

ارائه‌ی روشی جدید در تحلیل پایداری شیب‌های خاکی با استفاده از روش تعادل حدی

محمد حاجی عزیزی* (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه رازی، کرمانشاه

فواد کیلانه‌ئی (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)

پیمان کیلانه‌ئی (دانشجوی کارشناسی ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه رازی، کرمانشاه

مهندسی عمران شریف، زمستان ۱۳۹۶ (۱۳۹۶)
دوری ۲ - ۳۳، شماره ۱/۴، ص. ۱۴۵-۱۵۳، (پادداست‌ئی)

در پژوهش حاضر، یک روش تعادل حدی جدید ارائه شده است که کلبه‌ی شرایط تعادل را ارضا می‌کند. در روش پیشنهادی، شکل سطح لغزش به صورت دایره‌یی و غیردایره‌یی و قطعات در امتداد شعاع سطح لغزش و یا خطوطی در نظر گرفته شده‌اند که به یک نقطه هم‌گرا می‌شوند. همچنین معادلات تعادل نیروها و گشتاور، بدون هیچ‌گونه فرض ساده‌کننده‌یی استفاده شده‌اند. نوآوری پژوهش حاضر در شکل قطعات به صورت قطاع است که موجب حذف شدن فرضیات متداول در روش تعادل حدی می‌شود. بنابراین انتظار می‌رود که روش مذکور در تعیین ضریب اطمینان، خطای کمتری داشته باشد. به منظور محاسبه‌ی ضریب اطمینان با استفاده از روش پیشنهادی، یک مدل عددی توسعه داده شده است، که جهت ارضاء هم‌زمان معادلات تعادل نیرو و گشتاور، از روش تکراری (سعی و خطا) استفاده می‌کند. همچنین روش ارائه شده می‌تواند مقدار نیروهای قائم و برشی را در بین قطعات محاسبه کند. به منظور ارزیابی روش پیشنهادی و کارایی مدل توسعه داده شده، چند مثال با شرایط مختلف حل شده است که نتایج حاصل از آن‌ها تطابق خوبی با نتایج روش‌های دیگر دارد.

واژگان کلیدی: پایداری شیروانی خاکی، ضریب اطمینان، روش تعادل حدی، سطح لغزش.

۱. مقدمه

لغزش بحرانی هستند. در روش‌های تعادل حدی با فرض یک سطح گسیختگی و تأمین معادلات تعادل استاتیکی برای آن، مقدار ضریب اطمینان محاسبه می‌شود. همچنین در روش‌های مذکور، تعداد معادلات تعادل از تعداد مجهولات کمتر است و به همین دلیل معمولاً فرضیاتی اضافی برای معین شدن مسئله در نظر گرفته می‌شود. نخستین روش تعادل حدی در سال ۱۹۳۶ ارائه شده است.^[۱]

در روش مذکور از نیروی بین قطعات صرف نظر شده و محاسبه‌ی مقدار ضریب اطمینان براساس تعادل لنگر حول مرکز سطح گسیختگی به دست آمده است. روش پیشاپ^۱ اصلاح شده،^[۱] نیز با فرض سطح گسیختگی دایروی و تأمین تعادل لنگر و نیروی قائم به محاسبه‌ی مقدار ضریب اطمینان پرداخته است. در برخی مطالعات،^[۲-۵] با تأمین معادلات تعادل نیرو، مقدار ضریب اطمینان محاسبه شده و اختلاف بین روش‌های مختلف که با تأمین معادلات تعادل نیرو مقدار ضریب اطمینان را محاسبه می‌کنند، در فرضیات مربوط به زاویه‌ی نیروی بین قطعات است. به طوری که هر روشی زوایای مختلفی برای نیروهای مذکور در نظر گرفته است. همچنین در مطالعات دیگری،^[۶-۸] با در نظر گرفتن بعضی از فرضیات و تأمین معادلات تعادل

تحلیل پایداری شیب‌های خاکی، یکی از مباحث مهم در مهندسی عمران و از مسائل اساسی در طراحی سدهای خاکی، راه‌ها، کانال‌ها و خاکریزهاست. تحلیل پایداری شیب به فرایندی اطلاق می‌شود که طی آن ایمنی یک شیروانی طبیعی یا مصنوعی کنترل شود، به طوری که شیب مذکور ممکن است در اثر گودبرداری یا خاکریزی ایجاد شده باشد. این کنترل شامل محاسبه‌ی تنش‌های برشی ایجاد شده در امتداد بحرانی‌ترین و محتمل‌ترین سطح لغزش و مقایسه‌ی آن با مقاومت برشی خاک است. یافتن سطح لغزش بحرانی شیب‌ها و محاسبه‌ی ضریب اطمینان نظیر این سطح، دو مفهوم اساسی در مباحث آنالیز پایداری شیب‌های خاکی است. تعیین بحرانی‌ترین سطح لغزش از این جهت حائز اهمیت است که محاسبه‌ی کمینه‌ی مقدار ضریب اطمینان که معمولاً هدف انجام تحلیل پایداری است، در این سطح لغزش اتفاق می‌افتد. روش‌های تعادل حدی از قدیمی‌ترین روش‌ها در تعیین سطح

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۱۰/۲، اصلاحیه ۱۳۹۵/۲/۲۸، پذیرش: ۱۳۹۵/۲/۱۴

لنگر و نیرو، مقدار ضریب اطمینان محاسبه شده است. در سال ۲۰۰۳، با فرض سطح لغزش دایره‌یی یک روش تعادل حدی توسعه داده شده است که شرایط تعادل نیرو و لنگر را ارضا می‌کند.^[۱۹] بدین منظور برای حل معادلات تعادل نیرو و لنگر از روش بهینه‌سازی غیرخطی همراه با قیود مرتبط استفاده شده است. همچنین در پژوهش دیگری در همان سال،^[۱۹] به منظور محاسبه مقدار ضریب اطمینان از روش QR مضاعف استفاده و در روش مذکور، ضریب اطمینان مستقیماً محاسبه شده و نیازی به استفاده از روش تکرار (سعی و خطا) نبوده است. بدین ترتیب که با استفاده از روابط تعادل نیرو، نیروهای بین قطعه‌یی محاسبه و سپس با ترکیب روابط مذکور برای یک شیروانی که به n قطعه تقسیم شده است، معادله‌یی از درجه‌یی n برحسب ضریب اطمینان به دست آمده است.

با محاسبه ریشه‌های معادله‌ی ذکر شده، مقادیر منفی و غیرمنطقی آن کنار گذاشته شده و پس از آن مقادیر باقی‌مانده به ترتیب آزمایش شده‌اند. اولین ریشه‌یی که به ازاء آن مقادیر نیروهای بین قطعه‌یی و نیروهای عمودی تکیه‌گاهی درست محاسبه و همچنین معادله‌ی تعادل لنگر نیز تأمین شده است، به عنوان ضریب اطمینان در نظر گرفته شده است. اگر هیچ‌یک از ریشه‌های معادله‌ی مذکور شرایط بیان شده را تأمین نکند، مسئله مشکل هم‌گرایی^۲ دارد. در سال ۲۰۰۴، رابطه‌ی واحدی برای محاسبه‌ی مقدار ضریب اطمینان دو بعدی با استفاده از روش تعادل حدی پیشنهاد و به منظور محاسبه‌ی مقدار ضریب اطمینان از تقریب خطی گوس - نیوتن استفاده شده است.^[۱۹] در مطالعه‌ی دیگری (۲۰۰۵)،^[۲۱] نیز یک الگوریتم ساده برای محاسبه‌ی ضریب اطمینان با استفاده از روش مورگنشترن - پرایس ارائه شده است که در آن با استفاده از مقادیر اولیه‌ی ضریب اطمینان و ضریب مقیاس λ و با عملیات تکراری، مقدار هم‌گرا شده‌ی ضریب اطمینان و λ محاسبه شده است. الگوریتم ساده‌ی مذکور، کارا و قابل برنامه‌نویسی در رایانه بوده و نتایج حاصل از آن نشان داده است که انتخاب تابع بین قطعه‌یی متفاوت، تأثیر ناچیزی در ضریب اطمینان دارد.

همچنین در سال ۲۰۱۰، ضریب اطمینان پایداری یک شیب با روش‌های اسپنسر و اجزاء محدود ارزیابی و نتایج حاصل از آن‌ها با یکدیگر مقایسه و مقادیر ضریب اطمینان در روش عددی بیش از روش تعادل حدی حاصل شده است.^[۱۳] پژوهشگرانی نیز با ترکیب آنالیز عددی و تئوری روش تعادل حدی به تعریف سطح گسیختگی بحرانی در شیروانی خاکی پرداخته و با کاربرد آنالیز عددی، سطح گسیختگی فرضی تعیین و با استفاده از روش تعادل حدی، مقدار ضریب اطمینان محاسبه شده است.^[۱۴] همچنین در مطالعه‌یی در سال ۲۰۰۸، حالت‌هایی در پایداری شیروانی در نظر گرفته شده است که در آنالیز تعادل حدی هم‌گرایی نتایج آنها با مشکل مواجه می‌شده است. لذا برای حل مشکل مذکور روش ساده‌یی برای هم‌گرایی پیشنهاد و ارزیابی شده است.^[۱۵] برخی پژوهشگران (۲۰۱۱) نیز با پیوند دادن روش‌های تعادل حدی و المان محدود، یک روش ترکیبی برای محاسبه‌ی ضریب اطمینان در مقابل لغزش برای سد قوسی ارائه کرده‌اند که نتایج به دست آمده از روش مذکور تطابق خوبی با روش‌های تئوری داشته است.^[۱۶] همچنین در همان سال، ضریب اطمینان یک شیروانی مربوط به پروژه‌ی راه‌آهن با استفاده از روش تعادل حدی و روش کاهش مقاومت برشی مقایسه و ضریب اطمینان مربوط به دو مقطع مختلف در حالت‌های خشک و مرطوب بررسی شده و نتایج نشان داده است که ضریب اطمینان حاصل از روش‌های تعادل حدی و عددی تقریباً در یک محدوده است و وجود آب، ضریب اطمینان را به سرعت کاهش می‌دهد.^[۱۷] در سال ۲۰۱۳ نیز با استفاده از شرایط کرنش صفحه‌یی و آنالیز تنش - کرنش کشسان خمیری، مدلی برای آنالیز پایداری براساس روش تعادل حدی المان محدود

ارائه شده است که نتایج آن می‌تواند مبنای منطقی برای طراحی و ساخت ایمن فراهم کند.^[۱۸] همچنین با ترکیب معیار گسیختگی هوک - برون و روش تعادل حدی از طریق مقاومت برشی معادل و زاویه‌ی اصطکاک (۲۰۱۴)، یک رابطه برای محاسبه‌ی ضریب اطمینان بیان شده و ارتباط بین پارامترهای هوک - برون با پارامترهای چسبندگی و زاویه‌ی اصطکاک بررسی و همچنین اثر پارامترهای رابطه‌ی هوک - برون در مقدار ضریب اطمینان تعیین شده است.^[۱۹] در نوشتاری در سال ۲۰۱۳، با استفاده از روش بهینه‌سازی TDAVLG^۲ (تغییرات متناوب گرادیان محلی در سه بعد) و استفاده از روش تعادل حدی به محاسبه‌ی ضریب اطمینان برای سطح لغزش غیرکروی در سه بعد پرداخته شده و ابتدا بحرانی‌ترین سطح گسیختگی کروی با استفاده از روابط توسعه‌یافته‌ی تعادل حدی اسپنسر برای حالت سه بعدی تعیین شده است. سپس تعدادی نقاط روی سطح گسیختگی ذکر شده انتخاب و با استفاده از روش تغییرات گرادیان محلی، مکان هر یک از نقاط بهینه شده است. بعد از بهینه‌سازی تمامی نقاط مذکور در سیکل اول، مقدار تابع هدف که همان ضریب اطمینان است، محاسبه شده و در مرحله‌ی بعد روند بهینه‌سازی نقاط ادامه یافته است، تا زمانی که اختلاف بین ضرایب اطمینان دو سیکل متوالی ناچیز شود. پس از این مرحله، روند بهینه‌سازی به اتمام رسیده و ضریب اطمینان محاسبه شده در آن مرحله آخر، به عنوان کمترین ضریب اطمینان و سطح گسیختگی وابسته به آن به عنوان بحرانی‌ترین سطح گسیختگی غیرکروی در نظر گرفته شده است.^[۲۰]

در مطالعه‌ی دیگری در سال ۲۰۰۸،^[۲۱] مدل‌های پایداری شیب نامتقارن با توسعه‌ی روش‌های پیشاپ اصلاح شده، جانבו اصلاح شده و مورگنشترن - پرایس به حالت سه بعدی ابداع شده و طبق روابط ارائه‌شده‌ی پژوهشگران مذکور، امتداد لغزش در هر سه روش یکسان و از تعادل نیرو و یا لنگر در حالت سه بعدی به دست می‌آید. در سال ۲۰۱۲، نیز با استفاده از روش المان محدود کشسان خمیری و روش کاهش مقاومت برشی (SRM)^۴ به محاسبه‌ی ضریب اطمینان سه بعدی پرداخته شده است.^[۲۲] پژوهشگرانی نیز در سال ۲۰۰۹، مدل آنالیز پایداری سه بعدی شیب را با استفاده از روش کاهش مقاومت برشی (SRM) و روش تعادل حدی (LEM) برای چندین حالت مختلف ارزیابی کرده‌اند.^[۲۳] ضمناً قابل ذکر است که استفاده از روش تعادل حدی متداول در تحلیل پایداری شیب‌های خاکی همچنان ادامه داشته است.^[۲۴-۲۷]

در پژوهش حاضر با استفاده از روش تعادل حدی و در نظر گرفتن شکل قطعات به صورتی خاص، تمامی نیروهای وارد بر قطعات در نظر گرفته شده و بدون هیچ‌گونه فرض ساده‌کننده‌یی، روابط تعادل لنگر و نیرو اعمال شده‌اند. در ادامه، با ارضاء کردن معادلات تعادل (تعادل لنگر و نیرو)، مقدار ضریب اطمینان با دقت بیشتری محاسبه شده است که مقادیر آن نسبت به دیگر روش‌های تعادل حدی بیشتر است.

۲. معادلات تعادل حدی در روش پیشنهادی

شکل ۱، گوه‌ی لغزش در یک شیب خاکی را نشان می‌دهد که به تعدادی قطعه در امتداد شعاع دایره تقسیم شده است. نوآوری پژوهش حاضر در شکل قطعات به صورت قطاع است که موجب حذف شدن فرضیات متداول در روش تعادل حدی شده است. دی‌گرام آزاد نیروهای وارد بر ۱ قطعه در شکل ۲ ارائه شده است که این نیروها عبارت‌اند از: وزن قطعه (W_i)، نیروهای بین قطعه‌یی شامل مؤلفه‌ی برشی (X_i) و مؤلفه‌ی عمودی (E_i)، نیروی مقاوم برشی (S_i) و نیروی عمودی (N_i) که بر کف قطعه اعمال شده‌اند.

$$E_{i+1} \sin \theta/2 - W \sin(\alpha_i - \theta/2) \sin \theta/2 - N \sin^2 \theta/2 + S \cos \theta/2 \sin \theta/2 - E_i \cos \theta \sin \theta/2 - X_i \sin \theta \sin \theta/2 = 0 \quad (4)$$

از جمع روابط ۳ و ۴، مقدار نیروی عمودی به صورت رابطه ۵ محاسبه شده است:

$$N = X_{i+1} \cos \theta/2 + E_{i+1} \sin \theta/2 + W \cos \alpha_i + E_i \sin \theta/2 - X_i \cos \theta/2 \quad (5)$$

برای به دست آوردن مقاومت برشی (S) طرفین معادلات ۱ و ۲ در $\sin \theta/2$ ضرب می‌شود (روابط ۶ و ۷):

$$X_{i+1} \sin \theta/2 + W_s(\alpha_i - \theta/2) \sin \theta/2 - N \cos \theta/2 \sin \theta/2 - S \sin^2 \theta/2 + E_i \sin \theta \sin \theta/2 - X_i \cos \theta \sin \theta/2 = 0 \quad (6)$$

$$-E_{i+1} \cos \theta/2 + W \sin(\alpha_i - \theta/2) \cos \theta/2 + N \sin \theta/2 \cos \theta/2 - S \cos^2 \theta/2 + E_i \cos \theta \cos \theta/2 + X_i \sin \theta \cos \theta/2 = 0 \quad (7)$$

از جمع دو رابطه ۶ و ۷، رابطه ۸ به دست می‌آید:

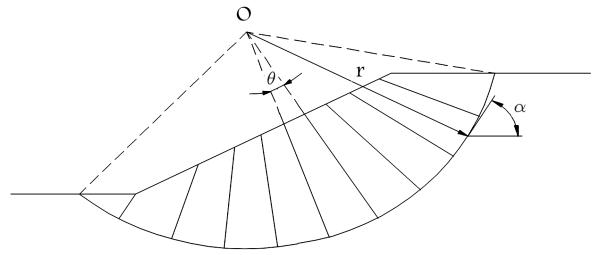
$$S = X_{i+1} \sin \theta/2 - E_{i+1} \cos \theta/2 + X_i \sin \theta/2 + E_i \cos \theta/2 + W \sin \alpha_i \quad (8)$$

از طرفی با توجه به رابطه ۹، رابطه ۸ به صورت رابطه ۱۰ بازنویسی می‌شود:

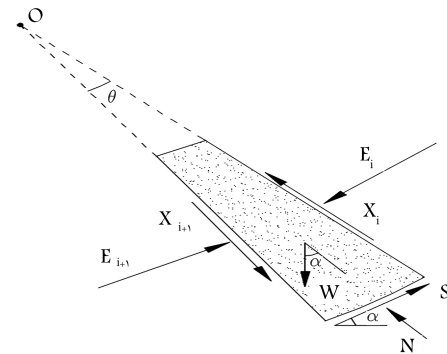
$$S = \frac{1}{F}(C \Delta L + (N - U \Delta L) \tan \varphi) X_{i+1} \sin \theta/2 - E_{i+1} \cos \theta/2 + X_i \sin \theta/2 + E_i \cos \theta/2 + W \sin \alpha_i - \frac{C \Delta L}{F} - \frac{\tan \varphi}{F} \left(X_{i+1} \cos \theta/2 + E_{i+1} \sin \theta/2 + W \cos \alpha_i + E_i \sin \theta/2 - X_i \cos \theta/2 \right) + \frac{U \Delta L}{F} \tan \varphi = 0 \quad (10)$$

با در نظر گرفتن رابطه مورگنشترن - پرایس، $(X = \lambda f(x)E)$ که بیانگر ارتباط بین نیروی برشی و قائم بین قطعات است و جای‌گذاری رابطه مذکور در معادله ۱۰ و ساده‌سازی آن، رابطه تعادل نیرو به صورت رابطه ۱۱ به دست می‌آید.

که در آن، e' و φ' به ترتیب چسبندگی و زاویه اصطکاک مؤثر خاک، W وزن قطعه، U فشار آب حفره‌یی، a_i زاویه کف هر قطعه نسبت به افق، $f(x)$ تابع فرضی است که ارتباط بین نیروی قائم و برشی را در هر قطعه بیان می‌کند، λ ضریب مقیاس، θ زاویه مرکزی هر قطعه، ΔL طول کف هر قطعه، F ضریب اطمینان مربوط به تعادل نیرو و E نیروی قائم بین قطعه‌یی است. در رابطه ۱۱، که براساس تعادل نیرو به دست آمده است، چند نکته حائز اهمیت است: ۱. رابطه ۱۱، دو مجهول دارد: یکی ضریب اطمینان F و دیگری ضریب مقیاس λ ; ۲. نیروی بین قطعه‌یی E_{i+1} در هر مرحله به نیروی بین قطعه‌یی E_i در مرحله قبل وابسته است (رابطه بازگشتی است); ۳. شرط مرزی معادله عبارت است از $E_1 = 0$ و $E_{n+1} = 0$ زیرا قبل از اولین قطعه و بعد از آخرین قطعه، قطعه‌یی وجود ندارد.



شکل ۱. سطح گسیختگی دایروی که به قطعات شعاعی تقسیم شده است.



شکل ۲. دیاگرام آزاد نیروهای وارد بر یک قطعه.

با نوشتن معادلات تعادل نیرو در دو راستای X_{i+1} و E_{i+1} تأمین تعادل لنگر حول مرکز سطح گسیختگی (نقطه O)، روابط تعادل نیرو و لنگر به دست آمده‌اند. فرضیاتی که در پژوهش حاضر استفاده شده‌اند، عبارت‌اند از: ۱. معیار گسیختگی موهر - کولمب معتبر است؛ ۲. امتداد قطعات به یک مرکز مشخص هم‌گرا می‌شوند؛ ۳. رابطه مورگنشترن - پرایس $(X = \lambda f(x)E)$ معتبر است که بیانگر ارتباط بین نیروی برشی و قائم بین قطعات است.

۱.۲ معادلات تعادل نیرو

با توجه به شکل ۲ و نوشتن معادلات تعادل نیرو در دو راستای X_{i+1} و E_{i+1} معادلات ۱ و ۲ حاصل شده است:

$$X_{i+1} + W \cos(\alpha_i - \theta/2) - N \cos \theta/2 - S \sin \theta/2 + E_i \sin \theta - X_i \cos \theta = 0 \quad (1)$$

$$E_{i+1} - W \sin(\alpha_i - \theta/2) - N \sin \theta/2 + S \cos \theta/2 - E_i \cos \theta - X_i \sin \theta = 0 \quad (2)$$

با ضرب طرفین معادلات ۱ و ۲ در $\cos \theta/2$ و $\sin \theta/2$ معادلات ۳ و ۴ به دست می‌آید:

$$X_{i+1} \cos \theta/2 + W \cos(\alpha_i - \theta/2) \cos \theta/2 - N \cos^2 \theta/2 - S \sin \theta/2 \cos \theta/2 + E_i \sin \theta \cos \theta/2 - X_i \cos \theta \cos \theta/2 = 0 \quad (3)$$

$$E_{i+1} = \frac{\frac{C \Delta L}{F} - \frac{U \Delta L}{F} \tan \varphi + W \left(\frac{\tan \varphi}{F} \cos \alpha_i - \sin \alpha_i \right)}{\lambda f_{(x)} \sin \theta / 2 - \cos \theta / 2 - \frac{\tan \varphi}{F} (\lambda f_{(x)} \cos \theta / 2 + \sin \theta / 2)} + \frac{(-\lambda f_{(x)} \sin(\theta / 2) - \cos \theta / 2 + \frac{\tan \varphi}{F} (\sin \theta / 2 - \lambda f_{(x)} \cos \theta / 2)) E_i}{\lambda f_{(x)} \sin \theta / 2 - \cos \theta / 2 - \frac{\tan \varphi}{F} (\lambda f_{(x)} \cos \theta / 2 + \sin \theta / 2)} \quad (11)$$

۲.۲. معادله‌ی تعادل لنگر

برای به دست آوردن معادله‌ی تعادل لنگر، نخست رابطه‌ی مقاومت برشی بر حسب نیروهای بین قطعه‌ی محاسبه می‌شود، سپس با تأمین تعادل لنگر حول مرکز سطح گسیختگی، رابطه‌ی تعادل لنگر به دست می‌آید. رابطه‌ی مقاومت برشی بر حسب نیروهای بین قطعه‌ی به صورت روابط ۱۲ و ۱۳ است:

$$N = E_{i+1} (\sin \theta / 2 + \lambda f_{(x)} \cos \theta / 2) + E_i (\sin \theta / 2 - \lambda f_{(x)} \cos \theta / 2) + W \cos \alpha_i \quad (12)$$

$$S = \frac{1}{F} \left(C \Delta L + \left[\begin{array}{l} E_{i+1} (\sin \theta / 2 + \lambda f_{(x)} \cos \theta / 2) \\ E_i (\sin \theta / 2 - \lambda f_{(x)} \cos \theta / 2) \\ + W \cos \alpha_i - U \Delta L \end{array} \right] \tan \varphi \right) \quad (13)$$

و معادله‌ی تعادل لنگر به صورت رابطه‌ی ۱۴ خواهد شد:

$$\sum W_i \sin \alpha_i \beta_i - S r = 0 \quad (14)$$

با جای‌گذاری (S_i) در رابطه‌ی ۱۴ و ساده‌سازی آن، معادله‌ی تعادل لنگر به صورت رابطه‌ی ۱۵ حاصل خواهد شد:

$$F = \frac{\sum (C \Delta L r + [(\sin \theta / 2 + \lambda f_{(x)} \cos \theta / 2) E_{i+1}] r \tan \varphi)}{\sum (W_i \sin \alpha_i \beta_i)} + \frac{\sum ([(\sin \theta / 2 - \lambda f_{(x)} \cos \theta / 2) E_i + W \cos \alpha_i - U \Delta L] r \tan \varphi)}{\sum (W_i \sin \alpha_i \beta_i)} \quad (15)$$

که در آن، r شعاع دایره‌ی گسیختگی و β بازوی لنگر در هر المان است.

۴. توسعه‌ی یک مدل عددی برای محاسبه‌ی ضریب

اطمینان

به منظور محاسبه‌ی ضریب اطمینان با استفاده از روش پیشنهادی در نوشتار حاضر، یک مدل عددی به زبان فرترن توسعه داده شده است که در آن ابتدا مشخصات شیب خاکی از جمله: هندسه‌ی شیب، خواص مقاومتی خاک و همچنین تراز سطح آب به عنوان ورودی داده می‌شود. سپس ضمن معرفی گوه‌ی لغزش، براساس تعداد تقسیماتی که کاربر آن را تعیین می‌کند، گوه‌ی لغزش منقطع می‌شود. در گام بعد، ضمن تعیین مختصات گره‌های هر قطعه، می‌توان مساحت، وزن، زاویه‌ی کف نسبت به افق، مرکز سطح، بازوی لنگر و در نهایت فشار آب حفره‌ی هر قطعه را به دست آورد. با داشتن مشخصات تمامی قطعات می‌توان به محاسبه‌ی ضریب اطمینان پرداخت. برای محاسبه‌ی ضریب اطمینان باید فرایندی طی شود که به طور هم‌زمان معادلات تعادل نیروها و لنگر (معادلات ۱۱ و ۱۵) تأمین شوند. بدین منظور با استفاده از یک ضریب اطمینان اولیه، معادله‌ی تعادل نیروارضا می‌شود. لذا با یک ضریب مقیاس λ اولیه و نیروی بین قطعه‌ی اولیه‌ی صفر ($E_1 = 0$) نیروهای بین قطعه‌ی دیگر قطعات محاسبه می‌شوند. اگر نیروی بین قطعه‌ی آخرین قطعه صفر شود، آنگاه معادله‌ی تعادل نیروارضا شده است؛ در غیر این صورت مقدار λ تغییر می‌کند تا شرط مرزی انتهایی ($E_{n+1} \approx 0$) برقرار شود. حال با جای‌گذاری λ و نیروهای بین قطعه‌ی حاصل از ارضاء معادله‌ی تعادل نیرو در معادله‌ی تعادل لنگر، ضریب اطمینان حاصل از معادله‌ی لنگر محاسبه می‌شود. اگر اختلاف بین ضریب اطمینان اولیه و ضریب اطمینان حاصل از تعادل لنگر ناچیز باشد (کمتر از 10^{-4}) مقدار ضریب اطمینان به دست آمده قابل قبول است؛ در غیر این صورت مقدار ضریب اطمینان حاصل از تعادل لنگر جایگزین ضریب اطمینان اولیه می‌شود و فرایند ارائه‌شده تکرار می‌شود تا اختلاف بین دو ضریب اطمینان متوالی ناچیز شود. بدین ترتیب مقدار ضریب اطمینان محاسبه می‌شود. در ادامه، به منظور توضیح و تصدیق روش پیشنهادی، چند مثال حل شده است و نتایج حاصل از آن با نتایج حاصل از دیگر روش‌ها مقایسه شده‌اند.

۵. ارزیابی و کاربرد مدل

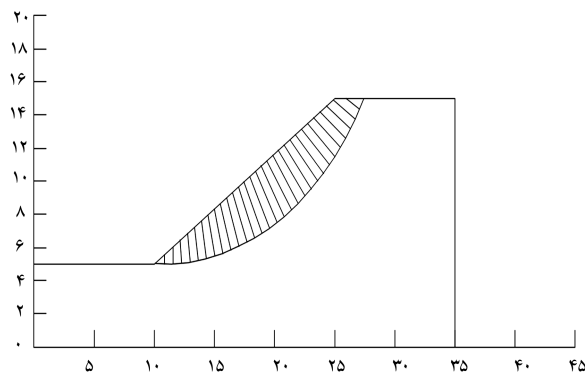
در بخش حاضر به منظور بررسی روش پیشنهادی، ۶ مثال با شرایط مختلف ارائه و نتایج حاصل از آن با نتایج دیگر پژوهشگران ارزیابی و مقایسه شده است. لازم به ذکر است در تمامی مثال‌ها، نتایج ارائه شده برای سایر روش‌های تعادل حدی (فلینوس، بیشاپ اصلاح شده، جانبو و مورگنشترن - پرایس) نیز محاسبه شده است.

۱.۵. مثال اول

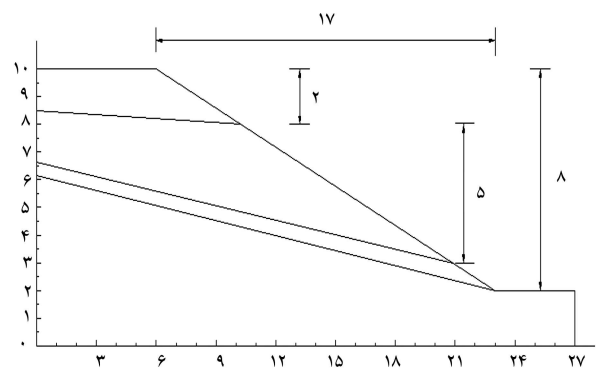
در مثال اول، یک شیب خاکی ۴ لایه در نظر گرفته شده (شکل ۳) که مشخصات ژئوتکنیکی آن‌ها در جدول ۱ ارائه شده است. لایه‌ی سوم، لایه‌ی ضعیفی است که سطح لغزش بحرانی از آن عبور خواهد کرد. قابل ذکر است که در این مثال، ابتدا سطح لغزش

۳. محاسبه‌ی ضریب اطمینان

معادلات ۱۱ و ۱۵، معادلات پایه هستند که بدون هیچ‌گونه فرض ساده‌کننده‌ی از تعادل نیروها و گشتاور حاصل شده‌اند که با ارضاء هم‌زمان آنها، ضریب اطمینانی را می‌توان محاسبه کرد که هم تعادل نیرو و هم تعادل لنگر را برآورده کند. در پژوهش حاضر، به منظور محاسبه‌ی ضریب اطمینان از روش تکراری استفاده شده است و با تأمین معادلات تعادل نیرو و لنگر، مقدار ضریب اطمینان به دست می‌آید. جهت محاسبه‌ی مقدار ضریب اطمینان، روش‌هایی که تمامی معادلات تعادل را ارضاء می‌کنند، نسبت به دیگر روش‌ها خطای کمتری دارند. بنابراین انتظار می‌رود که روابط ۱۱ و ۱۵ در تعیین مقدار ضریب اطمینان دقت بیشتری داشته باشند.



شکل ۵. هندسه‌ی شیروانی مثال دوم.



شکل ۳. یک شیب خاکی ۴ لایه.

جدول ۳. ضریب اطمینان محاسبه شده توسط روش‌های مختلف در مثال دوم.

روش پیشنهادی	مورگنشترن - پرایس	جانبو	بیشاپ	فلنیوس
۱٫۵۷	۱٫۵۵	۱٫۴۷	۱٫۵۶	۱٫۴۹

جدول ۴. ضریب اطمینان محاسبه شده توسط روش‌های مختلف در مثال سوم.

روش پیشنهادی	مورگنشترن - پرایس	جانبو	بیشاپ	فلنیوس
۱٫۲۱۵	۱٫۲۱۶	۱٫۱۶۷	۱٫۲۲	۱٫۱۷۲

چسبندگی ($C = 15 kPa$) و زاویه‌ی اصطکاک ($\varphi = 25^\circ$)، دارد. مختصات مرکز دایره‌ی گسیختگی و شعاع آن به ترتیب برابر با $Xc = 10.8m$ ، $Yc = 23.8m$ و $r = 18.8m$ لحاظ شده است.

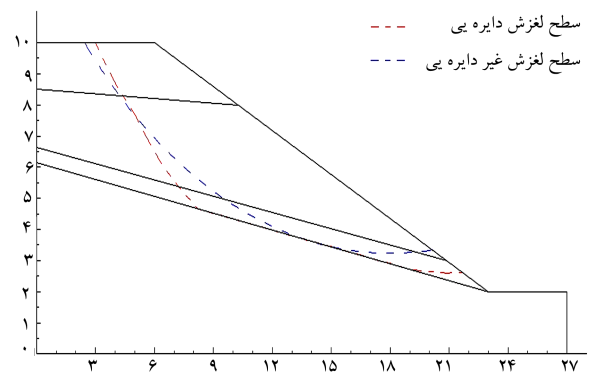
در این مثال شیروانی مورد بررسی با استفاده از 3° المان منقطع و پس از 42656° تکرار، معیار هم‌گرایی آن تأمین شده است. مقادیر ضریب اطمینان محاسبه شده توسط روش پیشنهادی و دیگر روش‌ها در جدول ۳ ارائه شده است. مطابق جدول ۳، کمترین مقدار ضریب اطمینان در این مثال، اختصاص به رابطه‌ی جانبو دارد که فقط با تأمین معادله‌ی تعادل نیرو به محاسبه‌ی ضریب اطمینان می‌پردازد و از نیروی برشی بین قطعات صرف‌نظر می‌کند. همچنین از جدول ۳ این‌گونه استنباط می‌شود که رابطه‌ی اصلاح شده‌ی بیشاپ، مقدار ضریب اطمینان را با دقت خوبی نزدیک به روابطی که کلیه‌ی معادلات تعادل را تأمین می‌کنند، تخمین می‌زند. روش پیشنهادی نیز مقدار ضریب اطمینان را نسبت به دیگر روش‌ها بیشتر و نزدیک به رابطه‌ی بیشاپ محاسبه می‌کند.

۳.۵. مثال سوم

در شیروانی‌های با خاک دانه‌ی معمولاً گسیختگی به صورت سطحی اتفاق می‌افتد. به منظور بررسی رفتار خاک‌های دانه‌ی، در مثال سوم یک شیروانی خاکی با زاویه‌ی اصطکاک داخلی ($\varphi = 40^\circ$)، چسبندگی ($C = 5 kPa$) و وزن مخصوص $\gamma_d = 19 kN/m^3$ در نظر گرفته شده است. شیروانی مذکور به ارتفاع ۱۵ متر و با شیب ۱ (افقی) به ۱ (قائم) مطابق با شکل ۶ است. مختصات مرکز دایره‌ی گسیختگی و شعاع آن به ترتیب برابر با $Xc = 5.23m$ ، $Yc = 32.84m$ و $r = 26.69m$ لحاظ شده است. در این مثال شیروانی مورد بررسی با استفاده از 1° المان منقطع و پس از 3889° تکرار، هم‌گرا شده است. مقادیر ضریب اطمینان محاسبه شده توسط روش پیشنهادی و دیگر روش‌ها در جدول ۴ و همچنین مقایسه‌ی مقدار نیروهای برشی بین قطعه‌ی در جدول ۵ ارائه شده‌اند. نتایج مربوط

جدول ۱. مشخصات ژئوتکنیکی لایه‌ها.

لایه	$\gamma (kN/m^3)$	$c (kPa)$	$\varphi (^\circ)$	$E (kN/m^2)$	$\theta (-)$
۱	۱۸٫۶۲	۱۵	۲۰	۱۰۵	0.35°
۲	۱۸٫۶۲	۱۷	۲۱	۱۰۵	0.35°
۳	۱۸٫۶۲	۵	۱۰	۱۰۵	0.35°
۴	۱۸٫۶۲	۳۵	۲۸	۱۰۵	0.35°



شکل ۴. سطوح لغزش دایره‌ی و غیردایره‌ی.

جدول ۲. مقادیر ضریب اطمینان.

شکل سطح لغزش	روش تعادل حدی اسپنسر	روش پیشنهادی
دایره‌ی	۱٫۴۲۴	۱٫۵۰۳
غیر دایره‌ی	۱٫۱۴۳	۱٫۲۵۵

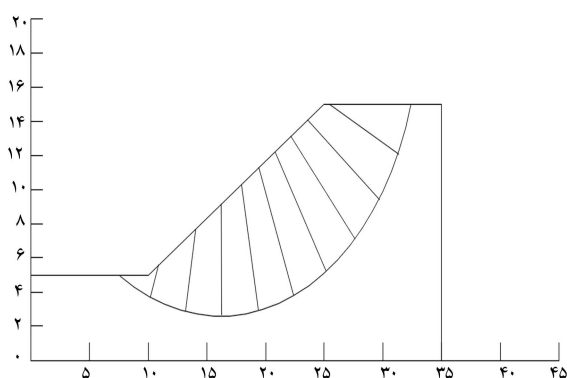
بحرانی دایره‌ی و غیردایره‌ی به دست می‌آید. آنگاه روش پیشنهادی در نوشتار حاضر برای آن سطوح اعمال می‌شود، تا سطوح لغزش دایره‌ی و غیردایره‌ی مقایسه شود. شکل ۴، سطح لغزش دایره‌ی و غیردایره‌ی بحرانی را نشان می‌دهد که مقدار ضریب اطمینان آن‌ها با استفاده از روش پیشنهادی با یکدیگر مقایسه شده‌اند. در جدول ۲، مقدار ضریب اطمینان برای سطح لغزش دایره‌ی و سطح لغزش غیردایره‌ی بحرانی با استفاده از روش پیشنهادی به منظور مقایسه با یکدیگر ارائه شده است.

۲.۵. مثال دوم

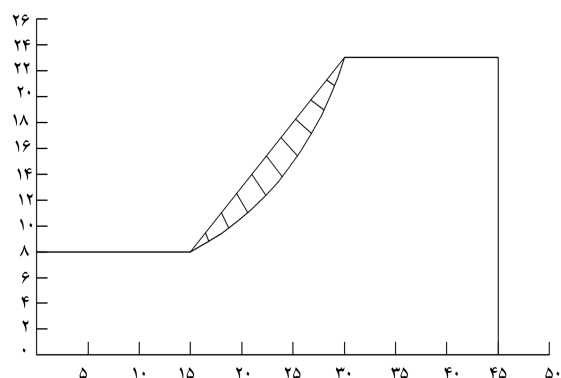
در مثال دوم، یک شیروانی خاکی به ارتفاع 1° متر با شیب ۳ (افقی) به ۲ (قائم) مطابق با شکل ۵ بررسی شده است. این شیب وزن مخصوص $\gamma_d = 20 kN/m^3$

جدول ۵. نیروهای برشی بین قطعه‌یی محاسبه شده توسط روش‌های مختلف برحسب کیلونیوتن برای مثال سوم.

روش پیشنهادی	لاژ و کارافه	گروه مهندسی ارتش آمریکا	تابع بین قطعه‌یی	
			نیم سینوسی	ثابت
۱,۳۳	۰,۴۲	۰,۰۵	۰,۲۶	۰,۶
۹,۶۴	۱,۰۵	۱۱,۳۵	۷,۳۵	۹,۹۷
۱۹,۵	۲۱,۸۳	۲۴,۲۲	۱۹,۳	۲۰,۱۳
۲۷,۴	۲۹,۵	۳۴,۱۹۳	۳۰,۳۴	۲۷,۶۷
۳۱,۳۴	۳۲,۰۸	۳۹,۱۵	۳۵,۵۴	۳۱,۰۷
۳۰,۵۵	۲۹,۵۶	۳۸,۳۶	۳۲,۵۴	۲۹,۹۴
۲۵,۳۲	۲۳,۲۹	۳۲,۱۶	۲۲,۶۶	۲۴,۶۹
۱۶,۸۸	۱۴,۷۴	۲۱,۹	۱۰,۷۲	۱۶,۵۳
۷,۳۹	۶,۱۸	۹,۹۶	۲,۳۷	۷,۳۸



شکل ۷. هندسه‌ی شیروانی مثال چهارم.



شکل ۶. هندسه‌ی شیروانی مثال سوم.

جدول ۶. ضریب اطمینان محاسبه شده توسط روش‌های مختلف در مثال چهارم.

روش پیشنهادی	مورگنشترن - پرایس	جانبو	بیشاپ	فلنیوس
۱,۴۰۵	۱,۳۹	۱,۳۱۵	۱,۳۹۱	۱,۳۵۸

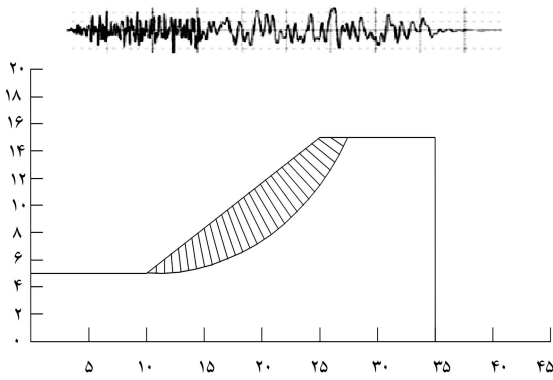
جدول ۷. نیروهای برشی بین قطعه‌یی محاسبه شده توسط روش‌های مختلف برحسب کیلونیوتن برای مثال چهارم.

روش پیشنهادی	گروه مهندسی ارتش آمریکا	تابع بین قطعه‌یی	
		نیم سینوسی	ثابت
۴۲	۰,۰	-۳,۳۴	-۸,۸۴
۱۲۰,۸۷	۰,۰	۱۳,۲۷	۱۹,۴۹
۱۸۴,۳	۱۹۰,۸	۴۵,۴۱	۴۹,۹۹
۲۲۳,۲۷	۲۶۵,۸۳	۷۴,۴۷	۷۰,۸۴
۲۳۴,۳۸	۲۹۸,۸۷	۸۶,۳۷	۷۸,۲
۲۱۷,۲۱	۲۸۹,۸۴	۷۷,۲۷	۷۳,۶۶
۱۷۴,۴۱	۲۴۲,۳۲	۵۲,۸۹	۵۹,۶۱
۱۱۲,۸۶	۱۶۴,۷۱	۲۵,۳	۳۹,۵۳
۴۷,۶	۰,۰	۵,۹۲	۱۸,۴۴

به محاسبه‌ی ضریب اطمینان در جدول ۴ نشان می‌دهد که روش جانبو و فلنیوس به ترتیب کمترین مقدار را برای ضریب اطمینان محاسبه کرده‌اند. همان‌طور که از نتایج به دست آمده ملاحظه می‌شود، در این مثال نیز روش پیشنهادی مقدار ضریب اطمینان را نزدیک به رابطه‌ی مورگنشترن - پرایس محاسبه کرده است. در جدول ۵ که مربوط به محاسبه‌ی نیروی برشی بین قطعات است، برای تمامی روش‌های ذکر شده، مقادیر نیروهای بین قطعه‌یی از مقدار نزدیک به صفر شروع شده و به تدریج تا میانه‌ی قطعات افزایش یافته و پس از آن با کاهش این مقدار در آخرین قطعه به مقدار صفر هم‌گرا شده است.

۴.۵. مثال چهارم

از آنجایی که در شیروانی‌های با خاک چسبنده، معمولاً گسیختگی بحرانی به صورت عمیق است، به منظور ارزیابی روش پیشنهادی در مواجهه با خاک‌های مذکور، در مثال چهارم یک شیروانی با چسبندگی ($C = 35 kPa$)، زاویه‌ی اصطکاک داخلی ($\varphi = 50^\circ$) و وزن مخصوص $\gamma_d = 20 kN/m^3$ در نظر گرفته شده است. شیروانی مذکور به ارتفاع 10 متر با شیب 3 افقی به 2 قائم مطابق با شکل ۷ است. همچنین مختصات مرکز دایره‌ی گسیختگی و شعاع آن به ترتیب برابر با $r = 17m$ و $Yc = 19,66m$ ، $Xc = 16,13m$ مورد بررسی با استفاده از 10 المان منقطع و پس از 402643 تکرار، هم‌گرا شده است. در جدول ۶، مقادیر ضریب اطمینان محاسبه شده توسط روش پیشنهادی و دیگر روش‌ها و در جدول ۷، نیز مقایسه‌ی مقدار نیروهای برشی بین قطعه‌یی ارائه شده است.



شکل ۹. هندسه‌ی شیروانی و شتاب افقی زلزله‌ی اعمالی مثال ششم.

جدول ۹. ضریب اطمینان محاسبه شده توسط روش‌های مختلف برای مثال ششم.

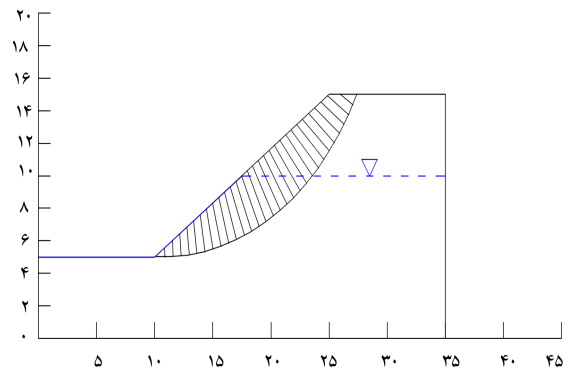
روش پیشنهادی	مورگنشترن - پرایس	جانبو	بیشاپ	فلنیوس
۱٫۲۵	۱٫۲۲	۱٫۱۴	۱٫۲۲	۱٫۱۲

در هنگام زلزله هستند. این روش‌ها به علت سادگی و وابستگی کمتر به پارامترهای خاک و سرعتی که در بررسی حالت‌های مختلف لغزش دارند، توسط بیشتر مهندسان استفاده می‌شوند. به منظور بررسی کارایی مدل در حالت وقوع زلزله، شیروانی خاکی ارائه شده در مثال دوم برای حالت شبه‌دینامیکی و مقدار شتاب افقی برابر با ۰٫۱ شتاب ثقل ($a_h = 0.1g$) تحلیل شده است (شکل ۹).

مقادیر ضریب اطمینان محاسبه شده توسط روش پیشنهادی و سایر روش‌ها در جدول ۹ ارائه شده است. نتایج محاسبه شده در جدول مذکور نشان می‌دهد که وجود نیروی زلزله باعث کاهش ضریب اطمینان و افزایش ناپایداری شیروانی خاکی می‌شود. علت این موضوع افزایش نیروهای محرک ناشی از ارتعاشات زلزله است. در این حالت نیز ضریب اطمینان محاسبه شده توسط روش پیشنهادی نزدیک به روابط بیشاپ اصلاح شده و در این مثال، به روش مورگنشترن - پرایس نزدیکتر است. روابط جانبو و فلنیوس به ترتیب کمترین ضرایب اطمینان را دارند.

۶. بحث

با توجه به نتایج به دست آمده از مثال‌ها ملاحظه می‌شود که کمترین مقادیر ضریب اطمینان به روش‌های جانبو و فلنیوس اختصاص دارد. در روش فلنیوس از نیروی جانبی بین قطعات صرف‌نظر و برای محاسبه ضریب اطمینان، از تعادل لنگر حول مرکز دایره‌ی لغزش استفاده می‌شود، این در حالی است که در روش جانبو فقط شرایط تعادل نیرو تأمین می‌شود. در روش‌های مذکور فقط یکی از معادلات تعادل (لنگر یا نیرو) ارضا و فرضیات ساده‌کننده‌ی بیشتری استفاده می‌شود. ضرایب اطمینان محاسبه شده توسط روش‌های مورگنشترن - پرایس و بیشاپ بسیار به یکدیگر نزدیک هستند و اختلاف ناچیزی با هم دارند. روش‌های یاد شده که از تأمین هم‌زمان معادلات تعادل نیرو و لنگر با در نظر گرفتن فرضیاتی بهره می‌برند، مقادیر ضریب اطمینان را مقداری بیشتر از روش‌های فلنیوس و جانبو محاسبه می‌کنند. نظر به اینکه روش پیشنهادی ارائه شده در پژوهش حاضر که معادلات تعادل نیرو و گشتاور را بدون هیچ‌گونه فرض ساده‌کننده‌ی به کار برده است، انتظار می‌رود ضرایب اطمینان را اندکی بیشتر از دیگر روش‌های تعادل حدی محاسبه کند.



شکل ۸. هندسه‌ی شیروانی مثال پنجم.

جدول ۸. ضریب اطمینان به روش‌های مختلف تعادل حدی.

روش پیشنهادی	مورگنشترن - پرایس	جانبو	بیشاپ	فلنیوس
۱٫۳۱	۱٫۳	۱٫۲۲	۱٫۳۱	۱٫۲۵

با توجه به جدول ۶ و ضرایب اطمینان محاسبه شده در این مثال ملاحظه می‌شود روش‌هایی که کلیه معادلات تعادل را تأمین می‌کنند، از جمله روش پیشنهادی در پژوهش حاضر، ضریب اطمینان را با دقت بیشتری نسبت به سایر روش‌ها تعیین کرده‌اند. همچنین در جدول ۷ که مربوط به محاسبه نیروی برشی بین قطعات است، فرایند کار همانند مثال قبلی است. لازم به ذکر است که در این مثال، روش‌های لاو و کارافه، جانبو تعمیم یافته^۵ و تعادل تعمیم یافته حدی^۶ برای محاسبه ضریب اطمینان با مشکل هم‌گرایی مواجه شده‌اند، ولی روش پیشنهادی مقدار ضریب اطمینان را با دقت خوبی محاسبه کرده‌اند که نشانگر دقت و عملکرد بهتر روش پیشنهادی نسبت به روش‌های ذکر شده است.

۵.۵. مثال پنجم

به علت کاهش نیروهای مقاوم برشی و تنش مؤثر در توده‌ی خاک در حالت وجود آب زیرزمینی در شیروانی، ضریب اطمینان نسبت به حالت خشک کمتر خواهد شد. در این قسمت به منظور ارزیابی مدل در حالت وجود آب زیرزمینی، شیروانی ارائه شده در مثال دوم با فرض وجود سطح آب زیرزمینی در ارتفاع ۱۰ متری مطابق با شکل ۸ در نظر گرفته شده است. ضریب اطمینان محاسبه شده توسط روش پیشنهادی و مقایسه‌ی آن با دیگر روش‌ها در جدول ۸ ارائه شده است. همان‌گونه که انتظار می‌رود، ضرایب اطمینان در این حالت نسبت به مثال اول کاهش قابل ملاحظه‌ی داشته است.

در این مثال کمترین مقدار ضریب اطمینان مربوط به رابطه‌ی فلنیوس است، که با تأمین معادله‌ی تعادل لنگر و صرف‌نظر از نیروهای برشی بین قطعات، ضریب اطمینان را محاسبه می‌کند. پس از آن رابطه‌ی جانبو کمترین مقدار ضریب اطمینان را دارد. همان‌طور که از نتایج به دست آمده ملاحظه می‌شود، در این مثال نیز روش پیشنهادی، مقدار ضریب اطمینان را نسبت به دیگر روش‌ها بیشتر و نزدیک به رابطه‌ی بیشاپ محاسبه کرده است.

۵.۶. مثال ششم

با توجه به اهمیت شیروانی‌های خاکی، بررسی اثر نیروی زلزله در پایداری آن بسیار مهم است. روش‌های شبه‌دینامیکی از ساده‌ترین روش‌های تحلیل پایداری شیروانی‌ها

۷. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر، یک روش تعادل حدی نوین ارائه شده است که با فرض سطح گسیختگی دایره‌ای و یا غیردایره‌ای و در نظر گرفتن قطعاتی در امتداد شعاع سطح لغزش و با امتدادی که به یک نقطه هم‌گرا می‌شوند، معادلات تعادل نیروها و گشتاور را بدون هیچ‌گونه فرض ساده‌کننده‌ی به‌کار برده است. با تأمین هم‌زمان معادلات مذکور می‌توان ضریب اطمینانی را یافت که هم تعادل نیرو و هم تعادل لنگر را ارضا

کند. به منظور تأمین هدف مذکور، یک مدل عددی با استفاده از روش تکرار (روش سعی و خطا) توسعه داده شده است. ارزیابی روش پیشنهادی و کارایی مدل توسعه داده شده با آنالیز پایداری، ۶ شیروانی خاکی در شرایط مختلف انجام شده است که نتایج حاصل از روش پیشنهادی تطابق مناسبی با دیگر روش‌ها دارد. به طور کلی نتایج محاسبه شده توسط روش پیشنهادی مقدار ضریب اطمینان را اندکی بیشتر محاسبه می‌کند که نشان از دقت این روش نسبت به دیگر روش‌های تعادل حدی دارد.

پانویس‌ها

1. bishop
2. convergence
3. three-dimensional alternating variable local gradient
4. strength reduction method
5. janbu's generalized method
6. general limit equilibrium method

منابع (References)

1. Fellenius, W. "Calculation of the stability of earth dams", *In Transactions of the 2nd Congress on Large Dams*, Washington, DC, 4, pp. 445-463 (1936).
2. Bishop, A.W. "The use of the slip circle in the stability analysis of slopes", Institution of Civil Engineers (1955).
3. Lowe, J. and Karafiath, L. "Stability of earth dams upon drawdown", *In Proc. 1st Pan American Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Mexico, 2, pp. 537-552 (1960).
4. Janbu, N. "Slope stability computations", In: Embankment-dam Engineering, Textbook Eds. RC Hirschfeld and SJ Poulos, John Wiley and Sons Inc., Pub., NY, 1973, 40 p., *In International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, **12**(4), p. 67, Pergamon (1975).
5. U.S. Army Corps of Engineers, "Stability of earth and rock-fill dams", U.S. Army Engineer Waterways Experiment Station, Vicksburg, MS. EM 1110-2-1902 (1970).
6. Spencer, E. "A method of analysis of the stability of embankments assuming parallel inter-slice forces", *Geotechnique*, **17**(1), pp. 11-26 (1967).
7. Morgenstern, N.R. and Price, V.E. "The analysis of the stability of general slip surfaces", *Geotechnique*, **15**(1), pp. 79-93 (1965).
8. Sarma, S.K. "Stability analysis of embankments and slopes", *Journal of the Geotechnical Engineering Division*, **105**(12), pp. 1511-1524 (1979).
9. Samani, H.M.V. and Meidani, M. "Slope stability analysis using a non-linear optimization technique (RESEARCH NOTE)", *International Journal of Engineering-Transactions A: Basics*, **16**(2), pp. 147-156 (2003).
10. Cheng, Y.M. "Location of critical failure surface and some further studies on slope stability analysis", *Computers and Geotechnics*, **30**(3), pp. 255-267 (2003).
11. Cheng, Y.M. and Zhu, L.J. "Unified formulation for two dimensional slope stability analysis and limitations in factor of safety determination", *Soils and foundations*, **44**(6), pp. 121-127 (2004).
12. Zhu, D.Y., Lee, C.F., Qian, Q.H. and Chen, G.R. "A concise algorithm for computing the factor of safety using the morgenstern price method", *Canadian Geotechnical Journal*, **42**(1), pp. 272-278 (2005).
13. Wei, L., Koutnik, T. and Woodward, M. "A slope stability case study by limit equilibrium and finite element methods", In GeoFlorida 2010@ Advances in Analysis, Modeling & Design, pp. 3090-3099 (2010).
14. Xiao, S., Yan, L. and Cheng, Z. "A method combining numerical analysis and limit equilibrium theory to determine potential slip surfaces in soil slopes", *Journal of Mountain Science*, **8**(5), pp. 718-727 (2011).
15. Cheng, Y.M., Lansivaara, T. and Siu, J. "Impact of convergence on slope stability analysis and design", *Computers and Geotechnics*, **35**(1), pp. 105-113 (2008).
16. Bao, T., Xu, B. and Zheng, X. "Hybrid method of limit equilibrium and finite element internal force for analysis of arch dam stability against sliding", *Science China Technological Sciences*, **54**(4), pp. 793-798 (2011).
17. Guo, T. and Zhongming, H. "Comparison of factor of safety of a roadway slope based on the limit equilibrium method and shear strength reduction method", *GeoHunan International Conference* (2011).
18. Yu, S.Y., Shao, L.T. and Liu, S.Y. "Stability analysis of tailings dam based on finite element limit equilibrium method", *Rock and Soil Mechanics*, **4**, pp. 46 (2013).
19. Lin, H., Zhong, W., Xiong, W. and Tang, W. "Slope stability analysis using limit equilibrium method in non-linear criterion", *The Scientific World Journal*, 7 pp. 60-67(2014).
20. Hajiazizi, M. and Tavara, H. "Determining three-dimensional non-spherical critical slip surface in earth slopes using an optimization method", *Engineering Geology*, **153**, pp. 114-124 (2013).

21. Cheng, Y.M. and Lau, C.K., *Stability Analysis and Stabilization*, CRC press (2008).
22. Nian, T-K. and et al. "Three-dimensional strength-reduction finite element analysis of slopes: Geometric effects", *Canadian Geotechnical Journal*, **49**(5), pp. 574-588 (2012).
23. Wei, W.B., Cheng, Y.M. and Li, L. "Three-dimensional slope failure analysis by the strength reduction and limit equilibrium methods", *Computers and Geotechnics*, **36**(1-2), pp. 70-80 (2009).
24. Zhou, X.P. and Cheng, H. "The long-term stability analysis of 3D creeping slopes using the displacement-based rigorous limit equilibrium method", *Engineering Geology*, **195**, pp. 292-300 (2015).
25. Zhou, X.P. and Cheng, H. "Stability analysis of three-dimensional seismic landslides using the rigorous limit equilibrium method", *Engineering Geology*, **174**, pp. 87-102 (2014).
26. Lu, L., Wang, Z.J., Song, M.L. and Arai, K. "Stability analysis of slopes with ground water during earthquakes", *Engineering Geology*, **193**, pp. 288-296 (2015).
27. Gao, Y., Wu, D. and Zhang, F. "Effects of nonlinear failure criterion on the three-dimensional stability analysis of uniform slopes", *Engineering Geology*, **198**, pp. 87-93 (2015).