارا رهنمای سپهر (کارشناس ارشد)

مسعود سلطانی محمدی (دانشیار)

دانشکده ی مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

با توجه به گسترش کاربرد کامپوزیت ها در تقویت سازه های بتنی، توسعه ی مدل های رفتاری و ارائه ی روش های مناسب برای تحلیل المان های بتن مسلح تقویت شده با این مصالح، ضروری است. در این نوشتار، یک روش تحلیلی مبتنی بر ریزمدل سازی، برای شبیه سازی پاسخ پس از ترک خوردگی المان های بتن مسلح تحت کشش خالص ارائه می شود. در این روش، انتقال تنش از آرماتور و FRP به بتن با استفاده از مدل های غیرخطی چسبندگی - لغزش محاسبه و بر مبنای آن، گسترش ترک ها و رفتار پس از ترک خوردگی المان تعیین شده است. همچنین برنامه یی به زبان فرترن مبتنی بر الگوریتم پیشنهادی تدوین شده است که قابلیت محاسبه ی توزیع کرنش، تنش و لغزش در طول المان، ارتباط بین متوسط کرنش و متوسط تنش بتن، فولاد و FRP (مدل های رفتاری متوسط) و نیز فاصله ی متوسط ترک ها را داراست. نتایج حاصل از برنامه ی تدوین شده با نتایج تعدادی از آزمایش های موجود مقایسه و اعتبار سنجی شده است.

واژگان کلیدی: بتن مسلح تقویت شده با FRP، ریزمدل سازی، سخت شدگی کششی.

sarahnama@yahoo.com  
msoltani@modares.ac.ir

## مقدمه

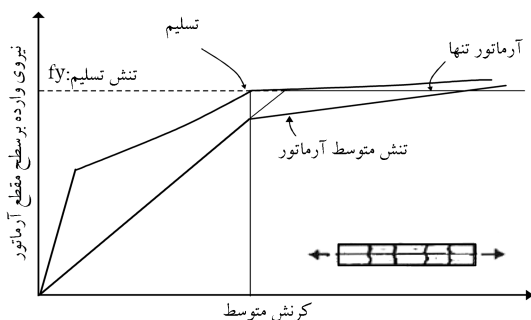
تنش های کششی را تحمل کند و در باربری کششی سهمیم باشد.<sup>[۱]</sup> در این حالت در یک کرنش متوسط مشخص، سختی بتن مسلح پس از ترک خوردگی، از سختی مواد تسلیح کننده به تنهایی (میلگرد و FRP) بزرگ تر است. این پدیده را سخت شدگی کششی<sup>۱</sup> می نامند.

سخت شدگی کششی بتن مسلح ترک خورده، بر تغییر شکل و عرض ترک اعضای بتن مسلح تحت خمش یا نیروی کششی تأثیر می گذارد. همچنین این رفتار، کنترل کننده ی عرض و فاصله ی ترک های برشی است که در قابلیت انتقال برش در سطح ترک ها و ظرفیت برشی اعضا مؤثر است. در مدل سازی اجزاء محدود سازه های بتنی، مدل رفتاری سخت شدگی کششی با کنترل کرنش های کششی المان های بتن مسلح، تأثیر بالایی در پیش بینی مقاومت برشی و شکل پذیری اعضای بتن مسلح دارد و لذا شبیه سازی مناسب رفتار پس از ترک خوردگی اعضای بتن مسلح و توسعه ی مدل های رفتاری مربوطه اهمیت بالایی دارد. در خصوص رفتار سخت شدگی المان های بتن مسلح تحقیقات زیادی خصوصاً در دهه ی اخیر انجام شده است. اما این تحقیقات عموماً به المان های بتن مسلح با میلگرد فولادی متمرکز بوده اند و تحقیقات بسیار اندکی در خصوص تأثیر FRP بر منحنی سخت شدگی کششی و گسترش ترک صورت گرفته است.

به طور کلی اثر سخت شدگی کششی به سه روش: الف) آزمایشگاهی، ب) ساده سازی توزیع تنش و ج) ریزمدل سازی رفتار، قابل بررسی است. در روش آزمایشگاهی، نمونه های بتن مسلح به صورت کشش تک محوره بارگذاری می شوند و رفتار پس از ترک خوردگی و نحوه ی گسترش ترک بررسی می شود. بر مبنای منحنی

تحلیل غیرخطی سازه های بتن مسلح می تواند با استفاده از مدل های رفتاری برای آرماتور و بتن، به علاوه ی مدل سازی چسبندگی - لغزش بین آرماتور و بتن، صورت گیرد. با این مدل های رفتاری، رفتار غیرخطی سازه با استفاده از روش اجزاء محدود، به خوبی تخمین زده می شود. ولی استفاده از این مدل ها مستلزم ریزکردن المان ها و استفاده از المان های تماسی بین فولاد و بتن است که منجر به افزایش درجات آزادی و نیز زمان محاسبات بسیار بالا می شود. لذا استفاده از روش ترک پخشی در اجزاء محدود، طی سالیان اخیر مورد توجه قرار گرفته است.<sup>[۱]</sup> در روش ترک پخشی، المان تماسی به صورت صریح استفاده نمی شود. چسبندگی با استفاده از مدل های رفتاری متوسط برای بتن و آرماتور، غیرمستقیم وارد می شود. در این روش فرض می شود ترک های زیادی داخل المان گسترش یافته است و از مدل های رفتاری مبتنی بر ارتباط متوسط تنش ها و کرنش های بتن و آرماتور استفاده می شود. توسعه ی مدل های رفتاری در روش ترک پخشی، می تواند بر مبنای مطالعه ی آزمایشگاهی روی نمونه های بتنی و یا استفاده از ریزمدل سازی رفتار المان بتن مسلح با در نظر گرفتن اندرکنش فولاد و بتن صورت گیرد. به همین طریق می توان مدل های رفتاری المان های تسلیح شده با FRP را نیز مورد مطالعه قرار داد.

در بتن مسلح ترک خورده، اعضا تسلیح کننده (میلگرد و FRP) در محل ترک تمام نیروی کششی اعمالی را تحمل می کنند. اما در فاصله ی بین ترک های مجاور، بتن می تواند به واسطه ی تنش های منتقل شده از مصالح تسلیح کننده، قسمتی از



شکل ۱. پاسخ متوسط آرماتور محصور شده در بتن و آرماتور تنها به صورت نمونه. [۱]

است، که این موضوع با توجه به اینکه لغزش و تنش های چسبندگی در وسط دو ترک متوالی صفر است، فرض قابل قبولی است.

در پژوهشی دیگر، یک پروفیل تنش دیگر فرض شده است که ترکیبی از تابع کسینوسی [۱۰] و دو تابع سینوسی دیگر است. [۶] هدف از این اصلاح، شبیه سازی این واقعیت است که پس از جاری شدن آرماتور، تنش چسبندگی بین آرماتور و بتن رو به زوال می گذارد و تنش آرماتور در نزدیکی ترک ها یکنواخت می شود.

هر دو فرضیه [۱۰، ۶] برای بتن با آرماتور زیاد، که در آن فاصله ی ترک ها نسبتاً کوچک است، قابل قبول است. به هر صورت برای بتن با آرماتور کم، فاصله ی ترک ها بیشتر است و مانند بتن غیر مسلح تمایل به متمرکز شدن دارد. لذا هر دو توزیع تنش [۱۰، ۶] برای بتن با آرماتور کم معتبر نیست و تنش متمرکز فولاد باید از خواص چسبندگی و لغزش آرماتور و بتن محاسبه شود. در این حالت، استفاده از روش ریزمدل سازی و بررسی تنش ها و کرنش های محلی در طول آرماتور و بتن، بهترین شیوه در بررسی رفتار پس از ترک خوردگی این اعضا است.

با ریزمدل سازی رفتار اندرکنشی فولاد و بتن و حل معادله های تعادل و بررسی لغزش آرماتور در طول نمونه های بتنی تحت کشش، می توان توزیع محلی تنش و کرنش فولاد و بتن، مدل های رفتاری متوسط فولاد و بتن پس از ترک خوردگی و همچنین فاصله و عرض ترک های گسترش یافته را محاسبه کرد.

همچنین با استفاده از مدل قوی چسبندگی - لغزش - کرنش [۱۰] به بررسی عددی رفتار ترک خوردگی نمونه های بتنی تحت کشش خالص پرداخته شده است. [۸] بررسی کامل تری از رفتار ترک خوردگی المان های بتن مسلح تحت ترکیبات متفاوت نیروهای داخل صفحه با اعمال لغزش صفحات ترک تحت برش، مورد بررسی قرار گرفت. [۹] در تحقیق حاضر روش ریزمدل سازی فوق به عنوان مبنای محاسبات استفاده شده است و با اصلاح و اعمال تأثیر FRP، به بررسی رفتار ترک خوردگی المان های تقویت شده با FRP پرداخته می شود.

در ادامه ابتدا روش محاسباتی برای بررسی گسترش ترک در نمونه های بتنی تسلیح شده با آرماتور ارائه می شود. سپس این روش محاسباتی برای بررسی المان های بتن مسلح تقویت شده با FRP تکمیل و مورد استفاده قرار می گیرد.

به طور کلی برای ریزمدل سازی اندرکنش فولاد و بتن، باید معادله های تعادل نیروها و سازگاری تغییر شکل ها به طور هم زمان و به شرح زیر حل شوند: [۹]

**معادله ی اول:** با تقسیم بندی آرماتور بین دو ترک متوالی، به نوارهای کوچک و ارضاء کردن تعادل استاتیکی، معادله ی تعادل نیروها به صورت رابطه ی ۱ به دست می آید:

$$\frac{d\sigma}{dx} = \frac{\pi d}{A_s} \tau \quad (1)$$

در رابطه ی ۱،  $\frac{d\sigma}{dx}$  گرادیان تنش محوری در راستای محور آرماتور؛  $A_s$  مساحت

نیرو - تغییر مکان حاصله و تقسیم تغییر مکان به طول و نیرو به سطح مقطع، متوسط تنش - کرنش نمونه ی تسلیح شده محاسبه می شود که تفاضل آن از رفتار آرماتور تنها،  $\sigma_2$  معرف میزان شرکت پذیری بتن در رفتار (سخت شدگی کششی بتن) است. مدل های برخی پژوهشگران در این زمینه بر مبنای مطالعات آزمایشگاهی بوده اند. [۴-۲] در خصوص رفتار کششی المان های بتنی تقویت شده با FRP نیز آزمایش هایی انجام شده است که در بخش های بعد به تفصیل ارائه می شود.

روش دوم بر مبنای فرض یک توزیع ساده ی تنش در راستای آرماتور و بین ترک ها است که در این مورد می توان به مدل هایی اشاره کرد که مبتنی بر فرض توزیع کسینوسی تنش آرماتور بین دو ترک متوالی بوده اند. [۶، ۵] با فرض این توزیع تنش ساده، پاسخ میانگین آرماتور محاسبه می شود.

روش سوم حل معادله های تعادل نیروهای چسبندگی و سازگاری تغییر شکل ها در طول آرماتور و بتن به روش ریزمدل سازی است. [۷-۹] در این پژوهش، روش سوم استفاده شده است و با ریزمدل سازی رفتار کششی المان های بتنی تسلیح شده با فولاد و FRP و در نظر گرفتن اندرکنش بین آن ها (رفتار لغزش - چسبندگی)، پروفیل مقادیر تنش و کرنش های محلی در طول آرماتور و FRP که متوسط آن معرف مدل های رفتاری متوسط المان در کشش خواهد بود، به صورت عددی شبیه سازی می شود. همچنین با استفاده از روش توسعه داده شده، متوسط عرض و فاصله ی ترک های کششی قابل محاسبه خواهند بود.

## روش ریزمدل سازی برای تعیین توزیع تنش - کرنش

### فولاد و بتن

سخت شدگی کششی بتن نشان دهنده ی توانایی بتن برای تحمل نیروهای کششی داخلی، که بین ترک های نزدیک به هم گسترش می یابند، است. در محل مقطع ترک خورده، نیروی کششی متمرکز توسط آرماتور و تنش نرم شدگی پسماند بتن تحمل می شود. نیروی آرماتور از طریق انتقال تنش چسبندگی بین بتن و آرماتور، در طول آرماتور به بتن منتقل می شود و لذا قسمتی از نیروی کششی را بتن در ناحیه ی ترک نخورده تحمل خواهد کرد. در مدل سازی محیط پیوسته اعضا بتنی ترک خورده به روش ترک پخشی، تأثیر سخت شدگی کششی با اصلاح مدل رفتاری بتن پس از ترک خوردگی و استفاده از رابطه های تنش - کرنش متوسط منظور می شود.

هم زمان، رابطه ی تنش - کرنش آرماتور باید بر اساس متوسط باشد. چون تنش آرماتور در طول محور آن متغیر است، رابطه ی تنش متوسط - کرنش متوسط آرماتور به صورت قابل ملاحظه یی با رفتار نقطه یی آرماتور تنها، پس از ترک خوردگی متفاوت است. [۱۰] آرماتور در محل ترک قبل از سایر قسمت های آن، شروع به جاری شدن می کند. لذا تنش جاری شدن متوسط، به طور کلی کمتر از تنش جاری شدن آرماتور تنها است (شکل ۱). پس از جاری شدن، قسمتی از آرماتور در نزدیکی ترک ها به ناحیه ی سخت شدگی کرنش وارد می شود در حالی که قسمت های باقیمانده هنوز در ناحیه ی ارتجاعی هستند. لذا سختی متوسط نمونه ی بتن مسلح پس از ترک خوردگی، مرکب از سختی ناحیه ی ارتجاعی و سختی ناحیه ی سخت شدگی است. معمولاً در روش ترک پخشی، یک مدل دوخطی برای پاسخ متوسط آرماتورهای فولادی فرض می شود. رابطه ی تنش متوسط - کرنش متوسط آرماتور با فرض توزیع تنش آرماتور به صورت یک پروفیل کسینوسی کامل بین دو ترک مجاور محاسبه شده است. [۱۰] این انتخاب برای توزیع تنش به صورت کسینوسی، بر اساس این حقیقت است که تابع کسینوسی یک تابع متقارن است و لذا مشتق آن در وسط فاصله ی ترک ها صفر

مجدداً بررسی می‌شود. ترک‌ها تا زمان پایدار شدن، گسترش می‌یابند. در این زمان، با افزایش بار، دیگر ترک جدیدی در طول نمونه ایجاد نمی‌شود و فقط عرض ترک‌های موجود افزایش می‌یابد. این حالت، یا پس از جاری شدن آرماتور، در اثر آفت ناگهانی تنش‌های چسبندگی اتفاق می‌افتد و یا پس از اینکه فاصله‌ی ترک‌ها به اندازه‌ی کوچک شود که ناحیه‌ی انتقال تنش چسبندگی، برای انتقال باری که قابلیت تشکیل ترک جدید در بتن را داشته باشد، کوچک باشد.

برای محاسبه‌ی پروفیل‌های تنش، آرماتور بین دو ترک متوالی، به تعداد زیادی قطعه (2N) تقسیم می‌شود. با شروع از وسط دو ترک مجاور هم، یک قطعه‌ی محدود با طول  $\Delta x$  مطالعه می‌شود. شرایط مرزی برای این قطعه، با هم‌ارز کردن لغزش و تنش چسبندگی در وسط مقطع برابر با صفر و فرض کردن یک مقدار اختیاری برای کرنش در وسط نمونه، در نظر گرفته می‌شوند. این مقدار اختیاری کرنش، نشان‌دهنده‌ی سطح بارگذاری است. ۴ معادله‌ی مطرح شده، به صورت هم‌زمان و با روشی تکراری حل می‌شوند. با تمام شدن محاسبات یک قسمت، شرایط مرزی قسمت بعدی تعریف می‌شوند و دوباره محاسبات به همان شیوه‌ی فوق انجام می‌شود. از این رو پروفیل‌های تنش و کرنش آرماتور را می‌توان ترسیم کرد. تنش و کرنش متوسط فولاد از معادله‌های ۶ و ۷ به دست می‌آیند:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{2}{L_c} \int_0^{L_c} \varepsilon(x) \cdot dx \cong \frac{2}{L_c} \sum_1^N \varepsilon(x) \cdot \Delta x \quad (6)$$

$$\bar{\sigma}_s = \frac{2}{L_c} \int_0^{L_c} \sigma_s(x) \cdot dx \cong \frac{2}{L_c} \sum_1^N \sigma_s(x) \cdot \Delta x \quad (7)$$

در معادله‌های ۶ و ۷،  $L_c$  طول اولیه‌ی نمونه‌ی تحت کشش است. با محاسبه‌ی پروفیل تنش آرماتور، پروفیل تنش بتن با کم کردن پروفیل نیروی آرماتور از نیروی آرماتور در محل ترک، محاسبه می‌شود. با اضافه کردن تنش ناشی از خاصیت نرم‌شدگی کششی بتن در محل ترک‌ها، تنش متوسط بتن از رابطه‌ی ۸ محاسبه می‌شود:

$$\bar{\sigma}_c = \sigma_{br} + \frac{2}{L_c} \int_0^{L_c} \sigma_c(x) \cdot dx \cong \sigma_{br} + \frac{2}{L_c} \sum_1^N \sigma_c(x) \cdot \Delta x \quad (8)$$

$\sigma_{br}$  در معادله‌ی ۸، تنش ناشی از خاصیت نرم‌شدگی بتن است و از رابطه‌ی ۹ به دست می‌آید:

$$\sigma_{br} = f_t \left[ 1 + 0.5 \left( \frac{f_t}{G_f} \right) w \right]^{-2} \quad (9)$$

در رابطه‌ی ۹،  $f_t$  مقاومت کششی بتن؛  $w$  عرض ترک؛  $G_f$  انرژی شکست بتن است که وابسته به مقاومت فشاری بتن و اندازه‌ی دانه‌های آن است. برخی پژوهشگران اعتبار نتایج حاصل از تحلیل به روش مذکور را با نتایج حاصل از آزمایش سنجیده‌اند. [۹۸]

## ریزمدل‌سازی و تحلیل المان‌های بتن مسلح تقویت شده با

### FRP

در این تحقیق بر اساس مفهومی مشابه آنچه در بخش قبل توضیح داده شد، برنامه‌ی برای ریزمدل‌سازی و تحلیل المان‌های بتن مسلح تقویت شده با FRP به زبان فرترن نوشته شده است. فلوجارت محاسبات به طور خلاصه در شکل ۳ ارائه شده است.

سطح مقطع آرماتور؛  $d$  قطر آرماتور؛  $\bar{\tau}$  تنش چسبندگی متوسط است. معادله‌ی دوم: مدل چسبندگی - لغزش - کرنش آرماتور است.

همچنین یک مدل جامع تنش چسبندگی - لغزش محوری - کرنش فولاد<sup>۲</sup> برای بتن مسلح پیشنهاد شده است. [۱۰] مدل مذکور رابطه‌ی جامع مربوط به خواص چسبندگی به دست آمده از آزمایش کشش محوری و بیرون کشیدن آرماتور را پیشنهاد می‌کند (شکل ۲). مزیت این مدل نسبت به سایر مدل‌ها، قابلیت استفاده‌ی آن در هر دو ناحیه‌ی ارتجاعی و پس از تسلیم است و با رابطه‌ی ۲ بیان می‌شود:

$$\tau(\varepsilon, s) = \tau_0(s) \cdot g(\varepsilon) \quad (2)$$

در رابطه‌ی ۲،  $\tau(\varepsilon, s)$  تنش چسبندگی متمرکز؛  $\tau_0(s)$  تنش چسبندگی ذاتی در زمانی است که کرنش صفر است و از رابطه‌های ۳ و ۴ به دست می‌آید:

$$\tau_0(s) = f_c' K [Ln(1 + 0.5s)]^c \quad (3)$$

$$g(\varepsilon) = \frac{1}{1 + 10^5 \varepsilon} \quad (4)$$

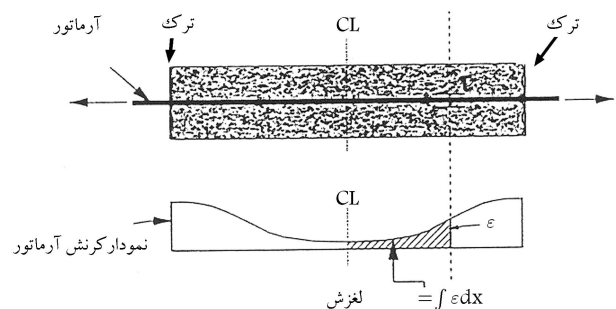
در معادله‌های ۳ و ۴،  $f_c'$  مقاومت فشاری بتن؛  $K$  مقداری ثابت، برابر با  $0.73$ ؛  $c$  مقداری ثابت برابر با  $3$ ؛  $s$  لغزش بدون بعد، برابر با  $0.001$  (که در آن  $S$  لغزش  $d$  قطر آرماتور است)؛  $\varepsilon$  کرنش آرماتور است. معادله‌ی سوم: از سازگاری لغزش به دست می‌آید:

$$S(x) = \int_0^x \varepsilon \cdot dx \quad (5)$$

معادله‌ی چهارم: مدل رفتاری بتن و آرماتور است که نشان‌دهنده‌ی ارتباط بین تنش آرماتور و کرنش آن در هر مقطع آرماتور است و از رابطه‌ی تک محوری تنش - کرنش آرماتور حاصل می‌شود.

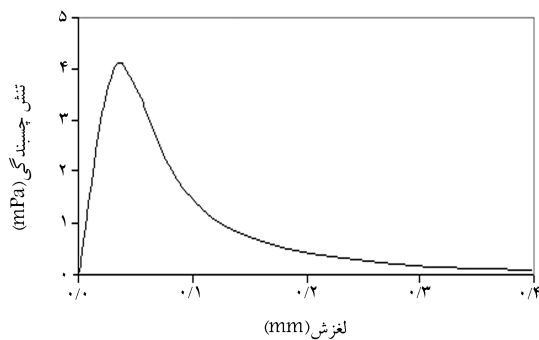
## طرح کلی محاسبات ریزمدل‌سازی رفتار فولاد و بتن

طرح کلی محاسبات برای ریزمدل‌سازی رفتار فولاد و بتن بدین صورت است که در ابتدا فاصله‌ی متوسط ترک‌ها، برابر با طول نمونه‌ی کنترلی است. بار به تدریج افزایش می‌یابد و تنش متمرکز بتن و آرماتور محاسبه می‌شود. زمانی که تنش در بتن از مقاومت کششی بتن تجاوز کند، ترکی جدید در وسط نمونه به وجود می‌آید (محل واقعی ترک ممکن است در وسط نمونه نباشد و در حقیقت در این روش، فاصله‌ی متوسط ترک‌ها را در نظر می‌گیریم). محاسبات دوباره با فاصله‌ی ترکی برابر با نصف طول اولیه‌ی نمونه انجام می‌شود و امکان وقوع ترک جدید در طول نمونه

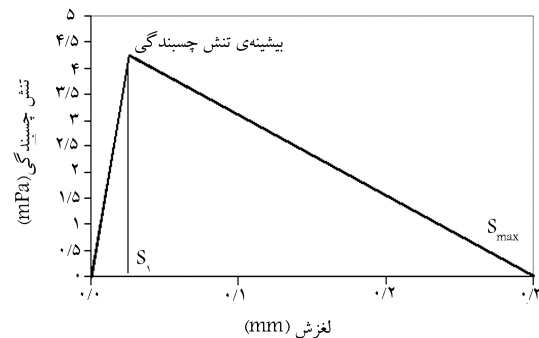


شکل ۲. تعریف لغزش در مدل چسبندگی - لغزش - کرنش. [۱۰]





شکل ۵. رابطه‌ی تنش چسبندگی - لغزش برای  $G_f = 0.39$  نیوتن بر میلی‌متر. [۱۱]



شکل ۶. مدل دو خطی برای رابطه‌ی تنش چسبندگی - لغزش بین بتن و FRP. [۱۲]

در رابطه‌های ۱۰ تا ۱۲،  $G_f$  انرژی شکست بتن بر حسب نیوتن بر میلی‌متر؛  $T_{bF}$  تنش چسبندگی بین بتن و FRP؛  $S_F$  نشان‌دهنده‌ی مقدار لغزش است (شکل ۵). رابطه‌ی دوم: رابطه‌ی دو خطی است (شکل ۶). [۱۲]

### اعتبارسنجی

با استفاده از روش مذکور، تعدادی نمونه‌ی بتنی تقویت شده با FRP که قبلاً آزمایش شده‌اند، [۱۲] تحلیل شدند و نمودار ظرفیت متوسط حاصل از روش ریزمدل‌سازی در این تحقیق، با نمودار ظرفیت متوسط حاصل از آزمایش‌های فوق مقایسه شد.

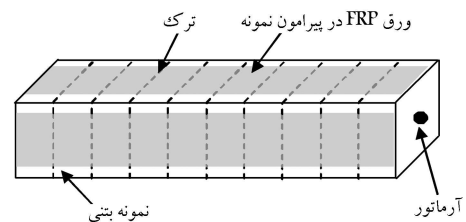
### مشخصات نمونه‌های آزمایشی

مشخصات نمونه‌های آزمایشی در جدول‌های ۱ و ۲ نشان داده شده است. [۱۲] طول تمامی نمونه‌ها ۱۲۰۰ میلی‌متر و سطح مقطع آن‌ها ۱۰۰ در ۱۰۰ میلی‌متر است.

### اطلاعات نمونه‌های تحلیل شده با برنامه

اطلاعات مربوط به نمونه‌های تحلیل شده با برنامه، در جدول ۳ ارائه شده است. برای هر یک از نمونه‌ها سه تحلیل انجام شده است تفاوت این تحلیل‌ها در هر نمونه، در پارامترهای مربوط به نمودار تنش چسبندگی - لغزش بین بتن و FRP به شرح زیر است:

در نمونه‌ی اول، بیشینه‌ی تنش چسبندگی بین بتن و FRP ( $\tau_{max}$ ) در تحلیل اول، دوم و سوم به ترتیب برابر با ۳۰، ۴۰ و ۶۰ کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع در نظر



شکل ۴. نمونه‌ی بتنی در نظر گرفته شده در تحلیل.

مطابق با روش‌های آزمایشگاهی برای تعیین مدل‌های رفتاری کششی متوسط فولاد و بتن، ریزمدل‌سازی و تحلیل بر روی نمونه‌ی مطابق شکل ۴ انجام می‌شود.

برای محاسبه پروفیل‌های تنش و کرنش فولاد، FRP و بتن، فرض اساسی روش ترک پخشی که در آن میزان تغییرشکل کلی یا به عبارت دیگر متوسط کرنش در طول آرماتور، FRP و بتن یکسان است، اعمال شده است. آرماتور و FRP بین دو ترک متوالی، به تعداد زیادی قطعه تقسیم و به منزله‌ی شرط مرزی اولیه، میزان لغزش و تنش چسبندگی در وسط نمونه برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود.

به ازاء هر میزان کرنش متوسط برای نمونه که به طور افزایشی در هر گام تحلیلی تغییر می‌کند، ۴ معادله‌ی پیش‌گفته، به صورت هم‌زمان و با روشی تکراری برای هر یک از قطعات فولاد و FRP حل می‌شوند. با اتمام محاسبات یک قسمت، شرایط مرزی قسمت بعدی تعریف می‌شود و دوباره محاسبات به همان شیوه‌ی فوق انجام می‌شود تا توزیع تنش و کرنش میلگرد و FRP در تمام طول نمونه محاسبه شود. در هر گام تحلیلی میزان تنش در بتن کنترل می‌شود و به محض رسیدن به تنش ترک‌خوردگی، فاصله‌ی ترک‌ها اصلاح و محاسبات بر مبنای فاصله‌ی جدید ترک‌ها ادامه می‌یابد. بر مبنای روش محاسباتی فوق فاصله‌ی متوسط ترک‌ها، پاسخ متوسط و متمرکز بتن، آرماتور و FRP و کرنش متناظر با جدا شدن FRP از بتن قابل محاسبه است. پارامترهای مؤثر در رفتار کششی المان‌های تقویت شده با FRP که در روش ریزمدل‌سازی توسعه داده شده در این تحقیق استفاده می‌شود شامل موارد زیر هستند:

طول نمونه ( $L_c$ )؛ قطر آرماتور ( $d$ )؛ مدول کشسانی فولاد ( $E_s$ )؛ تنش تسلیم آرماتور ( $f_y$ )؛ مقاومت نهایی آرماتور ( $f_u$ )؛ کرنش آرماتور در لحظه متناظر با شروع سخت شدگی ( $\epsilon_{sh}$ )؛ مقاومت کششی و فشاری بتن ( $f_c, f_t$ )؛ مدول ارتجاعی بتن ( $E_c$ )؛ سطح مقطع بتن ( $A_c$ )؛ مدول کشسانی ورق FRP ( $E_{FRP}$ )؛ مقاومت نهایی ورق FRP ( $f_{uFRP}$ )؛ ضخامت و عرض ورق FRP ( $B_{FRP}, t_{FRP}$ )؛ و همچنین پارامترهای مورد نیاز برای معرفی رابطه‌ی تنش چسبندگی - لغزش بین بتن و FRP ( $\tau_{max}, S_1, S_{max}$ ) که تعیین‌کننده‌ی نقطه‌ی جدا شدن FRP از بتن است.

### رابطه‌ی تنش چسبندگی - لغزش بین بتن و FRP

در این تحقیق از دو رابطه‌ی مختلف برای بیان رابطه‌ی تنش چسبندگی - لغزش بین بتن و FRP، استفاده شده است.

رابطه‌ی اول: با رابطه‌های ۱۰ تا ۱۲ بیان می‌شود: [۱۱]

$$\frac{T_{bF}}{T_{bFy}} = \frac{S_F}{S_{Fy}} \cdot \frac{3}{2 + (S_F/S_{Fy})^2} \quad (10)$$

$$T_{bFy} = 6.6 \sqrt{G_f} \quad MPa \quad (11)$$

$$S_{Fy} = 0.57 \sqrt{G_f} \quad mm \quad (12)$$

جدول ۱. مشخصات مصالح مصرفی در آزمایش Pece and Certoni [۱۲].

| نوع مصالح | ابعاد (mm)                 | $f_y$ (N/mm <sup>2</sup> ) | مقاومت کششی (N/mm <sup>2</sup> ) | مدول کشسانی (GPa) | کرنش نهایی (درصد) | $f_c$ (N/mm <sup>2</sup> ) |
|-----------|----------------------------|----------------------------|----------------------------------|-------------------|-------------------|----------------------------|
| فولاد     | قطر = ۱۰                   | ۵۷۴                        | ۶۷۰                              | ۲۰۰               | ۱۵٫۱              | -                          |
|           | قطر = ۱۴                   | ۵۶۰                        | ۶۳۳                              | ۲۰۰               | ۱۵٫۱              | -                          |
| CFRP      | عرض = ۱۰۰<br>ضخامت = ۰٫۱۱۱ | -                          | ۲۸۳۰                             | ۲۷۰               | ۱٫۱۰              | ۱٫۱۰                       |
| بتن       | ۱۰۰ × ۱۰۰                  | -                          | -                                | ۳۳٫۲              | -                 | ۳۳٫۲                       |

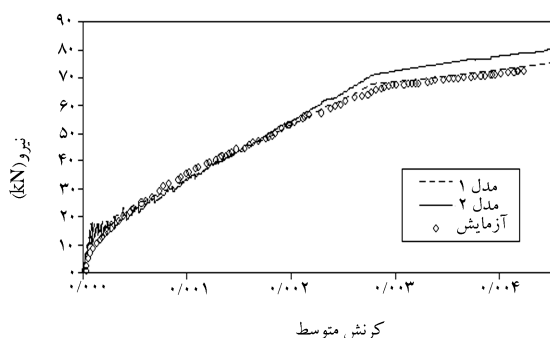
جدول ۲. مشخصات نمونه‌های آزمایش Pece and Certoni [۱۲].

| نام سری | نمونه   | نوع FRP | تعداد لایه‌های FRP | قطر آرماتور (mm) | مقاومت فشاری بتن (MPa) | * $N_p$ (kN) |
|---------|---------|---------|--------------------|------------------|------------------------|--------------|
| TP۱     | TP۱-C۱  | CFRP    | ۱                  | ۱۰               | ۳۱٫۶                   | ۳۲           |
| TP۲     | TP۲-C۲  | CFRP    | ۲                  | ۱۴               | ۳۴٫۷                   | ۴۲           |
|         | TP۲-C۲B | CFRP    | ۲                  | ۱۴               | ۳۴٫۷                   | ۸۴           |

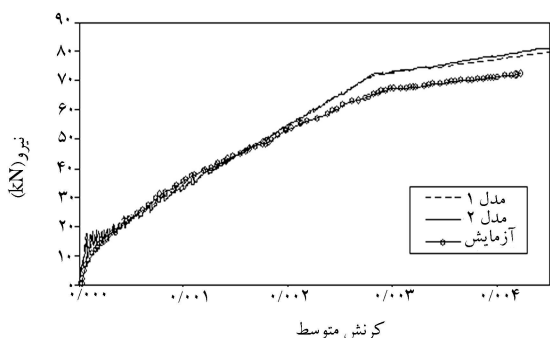
\*  $N_p$  نیروی پیش بارگذاری است.

جدول ۳. پارامترهای نمونه‌های تحلیل شده.

| $\epsilon_{sh}$ | $F_u$ (kg/cm <sup>2</sup> ) | $F_y$ (kg/cm <sup>2</sup> )       | $E_s$ (kg/cm <sup>2</sup> )     | $L_c$ (cm)                  | $d$ (cm)                    | $A_c$ (cm <sup>2</sup> )    |                   |
|-----------------|-----------------------------|-----------------------------------|---------------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-------------------|
| ۰٫۰۱۶۵          | ۶۷۰۰                        | ۵۷۴۰                              | $۲ \times ۱۰^۶$                 | ۱۲۰                         | ۱                           | ۱۰۰                         | نمونه‌ی اول       |
| ۰٫۰۱۶۵          | ۶۳۳۰                        | ۵۶۰۰                              | $۲ \times ۱۰^۶$                 | ۱۲۰                         | ۱٫۴                         | ۱۰۰                         | نمونه دوم و سوم   |
| $B_{FRP}$ (cm)  | $t_{FRP}$ (cm)              | $F_u_{FRP}$ (kg/cm <sup>2</sup> ) | $E_{FRP}$ (kg/cm <sup>2</sup> ) | $E_c$ (kg/cm <sup>2</sup> ) | $f_c$ (kg/cm <sup>2</sup> ) | $f_t$ (kg/cm <sup>2</sup> ) |                   |
| ۲۰              | ۰٫۰۱۱۱                      | ۲۸۳۰۰                             | $۲۷ \times ۱۰^۵$                | $۳٫۳۲ \times ۱۰^۵$          | ۳۱۶                         | ۱۷٫۳۲                       | نمونه‌ی اول       |
| ۲۰              | ۰٫۰۲۲۲                      | ۲۸۳۰۰                             | $۲۷ \times ۱۰^۵$                | $۳٫۳۲ \times ۱۰^۵$          | ۳۴۷                         | ۱۹٫۰۲                       | نمونه‌ی دوم و سوم |



شکل ۷. نمودار ظرفیت (نمونه‌ی اول - تحلیل اول).



شکل ۸. نمودار ظرفیت (نمونه‌ی اول - تحلیل دوم).

گرفته شده است. مقادیر  $S_1$  و  $S_{max}$  در این نمونه، به ترتیب برابر با ۰٫۰۵ و ۰٫۰۳ سانتی‌متر است.

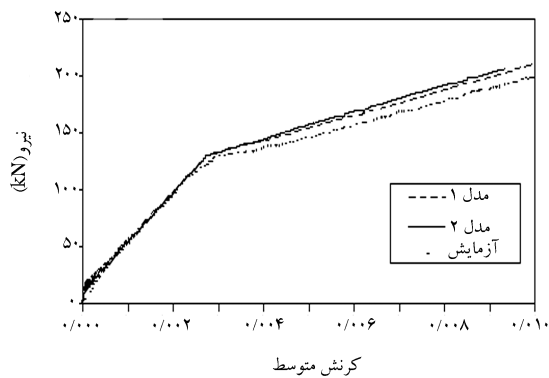
در نمونه‌ی دوم، بیشینه‌ی لغزش بین بتن و FRP ( $S_{max}$ ) در تحلیل اول، دوم و سوم به ترتیب برابر با ۰٫۰۱، ۰٫۰۳ و ۰٫۰۵ سانتی‌متر در نظر گرفته شده است. مقادیر  $S_1$  و  $\tau_{max}$  در این نمونه به ترتیب برابر با ۴۵ کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع و ۰٫۰۵ سانتی‌متر است.

در نمونه‌ی سوم، مقدار  $S_1$  در تحلیل اول، دوم و سوم به ترتیب برابر با ۰٫۰۱، ۰٫۰۵ و ۰٫۰۲۵ سانتی‌متر است.  $S_{max}$  و  $\tau_{max}$  در این نمونه به ترتیب برابر با ۴۵ کیلوگرم بر سانتی‌متر مربع و ۰٫۰۳ سانتی‌متر است.

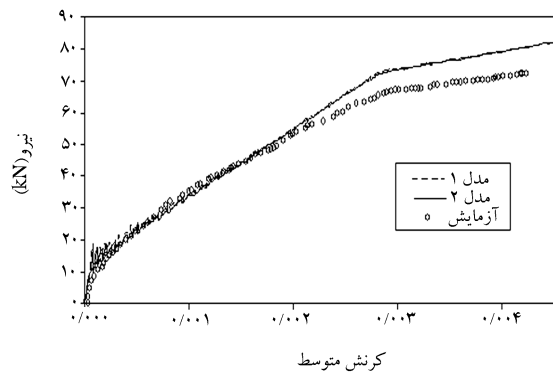
## مقایسه‌ی نتایج حاصل از تجزیه و تحلیل با نتایج حاصل از آزمایش

در شکل‌های ۷ تا ۱۵، نمودارهای ظرفیت حاصل از نتایج آزمایش و نتایج تحلیل با برنامه تهیه و ارائه شده‌اند. نمودارها انطباق مناسبی را بین نتایج تحلیل و آزمایش نشان می‌دهند.

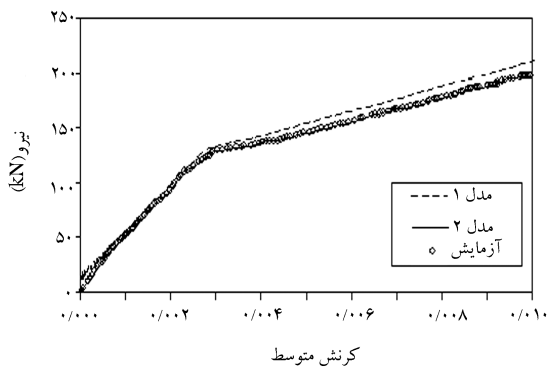
مدل اول معرف مدل Nakaba و مدل دوم معرف مدل Holzenkampfer برای رابطه‌ی تنش چسبندگی - لغزش بین بتن و FRP است.



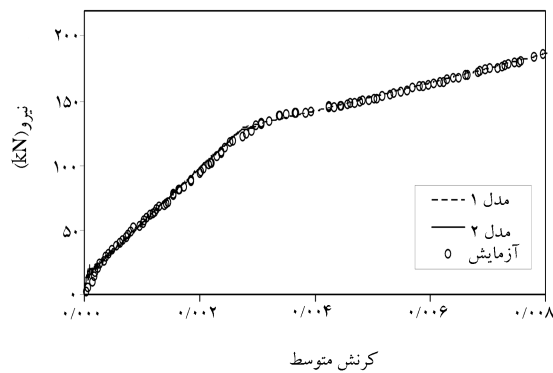
شکل ۱۳. نمودار ظرفیت (نمونه‌ی سوم - تحلیل اول).



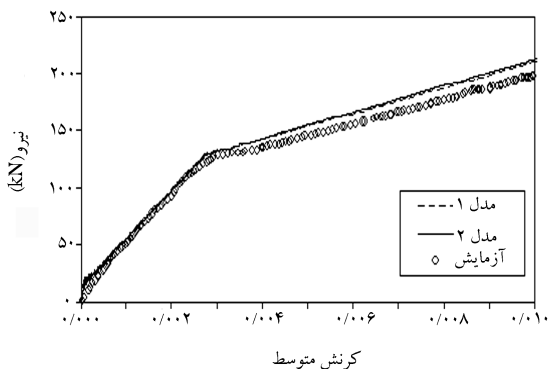
شکل ۹. نمودار ظرفیت (نمونه‌ی اول - تحلیل سوم).



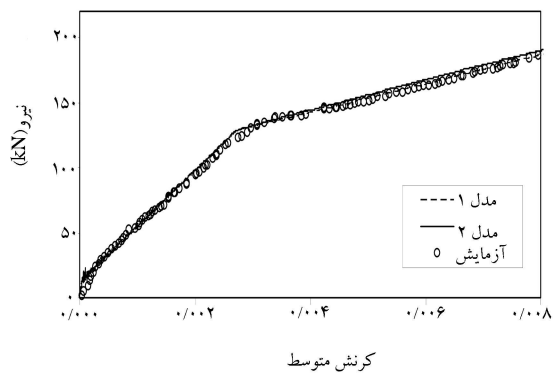
شکل ۱۴. نمودار ظرفیت (نمونه‌ی سوم - تحلیل دوم).



شکل ۱۰. نمودار ظرفیت (نمونه دوم - تحلیل اول).



شکل ۱۵. نمودار ظرفیت (نمونه‌ی سوم - تحلیل سوم).

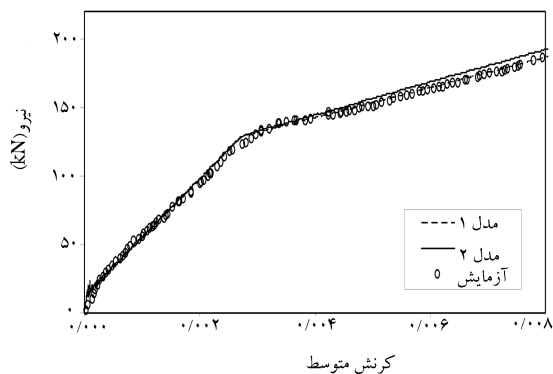


شکل ۱۱. نمودار ظرفیت (نمونه‌ی دوم - تحلیل دوم).

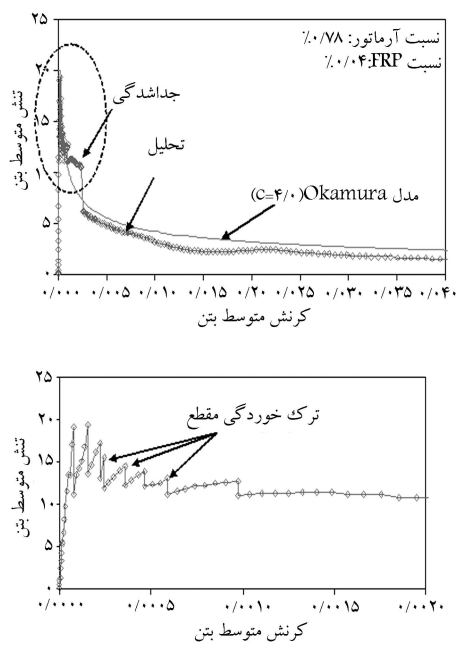
### قابلیت‌های برنامه

برنامه‌ی تهیه‌شده در این پژوهش، با ریزمدل‌سازی رفتار بتن، فولاد و FRP، تنش‌ها و کرنش‌های محلی هر یک از آن‌ها را در طول نمونه محاسبه و از روی این تنش‌ها و کرنش‌های محلی، در هر گام، تنش متوسط و کرنش متوسط را برای فولاد، بتن و FRP محاسبه می‌کند.

شکل ۱۶ الف پاسخ متوسط فولاد را در یک نمونه‌ی بتن مسلح، که از تحلیل با برنامه به دست آمده است نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، پاسخ متوسط فولاد محصورشده در بتن، کمتر از پاسخ آرماتور تنها است که دلیل آن جاری شدن آرماتور در محل ترک است، در حالی که تنش در سایر قسمت‌ها، از تنش جاری شدن آرماتور کمتر است. با اضافه کردن پوشش FRP به نمونه‌ی بتن مسلح،



شکل ۱۲. نمودار ظرفیت (نمونه‌ی دوم - تحلیل سوم).

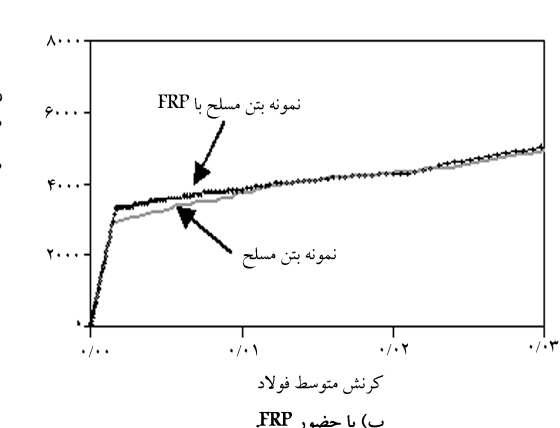
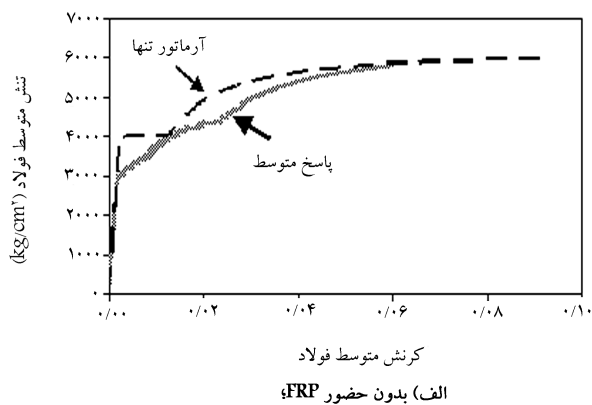


شکل ۱۹. منحنی سخت‌شدگی کششی.

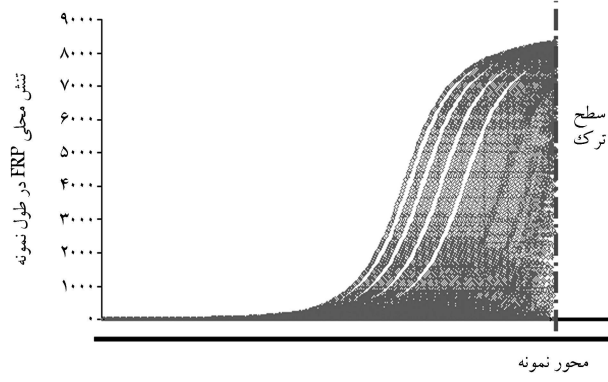
به دلیل کمتر شدن فاصله‌ی ترک‌ها نسبت به حالت عدم وجود FRP، پاسخ متوسط فولاد محصور شده در بتن به پاسخ آرماتور تنها نزدیک‌تر می‌شود (شکل ۱۶ ب). شکل ۱۷ تنش محلی FRP در طول المان بتن مسلح تقویت شده با FRP را نشان می‌دهد. شکل ۱۸ تنش چسبندگی محلی بین بتن و FRP را در طول نمونه نشان می‌دهد. با افزایش نیروی محوری در FRP، تنش چسبندگی افزایش می‌یابد تا حدی که به مقدار بیشینه‌ی خود برسد و پس از آن مقدار تنش چسبندگی، در نزدیکی ترک، کاهش یافته و می‌تواند جدا شدن FRP از بتن را به همراه داشته باشد. شکل ۱۹ نشان‌دهنده‌ی منحنی سخت‌شدگی کششی المان بتن مسلح تقویت شده با FRP است که از نتایج حاصل از برنامه قابل استخراج است. همان‌طور که در این شکل نشان داده شده است، با ایجاد هر ترک جدید در نمونه، شاهد یک افت در منحنی سخت‌شدگی کششی هستیم. برنامه‌ی تدوین شده، قابلیت محاسبه‌ی تنش در لحظه‌ی جدایی FRP از سطح بتن، طول مهاری FRP و نیز فاصله‌ی متوسط ترک‌ها در طول نمونه را دارد.<sup>[۱۳]</sup>

### نتیجه‌گیری

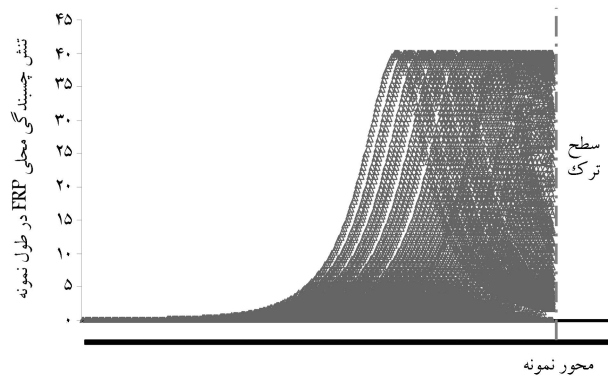
- در این تحقیق روش ریزمدل‌سازی برای بررسی گسترش ترک و رفتار پس از ترک‌خوردگی در نمونه‌های بتن مسلح تقویت شده با FRP توسعه داده شد و گام‌های محاسباتی ارائه شده که بر مبنای آن با مدل‌سازی رفتار فولاد، بتن و FRP و اندرکنش آن‌ها می‌توان عرض و فاصله‌ی ترک‌ها و همچنین پاسخ متوسط بتن، آرماتور و FRP و نیز ظرفیت مقطع بتن مسلح تقویت شده با FRP را به دست آورد؛
- توزیع تنش‌های فولاد، بتن و FRP و تنش چسبندگی در طول نمونه و مابین ترک‌ها قابل بررسی است؛
- مقایسه‌ی بین نتایج تحلیل و آزمایش‌ها، نشان از دقت بالای الگوریتم پیشنهادی دارد.



شکل ۱۶. مقایسه‌ی پاسخ متوسط آرماتور در نمونه‌ی بتن مسلح.



شکل ۱۷. تنش محلی FRP در طول نمونه.



شکل ۱۸. تنش چسبندگی محلی بین بتن و FRP در طول نمونه.



پانویس

1. tension stiffening
2. bare bar
3. bond-slip-strain model

منابع

1. Okamura, H. and Maekawa, K. "Nonlinear analysis and constitutive models of reinforced concrete", *Gihodo*, Tokyo (1991).
2. Rizkalla, S.H. and Hwang, L.S. "Crack prediction for members in uniaxial tension", *ACI Journal*, pp. 572-579 (1984).
3. Gilbert, R.I. and Warner, R.F. "Tension stiffening in reinforced concrete slabs", *Journal of the Structural Division, ASCE*, **104**(ST12), pp. 1885-1900 (1978).
4. Morita, S. and Kaku, T. "Experimental study on the deformation of axially reinforced concrete prisms subjected to tension and drying", *CAJ Review of the 18 General Meeting*, pp. 205-209 (1964).
5. Izmo, J.; Shima, H. and Okamura, K. "Analytical model for RC panel elements subjected to in-plane forces", *Concrete Library of JSCE*, (12), pp. 155-181 (1989).
6. Belarbi, A. and Hsu, T. "Constitutive laws of reinforced concrete in biaxial tension-compression", University of Houston, Department of Civil and Environmental Engineering, *Research Report UHCEE*, pp. 91-2 (1991).

7. Yoshikawa, H. and Tanabe, T. "An analytical study for the tension stiffness of reinforced concrete members on the basis of bond slip mechanism", *Trans. of the Japan Concrete Institute*, pp. 569-572 (1986).
8. Salem, H.M.M. "Enhanced tension stiffening model and application to nonlinear dynamic analysis of reinforced concrete", *Doctoral dissertation*, Department of Civil Engineering, The University of Tokyo (1998).
9. Soltani, M.; An, X. and Maekawa, K. "Computational model for post cracking analysis of RC membrane elements based on local stress-strain characteristics", *Engineering Structures*, **25**, pp. 993-1007 (2003).
10. Shima, H.; Chou, L. and Okamura, H. "Micro and macro models for bond in reinforced concrete", *Journal of the Faculty of Engineering*, The University of Tokyo (B), **39**(2) (1987).
11. Nakaba, K.; Kanakubo, T.; Furuta, T. and Yoshizawa, H. "Bond behavior between fiber-reinforced polymer laminates and concrete", *ACI Struct. J.*, pp. 98-3i, 359-367, (2001).
12. Pecce, M. and Ceroni, F. "Modeling of tension stiffening behavior of reinforced concrete ties strengthened with fiber reinforced plastic sheets", *Journal of composites for construction* (2004).

۱۳. رهنمای سپهر، سارا «مدل سازی گسترش ترک و رفتار سخت شدگی کششی در المان های بتن مسلح تقویت شده با FRP»، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشگاه تربیت مدرس (۱۳۸۵).

