حل عددی معادله‌ی پواسون خطی و غیرخطی در $\mathbf{R}^3$

بهمن مهری (استاد)
دانشکده‌ی ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف

در این نوشتار با استفاده از تفاضل‌های محدود و عناصر محدود، به حل مسئله‌ی مقدار مرزی نویمن[1] با شرایط مرزی[2] می‌پردازیم. حل عددی معادله‌ی لاپلاس-پواسون[3] با استفاده از روش تفاضل محدود با شرایط مرکب در R^3 با سه روش تقریب درجه اول، تقریب درجه دوم و روش تلفیقی ارائه می‌شود. این روش‌ها بر روی یک کره آزمایش، و نتایج حاصل با یکدیگر مقایسه می‌شوند. نتایج حاکی از آن است که حاصل روش تلفیقی ضمن سادگی محاسباتی بسیار به روش تقریب درجه دوم نزدیک است. براساس این روش‌ها، یک برنامه‌ی رایانه‌یی در نرم‌افزار «متمتیکا» نوشته شده که می‌تواند با دقت دلخواه و شرایط مرزی متفاوت معادله‌ی لاپلاس-پواسون را روی کره حل کند. در مرحله‌ی دوم، روشی برای حل عددی مسئله‌ی نویمن با استفاده از تفاضل‌های متناهی ارائه می‌شود. در اینجا از روش اجزاء متناهی استفاده می‌کنیم با این تفاوت که معادله‌ی دیفرانسیل مورد نظر غیرخطی است.

برای حل مسئله ابتدا با اعمال روش اجزاء محدود، معادلات دیفرانسیل را به معادلات جبری تبدیل می‌کنیم که حالت غیرخطی خود را حفظ می‌کند. سپس با اعمال روش‌های تکراری به حل این معادلات اقدام می‌کنیم.

معادله‌ی پواسون[4] خطی

معادله‌ی لاپلاس

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (1)$$

را روی سطح هموار Γ با شرط

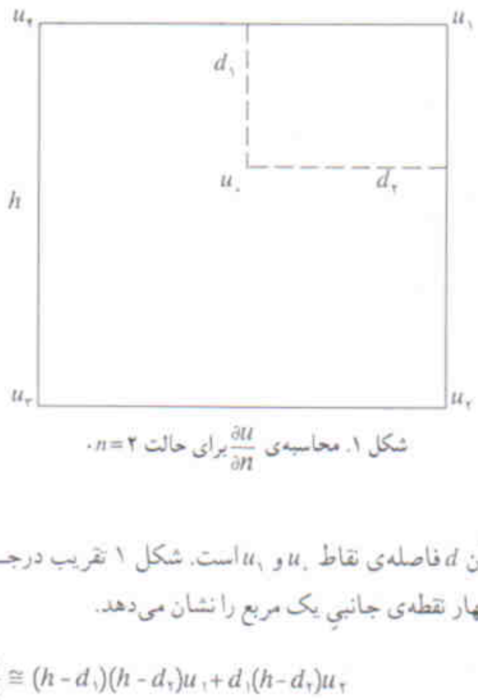
$$\frac{\partial u}{\partial n} = f(x,y,z) \qquad (2)$$

در نظر می‌گیریم که در آن n بردار عمود بر سطح Γ در نقطه‌ی (x, y, z) به طرف خارج است. بدیهی است داشتن مقادیری از تابع u روی زیرمجموعه‌ی بسته‌یی از سطح Γ برای حل معادله‌ی فوق ضروری است زیرا در غیر این صورت اگر $w(x, y, z)$ یک جواب برای معادله‌ی ۱ با شرط مفروض باشد، آنگاه هر تابع $v = w(x, y, z) + c$، که در آن c ثابت دلخواهی است، نیز در معادلات ۱ و ۲ صدق می‌کند.

تقریب درجه اول

در این روش ابتدا مقدار $\frac{\partial u}{\partial n}$ را با تقریب درجه اول بر حسب یک نقطه روی سطح مکعب به طول h به دست می‌آورند و سپس مقدار تابع u در آن نقطه را با تقریب درجه اول برحسب چهار نقطه‌ی حول آن می‌نویسند:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \cong \frac{u_0 - u_1}{d}$$



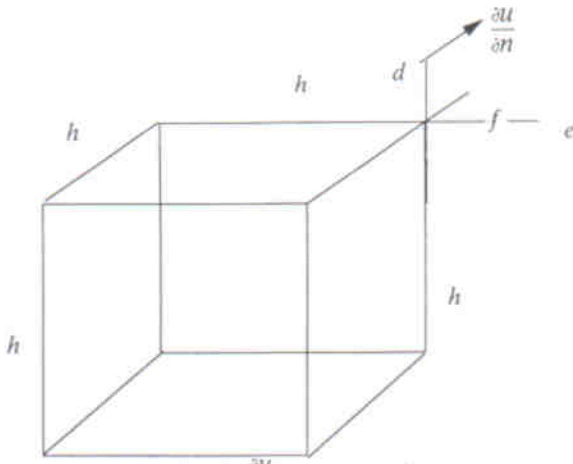
شکل ۱. محاسبه‌ی $\frac{\partial u}{\partial n}$ برای حالت $n=2$.

که در آن d فاصله‌ی نقاط u_0 و u_1 است. شکل ۱ تقریب درجه اول حول چهار نقطه‌ی جانبی یک مربع را نشان می‌دهد.

$$h^2 \frac{\partial u}{\partial n} \cong (h-d_1)(h-d_2)u_1 + d_1(h-d_2)u_2 + d_1 d_2 u_3 + d_2(h-d_1)u_4$$

تقریب درجه دوم

در این روش مقدار $\frac{\partial u}{\partial n}$ را برحسب نقاط مجاور تا مرتبه‌ی دوم تقریب می‌زنند. در شکل زیر این روش برای یک مکعب به اضلاع h نشان داده شده است.



شکل ۲. محاسبه‌ی $\frac{\partial u}{\partial n}$ برای حالت $n=3$.

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\sum_{i=0}^{8} c_i u_i$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial z}\cos(\alpha)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(\beta)+\frac{\partial u}{\partial x}\cos(\gamma)=f(x,y,z)$$

یا

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\alpha_0 u+\alpha_1 u-\alpha_1 d\frac{\partial u}{\partial n}+\alpha_1 d^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$+\alpha_2 u-\alpha_2 d\frac{\partial u}{\partial z}+\alpha_2 d^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\alpha_2 e\frac{\partial u}{\partial y}+\alpha_2 e^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\alpha_2 ed\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}$$

$$+\alpha_3 u-\alpha_1(d+h)\frac{\partial u}{\partial z}+\alpha_1(d+h)^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$+\alpha_4 u-\alpha_4 d\frac{\partial u}{\partial z}+\alpha_4 d^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\alpha_4 h\frac{\partial u}{\partial y}+\alpha_4 h^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha_4 dh\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}$$

$$+\alpha_5 u-\alpha_5(d+h)\frac{\partial u}{\partial z}+\alpha_5(d+h)^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\alpha_5 h\frac{\partial u}{\partial y}+\alpha_5 h^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$+\alpha_5(d+h)\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}$$

$$+\alpha_6 u-\alpha_6 d\frac{\partial u}{\partial z}+\alpha_6 d^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\alpha_6 f\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha_6 f^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\alpha_6 df\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}$$

$$+\alpha_7 u-\alpha_7 d\frac{\partial u}{\partial z}+\alpha_7 d^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}-\alpha_7 h\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha_7 h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\alpha_7 dh\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}$$

$$+\alpha_8 u-\alpha_8(d+h)\frac{\partial u}{\partial z}+\alpha_8(d+h)^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\alpha_8 h\frac{\partial u}{\partial x}+\alpha_8 h^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$-\alpha_7(d+h)h\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}$$

که در آن مقادیر d، e و h در شکل ۲ داده شده‌اند و α_iها از دستگاه معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6+\alpha_7+\alpha_8=0$$

$$\alpha_1 d+\alpha_2 d+\alpha_3(d+h)+\alpha_4 d+\alpha_5(d+h)+\alpha_6 d+\alpha_7 d$$
$$+\alpha_8(d+h)=\cos(\alpha)$$

$$\alpha_2 e-\alpha_4 h-\alpha_5 h=\cos(\beta)$$

$$\alpha_6 f+\alpha_7 h+\alpha_8 h=\cos(\gamma)$$

$$\alpha_1 d^2+\alpha_2 d^2+\alpha_3(d+h)^2+\alpha_4 d^2+\alpha_5(d+h)^2+\alpha_6 d^2$$
$$+\alpha_7 d^2+\alpha_8(d+h)^2=0$$

$$\alpha_2 e^2+\alpha_4 h^2+\alpha_5 h^2=0$$

$$\alpha_6 f^2+\alpha_7 h^2+\alpha_8 h^2=0$$

$$-\alpha_2 de+\alpha_4 dh+\alpha_5(d+h)h=0$$

$$\alpha_6 df-\alpha_7 dh-\alpha_8(d+h)d=0$$

از حل معادلات فوق، برای α_i مقادیر زیر به دست می‌آید:

$$\alpha_0=\frac{h+2d}{d(d+h)}\cos(\alpha)$$

$$\alpha_1=-\frac{h+d}{hd}\cos(\alpha)+\frac{he+ed-h^2}{h^2 e}\cos(\beta)+\frac{h^2-fd-hf}{h^2 f}\cos(\gamma)$$

$$\alpha_2=\frac{h}{e(e+h)}\cos(\beta)$$

$$\alpha_3=\frac{d}{h(d+h)}\cos(\alpha)-\frac{d}{h^2}\cos(\beta)+\frac{d}{h^2}\cos(\gamma)$$

$$\alpha_4=\frac{de+dh+eh}{h^2(e+h)}\cos(\beta)$$

$$\alpha_5=\frac{d}{h^2}\cos(\beta)$$

$$\alpha_6=-\frac{h}{f(h+f)}\cos(\gamma)$$

$$\alpha_7=\frac{df+dh+hf}{h^2(ef+h)}\cos(\gamma)$$

$$\alpha_8=-\frac{d}{h^2}\cos(\gamma)$$

روش تلفیقی

در این روش ابتدا مقدار $\frac{\partial u}{\partial n}$ را با تقریب درجه دوم بر حسب دو نقطه روی سطوح مکعب به طول h نوشته، سپس مقادیر این دو نقطه را با تقریب درجه اول برحسب چهار نقطه حول آن به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial u}{\partial n} \cong \alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \Rightarrow$$

$$\alpha_0 = \frac{d_2 + 2d_1}{d_1(d_1 + d_2)}$$

$$\alpha_1 = -\frac{d_2 + d_1}{d_1 d_2}$$

$$\alpha_2 = \frac{d_1}{d_2(d_1 + d_2)}$$

تقریب درجه اول حول چهار نقطه‌ی جانبی مانند روش اول صورت می‌گیرد. جدول ۱ نتایج حاصل از کاربرد روش تلفیقی برای یک کره را نشان می‌دهد:

جدول ۱. مقادیر به دست آمده از روش تلفیقی برای u

x	y	z	u(x,y,z)	مقدار حاصل
۰/۳-	۰/۳-	۰/۹-	۰/۸۴۶-	۰/۸۴۵-
۰	۰/۳-	۰/۹-	۰/۹-	۰/۹-
۰/۳	۰/۳	۰/۶-	۰/۶۵۴-	۰/۶۵۷-
۰/۳-	۰/۳-	۰/۳-	۰/۲۴۶-	۰/۲۴۷-
۰/۶-	۰/۶-	۰	۰/۴۳۲	۰/۴۳۷
۰/۶	۰/۶-	۰/۳	۰/۱۳۲-	۰/۱۸۸-
۰	۰/۶-	۰	۰	۰/۰۰۶-
۰	۰/۹	۰/۳	۰/۳	۰/۲۹۸۸
۰/۶-	۰/۳-	۰/۷۴۲	۰/۶۸۷۶	۰/۷
۰/۳۱۶	۰/۹-	۰/۳	۰/۴۳۶-	۰/۴۴۶-
۰/۹۰۶-	۰/۳	۰/۳	۰/۱۹۸-	۰/۱۷۹-
۰/۳	۰/۳۱۶	۰/۹	۰/۸۳۷	۰/۷۵۴۱
۰/۳	۰/۹	۰/۳۱۶	۰/۳۸۵-	۰/۳۹۱-

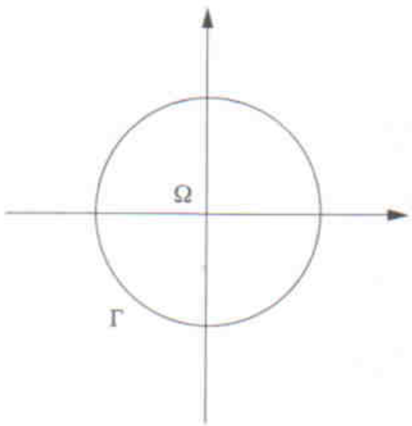
حل یک معادله‌ی پواسون غیر خطی

معادله‌ی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = y^{\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad (x,y) \in \Omega \tag{3}$$

برای حل معادله‌ی فوق از اجزاء محدود به روش باقی مانده‌های وزنی گالرکین استفاده می‌کنیم، به این ترتیب که برای حل معادله‌ی ۱ در ناحیه‌ی Ω که توسط Γ محدود شده است (شکل ۳)، ابتدا محدوده‌ی حل را به اجزاء کوچک تقسیم کرده و جواب را در هر جزء به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$u = \sum_{i=1}^{n} N_i u_i \tag{4}$$



شکل ۳. میدان Ω.

در این رابطه u_i مقدار جواب در یک نقطه‌ی مشخص در جزء است و N_i تابعی شکلی است که یک جواب تقریبی از جواب اصلی است که معمولاً به شکل چندجمله‌یی است. به این ترتیب جواب در هر جزء که به‌صورت تابعی از x, y باشد به‌صورت زیر است:

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{n} N_i(x,y) u_i \tag{5}$$

که n تعداد نقاط در جزء است. با داشتن مقادیر جواب در این نقاط، می‌توان جواب را در Ω به دست آورد. حال با قراردادن معادله‌ی ۵ در معادله‌ی دیفرانسیلی ۳ خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2}u_i + \frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2}u_i\right] = \left[\sum_{i=1}^{n} N_i u_i\right]^{\alpha} \tag{6}$$

حال اگر رابطه‌ی اخیر را در N_jــ تابع شکلی در نقطه‌یی از همان جزء ــ ضرب کنیم و در محدوده‌ی همان جزء Ω^e انتگرال‌گیری کنیم، خواهیم داشت:

$$\iint_{\Omega^e}\left\{N_j \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 N_i}{\partial x^2}u_i + N_j \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 N_i}{\partial y^2}u_i - N_j\left[\sum_{i=1}^{n} N_i u_i\right]^{\alpha}\right\} dx\,dy = 0 \tag{7}$$

به این ترتیب، اگر محدوده‌ی حل شامل m گره (نقطه) باشد، m معادله به وجود می‌آید. به عبارتی رابطه‌ی ۷ برای هر جزء صادق است که اگر در هر جزء n گره موجود باشد، هر معادله به n زیرمعادله تقسیم می‌شود. اکنون با استفاده از انتگرال جزء به جزء، و قضیه‌ی گرین، و نیز با توجه به این نکته که N دارای مشتق جزئی پیوسته است، خواهیم داشت:

$$\int_{\Gamma^e} N_j \frac{\partial u}{\partial m} d\Gamma^e - \iint_{\Omega^e} \{\frac{\partial N_j}{\partial x} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i\} dx\,dy - \iint_{\Omega^e} N_j \left[\sum_{i=1}^{n} N_i u_i\right]^{\alpha} dx\,dy = 0 \qquad (۸)$$

که $\frac{\partial u}{\partial n}$ مشتق نرمال بر مرز Γ^e مربوط به هر جزء است.

اکنون برای بررسی جمله‌ی اول بـه شکـل ۴ تـوجه کـنید. اگـر معادلات مربوط به دو جزء مجاور را کـه گـره‌های مشـترک دارنـد بنویسیم و معادلات مربوط به هر گره (گره‌ی مشترک دو جزء) را با هم جمع کنیم، چون جمله‌ی اول با قرینه‌ی خود جمع شده، صفر می‌شود و از بین می‌رود.

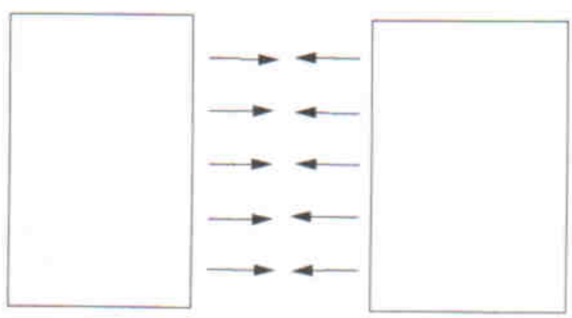
درنتیجه تنها جملات مربوط به مرز خارجی مـحدوده‌ی اصـلی حل باقی می‌مانند. از آنجا که در روی مرز مقدار u مشـخص است، دیگر احتیاجی به نوشتن مـعادله بـر روی گـره‌های مـرزی نـیست. بنابراین احتیاجی به نوشتن جمله‌ی اول نداریم و معادله‌ی ۸ به شکل زیر نتیجه می‌شود:

$$\iint_{\Omega^e} \{\frac{\partial N_j}{\partial x} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i}{\partial x} u_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial N_i}{\partial y} u_i\} dx\,dy + \iint_{\Omega^e} N_j \left[\sum_{i=1}^{n} N_i u_i\right]^{\alpha} dx\,dy = 0 \qquad (۹)$$

همانطور که مشاهده می‌شود، از یک معادله‌ی دیفرانسیلی به یک معادله‌ی جبری می‌رسیم که شکل غیرخطی خود را حفظ کرده است. می‌توان معادله‌ی ۹ را به صورت زیر نیز نوشت:

$$a_{ij} u_i = -F_j \qquad (۱۰)$$

که در آن u_i شامل بردار u در هر جزء و a و F نیز به صورت زیر هستند:



شکل ۴. اثر مشتق بر روی مرز جزءها.

$$a_{ij} = \iint_{\Omega^e} \left[\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y}\frac{\partial N_i}{\partial y}\right] dx\,dy \qquad (۱۱)$$

$$F_j = \iint_{\Omega^e} N_j \left[\sum_{i=1}^{n} N_i u_i\right]^{\alpha} dx\,dy \qquad (۱۲)$$

بعد از آن که معادله‌ی ۱۰ را برای جزء مورد نظر نـوشتیم، بـاید معادلات مشابه مربوط به گره‌های مشترک رابا هم ادغام کنیم تا اثر $\frac{\partial u}{\partial n}$ در هر جزء از بین برود. به این ترتیب اگر در کل محدوده‌ی حل m گره وجود داشته باشد، در نهایت m معادله حاصل می‌شود.

اکنون دو نکته همچنان به قوت خود باقی است: چگونگی حـل معادله‌ی جبری غیرخطی، و محاسبه‌ی تابع شکلی N. ابتدا به حـل معادله‌ی جبری غیرخطی می‌پردازیم.

حل معادله‌ی جبری غیرخطی

برای حل معادلات جبری غیرخطی مـی‌توان از روش‌هـای مـتداول عددی استفاده کرد. از جمله‌ی این روش‌ها می‌توان به «روش تکرار» اشاره کرد که شامل روش تکراری معمولی یا نیوتن‌ـ‌رافسون است. روشی که در این کار استفاده شده و نتایج مناسبی نـیز داشـته است، روش تکرار معمولی است.

در روش تکرار معمولی کلیه‌ی جملات غیرخـطی را بـه‌صورت معلوم با حدس اولیه‌یی از جواب در نظر گرفته، دستگاه را به‌صورت یک معادله‌ی خطی حل می‌کنیم. سپس بـا بـه دست آوردن جـواب حاضر مجدداً مرحله‌ی قبل را تکرار می‌کنیم با این تفاوت که به جای حدس اولیه از جواب به دست آمده استفاده می‌کنیم و این مراحل را تا زمانی که به جواب دقیق و مناسب برسیم تکرار می‌کنیم. به این ترتیب معادله‌ی جبری ۱۰ از شکل غیرخطی به شکل خطی تبدیل می‌شود.

$$a_{ij} u_i^{p} = -F_j^{p-1} \qquad (۱۳)$$

که در آن p تعداد مرحله‌ی تکرار است و

$$F_j^{p-1} = \iint_{\Omega^e} N_j \left[\sum_{i=1}^{n} N_i u_i^{p-1}\right]^{\alpha} dx\,dy \qquad (۱۴)$$

برای ایجاد یک روند متعادل در مراحل تکرار و ایجاد همگرایی می‌توان از یک ضریب متعادل‌کننده، که تنظیم‌کننده‌ی سرعت و میزان همگرایی است، استفاده کرد. به این ترتیب در هـر مرحـله از تکـرار برای قراردادن مقدار مجهول در جـمله‌ی غـیر خـطی از تـرکیبی از مجهول که از مرحله‌ی قبل و مرحله‌ی جدید به دست آمده استفاده می‌شود.

$$F_i^{n+1}=\iint_{\Omega^e} N_i \left[\sum_{i=1}^{n} N_i\beta \left(u_i^{p+1}+u_i^{p-1}\right)\right]^{\alpha} dx\,dy \qquad (15)$$

که در آن β همان ضریب متعادل‌کننده است و معمولاً مقدار ۰/۵ را برای آن در نظر می‌گیریم. به این ترتیب می‌توان با حل دستگاه جبری خطی شده به صورت تکرار مقادیر جواب، u_i را برای تمام گره‌ها به دست آورد.

تابع شکلی

گفتیم که تابع شکلی، صورت ساده و تقریبی از جواب در هر جزء است. در اینجا برای سهولت در انتگرال‌گیری از شکل چندجمله‌یی آن استفاده می‌کنیم. به همین منظور جزء نشان داده شده در شکل ۵ را در نظر می‌گیریم.

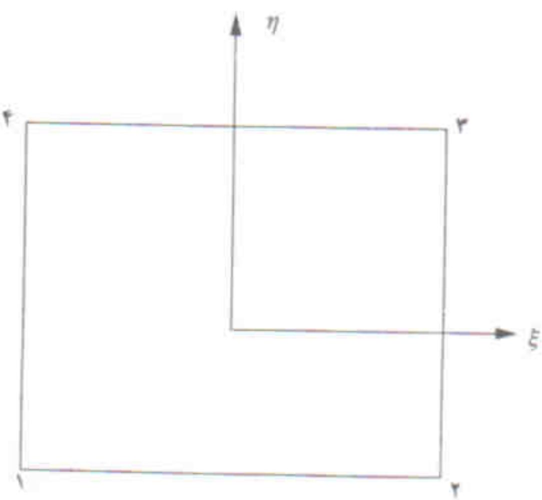
این جزء به شکل مربع به اضلاع ۲ در محور مختصات ξ و η است که بعد از محاسبه‌ی توابع شکلی و انتگرال‌گیری می‌توان با یک تبدیل آن را به مختصات اصلی x و y برد. به این ترتیب تغییرات u به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u=a_1+a_2\xi+a_3\eta+a_4\xi\eta \qquad (16)$$

که برای هر چهار گره داریم:

$$\begin{Bmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & \xi_1 & \eta_1 & \xi_1\eta_1\\ 1 & \xi_2 & \eta_2 & \xi_2\eta_2\\ 1 & \xi_3 & \eta_3 & \xi_3\eta_3\\ 1 & \xi_4 & \eta_4 & \xi_4\eta_4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (17)$$

و با توجه به مختصات (η, ξ) و جزء مربع شکل به اضلاع ۲:



شکل ۵. جزء خطی چهارگره‌یی.

$$\begin{Bmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1\\ a_2\\ a_3\\ a_4 \end{Bmatrix} \qquad (18)$$

در نتیجه مقادیر a_i برحسب u_i به دست می‌آیند. اما در حالت کلی نیز داشتیم:

$$u=\begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1\\ u_2\\ u_3\\ u_4 \end{Bmatrix} \qquad (19)$$

که با قراردادن مقادیر a_i برحسب u_i در معادله‌ی ۱۶ و مقایسه‌ی آن با معادله‌ی ۱۹ خواهیم داشت:

$$N_1=\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta),\quad N_2=\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$N_3=\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta),\quad N_4=\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \qquad (20)$$

به همین ترتیب اگر جزء هشت گره‌یی انتخاب کنیم، می‌توان نوشت:

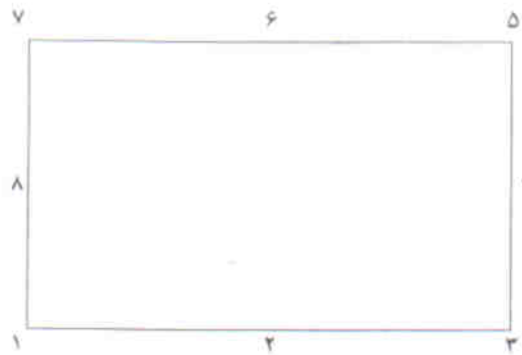
$$u=a_1+a_2x+a_3y+a_4xy+a_5x^2+a_6y^2+a_7xy^2+a_8x^2y \qquad (21)$$

که به روشی مشابه می‌توان هشت تابع وزنی را به دست آورد. با توجه به شماره‌گذاری گره‌ها در هر جزء، برای جزء هشت گره‌یی مطابق شکل ۶ خواهیم داشت:

$$N_1=\frac{1}{4}(-1+\xi\eta+\xi^2+\eta^2-\xi^2\eta-\xi\eta^2)$$
$$N_2=\frac{1}{2}(1-\eta-\xi^2+\xi^2\eta)$$
$$N_3=\frac{1}{4}(-1-\xi\eta+\xi^2+\eta^2-\xi^2\eta+\xi\eta^2)$$
$$N_4=\frac{1}{2}(1+\xi-\eta^2-\xi\eta^2)$$
$$N_5=\frac{1}{4}(-1+\xi\eta+\xi^2+\eta^2+\xi^2\eta+\xi\eta^2)$$
$$N_6=\frac{1}{2}(1+\eta-\xi^2-\xi^2\eta)$$
$$N_7=\frac{1}{4}(-1-\xi\eta+\xi^2+\eta^2+\xi^2\eta+\xi\eta^2)$$
$$N_8=\frac{1}{2}(1-\xi-\eta^2+\xi\eta^2) \qquad (22)$$

انتگرال‌گیری عددی

از آنجا که توابع شکلی چندجمله‌یی‌اند، می‌توان با روش عددی گاوس انتگرال دقیق آنها را محاسبه کرد. در روش گاوس با استفاده از



شکل ۶. جزء هشت گره‌یی.

جدول ۲. مقادیر a_i حاصل از روش گاوس

m	i	a_i	ξ	η
۲	۱	۱	$-1/\sqrt{3}$	
	۲	۱	$1/\sqrt{3}$	
۳	۱	۵/۹	$-\sqrt{0/6}$	
	۲	۸/۹	۰	
	۳	۵/۹	$\sqrt{0/6}$	

یک سری مقادیر وزنی، و با داشتن تابع شکلی مقدار دقیق انتگرال را محاسبه می‌کنیم. اگر به فرض بخواهیم در یک جزء مربع شکل به اضلاع ۲ از $F(\xi,\eta)$ انتگرال‌گیری کنیم، خواهیم داشت:

$$I=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}F(\xi,\eta)d\xi d\eta \qquad (۲۳)$$

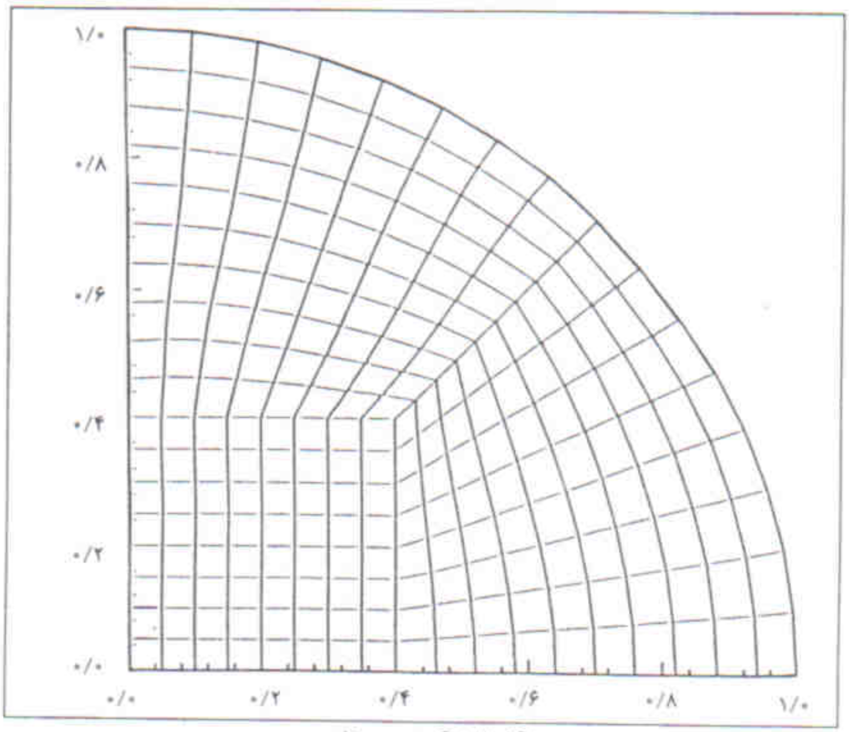
اگر F نسبت به ξ و η از درجه‌ی $2m-1$ باشد با در نظر گرفتن m به‌عنوان نقطه‌ی گاوسی در جهت x, y بین ۱− تا ۱+ می‌توان نوشت:

$$I=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m}a_j a_i F(\xi_i,\eta_j) \qquad (۲۴)$$

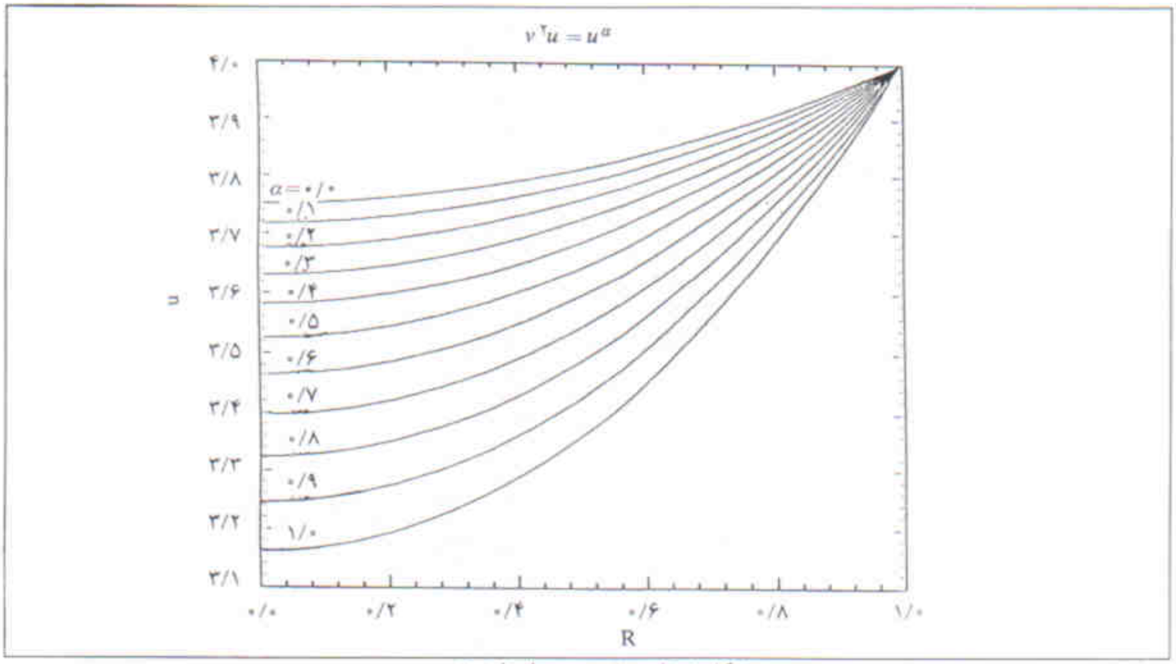
که در آن ξ_i و η_j نقاط گاوسی و a_i و a_j مقادیر وزنی ارائه شده در جدول ۲ هستند. به این ترتیب با استفاده از سه نقطه‌ی گاوسی می‌توان انتگرال دقیق یک چندجمله‌یی درجه‌ی ۵ را محاسبه کرد.

حل مسئله

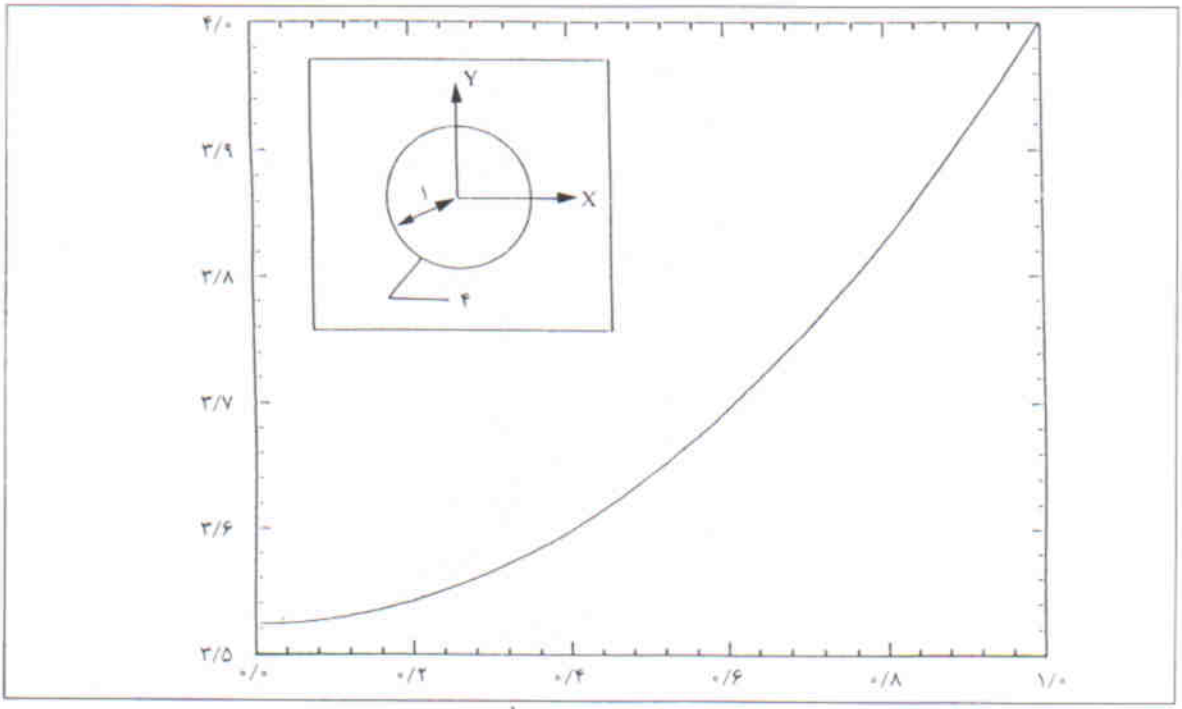
با توجه به نظریه‌ی گفته شده، اکنون به کمک یک برنامه‌ی رایانه‌یی معادله‌ی ۳ را در ناحیه‌ی دایره‌یی شکل ۳ حل می‌کنیم. از آنجا که شکل متقارن است، برای حل ربع آن را در نظر می‌گیریم. طبق شبکه‌ی ایجاد شده برای حل که در شکل ۷ نشان داده شده از اجزاء هشت‌گره‌یی استفاده شده است. برنامه برای αهای بین صفر تا ۱ با گام‌های ۰/۱ اجرا شده و نتایج در شکل ۸ ارائه شده است. مراحل تکرار برای حل کمتر از ۱۰ مرحله است و این نشانگر همگرایی مناسب است. دقت و معیار همگرایی برای حل نیز به میزان ۰/۰۰۰۱ است. نتایج برای $\alpha=\frac{1}{2}$ به طور جداگانه، در شکل ۹ مشاهده می‌شود.



شکل ۷. شبکه‌بندی مسئله.



شکل ۸. نتایج حل عددی برای $0 \leq \alpha \leq 1$.



شکل ۹. نتایج عددی برای $\alpha = \frac{1}{2}$.

نتیجه گیری

نتیجه‌ی کلی به دست آمده از این مسئله، حاکـی از آن است کـه در حالت خطی از روش تلفیقی تفاضل محدود بهتر از روش‌های دیگر می‌توان به جواب رسید. به عبارت دیگر، در حل مسئله‌ی پواسـون خطی اگر به جای محاسبه‌ی $\frac{\partial u}{\partial n}$ از روش تقریب درجه اول، مسئله را از روش دقیق:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{n=1}^{\wedge} \alpha_i u_i$$

محاسبه کنیم به جواب حقیقی نزدیک‌تر خواهیم بود. این در حـالی است که در مسئله‌ی غیر خطی روش اجزاء محدود نتایج دقیق‌تری به دست خواهد داد.

پانوشت‌ها

1. Neumann's boundary value problem
2. boundary conditions
3. Laplace-Poisson equations
4. Poissones equation

منابع

1. Greenspan, Introductory Numerical Analysis of Elliptic Boundary Value Problems Harper and Row, N.Y.(1965).
2. Wait, R. and Mitchell, A.R., Finite Element Analysis and Applications, John Wiley (1985).
3. Mitchell, A.R., "finite element method for biharmonic equations", Computers and Math. Appl., **5**, pp.321-325 (1979).
4. Mitchell, A.R. and Griffiths, D.F., The Finite Difference Method in Partial Differential Equations, John Wiley (1980).
5. Zienkiewicz, O.C. and Morgan, K., Finite Elements and Approximations, John Wiley (1983).
6. Thomas, J.R. Hushes, The Finite Element Method-Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice Hall (1987).
7. Yosida, K., Functional Analysis, Springer Verlag (1971).