مهندسی عمران شریف، (زمستان ۱۳۹۶)
دوره‌ی ۲ - ۳۳، شماره‌ی ۴/۲، ص. ۱۳۹-۱۳۱، (یادداشت فنی)

Research Note

توزیع تنش اطراف تونل‌های بیضی شکل به‌روش استیونسون

مهدی زمانی* (استادیار)
مهدی عالمی (کارشناس ارشد)
دانشکده‌ی عمران، دانشگاه یاسوج

mahdi@mail.yu.ac.ir
m.alemi6687@gmail.com

در پژوهش حاضر، از توابع پتانسیل مختلط استیونسون برای تنش در محیط اطراف حفره‌ی بیضی‌شکل در داخل صفحه‌ی فلزی کشسان استفاده شده است. توابع پتانسیل مذکور برای تونل‌های طولانی و با فرض کرنش صفحه‌یی قابل استفاده هستند. ضرایب توابع پتانسیل با توجه به شرایط مرزی و فرضیات مسئله به‌دست آمدند و سپس با به‌کارگیری مشتقات متوالی و جزء به جزء توابع مرتبط، تنش‌های محوری و برشی در اطراف تونل بیضی شکل محاسبه شدند. از شرایط تنش‌های برجای یک‌محوری و دومحوری برای حل مسائل مربوط استفاده شده است. با استفاده از نگاشت همدیس، منطقه‌ی اطراف تونل بیضی شکل به قلمرو اطراف تونل دایره‌یی شکل تبدیل یافت. نتایج به‌دست آمده از تنش‌های محوری و شعاعی، هماهنگی مناسب با روش و مدل ارائه شده‌ی ماش خلیشویلی بر روی سطح تونل دارد.

واژگان کلیدی: توابع پتانسیل، نگاشت، همدیس، کشسان، هارمونیک، بی‌هارمونیک.

۱. مقدمه

نزد مهندسان مکانیک سنگ، روش‌های تحلیلی در تعیین میزان تنش و تغییر شکل کشسان اطراف تونل، همیشه یک روش اساسی و بنیادی برای طراحی تونل‌های مختلف بوده است. در تئوری کشسانی دو بعدی برای اجسام همگن و همسان‌گرد، موقعی که از تغییرات نیروهای بدنه‌یی یا حجمی صرف‌نظر شود، شرایط یکسان تنش برای دو حالت تنش صفحه‌یی و کرنش صفحه‌یی به‌دست می‌آید.[۱] بنابراین توزیع کشسان تنش اطراف یک تونل عمیق را می‌توان با توزیع تنش در یک صفحه‌ی فلزی با سوراخ شبیه به تونل از نظر شکل و تحت شرایط مرزی یکسان که بر لبه‌های صفحه اعمال می‌شود و نیروی بدنه‌یی صفر، توسط تابع بی‌هارمونیک تخمین زد. قدیمی‌ترین حل برای تعیین تنش اطراف سوراخ دایره‌یی در یک صفحه‌ی بی‌نهایت در سال‌های ۱۹۵۲ و ۱۹۶۰ ارائه شده است.[۲و۳]

مهم‌ترین فعالیت‌های پژوهشی در زمینه‌ی مذکور بر روی تعیین توزیع تنش، تمرکز تنش، تغییر شکل و طراحی تونل‌های دایره‌یی بوده است که ادبیات و پیشینه‌ی فراوانی در مورد آن وجود دارد.[۴-۱۵] برای تحلیل تنش اطراف تونل با استفاده از توابع پتانسیل مختلط، ابتدا از روش انتقال با نگاشت همدیس برای تبدیل مقطع تونل به مقطع ساده‌تر یا دایره‌یی استفاده می‌شود. در نگاشت مذکور، نقاط بیرونی و اطراف تونل با استفاده از انتقال یک‌به‌یک به نقاط بیرونی یا درونی مقطع دایره‌یی منتقل یا تصویر می‌شوند که به‌طور مفصل و مشروح در برخی منابع شرح داده شده است.[۱۶و۱۷]

بیشتر راه‌حل‌های ذکر شده برای تونل‌های با مقاطع هندسی منظم و ساده شده تحت میدان تنش دومحوری بوده است. مقاطع مذکور در بیشتر موارد، دو محور تقارن یا دست‌کم یک محور تقارن دارند. در پژوهش حاضر، یک روش تحلیلی مبتنی بر توابع پتانسیل مختلط و برای تونل‌های بیضوی ارائه شده است. برای مقاطع بیضی شکل نوع تحلیل بر مبنای دست‌کم ۳ روش است: ۱. روش استیونسون، ۲. روش ماش‌خلیشویلی، ۳. روش استفاده از سری چندجمله‌یی. روش‌های مذکور به‌صورت کلی در برخی منابع،[۱۳و۱۶-۲۱] جهت تعیین تنش محیطی یا مماسی در سطح تونل به‌کار می‌روند. در نوشتار حاضر، فرمول‌سازی تنش اطراف تونل‌های بیضوی به‌صورت مرحله‌یی و جزئی و برای تمام مؤلفه‌های آن بسط داده و تعیین شده است. بدیهی است حل‌های تحلیلی روش‌های مذکور در جزئیات با یکدیگر یکسان نیستند، ولی همگی شرایط مرزی در سطح تونل و داخل توده‌ی سنگ اطراف تونل در مرز بی‌نهایت را تصدیق و تأیید می‌کنند، که نشان‌گر تعدد و گوناگونی معادلاتی است که در معادله‌ی بی‌هارمونیک و با درنظر گرفتن شرایط مرزی صدق می‌کنند.

خوانندگان علاقه‌مند به‌روش‌های تحلیلی در موارد ذکر شده می‌توانند برای مقاطع یا تونل‌های دایره‌یی و بیضی شکل علاوه بر منابع[۴-۲۱] به منابع[۲۲-۳۲]، برای تونل‌های مثلثی، مربعی و مستطیلی به منابع[۱۶،۱۹،۳۳و۳۴] و برای تونل‌های سهمی شکل و غیردایروی در انواع مختلف به منابع مراجعه کنند.[۳۵و۳۶]

---

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۴/۱۰/۲۶، اصلاحیه ۱۳۹۵/۱/۶، پذیرش ۱۳۹۵/۳/۱۹.

۲. فرمول‌سازی مسئله

توزیع دوبعدی تنش در یک صفحه‌ی فلزی سوراخ‌دار و محیط کشسان و همگن تحت شرایط میدان بارگذاری یک‌محوره و دومحوره را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی ۱ (تابع بی‌هارمونیک) تعیین کرد که با به‌کارگیری معادلات تعادل، معادلات سازگاری، معادلات تنش کرنش و استفاده از تابع ایری φ به‌دست می‌آید:

$$\nabla^4\varphi = \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = \nabla^2(\nabla^2\varphi) = 0 \qquad (1)$$

تنش‌های محوری و برشی در صفحه‌ی مذکور توسط به‌کارگیری مشتق دوم تابع φ به‌دست می‌آیند (روابط ۲):

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \qquad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \qquad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial x} \qquad (2)$$

با استفاده از قانون زنجیر می‌توان رابطه‌ی ۳ را نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}) \qquad (3)$$

مشتق دوم بر حسب x را با استفاده از معادلات ذکر شده، می‌توان مطابق رابطه‌ی ۴ نوشت:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial}{\partial x}) = (\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}})(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}) = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}} \qquad (4)$$

به روش مشابه، مشتق دوم نسبت به y طبق معادله‌ی ۵ تعیین می‌شود:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}} \qquad (5)$$

از جمع دو معادله‌ی ۴ و ۵، برای تابع لاپلاس می‌توان رابطه‌ی ۶ را نوشت:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}} \qquad (6)$$

با استفاده از به‌کارگیری معادله‌ی ۶ در معادله‌ی بی‌هارمونیک (رابطه‌ی ۱)، رابطه‌ی ۷ به‌دست می‌آید:

$$\nabla^4 = \nabla^2(\nabla^2) = 4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}}(4\frac{\partial^2}{\partial z\partial \bar{z}}) = 16\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial \bar{z}^2} \qquad (7)$$

توسط حل معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی (رابطه‌ی ۷) بر حسب تابع φ، توابع پتانسیل مختلط $\psi(z)$ و $\chi(z)$به‌دست می‌آیند (رابطه‌ی ۸):

$$\varphi = Re[\bar{z}\psi(z) + \chi(z)] \qquad (8)$$

که در آن، φ تابع پتانسیل مختلط، $\bar{z}$ مزدوج متغیر مختلط z و Re مقدار حقیقی آن است. جایی که $z = x + iy$، $\bar{z} = x - iy$، x و y اعداد حقیقی و i عدد موهومی واحد هستند. به‌علت مشابهت می‌توان تنش اطراف یک تونل طولانی را توسط توزیع تنش در یک صفحه‌ی فلزی کشسان با وضعیت کرنش دو بعدی به‌دست آورد. بنابراین با تعیین توابع پتانسیل مختلط $\psi(z)$ و $\chi(z)$ و به‌کارگیری شرایط مرزی و شکل هندسی تونل می‌توان توزیع تنش اطراف تونل‌های مختلف را به‌دست آورد و سپس با توجه به آن، نوع سیستم نگهداری تونل را طراحی کرد. برای این کار باید ابتدا شکل هندسی تونل را توسط انتقال یا تصویرسازی یک‌به‌یک به شکل ساده‌ی دایره تبدیل کرد. انتقال موردنظر به نگاشت همدیس معروف است و در آن زوایای بین خطوط و منحنی‌های مرتبط پیشین و پس از انتقال ثابت می‌ماند. طبق نظریه‌ی ریمان، هر منحنی بسته‌ی پیوسته را می‌توان با استفاده از نگاشت همدیس به دایره تبدیل کرد. همچنین محیط اطراف تونل را می‌توان به محیط بیرونی یا داخلی دایره‌یی به شعاع واحد و توسط انتقال یک‌به‌یک تصویر کرد. تابع انتقال $z = w(\zeta)$ که محیط اطراف تونل بیضی شکل را در فضای مختصات z را به محیط بیرونی دایره‌یی به‌شعاع واحد در فضای مختصات ζ وصل می‌کند و توسط استیونسون، ارائه شده است،[1] به‌صورت معادله‌ی ۹ است:

$$z = w(\zeta) = c\cosh\zeta \qquad (9)$$

که در آن، c مقدار ثابت و به قطر تونل بستگی دارد و $\zeta = \xi + i\eta$. مقادیر x و y نقاط محیطی تونل بیضی‌شکل توسط بسط معادله‌ی ۹ و طبق روابط ۱۰ به‌دست می‌آیند:

$$x = c\cosh\xi\cos\eta, \qquad y = c\sinh\xi\sin\eta \qquad (10)$$

اگر نیم قطرهای بزرگ و کوچک تونل بیضی a و b باشند، پارامتر c و ξ_0 از روابط $a = c\cosh\xi_0$ و $b = c\sinh\xi_0$ به‌دست می‌آیند. به‌عنوان مثال برای $a = 2m$ و $b = 1m$ (تونل بیضی شکل به‌ابعاد قطر ۴ متر و ارتفاع ۲ متر) $c^2 = a^2 + b^2$ و $\xi_0 = \ln\sqrt{3} = 0/594$ هستند. نگاشت همدیس تونل فوق در شکل ۱ مشاهده می‌شود.

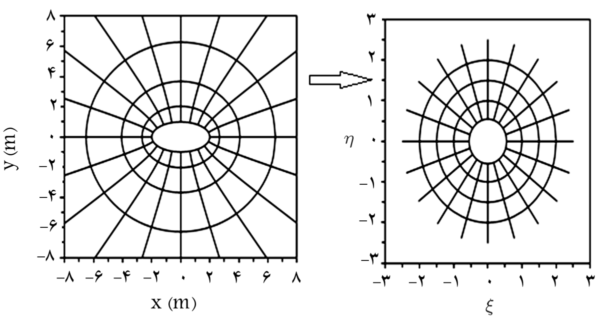
برای توابع پتانسیل مختلط $\psi(z)$ و $\chi(z)$، استیونسون معادلات ۱۱ را ارائه کرده است:

$$4\psi(z) = Ac\cosh\zeta + Bc\sinh\zeta$$
$$4\chi(z) = Cc^2\zeta + Dc^2\cosh 2\zeta + Ec^2\sinh 2\zeta \qquad (11)$$

ارتباط بین تنش‌های محوری و برشی در صفحه‌ی z و صفحه‌ی ζ، به‌صورت روابط ۱۲ بیان می‌شود:

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = \sigma_x + \sigma_y$$
$$\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} = e^{2i\alpha}(\sigma_y - \sigma_y + 2i\tau_{xy}) \qquad (12)$$

که در آن، α زاویه‌ی بین خط مماس بر منحنی دارای η ثابت با محور x و در نقاط انتقال است. معادلات ۱۲، با توجه به دوران محورهای تنش در دو صفحه‌ی z و ξ تحت زاویه‌ی α به‌دست می‌آیند. توسط استفاده از مشتقات درجه دو تابع ایری



شکل ۱. نگاشت همدیس برای تونل با مقطع بیضی شکل.

(معادلات ۲) و به‌کارگیری معادله‌ی ۸، وضعیت تنش در هر نقطه در اطراف تونل و در صفحه‌ی z از معادلات ۱۳ به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases}\sigma_x+\sigma_y=4Re\psi'(z)\\ \sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2[\bar{z}\psi''(z)+\chi''(z)]\end{cases} \qquad (۱۳)$$

با جای‌گذاری معادلات ۱۳ در معادلات ۱۲، وضعیت تنش در اطراف تونل و در صفحه‌ی ζ طبق معادلات ۱۴ تعیین می‌شوند:

$$\begin{cases}\sigma_\xi+\sigma_\eta=4Re\psi'(z)\\ \sigma_\eta-\sigma_\xi+2i\sigma_{\xi\eta}=2e^{2i\alpha}[\bar{z}\psi''(z)+\chi''(z)]\end{cases} \qquad (۱۴)$$

جایی که زاویه‌ی α توسط به‌کارگیری تابع نگاشت $z=w(\zeta)$ در مختصات انتقال توسط معادله‌ی ۱۵ به‌دست می‌آید.[2]

$$e^{2i\alpha}=\frac{w'(\zeta)}{w'(\zeta)} \qquad (۱۵)$$

به‌علت آنکه $z=c\cosh\zeta$ است، جمله‌ی $Ac\cosh\zeta$ در تابع $4\psi(z)$، معادله‌ی ۱۱ تبدیل به Az می‌شود و آن در تابع تنش معادله‌ی ۸، $ReAz\bar{z}$ است. اگر A عدد موهومی باشد، صفر می‌شود و چون باید غیرصفر باشد، بنابراین A باید عدد حقیقی باشد. همچنین پارامتر C در معادلات ۱۱ باید عدد حقیقی باشد، زیرا اگر از توابع پتانسیل مختلط $\psi(z)$ و $\chi(z)$ در معادله‌ی گشتاور و حول یک دایره‌ی فرضی در فاصله‌ی ۰ و 2π انتگرال‌گیری شود، به دلیل طبیعت توابع هیپربولیک باید صفر شوند. درغیر این صورت برای مقادیر موهومی C، میسر ذکر شده نمی‌شود.[2] دیگر پارامترهای معادلات ۱۱، B، D و E اعداد مختلط هستند که توسط به‌کارگیری شرایط مرزی تونل و وضعیت تنش در مختصات ζ طبق محاسبات مرتبط انجام می‌شوند. اگر تنش تک‌محوری و فشاری برجا (p) در نقطه‌ی معادل مرکز تونل و در امتداد x' که زاویه‌ی β نسبت به محور x می‌سازد، مطابق شکل ۲ در نظر گرفته شود، توسط دوران محورهای تنش از مختصات xy به مختصات $x'y'$ می‌توان معادله‌ی ۱۶ را نوشت:

$$\begin{cases}\sigma_{x'}+\sigma_{y'}=\sigma_x+\sigma_y\\ \sigma_{y'}-\sigma_{x'}+2i\tau_{x'y'}=e^{2i\beta}(\sigma_y-\sigma_x-2i\tau_{xy}]\end{cases} \qquad (۱۶)$$

جایی که $\sigma_{x'}=p$ و $\sigma_{y'}=\tau_{x'y'}=0$ قابل ذکر است که برخلاف علامت‌گذاری رایج در مقاومت مصالح و تئوری کشسانی، در مکانیک سنگ، تنش فشاری مثبت و تنش کششی منفی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین از معادلات ۱۶ می‌توان روابط ۱۷ را به‌دست آورد:

$$\sigma_x+\sigma_y=p,\qquad \sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=-pe^{-2i\beta} \qquad (۱۷)$$

با جای‌گذاری شرایط معادلات ۱۷ در سیستم معادلات ۱۳، شرایط مرزی معادلات ۱۸ برای توابع پتانسیل مختلط به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases}4Re\psi'(z)=p\\ 2[z'\psi''(z)+\chi''(z)]=-pe^{-2i\beta}\end{cases} \qquad (۱۸)$$

برای محاسبه‌ی $\psi'(z)$ از معادله‌ی اول معادلات ۱۱، توسط قانون زنجیر مطابق معادله‌های ۱۹ و ۲۰ مشتق‌گیری می‌شود:

$$4\psi'(z)4=4\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\times\frac{\partial\zeta}{\partial z}=4\frac{\psi'_\zeta}{z'_\zeta}$$

$$\frac{Ac\sinh\zeta+Bc\cosh\zeta}{c\sinh\zeta}=A+B\coth\zeta \qquad (۱۹)$$

$$at\ \zeta\Rightarrow\infty \quad 4\psi'(z)=A+B=A+B_1+iB_2,$$

$$4Re\psi'(z)=Re(A+B_1+iB_2)=A+B_1=p \qquad (۲۰)$$

به روش مشابه برای تصدیق معادله‌ی دوم از معادلات ۱۸ ناشی از شرط دوم مرزی، با به‌کارگیری مشتق دوم از توابع پتانسیل مختلط، ارتباط بین پارامترهای موردنظر مطابق روابط ۲۱ الی ۲۳ به‌دست می‌آید:

$$\psi''_z=\frac{\psi''_\zeta z'_\zeta-\psi'_\zeta z''_\zeta}{z'^3_\zeta},\ z'=c\sin h\zeta,\ z''=c\cos h\zeta \qquad (۲۱)$$

$$4\psi''_z=\frac{1}{c^3\sinh^3\zeta}\begin{bmatrix}(Ac\cosh\zeta+Bc\sin h\zeta)c\sin h\zeta\\ -(Ac\sin h\zeta+Bc\cos h\zeta)c\cos h\zeta\end{bmatrix}$$

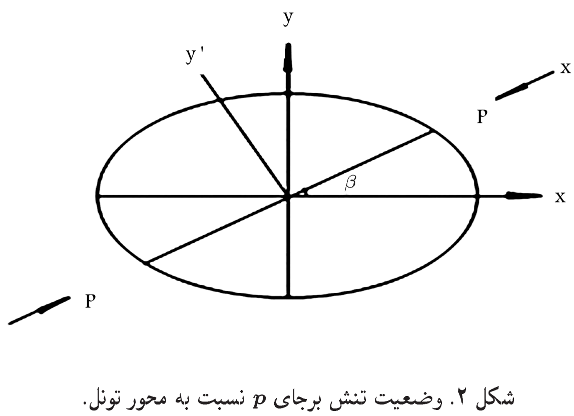
$$\frac{B}{c\sin h^3\zeta}[\sin h^2\zeta-\cos h^2\zeta]=\frac{B}{c\sin h^3\zeta} \qquad (۲۲)$$

$$4\bar{z}\psi''_z=-B/\cosh\bar{\zeta}/\sinh^3\zeta \qquad (۲۳)$$

مشتق دوم تابع پتانسیل مختلط $\chi(z)$ به‌روش مشابه مشتقات $\psi(z)$ طبق معادلات ۲۴ محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}\chi''_z&=\frac{\chi''_\zeta z'_\zeta-\chi'_\zeta z''_\zeta}{z'^3_\zeta}=\frac{1}{c^3\sin h^3\zeta}\\ &\times[(Dc^2\cosh 2\zeta+Ec^2\sin h2\zeta)c\sin h\zeta\\ &-\frac{1}{4}(Cc^2+2Dc^2\sin h2\zeta+2Ec^2\cos h2\zeta)c\cos h\zeta]\\ &=\frac{1}{\sin h^2\zeta}[D\cosh 2\zeta+E\sin h2\zeta-\frac{1}{4}C\coth\zeta\\ &-\frac{1}{2}D\sinh 2\zeta\coth\zeta-\frac{E}{2}\cosh 2\zeta\coth\zeta]\end{aligned} \qquad (۲۴)$$

با جایگزین کردن $\bar{z}\psi''_z$ و χ''_z در معادله‌ی دوم معادلات ۱۸، می‌توان معادلات



شکل ۲. وضعیت تنش برجای p نسبت به محور تونل.

۲۵ الی ۲۷ را نوشت:

$$\begin{aligned}&2\{-\frac{B}{4}\frac{\cosh\bar{\zeta}}{\sin h^{3}\zeta}+\frac{1}{\sin h^{2}\zeta}[D\cosh 2\zeta+E\sinh 2\zeta\\&\frac{1}{4}C\coth\zeta-\frac{1}{2}D\sinh 2\zeta\coth\zeta-\frac{E}{2}\cosh 2\zeta\coth\zeta\}\\&-pe^{-2i\beta}\end{aligned}\tag{25}$$

$$at\quad \xi\Rightarrow\infty\frac{\cosh\bar{\zeta}}{\sin h^{2}\zeta}=0,\ \frac{\sinh\zeta}{\sin h^{2}\zeta}=0,\ \coth\zeta=1\tag{26}$$

$$\begin{aligned}&-pe^{-2i\beta}=2[D\frac{cosh^{2}\zeta+\sin h^{2}\zeta}{\sin h^{2}\zeta}+2E\frac{\sinh\zeta\cosh\zeta}{\sin h^{2}\zeta}\\&-\frac{D}{2}\frac{\sinh 2\zeta}{\sin h^{2}\zeta}-\frac{E}{2}\cosh 2\zeta]=2[D(\coth^{2}\zeta+1)\\&+2E\coth\zeta-D\coth\zeta-\frac{E}{2}(\coth^{2}\zeta+1)]\end{aligned}\tag{27}$$

برای $\xi\Rightarrow 0$ معادله‌ی ۲۷ به‌صورت معادله‌ی ۲۸ ساده می‌شود:

$$2(2D+2E-D-E)=2(D+E)=pe^{-2i\beta}\tag{28}$$

اگر در معادلات ۱۴، معادله‌ی اول از معادله‌ی دوم کسر شود، آنگاه می‌توان معادله‌ی ۲۹ را نوشت:

$$2(\sigma_{\xi}-i\tau_{\xi\eta})=4Re\psi'(z)-2e^{2i\alpha}[\bar{z}\psi''(z)+\chi''(z)]\tag{29}$$

با جای‌گذاری مشتقات اول و دوم توابع پتانسیل در معادله‌ی ۲۹، می‌توان معادلات ۳۰ الی ۳۲ را نوشت:

$$\begin{aligned}&2(\sigma_{\xi}-i\tau_{\xi\eta})=A+B_{1}\coth\zeta-2\frac{\sinh\zeta}{\sinh\bar{\zeta}}\{-\frac{B}{4}\frac{\cosh\bar{\zeta}}{\sin h^{3}\zeta}\\&+\frac{1}{\sin h^{2}\zeta}[D\cosh 2\zeta+E\sinh 2\zeta-\frac{1}{4}C\coth\zeta\\&-\frac{1}{2}D\sinh 2\zeta\coth\zeta-\frac{1}{2}E\cosh 2\zeta\coth\zeta]\}\end{aligned}\tag{30}$$

$$\begin{aligned}&=\mathrm{csch}\bar{\zeta}\{(\mathrm{A}\sinh\bar{\zeta}+\frac{\mathrm{B}+\bar{\mathrm{B}}}{2}\coth\zeta\sinh\bar{\zeta})\\&+\frac{B}{2}\cosh\bar{\zeta}csch^{2}\zeta-\frac{2}{\sinh\zeta}[II]\}\end{aligned}\tag{31}$$

$$\begin{aligned}&=\mathrm{csch}\bar{\zeta}\{(\mathrm{A}+\frac{\mathrm{B}+\bar{\mathrm{B}}}{2}\coth\zeta)\sinh\bar{\zeta}+\frac{\mathrm{B}}{2}\cosh\bar{\zeta}\mathrm{csch}^{2}\zeta\\&-2D\frac{\cosh 2\zeta}{\sinh\zeta}-4E\cosh\zeta+\frac{1}{2}C\cosh\zeta csch^{2}\zeta\\&+2D\cosh\zeta\coth\zeta+E\mathrm{csch}\zeta\coth\zeta+2E\cosh\zeta\}\end{aligned}\tag{32}$$

به‌طوری که در رابطه‌ی ۳۲، با تفکیک‌سازی جملات به‌ترتیب در داخل آکولاد می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}&1\Rightarrow(A+\frac{B}{2}\coth\zeta)\sinh\bar{\zeta}\\&2\Rightarrow\frac{\bar{B}}{2}\coth\zeta\sinh\bar{\zeta}+\frac{\bar{B}}{2}\cosh\bar{\zeta}csch^{2}\zeta\\&\quad=(\frac{\bar{B}}{2}\coth\zeta\tanh\bar{\zeta}+\frac{\bar{B}}{2}csch^{2}\zeta)\cosh\bar{\zeta}\end{aligned}$$

با توجه به آنکه $Re(\coth\zeta\tanh\bar{\zeta})=1$، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}&2\Rightarrow(\frac{\bar{B}}{2}+\frac{B}{2}csch^{2}\zeta)\cosh\bar{\zeta}\\&3+6\Rightarrow-2D\frac{1+2\sin h^{2}\zeta}{\sinh\zeta}+2D\frac{cosh^{2}\zeta}{\sinh\zeta}\\&-4D\sinh\zeta+2D\sinh\zeta=-2D\sinh\zeta\\&4+8\Rightarrow-2E\cosh\zeta\\&5+7\Rightarrow\frac{1}{2}C\cosh\zeta csch^{2}\zeta+Ecsch\zeta\coth\zeta\\&\quad=\frac{1}{2}C\frac{\cosh\zeta}{\sin h^{2}\zeta}+Ecsch\zeta\coth\zeta=(\frac{1}{2}C+E)\\&\quad csch\zeta\coth\zeta\end{aligned}$$

با جای‌گذاری روابط فوق در معادله‌ی ۳۲، مقدار $[II]\times 2$ از رابطه‌ی ۳۳ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\{(2A+B\coth\zeta)\sinh\bar{\zeta}(\bar{B}+Bcsch^{2}\zeta^{2})\cosh\bar{\zeta}\\&+(C+2E)csch\zeta\coth\zeta-4D\sinh\zeta-4E\cosh\zeta\}\end{aligned}\tag{33}$$

در دیواره‌ی تونل $\xi=\xi_{0}$ و $\bar{\xi}=2\xi_{0}-\xi$ است، اگر این مقادیر در معادله‌ی ۳۳ در $\sinh\bar{\zeta}$ و $\cosh\bar{\zeta}$ قرارگرفته شوند و جملات $\sinh(2\xi_{0}-\xi)$ و $\cosh(2\xi-\xi)$ در آن بسط داده شوند، می‌توان رابطه‌ی ۳۴ را نوشت:

$$\begin{aligned}&(2A+B\coth\zeta)(\sinh 2\xi_{0}\cosh\zeta-\cosh 2\xi_{0}\sinh\zeta)\\&(\bar{B}+Bcsch^{2}\zeta)(\cosh 2\xi_{0}\cosh\zeta-\sinh 2\xi_{0}\sinh\zeta)\\&+(C+2E)csch\zeta\coth\zeta-4D\sinh\zeta-4E\cosh\zeta=0\end{aligned}\tag{34}$$

در جداره‌ی تونل معادله‌ی ۳۴ برابر صفر خواهد بود، به‌دلیل آنکه تنش شعاعی و برشی اعمال بر سطح تونل صفر است (معادله‌ی ۳۵):

$$\begin{aligned}&2A\sinh 2\xi_{0}\cosh\zeta-2A\cosh 2\xi_{0}\sinh\zeta\\&+B\coth\zeta\sinh 2\xi_{0}\cosh\zeta-B\coth\zeta\cosh 2\xi_{0}\sinh\zeta\\&+\bar{B}\cosh 2\xi_{0}\cosh\zeta-\bar{B}\sinh 2\xi_{0}\sinh\zeta+Bcsch^{2}\zeta\\&\times\cosh 2\xi_{0}\cosh\zeta-Bcsch^{2}\zeta\sinh 2\xi_{0}\sinh\zeta(C+2E)\\&\times csch\zeta\coth\zeta-4D\sinh\zeta-4E\cosh\zeta=0\end{aligned}\tag{35}$$

پس از فاکتورگیری جملات معادله‌ی ۳۵ نسبت به $\cosh\zeta$، $\sinh\zeta$ و $\coth\zeta csch\zeta$، عبارت ۳۶ حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&(2A\sinh 2\xi_{0}-B\cosh 2\xi_{0}+\bar{B}\cosh 2\xi_{0}-4E)\cosh\zeta\\&-(2A\cosh 2\xi_{0}+\bar{B}\sinh 2\xi_{0}+4D-B\sinh 2\xi_{0})\sinh\zeta\\&+(C+2E+B\cosh 2\xi_{0})\coth\zeta csch\zeta=0\end{aligned}\tag{36}$$

با توجه به معادلات ۳۶، مقادیر داخل پرانتز برابر صفر خواهند بود. با افزودن معادلات ناشی از شرایط مرزی معادلات ۲۱ و ۳۱ به آن، سیستم معادلات ۳۷

حاصل می‌شود:

$$2A\sinh 2\xi_\circ - 2iB_2\cosh 2\xi_\circ - 4E = \circ$$
$$2A\cosh 2\xi_\circ - 2iB_2\sinh 2\xi_\circ + 4D = \circ$$
$$C + 2E + B\cosh 2\xi_\circ = \circ$$
$$A + B_1 = p$$
$$D + E = -\frac{p}{2}e^{-2i\beta} \qquad (37)$$

از حل معادلات اول، دوم و پنجم در سیستم معادلات ۳۷، پارامترهای A و B_2 و سپس با حل بقیه‌ی معادلات (سوم و چهارم) پارامترهای B_1، C، D و E طبق معادلات ۳۸ به‌دست می‌آیند:

$$A = pe^{2\xi_\circ}\cos 2\beta, B = p(1 - e^{2\xi_\circ + 2i\beta})$$
$$B_1 = p(1 - e^{2\xi_\circ}\cos 2\beta), B_2 = p(1 - e^{2\xi_\circ}\sin 2\beta)$$
$$C = -p(\cosh 2\xi_\circ - \cos 2\beta)$$
$$D = -\frac{1}{2}pe^{2\xi_\circ}\cosh 2(\xi_\circ + i\beta)$$
$$E = \frac{1}{2}pe^{2\xi_\circ}\sinh 2(\xi_\circ + i\beta) \qquad (38)$$

با جای‌گذاری پارامترهای معادلات ۳۸ در معادلات ۱۱، معادلات توابع پتانسیل مختلط (معادلات ۳۹) تعیین می‌شوند:

$$4\psi(z) = pc[e^{2\xi_\circ}\cos 2\beta\cosh\zeta + (1 - e^{2\xi_\circ + 2i\beta})\sinh\zeta]$$
$$4\chi(z) = -pc^2(\cosh 2\xi_\circ - \cos 2\beta)$$
$$+\frac{1}{2}e^{2\xi_\circ}\cosh 2(\zeta - \xi_\circ - i\beta) \qquad (39)$$

با قرار دادن مقادیر پارامترهای A و B برای تابع پتانسیل مختلط $\psi'(z)$ در معادله‌ی ۱۴ می‌توان معادله‌ی ۴۰ را نوشت:

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta = 4Re\psi'(z) = \frac{4Re\psi'(\zeta)}{c\sinh\zeta}$$
$$= p\frac{e^{2\xi_\circ}\cos 2\beta\sinh\zeta + (1 - e^{2\xi_\circ + 2i\beta})\cosh\zeta}{\sinh\zeta} = \frac{M}{N} \qquad (40)$$

با توجه به آنکه:

$$\sinh\zeta = \sinh\xi\cos\eta + i\cosh\xi\sin\eta$$
$$cosh\zeta = \cosh\xi\cos\eta + i\sinh\xi\sin\eta$$
$$\sin h^2\xi - cosh^2\xi = -1, \sin h^2\xi + \cos h^2\xi = \cosh 2\xi$$

معادله‌ی ۴۰ پس از گویا کردن، به‌صورت معادله‌ی ۴۱ ساده می‌شود:

$$N = c(sinh^2\xi cos^2\eta + cosh^2\xi\sin^2\eta)$$
$$= c[\frac{1}{2}(\sin h^2\xi - cosh^2\xi) + \frac{1}{2}(sinh^2\xi - cosh^2\xi)$$
$$\times\cos 2\eta] = \frac{c}{2}(\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \qquad (41)$$

صورت کسر معادله‌ی ۴۰ (M)، پس از گویا کردن عبارت است از (معادله‌ی ۴۲):

$$M = pc[e^{2\xi_\circ}\cos 2\beta(\sinh\xi\cos\eta + i\cosh\xi\sin\eta)$$
$$+(1 - e^{2\xi_\circ + 2i\beta})(\cosh\xi\cos\eta + i\sinh\xi\sin\eta)$$
$$\times(\sinh\xi\cos\eta - i\cosh\xi\sin\eta)] = M_1 + M_2 \qquad (42)$$

همچنین مقادیر M_1 و M_2 از روابط ۴۳ به‌دست می‌آیند:

$$M_1 = pc[\frac{1}{2}e^{2\xi_\circ}\cos 2\beta(\cosh 2\xi - \cos 2\eta),$$
$$M_2 = pc[1 - (\cos 2\beta + i\sin 2\beta)][\cosh\xi\sinh\xi$$
$$(\cos^2\eta + \sin^2\eta) + (-\frac{1}{2}cosh^2\xi\sin 2\eta + \frac{1}{2}\sin h^2\xi\sin 2\eta)]$$
$$= \frac{pc}{2}(1 - e^{2\xi_\circ}\cos 2\beta - ie^{2\xi_\circ}\sin 2\beta)(\sinh 2\xi - i\sin 2\eta) \qquad (43)$$

مقدار حقیقی M_2 نیز از رابطه‌ی ۴۴ به‌دست می‌آید:

$$ReM_2 = \frac{pc}{2}(\sinh 2\xi - e^{2\xi_\circ}\cos 2\beta\sinh 2\xi - e^{2\xi_\circ}\sin 2\beta\sin 2\eta) \qquad (44)$$

مقدار ReM با استفاده از معادلات ۴۳ و ۴۴ و معادله‌ی ۴۵ به‌دست می‌آید:

$$ReM = \frac{pc}{2}(e^{2\xi_\circ}\cos 2\beta\cosh 2\xi - e^{2\xi_\circ}\cos 2\beta\cos 2\eta$$
$$+\sinh 2\xi - e^{2\xi_\circ}\cos 2\beta\sinh 2\xi - e^{2\xi_\circ}\sin 2\beta\sin 2\eta) \qquad (45)$$

با استفاده از تساوی:

$$e^{2\xi_\circ}\cos 2\beta(\cosh 2\xi - \sinh 2\xi) = e^{2(\xi_\circ - \xi)}\cos 2\beta$$

و ساده‌سازی و فاکتورگیری از معادله‌ی ۴۵، می‌توان معادله‌ی ۴۶ را نوشت:

$$ReM = \frac{pc}{2}[e^{2(\xi_\circ - \xi)}\cos 2\beta + \sinh 2\xi - e^{2\xi_\circ}\cos 2(\beta - \eta)] \qquad (46)$$

با جای‌گذاری مقادیر M و N در معادله‌ی ۴۰، مجموع تنش‌های محوری در صفحه‌ی ζ با استفاده از معادله‌ی ۴۷ به‌دست می‌آید:

$$\sigma_\xi + \sigma_\eta =$$
$$\frac{p[e^{2(\xi_\circ - \xi)}\cos 2\beta + \sinh 2\xi - e^{2\xi_\circ}\cos 2(\beta - \eta)]}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta} = R \qquad (47)$$

با قرار دادن مقدار B در معادله‌ی ۲۳، برای $\bar z\psi''_z$ و استفاده از معادله‌ی ۱۵ برای $e^{2i\alpha}$ مقدار $2e^{2i\alpha}\bar z\psi''_z$ را می‌توان با استفاده از معادلات ۴۸ محاسبه کرد:

$$2e^{2i\alpha}\bar z\psi''_z = 2\frac{\sinh\zeta}{\sinh\bar\zeta}\cosh\bar\zeta\frac{p}{4sinh^3\zeta}$$
$$(-1 + e^{(2\xi_\circ + 2i\beta)}) = \frac{p\cosh\bar\zeta}{2\sinh\bar\zeta\sinh\zeta}$$
$$\times\frac{-1 + e^{(2\xi_\circ + 2i\beta)}}{\sinh\zeta} \qquad (48)$$

گویا کردن معادله‌ی ۴۸، معادله‌ی ۴۹ را نتیجه می‌دهد:

$$2e^{2i\alpha}\bar z\psi''_z = \frac{p\cosh\bar\zeta}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}$$
$$\times\frac{(-1 + e^{2\xi_\circ + 2i\beta})\sinh\bar\zeta}{\sinh\zeta\sinh\bar\zeta} = \frac{p(-1 + e^{2\xi_\circ + 2i\beta})}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2}\sinh 2\bar\zeta \qquad (49)$$

توسط جدا کردن بخش‌های حقیقی و موهومی معادله‌ی ۴۹، می‌توان معادله‌ی ۵۰ را نوشت:

$$2e^{2i\alpha}\bar{z}\psi''_z = \frac{p}{(\cosh 2\zeta - \cos 2\eta)^2}[-1 + e^{2\xi_\circ}(\cos 2\beta + i\sin 2\beta)][\sinh 2\xi \cos 2\eta - i\cosh 2\xi \sin 2\eta] = p_1 + ip_2 \quad (50)$$

که در آن مقدار p_1 از رابطه‌ی ۵۱ و مقدار p_2 از رابطه‌ی ۵۲ به‌دست می‌آید:

$$p_1 = \frac{p}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2}[(1 - +e^{2\xi_\circ}\cos 2\beta)\sinh 2\xi \cos 2\eta + e^{2\xi_\circ}\sin 2\beta \sin 2\eta \cosh 2\xi] \quad (51)$$

$$p_2 = \frac{p}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2}[(1 - e^{2\xi_\circ}\cos 2\beta) \times \cosh 2\xi \sin 2\eta + e^{2\xi_\circ}\sin 2\beta \cos 2\eta \sinh 2\xi] \quad (52)$$

مشتقات اول تابع پتانسیل مختلط از معادلات ۳۹ با استفاده از قوانین به‌کار برده در معادلات ۲۰ و ۲۱ طبق روابط ۵۳ محاسبه می‌شوند:

$$\chi''_\zeta = -\frac{pc^2}{4}[\cosh 2\xi_\circ - \cos 2\beta + e^{2\xi_\circ}\sinh 2(\xi - \xi_\circ - i\beta)] = -\frac{pc^2}{4}e^{2\xi_\circ}\cosh 2(\xi - \xi_\circ - i\beta) \quad (53)$$

سپس مشتق دوم $\chi(z)$ نسبت به z از روابط ۵۴ و ۵۵ به‌دست می‌آید:

$$\chi''_z = \frac{p}{4\sin h^3\zeta}[-2e^{2\xi_\circ}\sinh\zeta \cosh 2(\zeta - \xi_\circ - i\beta) + \cosh\zeta(\cosh 2\xi_\circ - \cos 2\beta) + e^{2\xi_\circ}\cosh\zeta \times \sinh 2(\zeta - \xi_\circ - i\beta)] \quad (54)$$

$$2e^{2i\alpha}\chi''_z = 2\frac{\sinh\zeta}{\sinh\bar{\zeta}}\frac{p}{4\sin h^3\zeta}[e] = \frac{p}{2}\frac{1}{\sinh\zeta \sinh\bar{\zeta}} \times \frac{1}{\sinh\bar{\zeta}}[e] = \frac{p}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}[-2e^{2\xi_\circ}\cosh 2 \times (\zeta - \xi_\circ - i\beta) + \coth\zeta(\cosh 2\xi_\circ - \cos 2\beta) + e^{2\xi_\circ}\coth\zeta \sinh 2(\zeta - \xi_\circ - i\beta)] \quad (55)$$

جایی که $[e]$ مقدار داخل کروشه‌ی معادله‌ی ۵۴ است، با جایگزینی $\coth\zeta = \frac{\sinh 2\xi - i\sin 2\eta}{\cosh 2\xi - \cos 2\eta}$ در معادله‌ی ۵۵ می‌توان معادله‌ی ۵۶ را نوشت:

$$2e^{2i\alpha}\chi''_z = \frac{p}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2}[-2e^{2\xi_\circ}(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)\cosh 2(\zeta - \xi_\circ - i\beta) + (\sinh 2\xi - i\sin 2\eta) \times (\cosh 2\xi_\circ - \cos 2\beta) + e^{2\xi_\circ}(\sinh 2\xi - i\sin 2\eta) \times \sinh 2(\zeta - \xi_\circ - i\beta)] \quad (56)$$

با استفاده از تساوی‌های معادله‌های ۵۷ در معادله‌ی ۵۶، مقدار نهایی آن مطابق معادله‌ی ۵۸ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&\cosh 2(\xi - \xi_\circ - i\beta) = \cosh 2[(\xi - \xi_\circ) + i(\eta - \beta)]\\
&\cosh 2(\xi - \xi_\circ - i\beta) = \cosh 2(\xi - \xi_\circ)\cos 2(\eta - \beta) + i\sinh 2(\xi - \xi_\circ)\sin 2(\eta - \beta) \quad (57)\\
&\sinh 2(\xi - \xi_\circ - i\beta) = \sinh 2(\xi - \xi_\circ)\cos 2(\eta - \beta) + i\cosh 2(\xi - \xi_\circ)\sin 2(\eta - \beta)\\
&2\sinh\zeta \sinh\bar{\zeta} = \cosh 2\xi - \cos 2\eta
\end{aligned}$$

$$2e^{2i\alpha}\chi''_z = \frac{p}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2}\{-2e^{2\xi_\circ}(\cosh 2\xi - cos2\eta)[\cosh 2(\xi - \xi_\circ)\cos 2(\eta - \beta) + i\sinh 2(\xi - \xi_\circ)\sin 2(\eta - \beta)] + (\sinh 2\xi - i\sinh 2\eta)(\cosh 2\xi_\circ - \cos 2\beta) + e^{2\xi_\circ}(\sinh 2\xi - i\sinh 2\eta)[\sinh 2(\xi - \xi_\circ)\cos 2(\eta - \beta) + i\cosh 2(\xi - \xi_\circ)\sin 2(\eta - \beta)]\} = q_1 + iq_2 \quad (58)$$

همچنین بخش حقیقی و بخش موهومی معادله‌ی ۵۸ را می‌توان به‌صورت معادلات ۵۹ و ۶۰ نوشت:

$$q_1 = \frac{p}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2}\{-2e^{2\xi_\circ}(\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \times \cosh 2(\xi - \xi_\circ)\cos 2(\eta - \beta) + \sinh 2\xi(\cosh 2\xi_\circ - \cos 2\beta) + e^{2\xi_\circ}[\sinh 2\xi \sinh 2(\xi - \xi_\circ)\cos 2(\eta - \beta) + \sin 2\eta \cosh 2(\xi - \xi_\circ \sin(2\eta - \beta)]\} \quad (59)$$

$$q_2 = \frac{p}{(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)^2}\{-2e^{2\xi_\circ}(\cosh 2\xi - \cos 2\eta) \times \sinh 2(\xi - \xi_\circ)\sin 2(\eta - \beta) + \sinh 2\eta(\cosh 2\xi_\circ - \cos 2\beta) + e^{2\xi_\circ}[\sinh 2\xi \cosh 2(\xi - \xi_\circ)\sin 2(\eta - \beta) - \sin 2\eta \times \sinh 2(\xi - \xi_\circ)\cos(2\eta - \beta)]\} \quad (60)$$

اکنون با توجه به معادلات به‌دست آمده، تنش‌های شعاعی، محیطی و برشی را در هر نقطه از اطراف تونل بیضی شکل می‌توان توسط معادلات ۶۱ خلاصه و تعیین کرد:

$$\begin{aligned}
&\sigma_\xi + \sigma_\eta = R,\ \tau_{\xi\eta} = \frac{1}{2}(p_2 + q_2)\\
&\sigma_\eta - \sigma_\xi + 2i\tau_{\xi\eta} = (p_1 + q_1) + i(p_2 + q_2)\\
&\sigma_\xi = \frac{1}{2}(R - p_1 - q_1), \sigma_\eta = \frac{1}{2}(R + p_1 + q_1) \quad (61)
\end{aligned}$$

برای امتحان و آزمایش محاسبات ذکر شده، تنش‌های اعمالی بر جداره‌ی تونل با جای‌گذاری $\xi_\circ$ برای ξ در معادلات ۶۱ و با استفاده از معادلات ۶۲ به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&\sigma_\xi(\xi = \xi_\circ) = 0,\ \tau_{\xi\eta}(\xi = \xi_\circ) = 0\\
&\sigma_\eta(\xi = \xi_\circ) = \frac{p}{(\cosh 2\xi_\circ - cos2\eta)}[\sinh 2\xi_\circ + cos2\beta - e^{2\xi_\circ}\cos 2(\beta - \eta)] \quad (62)
\end{aligned}$$

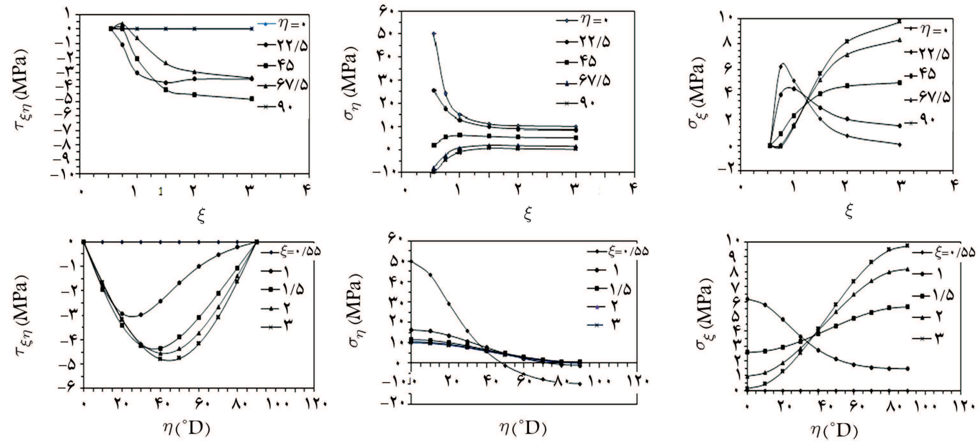
تنش محیطی σ_n به‌دست آمده در سطح تونل معادله‌ی ۶۲ با معادلات به‌دست آمده توسط استیونسون و ماش خلیشویلی تطابق کامل دارد.[۱۶و۱۸] توسط فرمول‌سازی ارائه شده‌ی توزیع تنش در اطراف تونل بیضی شکل، تحت میدان تنش‌های برجای یک محوره‌ی افقی و عمودی و میدان تنش دو محوره، توسط ۳ مثال تعیین شده است.

۳. مثال ۱

برای تونل بیضی شکل به‌ابعاد نیم قطرهای $a = 2m$، $b = 1m$ و $c = \sqrt{3}m$ تحت تنش میدان تنش بر جای قائم $\sigma_v = 10\ MPa$ تنش‌های شعاعی σ_ξ، محیطی σ_η و برشی $\tau_{\xi\eta}$ که توسط معادلات ۵۶ به‌دست آمده‌اند، در شکل‌های ۳الف الی ۳و مشاهده می‌شوند. تنش‌های مذکور در شکل‌های ۳الف، ۳ب و ۳ج نسبت به ξ (محور x) و برای ηهای ثابت ۰، ۲۲٫۵، ۴۵، ۶۷٫۵ و ۹۰ درجه رسم شده‌اند. همچنین در شکل‌های ۳د، ۳ه، و ۳و تنش‌ها نسبت به متغیر η (محور x) و برای ξهای ۰٫۵۵، ۱، ۱٫۵، ۲ و ۳ هستند. به‌طوری که $\xi = 0.55$ مربوط به ξ_0 و نقاط سطحی تونل است. لازم به ذکر است که مختصات $\xi = 0.55$ و $\eta = 0$ مربوط به نقطه‌ی دیواری سمت راست تونل و مختصات $\xi = 0.55$ و $\eta = 90$ مربوط به نقطه‌ی سقف تونل هستند. همان‌طور که در شکل‌ها ملاحظه می‌شود، تنش‌های شعاعی و برشی بر روی دیواره‌ی تونل صفر هستند. تنش‌های شعاعی و محیطی برای ξهای مختلف ثابت هستند و شعاع تأثیر مناسب برای میدان تنش مذکور برابر $\xi = 1.25$ است.

۴. مثال ۲

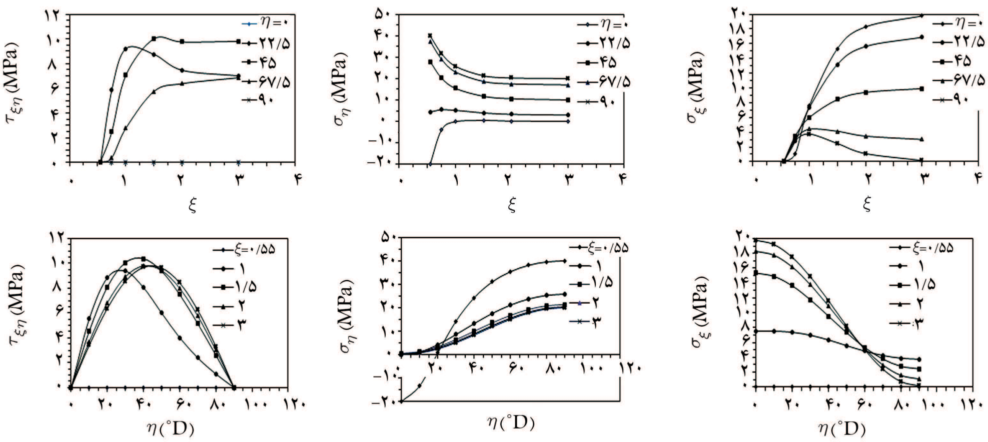
اگر تونل با مشخصات مثال ۱ تحت میدان تنش یک محوره‌ی افقی $\sigma_h = 20\ MPa$ قرار گیرد، توزیع تنش‌های شعاعی، محیطی و برشی در نقاط مختلف اطراف تونل برای ξ و ηهای مختلف، مطابق شکل‌های ۴الف الی ۴و، به‌دست می‌آیند. همان‌طور که در شکل‌های ۴الف، ۴ب و ۴ج مشاهده می‌شود، در وضعیت تنش مذکور،



الف) تنش شعاعی σ_ξ نسبت به ξ؛ ب) تنش محیطی σ_η نسبت به ξ؛ ج) تنش برشی $\tau_{\xi\eta}$ نسبت به ξ؛

د) تنش شعاعی σ_ξ نسبت به η؛ ه) تنش محیطی σ_η نسبت به η؛ و) تنش برشی $\tau_{\xi\eta}$ نسبت به η.

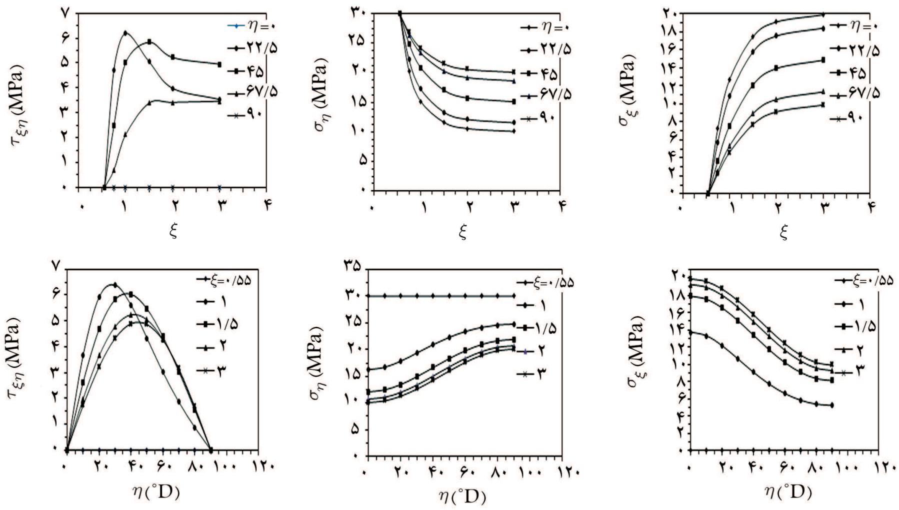
شکل ۳. وضعیت تنش‌های شعاعی σ_ξ، محیطی σ_η و برشی $\tau_{\xi\eta}$ در اطراف تونل تحت میدان تنش یک‌محوری عمودی.



الف) تنش شعاعی σ_ξ نسبت به ξ؛ ب) تنش محیطی σ_η نسبت به ξ؛ ج) تنش برشی $\tau_{\xi\eta}$ نسبت به ξ؛

د) تنش شعاعی σ_ξ نسبت به η؛ ه) تنش محیطی σ_η نسبت به η؛ و) تنش برشی $\tau_{\xi\eta}$ نسبت به η.

شکل ۴. وضعیت تنش‌های شعاعی σ_ξ، محیطی σ_η و برشی $\tau_{\xi\eta}$ در اطراف تونل تحت میدان تنش یک‌محوری افقی.



الف) تنش شعاعی σ_ξ نسبت به ξ؛ ب) تنش محیطی σ_η نسبت به ξ؛ ج) تنش برشی $\tau_{\xi\eta}$ نسبت به ξ؛
د) تنش شعاعی σ_ξ نسبت به η؛ ه) تنش محیطی σ_η نسبت به η؛ و) تنش برشی $\tau_{\xi\eta}$ نسبت به η.

شکل ۵. وضعیت تنش‌های شعاعی σ_ξ، محیطی σ_η و برشی $\tau_{\xi\eta}$ در اطراف تونل تحت میدان تنش دومحوری.

تنش‌های شعاعی در اطراف تونل برای $\eta =$ ۵۵ درجه و تنش‌های محیطی در $\eta =$ ۲۵ درجه ثابت هستند و آنها با حالت‌های مثال ۱ متفاوت هستند. در مثال کنونی، مشابه وضعیت مثال ۱، شعاع تأثیر به‌دست آمده برابر ۱٫۲۵ $= \xi$ خواهد بود.

۵. مثال ۳

در مثال کنونی، وضعیت میدانی تنش برجای دومحوره با تنش افقی محوری $\sigma_h =$ ۲۰ MPa و تنش قائم $\sigma_v =$ ۱۰ MPa است. سایر شرایط، مشابه دو مثال ۱ و ۲ است. تنش‌های شعاعی، محیطی و برشی برای وضعیت تنش‌های ذکر شده و در اطراف تونل در شکل‌های ۵الف الی ۵و، مشاهده می‌شوند. در مثال کنونی، وضعیت تنش‌های شعاعی σ_ξ و محیطی σ_η متفاوت با دو مثال ۱ و ۲ است. تنش محیطی در تمام نقاط سطح تونل ثابت و مساوی است و تنش برشی بیشینه در $\eta =$ ۳۰ وجود دارد. با توجه به شکل‌های ۵الف، ۵ب، و ۵ج می‌توان نتیجه گرفت که شعاع تأثیر مطلوب برای وضعیت تنش میدانی ذکرشده برابر ۱٫۲۵ $= \xi$ و مشابه دو مثال ۱ و ۲ است.

۶. نتایج و پیشنهادات

در پژوهش حاضر، روش تحلیلی براساس روش استیونسون، که برای تعیین وضعیت تنش اطراف تونل‌های بیضی‌شکل به‌کار می‌رود، بسط و ارائه شده است. نتایج نشان می‌دهد که فرمول‌سازی توابع پتانسیل مختلط به همراه نگاشت همدیس برای تونل‌های بیضی شکل، یک روش قدرتمند برای تعیین تمرکز تنش اطراف آن است. توده‌سنگ به‌صورت همگن، همسانگرد و کشسان در نظر گرفته شده است. تنش میدانی در وضعیت دومحوری یا صفحه‌یی قابل کاربرد در تنش مسطح و کرنش صفحه‌یی بوده است. نتایج نشان می‌دهد میزان تمرکز تنش و موقعیت آن در اطراف تونل به‌شدت به وضعیت تنش میدانی یا برجا بستگی دارد. بنابراین دقت نتایج، متأثر از دقت اندازه‌گیری و تخمین تنش‌های میدانی است. راه‌حل ارائه شده، قابل کاربرد در مراحل اولیه‌ی طراحی انواع تونل‌های بیضی شکل تحت تأثیر وضعیت‌های تنش برجای گوناگون است و همچنین می‌تواند وابستگی جهت تنش‌های اصلی برجا را بر تمرکز تنش در پیرامون تونل نشان دهد.

منابع (References)

1. Malvern, L.F., *Introduction to the Mechanica of a Continuous Medium*, Englewood Cliffs, Parentice Hall (1969).
2. Terzaghi, K. and Richart, F.E. "Stress in rock about cavities", *Geotechnique*, **3**(2), pp. 57-90 (1952).
3. Obert, L., Duvall, W.I. and Merrill, R.H., *Design of Underground Opening in Competent Rock*, US Bureau of Mines, Bulletin 587 (1960).
4. Brady, B.H.G. and Brown, E.T., *Rock Mechanics for Underground Mining*, 2^{nd} Edition, Chapman & Hall, London, UK (1993).
5. Greenspan, M. "Effect of a small hole on the stresses in a uniformly loaded plate", *Q. J. Appl. Math.*, **2**(1), pp. 60-71 (1944).
6. Hoek, E., Kaiser, P.K. and Bawden, W.F. *Support of Underground Excavations in Hard Rock*, Balkena, Rotterdam, Netherlands (1995).
7. Inglis, C.E. "Stresses in a plate due to the presence of

cracks and sharp corners", *Trans. Of the Inst. of Naval Arch.*, **55**, pp. 219-230 (1913).

8. Novozhilov, V.V., *Theory of Elasticity*, J.J Shor-Kon (trans.), S. Monson Jerusalem, Israel (1961).
9. Exadaktylos, G.E., Loilios, P.A. and Stavropoulou, M. C. "A Semi-analytical elastic stress-displacement solution for notched circular opening in rocks", *International Journal of Solids and Structures*, **40**(5), pp. 1165-1187 (2003).
10. Verruijt, A. "A Complex variable solution for a deforming circular tunnel in an elastic half-plane", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **21**(2), pp. 77-89 (1998).
11. Verruijt, A. "Deformations of an elastic half plane with a circular cavity", *International Journal of Solids and Structures*, **25**(3), pp. 213-233 (1997).
12. Churchill, R.V., *Complex Variables and Applications*, 2^{nd} Edition, McGraw-Hill Book Company, New York (1960).
13. Timoshenko, S.P. and Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, 3^{rd} Edition, McGraw-Hill Publishing Company, USA, pp. 181-194 (1982).
14. Mindlin, R.D. "Stress distribution around a hole near the edge of plate under tension", *Proceedings of the Society of Experimental Stress Analysis*, **5**, pp. 46-57 (1948).
15. Sokolnikoff, I.S., *Mathematical Theory of Elasticity*, 2^{nd} Edition, McGraw Hill, New York (1956).
16. Muskhelishvili, N.I., *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, J.R.M. Radok (tans.), Noordhoff, Groningen Netherlands, pp. 339-352 (1953).
17. England, A.H., *Complex Variable Methods in Elasticity*, Wiley-Interscience, London, UK, pp. 129-152 (1971).
18. Stevenson, A.C., *Complex Potentials in Two-Dimensional Analysis*, Proc. of the Royal Society A, pp. 611-626 (1945).
19. Savin, G.N., *Stress Concentration around Holes*, Pergamon Press, London, UK, pp. 91-107 (1961).
20. Exadahtylos, G.E. and Stavropoulou, M.C. "A closed-form elastic solution for stresses and displacements around tunnels", *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, Pergamon, pp. 905-916 (2002).
21. Jaeger, J.C. and Cook, N.G.W., *Fundamental of Rock Mechanics*, 1^{st} Edition, Chapman and Hall LTD, USA, pp. 253-260 (1969).
22. Li, S.C. and Wang, M.B. "Elastic analysis of stress-displacement field for a lined circular tunnel at graet depth due to ground loads and internal pressure", *Tunneling and Underground Space Technology*, **23**(6), pp. 609-617 (2008).
23. Verruijt, A. "A complex variable solution for a deforming circular tunnel in an elastic half-plane", *International journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **21**(2), pp. 79-89 (1997).
24. Exadahtylos, G.E., Liolios, G.E. and Stavropoulou, M. C. "A semi analytical elastic stress-displacement solution for notched circular opening in rocks", *International Journal of Solids and Structures*, **40**(5), pp. 1165-1187 (2003).
25. Batista, M. "On the stress concentration around a hole in an infinite plate subject to a uniform load at infinity", *International Journal of Mechanical Science*, **53**(4), pp. 254-261 (2011).
26. Aslani, F. "Determination of stress deformation fields around circular tunnels using a new stress function and making a comparison between the proposed solution finite element and complex variable methods", *8th International Conference of Civil Engineering*, University of Shiraz, Shiraz, Iran (2009).
27. Gao, X.L. "A general solution of an infinite elastic plate with an elliptic hole under biaxial loading", *Int. J. Ves. & Piping*, **67**(1), pp. 95-104 (1996).
28. Park, K.H. and Kim, Y.J. "Analytical solution for a circular opening in an elastic-brittle plastic rock", *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **43**(4), pp. 616-622 (2006).
29. Sharan, S. "Exact and approximate solution for displacement around circular openings in elastic-brittle-plastic Hoek-Brown rock", *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **42**, pp. 542-549 (2005).
30. A. Kargar, R. Rahmannejad and M. Hajabbasi, "Determining the stress around circular tunnels with linning using complex variable functions", *Modarres Journal of Engineering Mechanics*, **1**(15), PP. 267-276, (In Persian) (1394).
31. A. Kargar, R. Rahmannejad and M. Hajabbasi, "Determining the stress around gas underground structures using complex variable functions and conformal mapping", **3**(2), PP. 133-144, (In Persian) (1394).
32. M. Alami, "The analytical stress solution around elliptical tunnels in shear stress domain using complex variable functions", M. Sc. Dissertation, Yasouj university, (In Persian)(1392).
33. Huo, H., Bobet, A., Fernandez, J. and Ramirez, J. "Analytical solution for deep rectangular structures subjected to far-field shear stresses", *Tunneling and Underground Space Technology Journal*, Elsevier, **21**(6), pp. 613- 625 (2006).
34. S. Amjadian, "The analytical stress solution around rectangular tunnels using complex variable method", M. Sc. Dissertation, Yasouj university (In Persian).
35. Gercek, H. "An elastic solution for stresses around tunnels with conventional shapes", *Int. J. Rock Mech. & Min. Sci.*, **34**(3-4), p. 96, pp. 34-47 (1997).
36. Kargar, A.R., Rahmannejad, R. and Hajabasi, M.A. "A semi-analytical elastic solution for stress field of lined non-circular tunnels at great depth using complex variable method", *International Journal of Solids and Structures*, **51**(6), pp. 1475-1482 (2014).