

شناسایی سیستم‌های چند درجه آزادی تحت ارتعاش محیطی نایبستا

رضاکرمی محمدی* (دانشیار)

عباس محبوبی (دانشجوی کارشناسی ارشد)

معین خلیج (کارشناس ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مهندسی عمران شریف، زمستان ۱۳۹۶ (دوره ۲ - شماره ۴/۲، ص. ۳۵-۳۷)

در نوشتار حاضر با استفاده از روش‌های تحریک طبیعی، تبدیل ویولت پیوسته و تبدیل هیلبرت، مشخصات دینامیکی یک قاب برشی ۳ طبقه تحت تحریک نوفه‌ی سفید نایبستا شناسایی شده است. همچنین روشی برای تبدیل سیگنال‌های نایبستا به سیگنال‌های ایستا پیشنهاد شده است، تا بتوان از روش تحریک طبیعی استفاده و ارتعاشات آزاد درجات آزادی سیستم را استخراج کرد. در روش مذکور، ارتعاشات آزاد استخراج شده به کمک تبدیل ویولت پیوسته به ریزسیگنال‌های مودی سیستم تجزیه و با استفاده از تبدیل هیلبرت ریزسیگنال‌ها، مشخصات دینامیکی سیستم نظیر: بسامدهای طبیعی، میرایی‌های مودی و ماتریس‌های میرایی و سختی شناسایی می‌شوند. در نوشتار حاضر، به کمک روش پیشنهادی مشخصات دینامیکی (بسامدهای طبیعی، شکل‌های مودی، ماتریس میرایی و سختی) یک سیستم قاب برشی ۳ طبقه‌ی خطی و یک قاب ۲ بعدی فولادی تحت ارتعاش نوفه‌ی سفید نایبستا شناسایی شده است.

واژگان کلیدی: شناسایی سیستم، روش تحریک طبیعی، تبدیل ویولت پیوسته، تبدیل هیلبرت، نوفه‌ی سفید نایبستا.

rkarami@kntu.ac.ir
amahboobi@mail.kntu.ac.ir
mkhalaj@mail.kntu.ac.ir

۱. مقدمه

در سال‌های اخیر، شناسایی مشخصات مودی سیستم‌های مختلف سازه‌ی مورد توجه و علاقه‌ی بسیار پژوهشگران قرار گرفته است.^[۱] شناسایی سیستم‌های سازه‌ی یک فرایند معکوس برای شناسایی پارامترهای سازه‌ی از پاسخ‌های ثبت شده‌ی سازه در دنیای حقیقی است. هدف اصلی شناسایی سیستم‌های سازه‌ی، تخمین ویژگی‌های دینامیکی سازه از قبیل: بسامدهای طبیعی، میرایی‌های مودی، شکل‌های مودی ارتعاش سازه، انرژی تلف شده، تغییر شکل‌های ماندگار و مقاومت تسلیم سازه‌های آسیب دیده به وسیله‌ی پاسخ‌های سازه‌ی ثبت شده تحت شرایط مختلف، مانند: ارتعاش محیطی، زلزله و سایر انواع تحریک‌هاست.^[۲] امروزه روش‌های متعددی برای شناسایی مشخصات مودی سیستم خطی ارائه شده است. در سال ۱۹۷۱، روش کاهش تصادفی به منظور شناسایی خرابی در سازه‌های فضایی در معرض بار محیطی معرفی شد. روش مذکور مبتنی بر کاربرد تابع همبستگی به منظور اندازه‌گیری میرایی و شناسایی خرابی در این نوع سازه‌هاست.^[۳] در سال ۱۹۷۷، نیز روش کاهش تصادفی به همراه روش شناسایی پارامترهای حوزه‌ی زمانی به منظور پردازش داده‌های ارتعاش محیطی استفاده شده است.^[۴] همچنین در سال ۱۹۹۵، روش تحریک طبیعی (NExT)^۱ ارائه و با استفاده از روش مذکور، بسامدهای طبیعی و میرایی مودی سازه‌ی خاص شناسایی شده است.

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۵/۵، اصلاحیه ۱۳۹۵/۲/۲۲، پذیرش ۱۳۹۵/۳/۸.

در سال ۲۰۱۲ نیز با استفاده از داده‌های ارتعاش محیطی نایبستا و با به کارگیری روش حوزه‌ی زمانی برخی پژوهش‌های پیشین،^[۵-۷] به شناسایی شکل مودی یک سیستم سازه‌ی ۶ درجه آزادی پرداخته شده است.^[۸] در سال‌های اخیر، استفاده از روش‌های مبتنی بر تبدیلات موجک (WT)، جهت شناسایی سیستم‌های سازه‌ی و شناسایی خرابی آن‌ها، مورد توجه قرار گرفته است.^[۹-۱۱] همچنین در پژوهش دیگری در سال ۲۰۱۲، با استفاده از ضرایب ویولت پیوسته^۲ (CWT)، به تجزیه‌ی سیگنال ارتعاش آزاد یک سیستم ۵ درجه آزادی خطی پرداخته شده است.^[۱۱] امروزه تبدیل هیلبرت^۳ (HT)، تبدیل دیگری است که در مطالعات شناسایی مشخصات یک سیستم استفاده می‌شود و توانایی تجزیه‌ی سیگنال‌های اندازه‌گیری شده در حوزه‌ی زمان - بسامد به منظور یافتن بسامد لحظه‌ی سیستم را دارد.^[۱۲، ۱۳] در بررسی سیستم‌های خطی قاب برشی تحت بارگذاری ضربه‌ی با اندازه‌ی مشخص (۲۰۰۳)، با استفاده از ارتعاشات آزاد سیستم مذکور، مشخصات دینامیکی سیستم نظیر: بسامدهای طبیعی، میرایی‌های مودی و ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی شناسایی شده است.^[۱۴] از آنجا که دست‌یابی به ارتعاشات آزاد سیستم تحت بار ضربه‌ی برای سازه‌های واقعی، در عمل به علت محدودیت‌های موجود بسیار سخت و شاید غیرممکن باشد، لذا ثبت پاسخ سیستم تحت ارتعاشات محیطی جهت شناسایی سیستم، راهکاری مناسب به نظر می‌رسد. این نوع بارگذاری‌ها غالباً نوفه‌ی سفید نایبستا هستند.^[۱۵]

که در آن، R_i بیانگر اپراتور همبستگی است. با توجه به آنکه هیچ‌گونه همبستگی میان تحریک ورودی و پاسخ شتاب درجات آزادی سیستم وجود ندارد ($R_{U\ddot{Y}_i}(t, s) = 0$) لذا رابطه‌ی ۶ را خواهیم داشت:

$$M^* R_{\ddot{Y}_i\ddot{Y}_i}(t, s) + C^* R_{\dot{Y}_i\ddot{Y}_i}(t, s) K^* R_{Y\ddot{Y}_i}(t, s) = 0 \quad (6)$$

برای فرایندهای ایستا رابطه‌ی ۷ را داریم: [۱۵]

$$\dot{R}_{Y\ddot{Y}_i}(t-s) = R_{\ddot{Y}_i\ddot{Y}_i}(t-s) = -R_{Y\ddot{Y}_i}(t-s) \quad (7)$$

از معادله‌های ۶ و ۷، می‌توان معادله‌ی ۸ را نتیجه گرفت:

$$M^* R_{Y\ddot{Y}_i}(t, s) + C^* \dot{R}_{Y\ddot{Y}_i}(t, s) + K^* R_{Y\ddot{Y}_i}(t, s) = 0 \quad (8)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، $\dot{R}_{Y\ddot{Y}_i}(t, s)$ نسبتی از سیگنال ارتعاش آزاد درجه آزادی موردنظر (i) است که برابر با همبستگی میان سیگنال شتاب درجه آزادی موردنظر و درجه آزادی مرجع ($R_{\ddot{Y}_i\ddot{Y}_i}(t, s)$) است.

درجه آزادی مرجع، درجه‌ی است که سیگنال متناظر با آن، محتوای بسامدی غنی‌تری نسبت به درجات آزادی دیگر داشته باشد. [۸] در نتیجه، به منظور استخراج ارتعاش آزاد درجه‌های آزادی با استفاده از روش تحریک طبیعی، فقط کافی است همبستگی بین ارتعاش خروجی هر یک از درجه‌های آزادی و ارتعاش خروجی درجه آزادی مرجع در بازه‌های زمانی یکسان محاسبه شود و سپس با میانگین‌گیری از سیگنال‌های تولیدی در بازه‌های زمانی مختلف، ارتعاش آزاد درجه آزادی موردنظر به‌دست آید.

۳. روش تبدیل سیگنال نایستا به سیگنال ایستا

ارتعاش محیطی وارده به یک سازه، معمولاً از نوع نوفه سفید نایستا با پهنای بسامدی محدود است. لذا ضروری است در مدل‌سازی‌های عددی جهت تطابق بیشتر مدل به واقعیت، ارتعاش وارده به مدل عددی از نوفه سفید نایستا باشد. مطابق با روش تحریک طبیعی برای یک سیستم یک درجه آزادی، فقط زمانی استفاده از همبستگی جهت یافتن ارتعاش آزاد مجاز است که ارتعاش ورودی به سیستم، از نوع نوفه سفید ایستا باشد و در غیر این صورت باید پاسخ سیستم از حالت نایستا به ایستا تبدیل شود. در بخش کنونی، روشی جهت سیگنال نایستا به ایستا ارائه شده است. فرض می‌شود یک سیستم خطی گسسته در معرض تحریک منفرد نوفه سفید ایستا قرار گرفته باشد. معادله‌ی حرکت به صورت رابطه‌ی ۹ بیان می‌شود:

$$M\ddot{v}(t) + C\dot{v}(t) + Kv(t) = w(t) \quad (9)$$

که در آن، $w(t)$ ، $v(t)$ و $\ddot{v}(t)$ به ترتیب تحریک منفرد نوفه سفید ایستا، جابه‌جایی، سرعت و شتاب ایستای پاسخ است. با ضرب کردن دو طرف معادله‌ی ۹ در تابع پویشی که با زمان تغییر کمی دارد ($\Gamma(t)$) معادله‌ی ۱۰ به‌دست می‌آید:

$$M\ddot{u} + C\dot{u}(t) + Ku(t) = f(t) \quad (10)$$

که در آن، $f(t)$ نوفه سفید نالیستاست که توسط مدل تولیدی بیان می‌شود. در رسیدن به معادله‌ی ۱۰، فرض بر این است که $\Gamma(t)$ تابعی است که با زمان تغییر کمی می‌کند ($\dot{\Gamma}(t) \approx 0$ و $\ddot{\Gamma}(t) \approx 0$) بنابراین $\Gamma(t)\dot{v}(t) \approx \dot{u}(t)$

هدف در نوشتار حاضر، ارائه‌ی روشی جهت شناسایی مشخصات یک قاب برشی خطی ۳ درجه آزادی و یک قاب ۲ بعدی فولادی تحت ارتعاش نوفه سفید نایستای ساختگی است. در روش مذکور پس از اعمال ارتعاش نوفه سفید نایستا به سیستم، ارتعاشات درجات آزادی سیستم ثبت می‌شود. با استفاده از ارتعاشات درجات آزادی، ارتعاشات آزاد سیستم استخراج و نهایتاً مشخصات سیستم شامل: بسامدهای طبیعی، میرایی‌های مودی و ماتریس‌های میرایی و سختی شناسایی شده است.

۲. استخراج ارتعاش آزاد سیستم به روش تحریک طبیعی (تصحیح شده)

در روش‌های مختلف شناسایی سیستم سازه‌ی، معمولاً به‌دست آوردن ارتعاش آزاد سیستم جهت شناسایی مشخصات دینامیکی سازه ضروری است. در بخش کنونی، روش تحریک طبیعی به منظور به‌دست آوردن ارتعاش آزاد سیستم از روی ارتعاش محیطی ایستای سیستم بیان شده است.

در روش تحریک طبیعی، ارتعاش ورودی اندازه‌گیری نمی‌شود و یا غیرقابل اندازه‌گیری است و سه شرط اساسی دارد: اولاً، ارتعاش ورودی باید ایستا باشد؛ ثانیاً، محتوای بسامدی آن توانایی درگیر کردن مودهای ارتعاشی سیستم را داشته باشد؛ و ثالثاً، تحریک مذکور، هیچ‌گونه همبستگی با پاسخ سازه نداشته باشد. [۷] سیستمی را که تحت تحریک طبیعی با مشخصات مذکور است در نظر بگیرد. معادله‌ی ۱، بیانگر معادله‌ی دینامیکی ارتعاش سیستم است:

$$M\ddot{y}(t) + C\dot{y}(t) + Ky(t) = u(t) \quad (1)$$

که در آن، M ، C و K به ترتیب بیانگر ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی، $y(t)$ بیانگر بردار جابه‌جایی سیستم در زمان t و $u(t)$ بیانگر بردار نیروی تحریک ورودی سیستم در زمان t است. زمانی که بردار تحریک ورودی، به صورت تصادفی باشد، معادله‌ی ۱ به صورت رابطه‌ی ۲ بازنویسی می‌شود:

$$M\ddot{Y}(t) + C\dot{Y}(t) + KY(t) = U(t) \quad (2)$$

که در آن، $Y(t)$ بردار جابه‌جایی احتمالاتی و $U(t)$ بردار تحریک احتمالاتی است. اگر دو طرف معادله‌ی ۲ در مقدار پاسخ شتاب یکی از درجات آزادی سیستم ($\ddot{Y}_i(s)$) ضرب شود، معادله‌ی ۳ به‌دست می‌آید:

$$M\ddot{Y}(t)\ddot{Y}_i(s) + C\dot{Y}(t)\ddot{Y}_i(s) + KY(t)\ddot{Y}_i(s) = U(t)\ddot{Y}_i(s) \quad (3)$$

با اعمال اپراتور امید ریاضی ($E[\cdot]$)، بر دو طرف معادله‌ی ۳، معادله‌ی ۴ به‌دست می‌آید:

$$M^* E[\ddot{Y}(t)\ddot{Y}_i(s)] + C^* E[\dot{Y}(t)\ddot{Y}_i(s)] + K^* E[Y(t)\ddot{Y}_i(s)] = E[U(t)\ddot{Y}_i(s)] \quad (4)$$

حال رابطه‌ی ۵ را خواهیم داشت:

$$M^* R_{\ddot{Y}_i\ddot{Y}_i}(t, s) + C^* R_{\dot{Y}_i\ddot{Y}_i}(t, s) + K^* R_{Y\ddot{Y}_i}(t, s) = R_{U\ddot{Y}_i}(t, s) \quad (5)$$

در نوشتار حاضر، به منظور تجزیه سیگنال تحلیلی موردنظر به ریزسیگنال‌های مرتبط، از ضرایب موجک پیوسته استفاده شده است. موجک مادر مورد استفاده جهت تجزیه سیگنال مذکور، موجک مولر متخلط اصلاح شده مطابق معادله ۱۷ است: [۱۱]

$$\Psi(t) = e^{-\frac{t}{T}} \cdot e^{j\omega \cdot t} \quad (17)$$

که در آن، ω بسامد مرکزی موجک مادر است. پس از اعمال تبدیل ویولت پیوسته بر ارتعاش آزاد هر یک از درجات آزادی، پارامتر مقیاس متناظر با مقدار بیشینه‌ی نسبی قدرمطلق ضرایب ویولت پیوسته به دست می‌آید که هر یک از آنها، متناظر با یکی از مدهای سیستم است. حال نسبتی از تجزیه مودی سیگنال تحلیلی موردنظر مطابق با یکی از معادلات مذکور (روابط ۱۸) ارائه شده است:

$$x_{pi} = \text{imag}(cwt(X_p, \max_i, 'morl'))$$

or

$$x_{pi} = \text{real}(cwt(X_p, \max_{pi}, 'morl')) \quad (18)$$

که در آن، imag و real به ترتیب بیانگر قسمت موهومی و حقیقی ضرایب ویولت حاصل، \max_i برابر مقیاس متناظر با بیشینه‌ی نسبی قدرمطلق ضرایب ویولت پیوسته در مود i ام و morl بیانگر موجک مادر مرتبط است. همچنین، X_p ارتعاش آزاد درجه آزادی p ام و x_{pi} ریزسیگنال مربوط به مود i درجه آزادی p سیستم است. در نتیجه به کمک روش ذکر شده می‌توان سیگنال $X_p(t)$ را به صورت مجموع ریزسیگنال‌های x_{pi} تجزیه کرد.

۲.۴. محاسبه‌ی فاز و دامنه‌ی ریزسیگنال‌ها

تبدیل هیلبرت سیگنال $x(t)$ ، به صورت رابطه‌ی ۱۹ تعریف می‌شود: [۱۳]

$$\tilde{x}(t) = HT[x(t)] = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (19)$$

که در آن، $\tilde{x}(t)$ سیگنال جدیدی است که از اعمال تبدیل هیلبرت بر $x(t)$ حاصل می‌شود. بر طبق تئوری سیگنال تحلیلی، تعداد زیادی از فرایندهای شامل ارتعاش سیستم $y(t)$ ، به وسیله تبدیل هیلبرت می‌تواند به یک تابع جدید تبدیل شود و همچنین در قالب ترکیبی از توابعی اندکی متفاوت بیان شود که پوش 4 و فاز لحظه‌ی 5 نامیده می‌شوند (روابط ۲۰ الی ۲۳): [۱۶]

$$Z_{pi}(t) = x_{pi}(t) + j\tilde{x}_{pi}(t) = A_{pi}(t) \exp[j\theta_{pi}(t)] \quad (20)$$

$$x_{pi}(t) = A_{pi}(t) \cos\theta_{pi}(t) \quad (21)$$

$$A_{pi}(t) = \sqrt{x_{pi}^2(t) + \tilde{x}_{pi}^2(t)} \quad (22)$$

$$\theta_{pi}(t) = \arctan[\tilde{x}_{pi}(t)/x_{pi}(t)] \quad (23)$$

که در آنها، $\tilde{x}_{pi}(t)$ تبدیل هیلبرت مربوط به x_{pi} است که مقادیری حقیقی دارند. $Z_{pi}(t)$ فرم تحلیلی ریزسیگنال x_{pi} است که مقداری موهومی دارد و A_{pi} و $\theta_{pi}(t)$ به ترتیب پوش و فاز لحظه‌ی ریزسیگنال x_{pi} هستند که مقادیری حقیقی دارند. در نتیجه برای هر یک از ریزسیگنال‌های استخراج شده، می‌توان فاز و پوش مربوط را به کمک روابط مذکور محاسبه کرد.

$\Gamma(t) \ddot{v}(t) \approx \ddot{u}(t)$. بنابراین اگر تحریک بتواند به عنوان نوفه سفید ناپیستا و در معادله ۱۱ با یک معادله‌ی پوش $\Gamma(t)$ که با زمان تغییر کمی دارد، بیان شود؛ آن‌گاه پاسخ‌های ناپیستای سیستم نیز می‌تواند با همان معادله‌ی پوش مدل شود.

$$u(t) = \Gamma(t)v(t), f(t) = \Gamma(t)w(t) \quad (11)$$

برای تبدیل پاسخ‌های ناپیستا به ایستا و ارزیابی همبستگی ناپیستا از نمونه‌های داده‌ی خیلی محدود، ابتدا تابع پوش از داده‌های ناپیستای اصلی به دست می‌آید که تقریباً می‌تواند به وسیله‌ی ارزیابی توابع میانگین مجذور مربعات موقتی داده‌ها مدل شود. میانگین زمانی $\hat{u}_i^*(t)$ ، $u_i^*(t)$ است که به صورت رابطه‌ی ۱۲ بیان می‌شود:

$$\hat{u}_i^* = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} u_i^*(\tau) d\tau \quad (12)$$

دوباره یادآوری می‌شود که $\Gamma(\tau)$ یک تابع متغیر آهسته است، سپس از معادله ۱۱، $\hat{u}_i^*(t)$ می‌تواند به صورت رابطه‌ی ۱۳ الی ۱۵ تقریب زده شود:

$$\hat{u}_i^* = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} \Gamma^*(\tau) v_i^*(\tau) d\tau \cong \Gamma^*(t) \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} v_i^*(\tau) d\tau \quad (13)$$

$$\Gamma(t) = \frac{(\hat{u}_i^*)^{0.5}}{(E[v_i^*])^{0.5}} \rightarrow \Gamma(t) = \frac{(\hat{u}_i^*)^{0.5}}{c_i} \quad (14)$$

$$\hat{u}_i^* = \Gamma^*(t) E[v_i^*] \quad (15)$$

بنابراین برای تبدیل سیگنال ناپیستای مفروض به سیگنال ایستا، ابتدا یک مقدار مناسب برای τ انتخاب و سپس مقادیر \hat{u}_i^* محاسبه می‌شود و با انتخاب یک پنجره‌ی زمانی، مقدار بیشینه‌ی \hat{u}_i^* در آن بازه‌ی زمانی محاسبه و در نهایت، از داده‌های حاصل تابع مناسبی برازش داده می‌شود.

با نرمالیزه کردن بیشینه‌ی مقدار تابع فوق به عدد یک تابع مقیاس شده‌ی پدید می‌آید که می‌تواند معرف تقریبی مناسبی از مقادیر تابع $\Gamma(t)$ باشد. نهایتاً با تقسیم مقادیر عددی سیگنال ناپیستا مفروض به تابع $\Gamma(t)$ در هر لحظه، سیگنال ایستا موردنظر حاصل می‌شود.

۴. استخراج پارامترهای دینامیکی سیستم

۱.۴. تجزیه‌ی مدی سیگنال ارتعاش آزاد

در بخش‌های پیشین، روش‌هایی جهت استخراج ارتعاش آزاد درجات آزادی یک سیستم خطی ارائه شد. هدف نهایی در نوشتار حاضر، استخراج پارامترهای مودی یک سیستم چند درجه آزادی خطی است؛ لذا در بخش کنونی، روشی جهت استخراج پارامترهای مودی سیستم مانند: بسامدهای طبیعی، میرایی‌های مودی، شکل‌های مودی، ماتریس‌های میرایی و سختی از ارتعاشات آزاد سیستم ارائه شده است.

ارتعاش آزاد یک سیستم، به صورت مجانبی است. این سیگنال همچنین می‌تواند به صورت مجموعی از ریزسیگنال‌ها نمایش داده شود (رابطه‌ی ۱۶): [۱۶]

$$X(t) = \sum_{i=1}^n A_i(t) \cos(\theta_i(t)) \quad (16)$$

که در آن، $A_i(t)$ دامنه و $\theta_i(t)$ فاز ریزسیگنال است. در یک سیگنال دارای مجانب، این‌گونه فرض می‌شود که فاز ارتعاش خیلی سریع‌تر از دامنه تغییر می‌کند.

با توجه به روابط ۲۹ می‌توان درایه‌های ماتریس شکل مودی را با استفاده از پاسخ ارتعاش آزاد تمامی درجات آزادی سیستم محاسبه کرد.

۵.۴. شناسایی ماتریس‌های میرایی و سختی سیستم

با توجه به خواص مودهای متعامد یک سیستم رابطه‌ی ۳۰ را داریم:

$$\phi^T M \phi = \text{diag}[m_j] \quad (30)$$

که در آن، m_j و M به ترتیب بیانگر جرم تعمیم‌یافته‌ی مود j ام و ماتریس جرم سیستم است. حال با فرض معلوم بودن ماتریس جرم و ماتریس شکل مودی با استفاده از معادلات ۳۱ و ۳۲، می‌توان ماتریس میرایی و سختی سیستم را محاسبه کرد:

$$K = \phi^{-T} \text{diag}[k_j] \phi^{-1} \quad (31)$$

$$C = \phi^{-T} \text{diag}[c_j] \phi^{-1} \quad (32)$$

که در آنها، c_j و k_j به ترتیب بیانگر میرایی و سختی تعمیم‌یافته‌ی مود j ام سیستم (که مطابق رابطه‌ی ۲۳ به دست می‌آیند) و همچنین C و K به ترتیب بیانگر ماتریس میرایی و سختی سیستم است.

$$k_j = m_j \omega_j^2; c_j = 2 \xi_j \omega_j \quad (33)$$

۵. مدل‌سازی و نتایج

در بخش حاضر، مشخصات دینامیکی یک سیستم قاب برشی ۳ طبقه‌ی خطی با استفاده از روش ارائه شده شناسایی شده است. سپس جهت اعتبارسنجی روش ذکر شده، مشخصات دینامیکی یک قاب دوبعدی فولادی مدل شده در نرم‌افزار SAP۲۰۰۰، شناسایی و با نتایج نرم‌افزار مذکور مقایسه شده است.

۱.۵. مشخصات مدل اول و تحریک مرتبط

در بخش کنونی، یک سیستم قاب برشی ۳ طبقه‌ی خطی، در نرم‌افزار MATLAB (Simulink) مطابق شکل ۱ مدل‌سازی شده است. در مدل مذکور، جرم هر طبقه برابر 1000 kg و سختی طبقات برابر $K_1 = 900 \frac{KN}{m}$ ، $K_2 = 800 \frac{KN}{m}$ و $K_3 = 700 \frac{KN}{m}$ و میرایی طبقات برابر $C_1 = 2.2 \frac{KN.s}{m}$ ، $C_2 = 1.5 \frac{KN.s}{m}$ ، $C_3 = 2 \frac{KN.s}{m}$ بوده است. سیستم تحت ورودی شتاب نوفه‌ی سفید نایبستای تولیدی قرار گرفته و شتاب هر یک از درجات آزادی ثبت شده است.

به منظور اعمال تحریک به سیستم، یک نوفه‌ی سفید ایستا به مدت ۱۲۰۰ ثانیه تولید شده است. سپس یک تابع تعدیل دامنه با معادله‌ی

$$\Gamma(t) = 4 \times (e^{-0.002t} - e^{-0.004t})$$

در سیگنال ضرب و سیگنال غیرایستا تولید شده است (شکل ۲). شکل ۳، نیروی غیرایستای وارد به درجه آزادی ۳ به مدت ۱۲۰۰ ثانیه را نمایش می‌دهد.

سپس ارتعاش خروجی تمامی درجات آزادی سیستم ثبت می‌شود. شکل ۴، ارتعاش اجباری درجه آزادی ۱ سیستم را نشان می‌دهد که از نوع نایبستاست. در ادامه، مشخصات دینامیکی سیستم با استفاده از ارتعاشات ثبت و ماتریس جرم سیستم، کاملاً شناسایی شده است.

۳.۴. شناسایی بسامدهای طبیعی و میرایی‌های مودی سیستم

بسامد زاویه‌ی ۶ لحظه‌ی مود i ام، مشتق لحظه‌ی فاز لحظه‌ی مرتبط است که به صورت رابطه‌ی ۲۴ بیان می‌شود: [۱۴]

$$\omega_i(t) = \dot{\theta}_{pi}(t) = \frac{x_{pi}(t)\dot{\hat{x}}_{pi}(t) - \dot{x}_{pi}(t)\hat{x}_{pi}(t)}{A_{pi}^2(t)} = \text{Im}\left[\frac{\dot{Z}_{pi}(t)}{Z_{pi}(t)}\right] \quad (24)$$

همچنین به منظور محاسبه‌ی میرایی مودی سیستم، چنانچه میرایی سیستم خیلی کم و بسامد زاویه‌ی بزرگ باشد، از معادلات ۲۵ و ۲۶ استفاده می‌شود: [۱۴]

$$\ln A_{pi}(t) = -\xi_i \omega_i t + \ln B_{pj} \quad (25)$$

$$\xi_i(t) = -\frac{d(\ln(A_{pi}(t)))}{\omega_i(t) dt} \quad (26)$$

که در معادله‌ی ۲۵، $\ln B_{pj}$ عرض از مبدأ معادله‌ی مذکور است.

با توجه به روابط ارائه شده در بخش کنونی، چنانچه ξ_i کم باشد، نمودارهای $\ln A_{pi} - t$ و $\theta_{pi} - t$ خطی و شیب نمودارهای مذکور به ترتیب بیانگر $-\xi_i \omega_i$ و ω_{di} است. ولیکن در حالت کلی در صورتی که ξ_i کوچک نباشد، نمودارهای مذکور غیرخطی است و در این صورت مطابق با نتایج عددی، تغییرات دامنه‌ی سیگنال سبب تغییرات بسامد در حوالی مقدار میانگین بسامد حامل می‌شود، اما مقدار میانگین آن را تغییر نمی‌دهد. در نتیجه در چنین شرایطی به منظور محاسبه‌ی میرایی‌های مودی و بسامدهای طبیعی سیستم از فرایند برازش براساس کمینه‌ی مربعات استفاده می‌شود (شکل‌های ۱۲ و ۱۳).

۴.۴. شناسایی شکل‌های مودی

در بخش‌های پیشین نشان داده شد که می‌توان با استفاده از ریزسیگنال‌های استخراج شده از پاسخ ارتعاش آزاد، یکی از درجات آزادی سیستم و همچنین روابط ارائه شده، میرایی‌های مودی و بسامدهای طبیعی سیستم شناسایی شوند. هدف در بخش کنونی، ارائه‌ی روشی است که با استفاده از ریزسیگنال‌های استخراج شده از ارتعاش آزاد تمامی درجات آزادی، بردارهای شکل مودی، ماتریس‌های سختی و میرایی سیستم شناسایی شوند.

طبق مطالعات انجام شده در سال ۲۰۰۳، [۱۴] به منظور محاسبه‌ی درایه‌های ماتریس شکل مودی از معادلات ۲۷ و ۲۸ استفاده می‌شود:

$$|\phi_{pi}|/|\phi_{qi}| = \exp[A'_{pi}(t_0) - A'_{qi}(t_0)] \quad (27)$$

$$\varphi_{pi,q} = \theta'_{pi}(t_0) - \theta'_{qi}(t_0) \quad (28)$$

که در آنها $(A'_{pi}(t_0), \theta'_{pi}(t_0), A'_{qi}(t_0), \theta'_{qi}(t_0))$ به ترتیب مقدار تابع برازش یافته بر نمودار $(\ln(A_{pi}(t)), \theta_{pi}(t))$ و $(\ln(A_{qi}(t)), \theta_{qi}(t))$ در لحظه‌ی t_0 است. همچنین نحوه‌ی برازش براساس روش کمینه‌ی مربعات است و توصیه می‌شود لحظه‌ی t_0 نقطه‌ی میانی بازه‌ی زمانی تابع برازش یافته اختیار شود. $\varphi_{pi,q}$ اختلاف فاز میان دو سیگنال تحلیلی متناظر با دو ریزسیگنال مورد بررسی است، که مقداری برابر با $\pm 2m\pi$ یا $\pm(2m+1)\pi$ دارد. حال به منظور تعیین علامت درایه‌های ماتریس شکل مودی از روابط ۲۹ استفاده می‌کنیم:

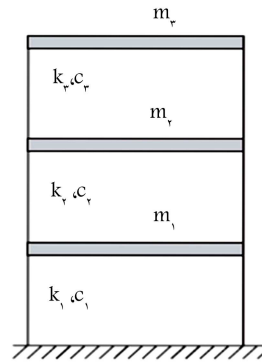
$$\begin{cases} \varphi_{pj,k} = \pm 2m\pi \rightarrow \phi_{pj}/\phi_{kj} > 0 \\ \varphi_{pj,k} = \pm(2m+1)\pi \rightarrow \phi_{pj}/\phi_{kj} < 0 \end{cases} \quad (29)$$

۲.۵. تبدیل سیگنال‌های نایستای خروجی به ایستا

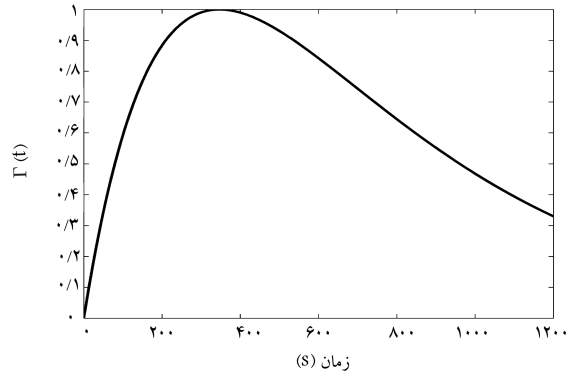
با توجه به تحریک ورودی نایستا، ارتعاشات خروجی ثبت شده در مرحله‌ی کنونی از نوع نایستاست، لذا با توجه به روش ارائه شده در بخش ۳، تابع تبدیل شناسایی و سیگنال‌های خروجی به سیگنال‌های ایستا تبدیل می‌شود. شکل‌های ۵ و ۶، به ترتیب تابع تبدیل شناسایی شده و سیگنال خروجی تبدیل یافته‌ی متناظر با درجه آزادی ۳ سیستم را نشان می‌دهد. همان‌طور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، سیگنال خروجی تبدیل یافته از نوع ایستاست.

۳.۵. استخراج پارامترهای دینامیکی سیستم

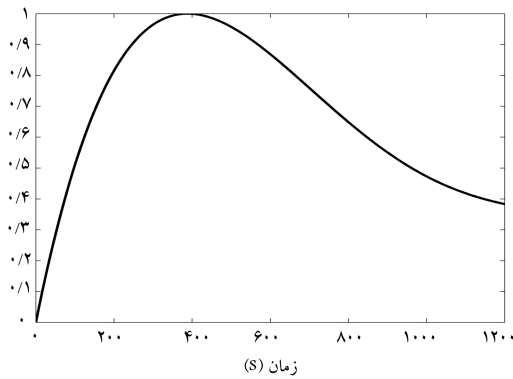
با توجه به آنکه سیگنال‌های خروجی درجات آزادی سیستم مذکور، به سیگنال‌های ایستا تبدیل شده است، حال با استفاده از روش ذکر شده در بخش ۲، ارتعاش آزاد درجات تمامی آزادی استخراج می‌شود. شکل ۷، ارتعاش آزاد درجه آزادی ۱ را نشان می‌دهد. حال کتور قدرمطلق ضرایب و ولت پیوسته‌ی ارتعاش آزاد درجه آزادی ۱ با استفاده از مویک مولت مختلط اصلاح شده مطابق شکل ۸ ترسیم شده است، تا پارامترهای مقیاس مربوط به نقاط بیشینه‌ی محلی به دست آید. مطابق شکل ۸، مقادیر بیشینه‌ی نسبی قدرمطلق ضرایب و ولت، در مقیاس‌های ۳۲۸۵، ۹۸۲ و ۶۶۵ رخ داده است که به ترتیب متناظر با مدهای اول، دوم و سوم سازه‌ی مورد بررسی است. حال قسمت موهومی ضرایب و ولت پیوسته به ازاء پارامترهای مقیاس ذکر شده، متناظر با ارتعاش آزاد هر یک از درجات آزادی سیستم محاسبه شده است که بیانگر ریزسیگنال‌های ارتعاشی سیستم است. در



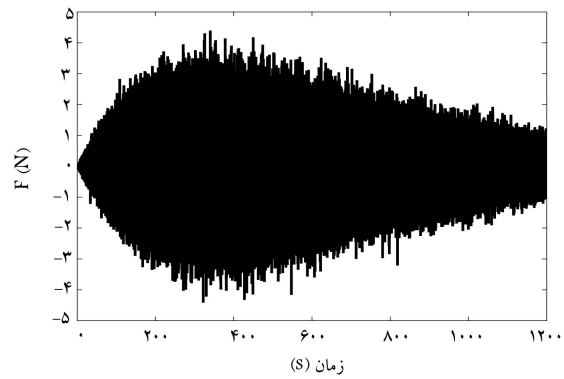
شکل ۱. سیستم قاب برشی ۳ طبقه‌ی خطی مدل شده.



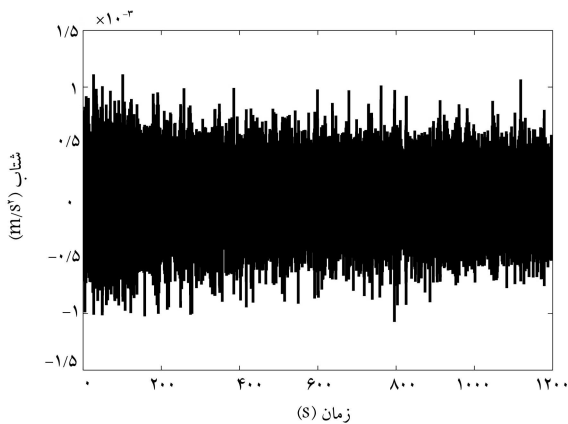
شکل ۲. نمودار تابع تبدیل مورد استفاده.



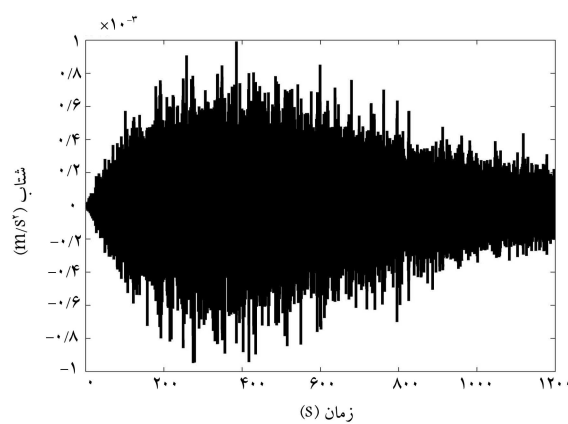
شکل ۵. تابع تبدیل شناسایی شده.



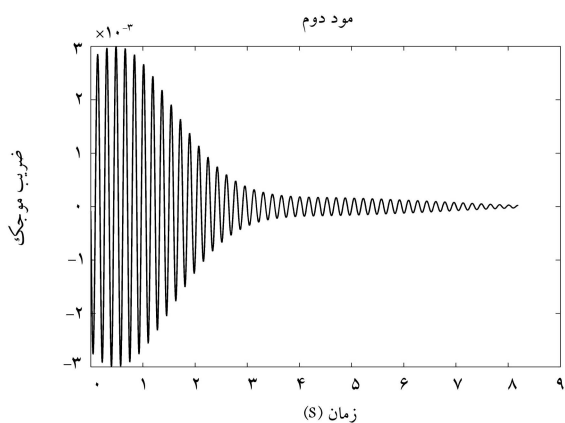
شکل ۳. نیروی غیرایستا وارد به درجه آزادی ۳.



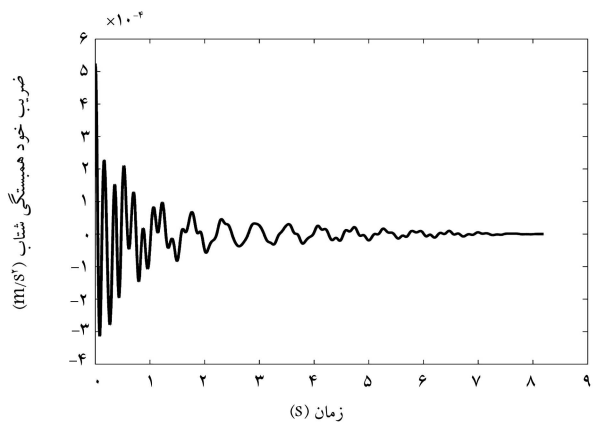
شکل ۶. سیگنال خروجی تبدیل یافته‌ی متناظر با درجه آزادی ۱.



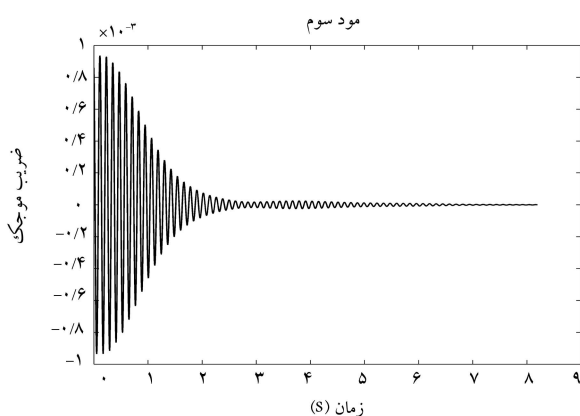
شکل ۴. سیگنال خروجی درجه آزادی ۱.



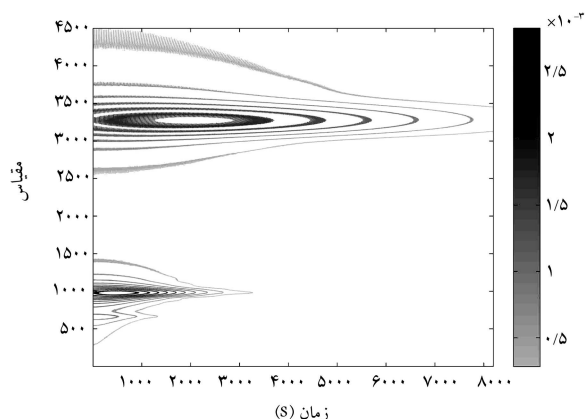
شکل ۱۰. ریزسیگنال حاصل از تجزیه‌ی مودی ارتعاش آزاد درجه آزادی ۱ (مد ۲).



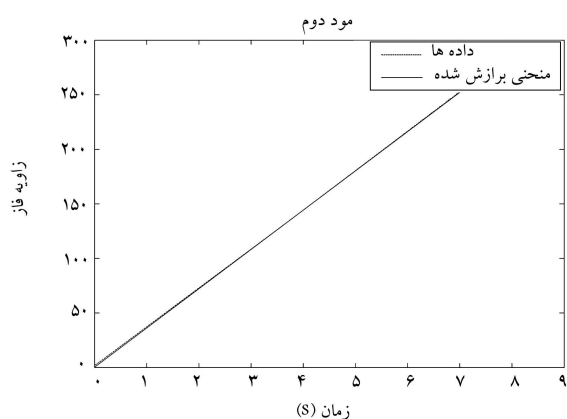
شکل ۷. ارتعاش آزاد درجه آزادی ۱.



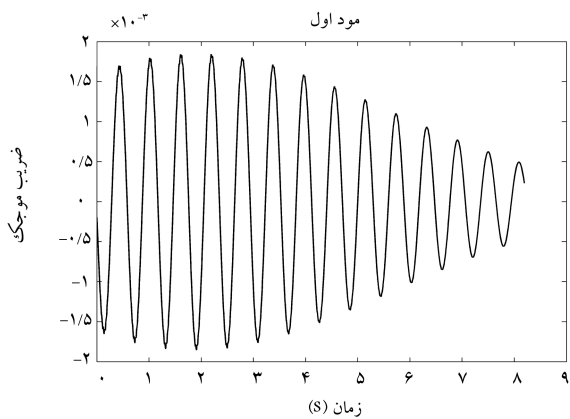
شکل ۱۱. ریزسیگنال حاصل از تجزیه‌ی مودی ارتعاش آزاد درجه آزادی ۱ (مد ۳).



شکل ۸. کنتور قدرمطلق ضرایب وولت پیوسته‌ی ارتعاش آزاد درجه آزادی ۱.



شکل ۱۲. خط برازش شده بر نمودار فاز متناظر با مود دوم درجه آزادی ۱.



شکل ۹. ریزسیگنال حاصل از تجزیه‌ی مودی ارتعاش آزاد درجه آزادی ۱ (مد ۱).

نسبت میرایی مود دوم به این شکل محاسبه می‌شود:

$$\omega_{d2} = 35$$

$$-\xi_2 \omega_2 = -1.5 \rightarrow \xi_2 = \frac{1.5}{\omega_2} \rightarrow \omega_2 \sqrt{1 - \left(\frac{1.5}{\omega_2}\right)^2} = 36$$

$$\rightarrow \omega_2 = 36.031 \quad \xi_2 = \frac{1.5}{36.031} = 0.0416$$

این کار برای تمامی ریزسیگنال‌های استخراج شده انجام می‌شود تا مقادیر بسامد

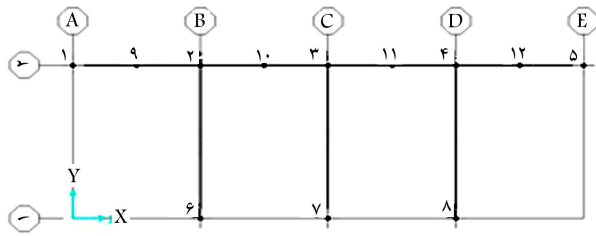
شکل‌های ۹ الی ۱۱، ریزسیگنال حاصل از تجزیه‌ی مودی ارتعاش آزاد درجه آزادی ۱ مشاهده می‌شود.

حال به منظور محاسبه‌ی بسامد طبیعی و نسبت میرایی هر مود سیستم، کافی است به ترتیب شیب خط برازش شده‌ی مذکور در بند ۳-۴ در نمودارهای $\theta_{pi} - t$ و $\theta_{22} - t$ به دست آید. در شکل‌های ۱۲ و ۱۳، به ترتیب نمودارهای $\ln A_{pi} - t$ و $\ln A_{22} - t$ نمایش داده شده است که متناظر با مود دوم درجه آزادی ۱ سیستم است.

با توجه به شکل‌های ۱۲ و ۱۳، و خط برازش یافته بر آنها، بسامد طبیعی و

جدول ۱. مقادیر تئوری و شناسایی شده بسامدها و میرایی های مودی سیستم مورد بررسی.

مد	مقادیر تئوری		مقادیر شناسایی شده	
	بسامد (هرتز)	ضریب میرایی (%)	بسامد (هرتز)	ضریب میرایی (%)
۱	۱,۹۴۰	۱,۵۲۷	۱,۷۰۹	۱,۵۹۰
۲	۵,۶۵۲	۴,۳۹۶	۵,۷۳۵	۴,۱۶۰
۳	۸,۲۵۵	۵,۶۹۳	۸,۴۱۵	۵,۶۷۰



شکل ۱۴. قاب دوبعدی مدل شده در نرم افزار SAP۲۰۰۰.

$$[C] = \begin{bmatrix} ۳,۵ & -۱,۵ & ۰ \\ -۱,۵ & ۳,۷ & -۲,۲ \\ ۰ & -۲,۲ & ۲,۲ \end{bmatrix}$$

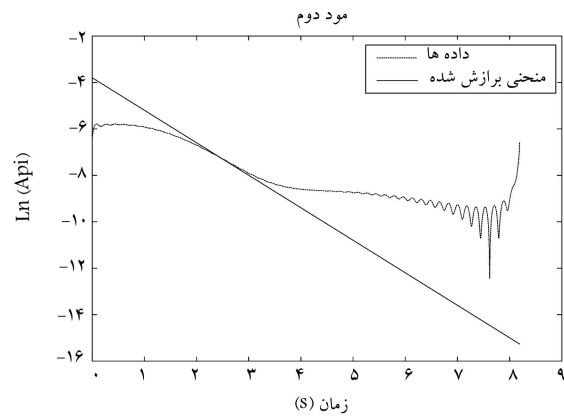
$$[\hat{C}] = \begin{bmatrix} ۴,۲۰۷ & -۲,۳۳۰ & -۰,۵۷ \\ -۲,۳۳۰ & ۴,۱۲۲ & -۲,۰۱۸ \\ -۰,۵۷ & -۲,۰۱۸ & ۲,۱۰۷ \end{bmatrix}$$

مقادیر تئوری شکل مودی و ماتریس سختی میرایی سیستم به ترتیب با علامت ϕ, K, C و مقادیر شناسایی شده شکل مودی و ماتریس سختی میرایی سیستم به ترتیب با علامت های $\hat{\phi}, \hat{K}, \hat{C}$ نمایش داده شده اند. همان گونه که مشاهده می شود، مقادیر ماتریس های شناسایی شده سیستم با تقریب قابل قبولی نزدیک به مقادیر ماتریس های تئوری متناظر هستند و روش ارائه شده در نوشتار حاضر روشی قابل اعتماد جهت شناسایی مشخصات دینامیکی سیستم خطی است.

۴.۵. مشخصات مدل دوم و تحریک مرتبط

در بخش کنونی، یک قاب دوبعدی در نرم افزار SAP۲۰۰۰ مطابق با شکل ۱۴ مدل سازی شده است.

شکل ۱۴، نمایش شماتیکی از یک سازه ی پل است. طول دهانه های سازه ی مدل شده، ۶ متر و ارتفاع ستون ها ۸ متر است. اتصال تکیه گاه های ۶، ۷ و ۸ از نوع گیردار و اتصال های تکیه گاه های ۱ و ۵ به ترتیب از نوع مفصلی و غلطکی هستند. همچنین تیر حد فاصل محور A-E از نوع تیر سراسری مدل شده است. بار گسترده ی ۵ Ton/m به صورت گسترده ی یکنواخت در سراسر تیر اعمال شده است. مقطع ۳۱۰۰ IPE۳۰۰ به تمام مقاطع تیر و ستون ها اختصاص داده شده است. میرایی قاب مذکور در نرم افزار، ۵٪ برای تمامی مدهای محاسباتی در نظر گرفته شده است. به منظور شناسایی مشخصات دینامیکی سیستم، ارتعاش نوفی سفید نالیستایی با تابع تعدیل $\Gamma(\tau) = 0.00544 \cdot t \cdot e^{-0.002 \cdot \tau}$ به صورت شتاب راستای قائم به مدل اعمال و خروجی شتاب نقاط ۹ الی ۱۲ در راستای قائم ثبت شده است.



شکل ۱۳. خط برازش شده بر نمودار لگاریتم نمایی بزرگی متناظر با مود دوم درجه آزادی ۱.

طبیعی و نسبت میرایی تمام موده های سیستم محاسبه شود. این مقادیر در جدول ۱ ارائه شده است.

مطابق جدول ۱، بسامدها و میرایی های شناسایی شده با تقریب قابل قبولی نزدیک به مقادیر واقعی سیستم است. در ادامه، با استفاده از رابطه های ۲۷ و ۲۸ و ریزسیگنال های استخراج شده از ارتعاش آزاد، هر یک از درجه های آزادی، ماتریس شکل مودی سیستم شناسایی شده است. سپس با استفاده از شکل های مودی استخراج شده، ماتریس جرم و روابط ۳۱ و ۳۲، ماتریس سختی و میرایی سیستم شناسایی شده است. مقادیر شکل مودی و ماتریس سختی و میرایی در این قسمت ارائه شده است.

$$[\phi] = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱,۶۸۹ & ۰,۲۹۸ & -۱,۴۸۸ \\ ۲,۰۲۳ & -۰,۷۴۳ & ۰,۷۴۸ \end{bmatrix}$$

$$[\hat{\phi}] = \begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ ۱,۷۱۳ & ۰,۲۵۷ & -۱,۵۸۹ \\ ۱,۹۷۱ & -۰,۷۰۴ & ۰,۶۲۷ \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} ۱۵۰۰۰ & -۸۰۰ & ۰ \\ -۸۰۰ & ۱۷۰۰ & -۹۰۰ \\ ۰ & -۹۰۰ & ۹۰۰ \end{bmatrix}$$

$$[\hat{k}] = \begin{bmatrix} ۱۷۸۹,۶ & -۱۰۷۰,۳ & ۴۰,۸ \\ -۱۰۷۰,۳ & ۱۸۴۰,۷ & -۹۲۸,۲ \\ ۴۰,۸ & -۹۲۸,۲ & ۸۹۷,۳ \end{bmatrix}$$

جدول ۲. مقادیر بسامد طبیعی و میرایی‌های مدل استخراج شده از نرم افزار SAP۲۰۰۰ و شناسایی شده.

مقادیر شناسایی شده با استفاده از روش ارائه شده		مقادیر استخراج شده از نرم افزار SAP۲۰۰۰		مد
بسامد (هرتز)	ضریب میرایی (%)	بسامد (هرتز)	ضریب میرایی (%)	
۲۱,۸۷	۴,۶۷	۲۱,۸۷	۵	۱
۳۳,۰۶	۵,۲۷	۳۲,۸۸	۵	۲

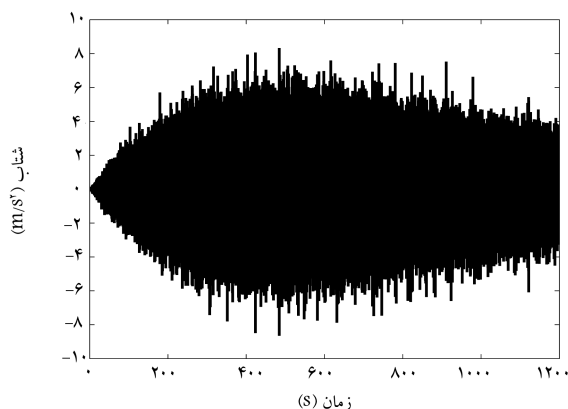
مقادیر بردارهای شکل مودی متناظر با دو مود شناسایی شده، در ذیل ارائه و مقادیر آن با مقادیر استخراج شده از نرم‌افزار SAP ۲۰۰۰ مقایسه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مقادیر بردارهای شکل مودی با تقریب خوبی شناسایی شده‌اند.

$$\{\phi_{i1}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,414 \\ -0,414 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{\phi_{i2}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2,416 \\ 2,416 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

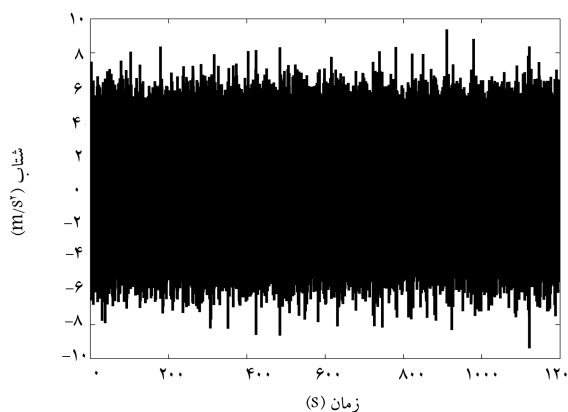
$$\{\hat{\phi}_{i1}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,414 \\ -0,414 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \{\hat{\phi}_{i2}\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2,416 \\ 2,416 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

۶. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر، مشخصات دینامیکی یک قاب برشی ۳ درجه آزادی و یک قاب دو بعدی فولادی، تحت ارتعاش ورودی نوفه‌ی سفید نالیستا به کمک ترکیب روش‌های تحریک طبیعی، تجزیه‌ی مودی با استفاده از ویولت پیوسته و تبدیل هیلبرت شناسایی شده است. سیستم‌های موردنظر تحت تحریک نالیستا بودند، لذا با تبدیل سیگنال‌های پاسخ شتاب نالیستای آن‌ها به سیگنال‌های ایستا و استفاده از روش تحریک طبیعی، ارتعاش آزاد متناظر با درجات آزادی سیستم استخراج شدند. با استفاده از ارتعاشات آزاد سیستم، تبدیل ویولت پیوسته و تبدیل هیلبرت مشخصات دینامیکی سیستم شناسایی شدند. روش مذکور در نوشتار حاضر، دقت مناسبی دارد و به طور قابل قبولی می‌تواند مشخصات سیستم را شناسایی کند. برای شناسایی مشخصات ذکر شده به کمک روش ارائه شده، فقط به جرم و پاسخ‌های شتاب درجات آزادی سیستم تحت ارتعاش محیطی (تحریک باد، ترافیک ماشین‌آلات و ...) نیاز است. این تذکر لازم است که جهت شناسایی مشخصات مودی موده‌های بالاتر سیستم تحریک طبیعی مذکور باید به گونه‌ی باشد که محتوای بسامدی آن تمام موده‌های سیستم را درگیر کند، در غیر این صورت فقط مشخصات مودی موده‌های درگیر شده قابل شناسایی خواهند بود.



شکل ۱۵. سیگنال شتاب خروجی نالیستای راستای قائم متناظر با نقطه‌ی ۱۱.



شکل ۱۶. سیگنال شتاب خروجی نالیستای راستای قائم متناظر با نقطه‌ی ۱۱.

شکل‌های ۱۵ و ۱۶، به ترتیب تاریخچه‌ی زمانی ارتعاش شتاب خروجی نالیستا و ایستای نقطه‌ی ۱۱ را در راستای قائم به مدت ۱۲۰۰ ثانیه نمایش می‌دهند. پس از تجزیه و تحلیل داده‌ها به روش ذکر شده در قسمت‌های پیشین، بسامد و میرایی دو مود از موده‌های قاب شناسایی و با بسامد و میرایی متناظر آن در نرم‌افزار SAP۲۰۰۰ مقایسه شده است (جدول ۲).

پانوشته‌ها

1. natural excitation technique
2. continuous wavelet transform

3. hilbert transform
4. envelope
5. instantaneous phase
6. angular frequency

منابع (References)

1. Siringoringo, D.M. and Fujino, Y. "System identification of suspension bridge from ambient vibration response", *Engineering Structures*, **30**(2), pp. 462-477 (2008).
2. Chiang, D.Y. and Lin, C.S. "Identification of modal parameters from nonstationary ambient vibration data using the channel-expansion technique", *Journal of Mechanical Science and Technology*, **25**(5), pp. 1307-1315 (2011).
3. Meirovitch, L., *Dynamics and Control of Structures*, Wiley, New York (1993).
4. Cole, H.A.Jr. "Method and apparatus for measuring the damping characteristics of a structure", *United States Patent*, **3**, pp. 620-069 (1971).
5. Ibrahim, S.R. "Random decrement technique for modal identification of structures", *Journal of Spacecraft and Rockets*, **140**(11), pp. 696-700 (1977).
6. Ibrahim, S.R. and Mikulcik, E.C. "A Method for the direct identification of vibration parameters from free response", *Shock and Vibration Bulletin*, **47**(4), pp. 183-198 (1977).
7. James, G.H., Crane, T.G. and Laufer, J.P. "The natural excitation technique (NExT) for modal parameter extraction from operating structures", *Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis*, **10**(4), pp. 260-277 (1995).
8. Lin, C. and Chiang, D. "A modified random decrement technique for modal identification from nonstationary ambient response data only", *Journal of Mechanical Science and Technology*, **26**(6), pp. 1687-1696 (2012).
9. Gurley, K. and Kareem, A. "Application of wavelet transform in earthquake, wind, and ocean engineering", *Journal of Engineering Structures*, **21**(2), pp. 149-167 (1999).
10. Ruzzene, M., Fasana, A., Garibaldi, L. and Piombo, B. "Natural frequencies and damping identification using wavelet transform: Application to real data", *Mechanical Systems and Signal Processing*, **11**(2), pp. 207-218 (1997).
11. Wijesundara, K.K., Negulescu, C., Monfort, D. and Forster, E. "Identification of modal parameters of ambient excitation structures using continuous wavelet transform", *15th World Conference on Earthquake Engineering: 15th WCEE*, Lisbon, Portugal (Sep 2012).
12. Feldman, M. "Nonlinear free-vibration identification via the Hilbert transform", *Journal of Sound and Vibration*, **208**(3), pp. 475-489 (1997).
13. Huang, N.E., Shen, Z., Long, S.R., Wu, M.C., Shih, H.H., Zheng, Q., Yen, N.-C., Tung, C.C. and Liu, H.H. "The empirical mode decomposition and Hilbert spectrum for nonlinear and nonstationary time series analysis", *Proceedings of the Royal Society of London-Series A*, **454**(1971), pp. 903-995 (1998).
14. Yang, J.N., Lei, Y., Pan, S. and Huang, N. "System identification of linear structures based on Hilbert-Huang spectral analysis. Part I: Normal modes", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **32**(9), pp. 1443-1467 (2003).
15. Bendat, J.S. and Piersol, A.G., *Random Data. Analysis and Measurement Procedures*, John Wiley and Sons Inc., New York City, NY (2000).
16. Feldman, M. "Non-linear free vibration analysis using Hilbert transform- I", *Free Vibration Analysis Method Freevib. Mech Syst. Process*, **8**(2), pp. 119-127 (1994).