مهندسی عمران شریف، (زمستان ۱۳۹۶)
دوره‌ی ۲ - ۳۳، شماره‌ی ۴/۲، ص. ۱۱۱-۱۱۹

Original Article

ارزیابی عملکرد دینامیکی تیر ممتد چند دهانه‌ی اویلر ـ برنولی تحت اثر حرکت شتاب‌دار نوسان‌گر متحرک

ایمان محمدپور نیک‌بین * **(استادیار)**
گروه مهندسی عمران، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

مجتبی قدیمی‌گرمجانی (دانشجوی کارشناسی ارشد)
گروه مهندسی عمران، واحد نور، دانشگاه آزاد اسلامی، نور، ایران

در پژوهش حاضر، عملکرد دینامیکی پل چند دهانه تحت تحریک وسیله‌ی نقلیه‌ی متحرک شتاب‌دار مطالعه شده است. مدل نوسان‌گر متحرک به‌منزله‌ی مدلی از یک سیستم متحرک که با درنظر گرفتن اثرات سیستم تعلیق و فنربندی وسیله‌ی نقلیه، مدل کامل‌تری نسبت به مدل‌های سنتی نیرو و جرم متحرک است، در پژوهش حاضر به کار رفته است. با مطرح شدن اندرکنش نوسان‌گر متحرک و سازه‌ی تیر چند دهانه، فرایند تحلیل در برگیرنده‌ی مدل‌های نیرو و جرم متحرک در دو حالت مجانبی نسبت بسامدی نوسان‌گر متحرک به بسامد سازه و علاوه بر آن شامل طیف وسیعی از حالات میانی خواهد بود. بررسی تأثیر شتاب حرکت نوسان‌گر متحرک در پاسخ دینامیکی تیر نشان می‌دهد که در نسبت سرعت‌های پایین، کمینه‌ی میزان پاسخ دینامیکی تیر به وقوع پیوسته و با افزایش یافتن پارامتر شتاب حرکت نوسان‌گر متحرک، بیشینه‌ی پاسخ دینامیکی نرمالایز شده بین دهانه‌ها در یک تیر چند دهانه به شکل محسوسی افزایش می‌یابد.

واژگان کلیدی: پل چند دهانه، تیر چند دهانه، نوسان‌گر متحرک، حرکت شتاب‌دار، پاسخ دینامیکی.

nikbin@iaurasht.ac.ir
mojtaba.ghadimi1986@yahoo.com

۱. مقدمه

یکی از موضوعات جالب توجه و پر اهمیت برای بسیاری از مهندسان طراح و پژوهشگران، واکاوی تنش‌ها و کرنش‌های دینامیکی سازه‌ها ناشی از بارهای متحرک در طیف وسیعی از سازه‌های صنعتی، صنایع نظامی، فنّاوری‌های رایانه‌یی، علوم مکانیک و صنایع زیرساختی است.[۱و۲] لذا در زمینه‌ی بررسی رفتار دینامیکی یک محیط پیوسته تحت اثر بارها و جرم‌های متحرک با دیدگاه‌های متفاوت و بنا به ضرورت موضوعی، پژوهش‌های وسیعی صورت گرفته است. در این زمره می‌توان مباحثی همچون بررسی خسارت، پیش‌بینی پارامترهای طراحی، اثرات نامنظمی سطح تماس بار متحرک و سازه، پژوهش در زمینه‌ی پدیده‌ی تشدید، بررسی رفتار غیرخطی سازه تحت تحریک دینامیکی، کنترل ارتعاشات وارده و کاهش اثرات آن، ابداع و مطرح کردن روش‌های عددی و یا تحلیلی، ارزیابی عملکرد سازه‌های کامپوزیتی تحت اثر بارهای دینامیکی متحرک و بررسی عملکرد سازه‌های ترک‌دار در تحمل بارهای دینامیکی را برشمرد.

در مهندسی عمران نیز به‌عنوان یکی از مهم‌ترین حوزه‌ها، مطالعات گسترده‌یی در زمینه‌ی بررسی رفتاری و تحلیل دینامیکی پل‌ها تحت اثر بارهای متحرک ناشی از خودروها و قطارها انجام شده است. از اندرکنش پل ـ وسیله‌ی نقلیه به‌عنوان بارزترین مصداق مسئله‌ی بار متحرک در سازه‌های عمرانی یاد می‌شود. محاسبه‌ی پاسخ دینامیکی تیرها تحت اثر بارهای متحرک از حدود بیش از یک قرن گذشته مورد توجه پژوهشگران بوده است. در پژوهشی در سال ۱۹۹۹، بر روی طیف گسترده‌یی از مسائل مرتبط با موضوع بار متحرک بحث شده و نتایج آن در کتابی با عنوان ارتعاش جامدات و سازه‌ها تحت اثر بارهای متحرک با تأکید اصلی بر روش‌های تحلیلی منتشر شده است.[۱] در پژوهش مروری و گسترده‌ی دیگری (۲۰۱۱) که مسائل دینامیکی بار متحرک را به‌صورت مفصل بررسی کرده است، با نگاهی کلی مسئله‌ی بار متحرک معمولاً با ۳ شیوه‌ی متداول: نیروی متحرک، جرم متحرک و نوسان‌گر متحرک شبیه‌سازی شده است.[۲]

چنانچه در مدل‌سازی مسئله‌ی بار متحرک از اثرات لختی جرم متحرک صرف‌نظر شود، مسئله نیروی متحرک نامیده می‌شود. این نوع از مدل‌سازی علی‌رغم داشتن سادگی معادلات وکاهش هزینه‌ی محاسباتی، شامل عیب‌هایی همچون: چشم‌پوشی از اثرات اینرسی بار متحرک وکاهش چشم‌گیر دقت در جرم‌ها و سرعت‌های بالای بار متحرک می‌شود. از سوی دیگر، با درنظر گرفتن اثرات لختی جرم متحرک، مسئله‌ی بار متحرک تبدیل به جرم متحرک می‌شود. در مدل مذکور بر پیچیدگی معادلات

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۴/۱۲/۱۱، اصلاحیه ۱۳۹۵/۲/۲۶، پذیرش ۱۳۹۵/۳/۳۰.

حاکم بر مسئله افزوده می‌شود، ولی در عین حال تطابق نسبتاً بیشتری با واقعیت موضوع دارد. نقص عمده‌ی این دو دیدگاه در نادیده گرفتن سیستم تعلیق و فنربندی وسیله‌ی نقلیه است. لذا مدل نوسانگر متحرک که ترکیبی از جرم معلق و سیستم تعلیق است، فرضیات ساده کننده‌ی کمتری نسبت به مدل‌های نیروی متحرک و جرم متحرک دارد و به مراتب پیچیدگی بیشتری نسبت به مدل‌های پیشین دارد.

پیرو ادبیات موضوع پژوهش، پژوهش‌های تحلیلی قابل توجهی در زمینه‌ی مطالعه‌ی اثرات جرم متحرک در پاسخ دینامیکی سازه‌های مختلف انجام شده است. پژوهشگران زیادی با روش‌های تحلیلی یا روش‌های تحلیلی ـ عددی، عملکرد دینامیکی سازه‌ی تیر تحت اثر جرم متحرک را ارزیابی کرده‌اند.[۳-۱۹] در مطالعاتی، گسسته‌سازی یک تیر پیوسته‌ی ویسکوکشسان[۱] که با سیستمی از میله‌های صلب و اتصالات انعطاف‌پذیر جایگزین شده بود، با عنوان روش المان مجزا (DET)[۲] در تیرها پیشنهاد و راه‌حلی تحلیلی ـ عددی به کمک سری‌های شامل عبارات متعامد برای محاسبه‌ی ارتعاش یک تیر تک دهانه تحت اثر جرم متحرک توسعه داده شده است و تقریبی مناسب از بیشینه‌ی ضریب بزرگ‌نمایی دینامیکی تیر به‌وسیله‌ی توابع درون‌یاب چندمتغیره‌ی حاصل از تحلیل رگرسیون ارائه و به این ترتیب محاسبات پارامتریک گسترده به وسیله‌ی COPs [۳] به‌صورت فرمولی خلاصه و فشرده بیان شده است.[۳،۴] همچنین در سال ۲۰۱۰، پاسخ دینامیکی تیر نازک ویسکوکشسان چند دهانه تحت اثر یک جرم متحرک با استفاده از روش GMLSM [۴] بررسی شده است.[۹] بیشینه‌ی مطلق پاسخ دینامیکی تیر تحت اثر عبور جرم متحرک نیز در سال ۲۰۱۵،[۱۱] ارزیابی و تأکید شد که در حالت کلی، وسط دهانه‌ی تیر لزوماً محل رخداد بیشینه‌ی پاسخ دینامیکی نیست. همچنین در همان سال، پاسخ دینامیکی تیرهای متخلخل کشسان[۵] که بار نقطه‌یی متحرک با احتساب تغییر شکل برشی تیر در آنها اثر می‌کند، ارزیابی شده است.[۱۳]

برخی پژوهشگران (۲۰۱۵) نیز تحلیل مودال پاسخ دینامیکی تیر تیموشنکو[۶] تحت اثر جرم متحرک را مطالعه و همچنین پاسخ دینامیکی یک تیر تیموشنکو غیریکنواخت که تحت اثر یک جرم متحرک قرارگرفته بود، را با روش بسط توابع ویژه با به‌کارگیری توابع شکل مودهای طبیعی در تیر تیموشنکو یکنواخت و نیز روش بسط سری‌های چندجمله‌یی متعامد یکه (OPSEM)،[۷] محاسبه کردند.[۱۵] همچنین در سال ۲۰۱۴، یک روش کنترل فعال ارتعاش تیر نازک چند دهانه تحت اثر جرم متحرک با سرعت ثابت به کمک قطعات پیزوالکتریک[۸] فعال پیشنهاد شده است.[۱۶]

برای تعیین رفتار دینامیکی تیرها با شرایط مرزی مختلف، که تحت اثر یک جرم متحرک قرار دارند، روشی تحلیلی ـ عددی در سال ۱۹۸۹ ارائه شد و با حذف دامنه‌ی مکانی از معادله‌ی حاکم، آن را هم‌ارز یک مجموعه‌ی حل جدید به‌صورت معادلات دیفرانسیل معمولی بررسی کردند.[۱۸] در سال ۲۰۱۶، نیز یک فرمول ساده‌سازی شده برای پیش‌بینی سرعت رزونانس یک سری جرم متحرک که از روی تیر نازک عبور می‌کنند، پیشنهاد شد.[۱۹]

همچنین صفحات به‌عنوان نوع دیگری از المان‌های سازه‌یی که تحت اثر بارهای متحرک قرار گرفته‌اند، مورد توجه پژوهشگران مختلف واقع شده است.[۲۰-۲۶] در پژوهش دیگری نیز اثرات اجزاء همرفتی شتاب،[۹] جرم متحرک از طریق تحلیل پارامتریک وسیعی بر روی صفحه‌ی مستطیلی نازک با تکیه‌گاه‌های مفصلی به‌دست آمده است.[۲۱] در سال ۲۰۱۳، نیز اثرات تغییر شکل برشی صفحه و اینرسی دورانی آن با به کارگیری تئوری صفحه‌ی میندلین لحاظ و با احتساب شرایط مختلف تکیه‌گاهی، پاسخ دینامیکی صفحه تحت اثر جرم متحرک متمرکز و گسترده محاسبه شده است.[۲۲]

دینامیک صفحات نازک مفصلی تحت تأثیر اجرام متحرک نسبتاً بزرگ نیز که در مسیری دلخواه بر روی سطح صفحه حرکت می‌کنند، در سال ۲۰۰۱، مطالعه شده است.[۲۴] همچنین ارتعاش یک صفحه‌ی نازک مستطیلی با شرایط گیرداری مختلف در لبه‌ها، تحت اثر عبور سیستم متحرک جرم ـ فنر ـ میراگر با کمک روش بسط توابع ویژه در سال ۲۰۱۴ رسیدگی شد.[۲۵] و نیز یک روش محاسباتی بهینه شده برای محاسبه‌ی ارتعاش یک صفحه‌ی نازک دایره‌یی تحت اثر جرم متحرک با گسسته‌سازی دامنه‌ی فضایی توسط یک سری از توابع شکل طبیعی صفحه در پژوهشی در سال ۲۰۱۵ پیشنهاد شد.[۲۶]

همچنین در شماری از پژوهش‌های منتشر شده،[۲۷-۳۰] رفتار دینامیکی تیرهای تک دهانه تحت اثر نوسانگر متحرک مطالعه شده است. مثلاً، در سال ۲۰۱۱، دینامیک تیرهای کامپوزیت لایه‌یی با فرض اینرسی دورانی و کرنش‌های برشی، تحت اثر نوسانگر متحرک با استفاده از روش FEM [۱۰] بررسی شده‌اند.[۲۷] رفتار دینامیکی تیرهای کامپوزیتی لایه‌یی که بر روی فونداسیون ویسکوکشسان ـ پسترناک[۱۱] قرار دارند و نوسانگر متحرکی با سرعت ثابت از روی آن عبور می‌کند، با استفاده از روش گالرکین[۱۲] (۲۰۰۸) بررسی شده است.[۲۹] پاسخ دینامیکی یک تیر اویلر ـ برنولی[۱۳] پیوسته‌ی چند دهانه نیز تحت اثر یک نوسانگر متحرک با سرعت ثابت در سال ۲۰۱۵، طی مطالعه‌ی پارامتریک گسترده‌یی ارزیابی شده است.[۳۱]

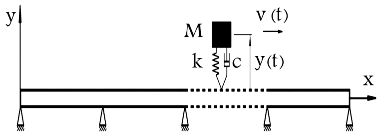
فرضیه‌ی دیگری که در مدل‌سازی مسئله‌ی بار متحرک در واقعیت بسیار محتمل است، شتاب‌دار بودن حرکت بار بر روی سازه است که در قیاس با حالت ساده‌تر سرعت ثابت، موجب افزایش دقت در تعیین پاسخ نهایی و پیچیده‌تر شدن مسئله می‌شود.[۳۲-۳۷] پیش‌تر، اثر دینامیکی متقابل یک وسیله‌ی نقلیه با سرعت متغیر در طول یک تیر یک دهانه با تکیه‌گاه‌های ساده،[۳۲] و پاسخ دینامیکی و ارتعاش تیر طره تحت تحریک جرم متحرک شتاب‌دار مطالعه شده است.[۳۳] در پژوهش دیگری در سال ۲۰۱۱، نیز با توسعه‌ی روش اجزاء محدود و با درنظرگرفتن اثرات اینرسی، رفتار دینامیکی تیری که جرم متحرک شتاب‌داری را حمل می‌کند، تحلیل شده است.[۳۴]

با نگاهی اجمالی به پژوهش‌های انجام شده تاکنون می‌توان دریافت که عمده‌ی مطالعات پژوهشگران در مسله‌ی بار متحرک شتاب‌دار معطوف بر تیرهای تک دهانه بوده است که غالباً با روش‌های نیرو و یا جرم متحرک ارزیابی شده‌اند؛ لذا مسئله‌ی اندرکنش وسیله‌ی نقلیه ـ پل چند دهانه با تمرکز بر تأثیر حرکت شتاب‌دار وسیله‌ی نقلیه جای بحث و بررسی دارد. از این رو، به منظور ارزیابی مسئله‌ی ارتعاش پل چند دهانه در اثر عبور وسایط نقلیه با رویکردی فراگیرتر، در پژوهش حاضر علاوه بر درنظر گرفتن اثرات اینرسی جرم، مشخصه‌های سیستم تعلیق وسیله‌ی نقلیه و ملحوظ داشتن تأثیر تکیه‌گاه‌های میانی در رفتار دینامیکی تیر، شتاب‌دار بودن حرکت نوسانگر متحرک بر روی تیر نیز به طور ویژه مدنظر قرار گرفته و تأثیرات آن در رفتار دینامیکی سازه بررسی شده است.

۲. تعریف مسئله و بیان فرمول‌ها

یک تیر چند دهانه به طول L که تحت تأثیر نوسانگر متحرک است، مطابق شکل ۱، مدنظر قرار گرفته است. با توجه به شکل مذکور، $y(t)$ فاصله‌ی قائم مرکز جرم نوسانگر متحرک تا سطح تماس با تیر را نمایش می‌دهد.

با درنظرگرفتن تغییرمکان تار خنثی تیر اویلر ـ برنولی معادل $W(x,t)$ که در آن x متغیر مکان و t متغیر زمان است، می‌توان با کمک روابط کرنش‌ها و تنش‌های ایجاد شده در تیر، معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر ارتعاش تیر نازک را مطابق رابطه‌ی ۱،



شکل ۱. تیر چند دهانه‌ی نازک تحت اثر نوسانگر متحرک.

به‌دست آورد:[۳۸]

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}W(x,t)\right)+\rho A\frac{\partial^2}{\partial t^2}W(x,t)=P(x,t) \tag{۱}$$

که در آن، E مدول کشسانی، I ممان اینرسی مقطع، ρ جرم حجمی، A سطح مقطع تیر و $P(x,t)$ نیروی خارجی اثرکننده بر واحد طول تیر است. فرض می‌شود که بار متحرک در حین حرکت، در تماس کامل با تیر باقی می‌ماند و پدیده‌ی جداشدگی از سطح تیر اتفاق نمی‌افتد. با درنظرگرفتن اندرکنش نوسانگر متحرک و سازه‌ی تیر می‌توان $P(x,t)$ را به‌صورت رابطه‌ی ۲ تعریف کرد:

$$\begin{cases} N=f_S+f_D \\ f_S=k\Delta y(t) \\ f_D=c\dot{y}(t) \\ a=\frac{d^2}{dt^2}(W(x_0(t),t)+y(t)) \\ Ma=-Mg-f_S-f_D \\ P(x,t)=N\delta(x-x_0(t)) \end{cases} \tag{۲}$$

در رابطه‌ی ۲، عبارت $\delta(x-x_0(t))$ معرف دلتا دیراک است که به لحاظ ریاضی، بیان‌کننده‌ی ناحیه‌ی توزیع یک بار متمرکز با موقعیت متغیر $x_0(t)$ است؛ a شتاب عمودی جرم متحرک است که از لحاظ حجم محاسبات بر پیچیدگی مسئله می‌افزاید. g شتاب گرانش، M جرم نوسانگر، f_S نیروی داخلی فنر و f_D نیروی داخلی میراگر، k سختی فنر c مقدار میرایی نوسانگر، $\Delta y(t)=y(t)-y_0$ میزان تغییرات قائم مرکز جرم نوسانگر از وضعیت تعادل y_0 و N نیروی عکس‌العمل سطح تیر ناشی از نوسانگر بر روی تیر است. می‌توان تابع تغییر مکان را به‌صورت ترکیبی از عبارت‌های وابسته به زمان $a_j(t)$ و توابع شکل ارتعاش آزاد تیر $\varphi_j(x)$ به شکل سری رابطه‌ی ۳ فرض کرد:

$$W(x,t)=\sum_{j=1}^{n}a_j(t)\varphi_j(x) \tag{۳}$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی ۳ در رابطه‌ی ۱، می‌توان رابطه‌ی ۴ را نوشت:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{j=1}^{n}a_j(t)\varphi_j(x)\right)\right)+\rho A\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\sum_{j=1}^{n}a_j(t)\varphi_j(x)\right)=P(x,t) \tag{۴}$$

ضرب داخلی توابع شکل $\varphi_i(x)$ و $\varphi_j(x)$ را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۵ تعریف کرد:

$$\langle\varphi_i(x),\varphi_j(x)\rangle=\int_0^L\varphi_i(x)\varphi_j(x)dx \tag{۵}$$

حال با اعمال کردن ضرب داخلی $\varphi_i(x)$ در طرفین رابطه‌ی ۴، رابطه‌ی ۶ حاصل می‌شود:

$$\left\langle\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{j=1}^{n}a_j(t)\varphi_j(x)\right)\right),\varphi_i(x)\right\rangle+\left\langle\rho A\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\sum_{j=1}^{n}a_j(t)\varphi_j(x)\right),\varphi_i(x)\right\rangle=\langle P(x,t),\varphi_i(x)\rangle \tag{۶}$$

توابع شکل ارتعاش آزاد، یک محیط پیوسته‌ی کشسان خطی متعامد هستند. فرض می‌شود توابع شکل به صورتی نرمالایز شده باشند که خاصیت تعامد آنها به‌صورت رابطه‌ی ۷ تعریف شود:

$$\rho A\langle P_i(x),P_j(x)\rangle=\delta_{ij} \tag{۷}$$

که در آن، δ_{ij} تابع دلتای کرونوکر است. در صورت وجود مقطع ثابت برای تیر و نظر به اینکه توابع $\varphi_i(x)$ در معادله‌ی ارتعاش آزاد تیر صدق می‌کنند، رابطه‌ی ۷ به‌صورت رابطه‌ی ۸ ساده می‌شود:

$$\ddot{a}_i(t)+\omega_i^2a_i(t)=N\varphi_i(x_0(t)) \tag{۸}$$

که در آن، ω بسامد ارتعاش آزاد تیر است. با استفاده از تعریف رابطه‌ی ۸، شکل ساده شده‌ی روابط ۲ و ۷ را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۹ نوشت:

$$\boldsymbol{M}(t)\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{a}(t)+\boldsymbol{C}(t)\frac{d}{dt}\boldsymbol{a}(t)+\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{a}(t)=\boldsymbol{F}(t) \tag{۹}$$

در پژوهش حاضر، معادله‌ی ۹ با استفاده از روش انتگرال‌گیری گام به گام شتاب ثابت،[۳۸] حل شده‌است. $\boldsymbol{M}(t)$ ماتریس جرم، $\boldsymbol{C}(t)$ ماتریس میرایی، $\boldsymbol{K}(t)$ ماتریس سختی و $\boldsymbol{F}(t)$ ماتریس نیرو سیستم هستند. ضرایب ماتریسی عبارات مذکور به‌صورت روابط ۱۰ الی ۱۴ هستند:

$$\boldsymbol{a}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \boldsymbol{a}_2\end{bmatrix}_{(n+1)\times 1} \tag{۱۰}$$

$$\boldsymbol{M}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{M}_{11} & \boldsymbol{M}_{12}\\ \boldsymbol{M}_{21} & \boldsymbol{M}_{22}\end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} \tag{۱۱}$$

$$\boldsymbol{C}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \boldsymbol{C}_{12}\\ \boldsymbol{C}_{21} & \boldsymbol{C}_{22}\end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} \tag{۱۲}$$

$$\boldsymbol{K}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_{11} & \boldsymbol{K}_{12}\\ \boldsymbol{K}_{21} & \boldsymbol{K}_{22}\end{bmatrix}_{(n+1)\times(n+1)} \tag{۱۳}$$

$$\boldsymbol{F}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{F}_1\\ \boldsymbol{F}_2\end{bmatrix}_{(n+1)\times 1} \tag{۱۴}$$

با توجه به رابطه‌ی ۲، در سیستم نوسانگر متحرک یک معادله‌ی شرط اضافی، افزون بر روابط موجود در رابطه‌ی ۸ ایجاد می‌شود که می‌توان آن را به‌صورت رابطه‌ی ۱۵ بیان کرد:

$$M\frac{d^2}{dt^2}(W(x_0(t),t)+y(t))+c\dot{y}(t)+k\Delta y(t)=-Mg \tag{۱۵}$$

برای عناصر ماتریس‌های ارائه شده در روابط ۱۰ الی ۱۴، می‌توان روابط ۱۶ الی ۲۱ را نوشت:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_1 = [a_i(t)]_{n\times 1} \\ \boldsymbol{a}_2 = [\Delta y(t)]_{1\times 1} \end{cases} \qquad (۱۶)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}_{11} = [\delta_{ij}]_{n\times n} \\ \boldsymbol{M}_{12} = [0]_{n\times 1} \\ \boldsymbol{M}_{21} = [\varphi_j(x_0(t))]_{1\times n} \\ \boldsymbol{M}_{22} = [M]_{1\times 1} \end{cases} \qquad (۱۷)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{C}_{11} = [0]_{n\times n} \\ \boldsymbol{C}_{12} = [-c \times \varphi_i(x_0)(t))]_{n\times 1} \\ \boldsymbol{C}_{21} = \left[2\left(\frac{\partial}{\partial x}\varphi_j(x_0(t))\frac{dx_0(t)}{dt}\right)\right]_{1\times n} \\ \boldsymbol{C}_{22} = [c]_{1\times 1} \end{cases} \qquad (۱۸)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{K}_{11} = [\omega_i^2\delta_{ij}]_{n\times n} \\ \boldsymbol{K}_{12} = [-k\varphi_i(x_0(t))]_{n\times 1} \\ \boldsymbol{K}_{21} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi_j(x_0(t))\left(\frac{dx_0(t)}{dt}\right)^2 \\ +\frac{\partial}{\partial x}\varphi_j(x_0(t))\frac{d^2x_0(t)}{dt^2} \end{bmatrix}_{1\times n} \\ \boldsymbol{K}_{22} = [k]_{1\times 1} \end{cases} \qquad (۱۹)$$

$$\boldsymbol{F}_1 = [0]_{n\times 1} \qquad (۲۰)$$

$$\boldsymbol{F}_2 = [-Mg]_{1\times 1} \qquad (۲۱)$$

با استفاده از فنر در میانه‌ی تیر می‌توان تکیه‌گاه‌های ارتجاعی میانی تیر را مدل‌سازی کرد. اثرات نیروی فنر تکیه‌گاهی P_s، به شکل بار خارجی متمرکز که تابعی از درجه آزادی تیر در محل اتصال فنر است، در $P(x,t)$ و در مدل‌سازی ریاضی، نمود پیدا می‌کند. فنر nاُم با سختی k_{sn} که در محل x_{sn} نصب می‌شود و نیروی وارد بر تیر ناشی از فنر P_{sn} عبارت از رابطه‌ی ۲۲ است:

$$P_{sn} = -k_{sn}W(x_{sn},t)\delta(x-x_{sn}) \qquad (۲۲)$$

در نهایت، معادله‌ی ODE حاکم بر مودهای ارتعاش آزاد تیر یک دهانه به سبب وجود فنر، در محاسبات در ماتریس $\boldsymbol{K}_{11}$ وارد می‌شود. تکیه‌گاه میانی در تیر چند دهانه با درنظرگرفتن $k_{sn} \to \infty$ شبیه‌سازی می‌شود. توابع شکل نرمال شده برای تیر دو سر مفصل به صورت رابطه‌ی ۲۳ است:

$$\varphi_j(x) = \sqrt{\frac{2}{\rho AL}}\sin\left(\frac{j\pi x}{L}\right) \qquad (۲۳)$$

۳. مثال‌های عددی

در بخش کنونی، یک تیر چند دهانه‌ی نازک با دهانه‌های مساوی به طول $L_1 = 17m$، جرم واحد طول $\rho A = 1400 kg/m$ و سختی خمشی $EI = 1{,}96 \times 10^9 Nm^2$ فرض شده است. موقعیت مکانی نوسانگر متحرک در هر لحظه از زمان بر روی تیر با $x_0(t) = \frac{1}{2}a_1t_2 + V_0t$ و $V(t) = a_1t + V_0$ قابل تعیین است که a_1 و V_0، شتاب و سرعت اولیه‌ی حرکت نوسانگر در راستای طول تیر هستند. همچنین فرض می‌شود که در آغاز تحلیل، سازه‌ی تیر دارای شرط اولیه‌ی صفر است، یعنی تیر تغییر شکل و سرعت اولیه ندارد. به منظور بررسی منصفانه‌ی نتایج که وابسته به شرایط خاص نباشد و در حالت کلی قابلیت استناد داشته باشد، از یک سری پارامترهای نرمالایز شده که در ادامه معرفی شده‌اند، استفاده شده است. ϑ به‌عنوان سرعت نرمال شده بوده و معادل رابطه‌ی ۲۴ است:

$$\vartheta = \frac{v}{u} \qquad (۲۴)$$

که در آن، v سرعت حرکت نوسانگر و u سرعت مبناست که از رابطه‌ی ۲۵ به‌دست می‌آید:

$$u = \frac{L_1}{T_1} \qquad (۲۵)$$

که در آن، L_1 طول یک دهانه از تیر و T_1 دوره‌ی تناوب اولیه‌ی تیر است. از رابطه‌ی ۲۵، می‌توان رابطه‌ی ۲۶ را چنین نوشت:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad (۲۶)$$

که در آن، ω_0 بسامد اصلی تیر یک دهانه است و با توجه به ارتعاش آزاد تیر، بسامد اولیه از رابطه‌ی ۲۷ قابل محاسبه است:

$$\omega_0 = \left(\frac{\pi}{L_1}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \qquad (۲۷)$$

از این‌رو سرعت مبنا را می‌توان با توجه به روابط ۲۵ الی ۲۷، مطابق رابطه‌ی ۲۸ نوشت:

$$u = \frac{\pi}{2L_1}\sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \qquad (۲۸)$$

نسبت بسامدی ψ معادل رابطه‌ی ۲۹ است:

$$\psi = \frac{\omega_{os}}{\omega_0} \qquad (۲۹)$$

که در آن، w_{os} بسامد نوسانگر متحرک و برابر رابطه‌ی ۳۰ است:

$$\omega_{os} = \sqrt{\frac{k}{M}} \qquad (۳۰)$$

نسبت جرمی با Γ نشان داده شده و برابر نسبت جرم نوسانگر به جرم یک دهانه‌ی تیر است (رابطه‌ی ۳۱):

$$\Gamma = \frac{M}{\rho AL_1} \qquad (۳۱)$$

پاسخ دینامیکی نرمالایز شده را با رابطه‌ی W_N می‌توان بیان کرد که معادل رابطه‌ی ۳۲ است:

$$W_N = \frac{W}{W_{stat}} \qquad (۳۲)$$

که در آن، W معرف خیز دینامیکی تیر در اثر عبور نوسانگر متحرک و W_{stat} مبین بیشینه‌ی خیز استاتیکی در یک تیر تک دهانه است که از رابطه‌ی ۳۳ به‌دست می‌آید:

$$W_{stat} = \frac{MgL_1^3}{48EI} \qquad (۳۳)$$

به منظور معرفی شتاب از پارامتر α استفاده شده است که a_1 معرف شتاب حرکت افقی نوسان‌گر و u' شتاب مبناست و به‌صورت روابط ۳۴ و ۳۵ تعریف می‌شوند:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{u'} \qquad (34)$$

$$u' = \frac{L_1}{(T_1)^2} \qquad (35)$$

پارامتر نرمالایز شده‌ی میرایی از طریق رابطه‌ی ۳۶ معرفی می‌شود:

$$\zeta = \frac{c}{2M\omega_{os}} \qquad (36)$$

در پژوهش حاضر، ارتعاش تیرهای ممتد چند دهانه تحت اثر نوسان‌گر متحرک بررسی و نتایج برای تیرهای ۲، ۳ و ۴ دهانه ارزیابی شده است. جهت صحت‌سنجی، در دو حالت خاص یعنی حالت‌های مجانبی نیرو و جرم متحرک و زمانی که شتاب حرکت افقی نوسان‌گر برابر صفر فرض شده است، نتایج به‌دست آمده با پژوهش‌های انجام شده‌ی پیشین مقایسه و تطابق بسیار خوبی مشاهده شده است. برای صحت‌سنجی بسامدی مطابق جدول ۱، مطالعه‌ی سرعت هم‌گرایی ۶ بسامد نخست در یک تیر اویلر ـ برنولی ۳ دهانه تحت اثر نوسان‌گر متحرک ارائه و نتایج به‌دست آمده با سایر پژوهش‌های پیشین مقایسه شده است.

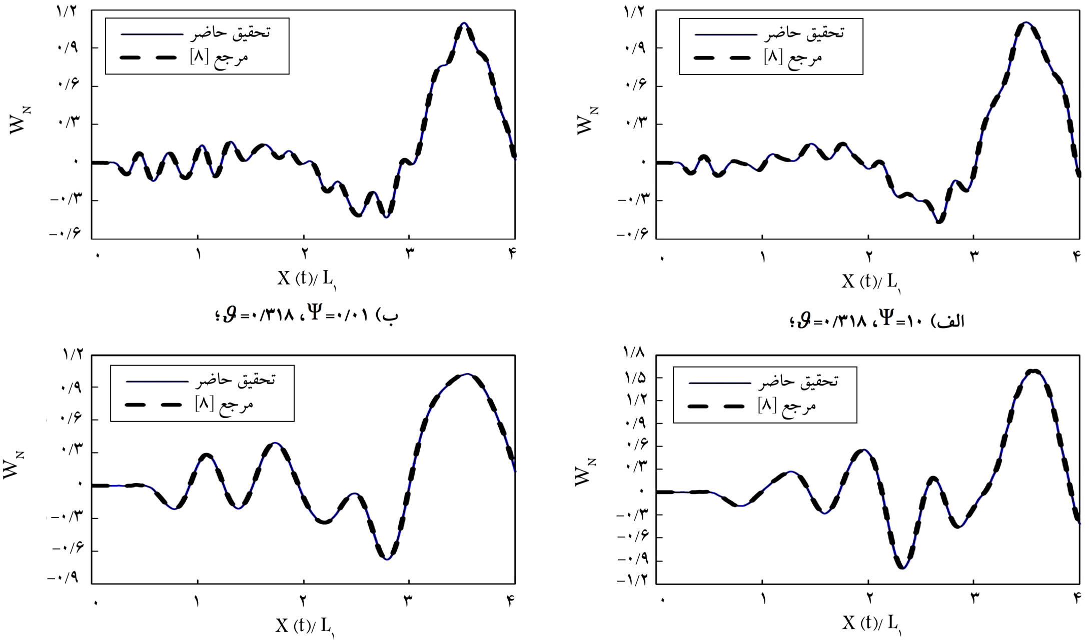
در جدول ۱، n تعداد توابع شکل مورد استفاده است و ملاحظه می‌شود، هنگامی که ۳۴ و ۳۸ تابع شکل استفاده شده باشند، بیشترین هم‌گرایی و تطابق با نتایج سایر پژوهش‌ها و به ویژه با پژوهش ایچیکاوا و همکاران[8] که حل بسته را نمایش می‌دهد، رخ داده است. از این‌رو به سبب اینکه افزایش تعداد توابع شکل استفاده‌شده، بی‌آنکه در مقیاس نمودارها بهبود محسوسی در دقت حل ایجاد کند، موجب افزایش هزینه و حجم عملیات محاسباتی می‌شود، تعداد توابع شکل به‌کار رفته در پژوهش حاضر، ۳۴ است. در شکل ۲، تغییر مکان دهانه‌ی چهارم در تیر ۴ دهانه تحت اثر نوسان‌گر متحرک در دو حالت کلی جرم متحرک و نیروی متحرک که معادل دو حالت مجانبی در نوسان‌گر متحرک با فنر سخت: $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_0}) = \log(\psi = 10) = 1.0$ و فنر نرم: $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_0}) = \log(\psi = 0.01) = -1.0$ است، برای دو طیف متفاوت نسبت سرعت $\vartheta = 0.318$ و $\vartheta = 0.764$ که بیان کننده‌ی سرعت‌های $v = 35m/s$ و $v = 85m/s$ برای نوسان‌گر متحرک هستند، با لحاظ کردن نسبت جرم نوسان‌گر به جرم تیر $\Gamma = 0.4$ به‌دست آمده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، در دو حالت حدی و آن هم فقط زمانی که شتاب برای نوسان‌گر متحرک برابر صفر فرض شده است، یعنی حالت‌های جرم متحرک، (شکل‌های ۲الف و ج) و حالت نیرو متحرک (شکل‌های ۲ب و د)، تطابق بسیار خوبی در نتایج به‌دست آمده از روش حل در پژوهش حاضر و پژوهش ایچیکاوا و همکاران، وجود دارد.[8]

تغییر مکان وسط دهانه‌ی اول در یک تیر ۴ دهانه تحت اثر نوسان‌گر متحرک با حرکت شتاب ثابت صفر با نسبت‌های سختی مختلف از حالت فنر نرم، $(\psi = 0.01)$ که معرف حالت نیرو متحرک تا حالت فنر سخت، $(\psi = 5)$ که معرف حالت جرم متحرک است، را می‌توان با تغییر پارامتر سرعت از $\vartheta = 0.127$ معادل سرعت $v = 25m/s$ تا $\vartheta = 0.995$ معادل سرعت $v = 100m/s$ را در شکل ۳ مشاهده کرد. همان‌طور که مشاهده می‌شود، اثر تغییرات نسبت سختی در خیز ایجادشده در تیر بسیار چشم‌گیر است و با مقایسه‌ی شکل‌های ۳الف و ب، به خوبی می‌توان دریافت با افزایش نسبت سرعت از $\vartheta = 0.127$ تا $\vartheta = 0.573$، میزان خیز به وجود آمده‌ی دهانه‌ی اول هنگامی که نوسان‌گر در این دهانه در حال عبور بر روی تیر است، به میزان حدود ۶۴٪ افزایش را نشان می‌دهد و این در حالی است که زمانی که نوسان‌گر در سایر دهانه‌ها در حال حرکت است، به‌طور متوسط در حدود ۱۱۷٪ افزایش خیز ملاحظه می‌شود. با مقایسه‌ی شکل‌های ۳ب و ج، به خوبی می‌توان دریافت با افزایش نسبت سرعت از $\vartheta = 0.573$ تا $\vartheta = 0.955$، میزان خیز به وجود آمده در دهانه‌ی اول در زمان عبور نوسان‌گر متحرک بر روی تیر حدود ۹٪ افزایش را نشان می‌دهد و هنگامی که نوسان‌گر در سایر دهانه‌ها در حرکت است، به‌طور میانگین حدود ۵۵٪ افزایش خیز ایجاد می‌شود.

با توجه به شکل‌های ۴ الی ۷، می‌توان اثرات تغییر شتاب حرکت نوسان‌گر بر روی تیر را ارزیابی کرد. به منظور بررسی جامع‌تر از ضریب بزرگ‌نمایی دینامیکی DAF [14] که معرف بیشینه‌ی پاسخ دینامیکی نرمالایز شده در طول دهانه‌ی تیر در اثر ارتعاش واداشته‌ی تیر است، استفاده می‌شود؛ و در طیف وسیعی از مقادیر نسبت سرعت از $\vartheta = 0$ تا $\vartheta = 0.2$ و به ازاء دامنه‌ی گسترده‌یی از نسبت‌های سختی از نوسان‌گر متحرک با فنر سخت یعنی $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_0}) = \log(\psi = 10) = 1.0$ و

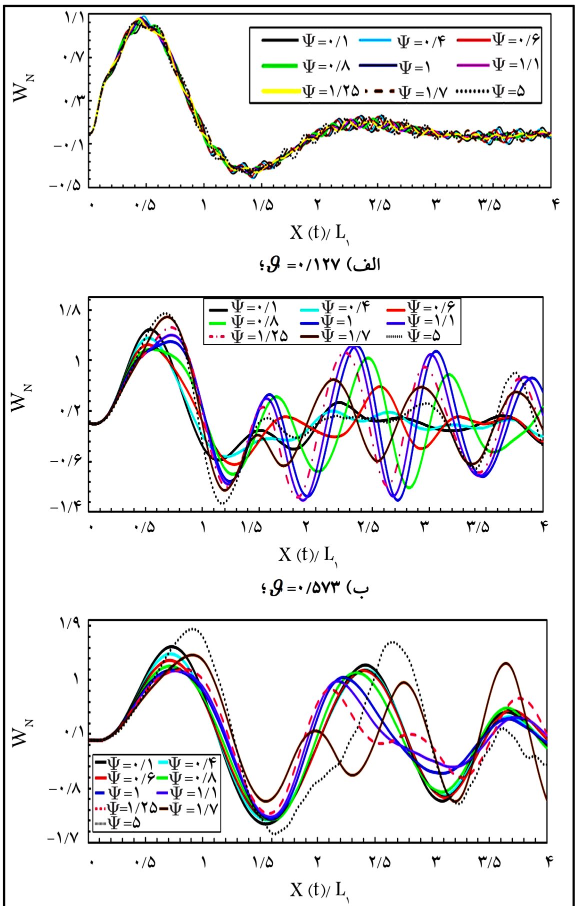
جدول ۱. مطالعه‌ی سرعت هم‌گرایی ۶ بسامد نخست ارتعاش آزاد در یک تیر اویلر ـ برنولی ۳ دهانه.

n (تعداد توابع شکل استفاده شده)		بسامد					
		Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
پژوهش حاضر	۱۰	۳٫۱۴۱۵۹۲۷	۳٫۵۵۹۰۷۷	۴٫۳۲۰۹۴۹۳	۶٫۲۸۳۱۸۵۳	۶٫۷۵۰۴۴۰۴	۷٫۴۸۳۰۳۳
	۱۴	۳٫۱۴۱۵۹۲۷	۳٫۵۵۷۸۲۴۶	۴٫۳۰۲۳۶۰۴	۶٫۲۸۳۱۸۵۳	۶٫۷۱۶۱۲۷۷	۷٫۴۵۷۶۸۱۷
	۱۸	۳٫۱۴۱۵۹۲۷	۳٫۵۵۷۰۹۱۱	۴٫۳۰۰۲۲۸۷	۶٫۲۸۳۱۸۵۳	۶٫۷۱۲۳۵۵۳	۷٫۴۴۳۰۰۰۲
	۲۲	۳٫۱۴۱۵۹۲۷	۳٫۵۵۶۵۸۵۹	۴٫۲۹۸۸۶۳۶	۶٫۲۸۳۱۸۵۳	۶٫۷۰۹۹۴۴۳	۷٫۴۳۳۰۳۴۶
	۲۶	۳٫۱۴۱۵۹۲۷	۳٫۵۵۶۴۸۰۸	۴٫۲۹۷۷۷۳۶	۶٫۲۸۳۱۸۵۳	۶٫۷۰۸۰۲۵۶	۷٫۴۳۰۹۶۸۵
	۳۰	۳٫۱۴۱۵۹۲۷	۳٫۵۵۶۴۰۲۷	۴٫۲۹۷۵۲۲۴	۶٫۲۸۳۱۸۵۳	۶٫۷۰۷۵۸۳۹	۷٫۴۲۹۴۳۲۳
	۳۴	۳٫۱۴۱۵۹۲۶	۳٫۵۵۶۴۰۸۵	۴٫۲۹۷۵۲۹۷	۶٫۲۸۳۱۸۵۳	۶٫۷۰۷۵۹۵۵	۷٫۴۲۹۵۴۱۴
	۳۸	۳٫۱۴۱۵۹۲۶	۳٫۵۵۶۴۰۸۵	۴٫۲۹۷۵۲۹۷	۶٫۲۸۳۱۸۵۳	۶٫۷۰۷۵۹۵۶	۷٫۴۲۹۵۴۱۳
ایچیکاوا و همکاران[8]		۳٫۱۴۱۵۹۲۶	۳٫۵۵۶۴۰۸۵	۴٫۲۹۷۵۲۹۷	۶٫۲۸۳۱۸۵۳	۶٫۷۰۷۵۹۵۶	۷٫۴۲۹۵۴۱۳
کیانی و همکاران[9]		۳٫۱۳۹۶۵۸۹	۳٫۵۵۵۱۹۵۷	۴٫۲۹۸۳۱۹۵	۶٫۲۸۵۰۶۹۹	۶٫۷۱۰۱۱۷۹	۷٫۴۴۰۴۶۵۸
حسن‌آبادی و همکاران[10]		۳٫۱۴۱۵۸۰۹	۳٫۵۵۶۵۲۱۹	۴٫۲۹۶۱۵۰۰	۶٫۲۸۳۱۸۲۳	۶٫۷۰۴۴۹۸۷	۷٫۴۲۹۵۰۵۸



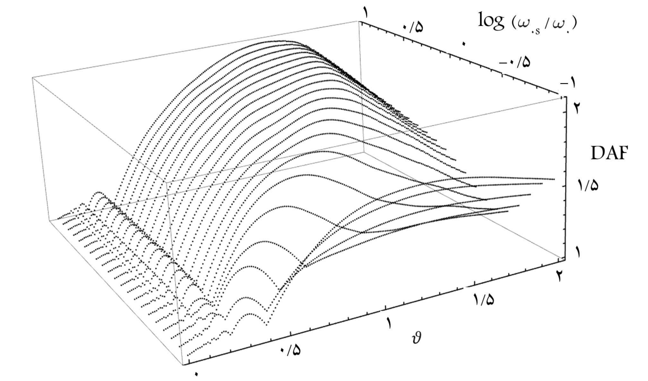
الف) $\Psi=۱۰$، $\vartheta=۰/۳۱۸$؛
ب) $\Psi=۰/۰۱$، $\vartheta=۰/۳۱۸$؛
ج) $\Psi=۱۰$، $\vartheta=۰/۷۶۴$؛
د) $\Psi=۰/۰۱$، $\vartheta=۰/۷۶۴$.

شکل ۲. تغییر مکان نرمالایز شده‌ی وسط دهانه‌ی چهارم در تیر ۴ دهانه تحت نوسانگر متحرک.

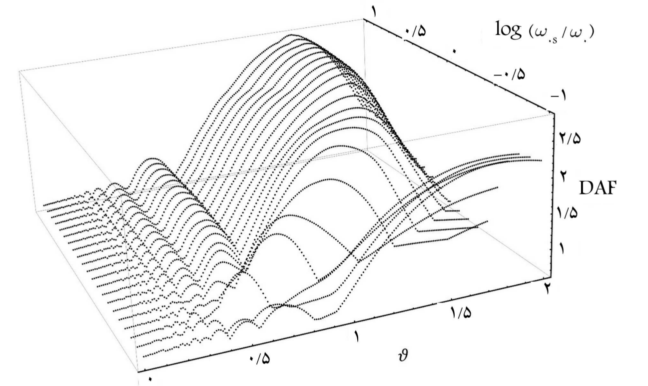


الف) $\vartheta=۰/۱۲۷$؛
ب) $\vartheta=۰/۵۷۳$؛
ج) $\vartheta=۰/۹۵۵$.

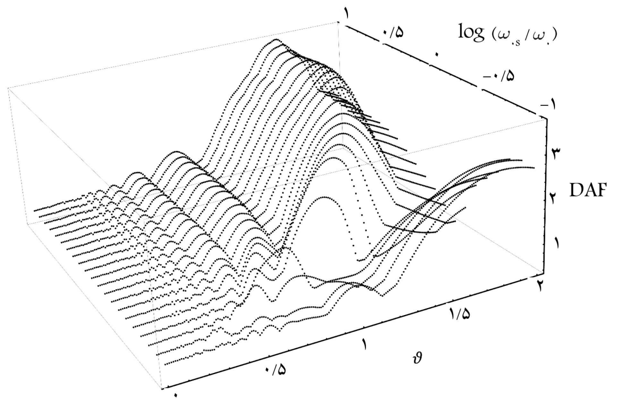
شکل ۳. تغییر مکان وسط دهانه‌ی اول تیر ۴ دهانه ($\Gamma = ۰/۴$).



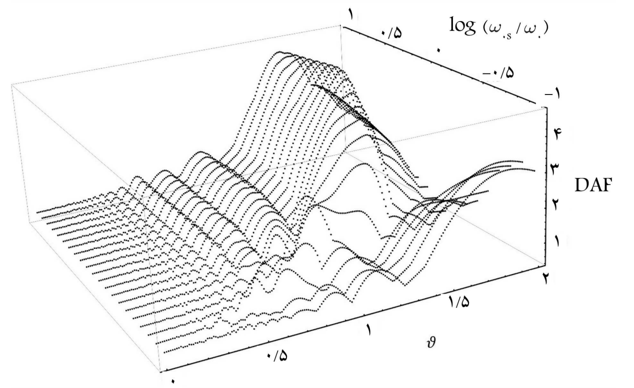
شکل ۴. بیشینه‌ی پاسخ دینامیکی نرمالایز شده‌ی بیشینه بین دهانه‌ها در یک تیر ۴ دهانه ($\Gamma = ۰/۴$ و $a = ۱$).



شکل ۵. بیشینه‌ی پاسخ دینامیکی نرمالایز شده‌ی بیشینه بین دهانه‌ها در یک تیر ۴ دهانه ($\Gamma = ۰/۴$ و $a = ۱$).



شکل ۶. بیشینه‌ی پاسخ دینامیکی نرمالایز شده‌ی بیشینه بین دهانه‌ها در یک تیر ۴ دهانه ($\Gamma = ۰٫۴$ و $a = ۳$).



شکل ۷. بیشینه‌ی پاسخ دینامیکی نرمالایز شده‌ی بیشینه بین دهانه‌ها در یک تیر ۴ دهانه ($\Gamma = ۰٫۴$ و $a = ۴$).

نوسان‌گر متحرک با فنر نرم یعنی $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_\circ}) = \log(\psi = ۰٫۰۱) = -۱٫۰$ با درنظر گرفتن نسبت جرمی $\Gamma = ۰٫۴$، بیشینه‌ی پاسخ دینامیکی نرمالایز شده به ازاء ۴ مقدار پارامتر شتاب ($a = ۱$ تا $a = ۴$) ارزیابی شده است.

همان‌طورکه در شکل ۴ مشاهده می‌شود، بیشینه‌ی پاسخ دینامیکی نرمالایز شده‌ی بیشینه‌ی بین دهانه‌ها در یک تیر ۴ دهانه، به ازاء پارامتر شتاب $a = ۱$ نشان داده شده است و می‌توان دریافت در محدوده‌ی نسبت سختی $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_\circ}) = \log(\psi = ۰٫۰۱) = -۰٫۸$ تا $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_\circ}) = \log(\psi = ۰٫۰۱) = -۰٫۳$ کمترین میزان DAF اتفاق افتاده است و با افزایش نسبت سختی تا $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_\circ}) = \log(\psi = ۰/۰۱) = ۱/۰$ مقدار DAF به طور پیوسته افزایش می‌یابد؛ کمترین مقدار DAF در محدوده‌ی نسبت سرعت‌های پایین و از $\vartheta = ۰/۰$ تا $\vartheta = ۰٫۲۸$ رخ داده و بیشترین مقدار DAF در محدوده‌ی نسبت سرعت $\vartheta = ۱٫۵$ ایجاد شده است.

مطابق شکل ۵، بیشینه‌ی پاسخ دینامیکی نرمالایز شده‌ی بیشینه‌ی بین دهانه‌ها در یک تیر ۴ دهانه، به ازاء پارامتر شتاب $a = ۲$ قابل بررسی است و ملاحظه می‌شود در محدوده‌ی نسبت سختی $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_\circ}) = -۰٫۷$ تا $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_\circ}) = ۰٫۳۵$ کمترین میزان DAF ایجاد شده و کمترین مقدار DAF در محدوده‌ی نسبت سرعت‌های پایین و متوسط و از $\vartheta = ۰٫۰$ تا $\vartheta = ۰٫۶۵$ رخ داده و بیشترین مقدار DAF در محدوده‌ی نسبت سرعت $\vartheta = ۱٫۴$ تا $\vartheta = ۱٫۶۸$ ایجاد شده است. با مقایسه‌ی دو حالت $a = ۱$ و $a = ۲$ در شکل‌های ۴ و ۵، می‌توان دریافت افزایش پارامتر شتاب، تأثیر مستقیمی در بیشینه‌ی پاسخ دینامیکی نرمالایز شده‌ی بیشینه بین دهانه‌ها داشته و موجب افزایش کلی DAF در تیر ۴ دهانه شده است، به گونه‌یی که با افزایش شتاب از $a = ۱$ به $a = ۲$، DAF در نسبت سختی $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_\circ}) = ۱٫۰$ به مقدار ۱۴٪ افزایش یافته است.

بیشینه‌ی پاسخ دینامیکی نرمالایز شده‌ی حداکثر بین دهانه‌ها در یک تیر ۴ دهانه، به ازاء پارامتر شتاب $a = ۳$ در شکل ۶ نشان داده شده است. در این حالت نیز مانند دو حالت قبل، کمترین میزان DAF در محدوده‌ی نسبت سختی $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_\circ}) = -۰٫۷۲$ تا $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_\circ}) = -۰٫۲۵$ واقع شده و نیز کمترین مقدار DAF در محدوده‌ی نسبت سرعت‌های پایین و از $\vartheta = ۰٫۰$ و $\vartheta = ۱٫۷$ رخ داده و ضمناً بیشترین مقدار DAF در محدوده‌ی نسبت سرعت $\vartheta = ۱٫۴۵$ تا $\vartheta = ۰٫۵۷$ ایجاد شده است. با مقایسه‌ی دو حالت $a = ۲$ و $a = ۳$ در شکل‌های ۵ و ۶، قابل مشاهده است که با افزایش پارامتر شتاب از $a = ۲$ به $a = ۳$ DAF در نسبت سختی $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_\circ}) = ۱٫۰$ مقدار ۳۳٪ افزایش را نشان می‌دهد و علاوه بر این می‌توان بیان کرد با افزایش پارامتر شتاب $a = ۱$ به $a = ۳$، DAF در نسبت سختی $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_\circ}) = ۱٫۰$ به میزان ۸۰٪ افزایش یافته است. شکل ۷، مقدار DAF به ازاء پارامتر شتاب $a = ۴$ را نمایش می‌دهد. محدوده‌ی نسبت سختی $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_\circ}) = -۰٫۶۵$ تا $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_\circ}) = -۰٫۲۵$ و نیز محدوده‌ی نسبت سرعت‌های پایین و متوسط و از $\vartheta = ۰٫۰$ تا $\vartheta = ۰٫۶$ محل رخداد کمترین میزان DAF بوده و بیشترین مقدار DAF در محدوده‌ی نسبت سرعت $\vartheta = ۱٫۳۶$ تا $\vartheta = ۱٫۶$ ایجاد شده است. همچنین با افزایش نسبت سختی تا $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_\circ}) = ۰٫۴$ مقدار DAF به طور پیوسته افزایش یافته و سپس DAF تا نسبت سختی $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_\circ}) = ۱٫۰$ به مقدار جزئی کاهش را نشان می دهد. با مقایسه‌ی دو حالت $a = ۳$ و $a = ۴$ در شکل‌های ۶ و ۷، می‌توان دریافت با افزایش پارامتر شتاب از $a = ۳$ به $a = ۴$، DAF در نسبت سختی $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_\circ}) = ۱٫۰$ مقدار ۱۹٪ افزایش را نشان می‌دهد و نیز با افزایش پارامتر شتاب از $a = ۲$ به $a = ۴$ DAF در نسبت سختی، $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_\circ}) = ۱٫۰$ به میزان ۵۷٪ افزوده شده و در نهایت با افزایش پارامتر شتاب از $a = ۱$ و $a = ۴$ DAF در نسبت سختی $\log(\frac{\omega_{os}}{\omega_\circ}) = ۱٫۰$، به مقدار حدود ۲ برابر افزایش یافته است.

۴. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، پاسخ دینامیکی یک تیر ممتد چند دهانه که معادله‌ی حاکم در هر یک از دهانه‌های تیر مطابق تئوری اویلر ـ برنولی است، تحت اثر نوسان‌گر متحرک شتاب‌دار که حرکت آن با شتاب خطی و سرعت متغیر بوده است، بررسی شده است. با درنظرگرفتن اندرکنش نوسان‌گر متحرک بر روی تیر و با اعمال موقعیت مکانی نوسان‌گر در لحظه از زمان، معادله‌ی حاکم تیر اویلر ـ برنولی بسط داده شده و سپس با فرض کردن فنرهایی با سختی بی‌نهایت، نسبت به مدل‌سازی تکیه‌گاه‌های میانی اقدام شده است. طی مطالعه‌ی پارامتریک اثرات سرعت متغیر حرکت نوسان‌گر متحرک، اثر پارامتر شتاب ثابت حرکت نوسان‌گر در بیشینه‌ی پاسخ دینامیکی نرمالایز شده‌ی بیشینه بین دهانه‌ها بررسی شده است. در دو حالت خاص پژوهش حاضر، یعنی حالت‌های مجانبی نسبت‌های سختی نوسان‌گر و آن هم فقط زمانی که شتاب برابر صفر فرض شده است (سرعت ثابت)، نتایج پژوهش حاضر با پژوهش‌های موجود پیشین در دو حالت فنر سخت (معادل با جرم متحرک) و فنر نرم (معادل با نیروی متحرک) مقایسه و تطابق بسیار خوبی مشاهده شده است. در

پژوهش حاضر، بیشینه‌ی بزرگ‌نمایی دینامیکی تیر چند دهانه، در طیف گسترده‌یی از نسبت سختی‌های میانی نوسان‌گر و به ازاء شتاب‌های مختلف حرکت نوسان‌گر تحلیل شده است. مطالعه‌ی میزان اثر شتاب در پاسخ دینامیکی تیر تحت تحریک نوسان‌گر متحرک مشخص کرد که در نسبت سرعت‌های پایین، پاسخ دینامیکی کمترین میزان خود را دارد و افزایش پارامتر شتاب، بیشینه‌ی پاسخ دینامیکی نرمالایز شده‌ی بیشینه بین دهانه‌ها در یک تیر چند دهانه را به شکل محسوسی افزایش می‌دهد. همچنین ملاحظه شد در حالت حرکت نوسان‌گر بر روی تیر با شتاب ثابت صفر، با افزایش میزان سرعت نوسان‌گر پاسخ دینامیکی و خیز بیشینه‌ی ایجاد شده بر روی تیر به‌صورت چشم‌گیری افزایش می‌یابد و میزان تأثیر نسبت‌های سختی میانی نوسان‌گر با افزایش سرعت، بسیار قابل ملاحظه است.

پانوشت‌ها

1. viscoelastic
2. discrete element technique (DET)
3. characteristic orthogonal polynomials (COPs)
4. generalized moving least square method (GMLSM)
5. poroelastic beams
6. timoshenko beam
7. orthonormal polynomial series expansion method (OPSEM)
8. piezoelectric patches
9. convective acceleration components
10. finite element method
11. pasternak-viscoelastic foundation
12. galerkin method
13. Euler-bernoulli beam
14. dynamic amplification factor

منابع (References)

1. Fryba, L., *Vibration of Solids and Structures under Moving Loads*, Thomas Telford, London (1999).
2. Ouyang, H. "Moving-load dynamic problems: A tutorial (with a brief overview)", *Mechanical Systems and Signal Processing*, **25**, pp. 2039-2060 (2011).
3. Mofid, M. and Akin, J.E. "Discrete element response of beams with traveling mass", *Advances in Engineering Software*, **25**(2-3), pp. 321-331 (1996).
4. Mofid, M. and Shadnam, M. "On the response of beams with internal hinges, under moving mass", *Advances in Engineering Software*, **31**(5), pp. 323-328 (2000).
5. Mofid, M., Tehranchi, A. and Ostadhossein, A. "On the viscoelastic beam subjected to moving mass", *Advances in Engineering Software*, **41**(2), pp. 240-247 (2010).
6. Nikkhoo, A., Farazandeh, A. and Hassanabadi, M.E. "On the computation of moving mass/beam interaction utilizing a semi-analytical method", *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, **38**(3), pp. 761-771 (2016).
7. Nikkhoo, A., Farazandeh, A., Hassanabadi, M.E. and Mariani, S. "Simplified modeling of beam vibrations induced by a moving mass by regression analysis", *Acta Mechanica*, **226**(7), pp. 2147-2157 (2015).
8. Ichikawa, M., Miyakawa, Y. and Matsuda, A. "Vibration analysis of the continuous beam subjected to a moving mass", *Journal of Sound and Vibration*, **230**(3), pp. 493-506 (2000).
9. Kiani, K., Nikkhoo, A. and Mehri, B. "Assessing dynamic response of multispan viscoelastic thin beams under a moving mass via generalized moving least square method", *Acta Mechanica Sinica*, **26**(5), pp. 721-733 (2010).
10. Hassanabadi, M.E., Nikkhoo, A., Amiri, J.V. and Mehri, B. "A new orthonormal polynomial series expansion method in vibration analysis of thin beams with non-uniform thickness", *Applied Mathematical Modelling*, **37**(18-16), pp. 8543-8556 (2013).
11. Lotfollahi-Yaghin, M.A., Kafshgarkolaei, H.J., Allahyari, H. and Ghazvini, T. "On the absolute maximum dynamic response of a beam subjected to a moving mass", *Structural Engineering and Mechanics*, **54**(1), pp. 55-67 (2015).
12. Yamchelou, M.T. and Nouri, G.R. "Spectral analysis of dynamic response of a thin beam subjected to a varying speed moving mass", *Journal of Mechanical Science and Technology*, **30**(7), pp. 3009-3017 (2016).
13. Kiani, K., Avili, H.G. and Kojorian, A.N. "On the role of shear deformation in dynamic behavior of a fully saturated poroelastic beam traversed by a moving load", *International Journal of Mechanical Sciences*, **94-95**, pp. 84-95 (2015).
14. Roshandel, D., Mofid, M. and Ghannadiasl, A. "Modal analysis of the dynamic response of Timoshenko beam under moving mass", *Scientia Iranica*, **22**(2), pp. 331-344 (2015).
15. Roshandel, D., Mofid, M. and Ghannadiasl, A. "Dynamic response of a non-uniform Timoshenko beam, subjected to moving mass", *Journal of Mechanical Engineering Science*, **229**(14), pp. 2499-2513 (2015).
16. Nikkhoo, A. "Investigating the behavior of smart thin beams with piezoelectric actuators under dynamic loads", *Mechanical Systems and Signal Processing*, **45**(2), pp. 513-530 (2014).
17. Hassanabadi, M.E., Attari, N.K.A., Nikkhoo, A. and Mariani, S. "Resonance of a rectangular plate influenced by sequential moving masses", *Coupled Systems Mechanics*, **5**(1), pp. 87-100 (2016).
18. Akin, J.E. and Mofid, M. "Numerical solution for response of Beams with moving mass", *Journal Structures Engineering*, **115**(1), pp. 120-131 (1989).
19. Khoraskani, R.A., Mofid, M., Azam, S.E. and Hassanabadi, M.E. "A new simplified formula in prediction of

the resonance velocity for multiple masses traversing a thin beam", *Scientia Iranica*, **23**(1), pp. 133-141 (2016).

20. Niaz, M. and Nikkhoo, A. "Inspection of a rectangular plate dynamics under a moving mass with varying velocity utilizing BCOPs", *Latin American Journal of Solids and Structures*, **12**(2), pp. 317-332 (2015).
21. Nikkhoo, A. and Rofooei, F.R. "Parametric study of the dynamic response of thin rectangular plates traversed by a moving mass", *Acta Mech.*, **223**(1), pp. 15-27 (2012).
22. Amiri, J.V., Nikkhoo, A., Davoodi, M.R. and Hassanabadi, M.E. "Vibration analysis of a mindlin elastic plate under a moving mass excitation by eigenfunction expansion method", *Thin-Walled Structures*, **62**, pp. 53-64 (2013).
23. Nikkhoo, A., Hassanabadi, M.E., Azam, S.E. and Amiri, J.V. "Vibration of a thin rectangular plate subjected to series of moving inertial loads", *Mechanics Research Communications*, **55**, pp. 105-113 (2014).
24. Shadnam, M.R., Mofid, M. andAkin, J.E. "On the dynamic response of rectangular plate, with moving mass", *Thin-Walled Structures*, **39**(9), pp. 797-806 (2001).
25. Hassanabadi, M.E., Amiri, J.V. and Davoodi, M.R. "On the vibration of a thin rectangular plate carrying a moving oscillator", *Scientia Iranica*, **21**(2), pp. 284-294 (2014).
26. Hassanabadi, M.E., Attari, N.K.A., Nikkhoo, A. and Baranadan, M. "An optimum modal superposition approach in the computation of moving mass induced vibrations of a distributed parameter system", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, **229**(6), pp. 1015-1028 (2015).
27. Mohebpour, S.R., Fiouz, A.R. and Ahmadzadeh, A.A. "Dynamic investigation of laminated composite beams with shear and rotary inertia effect subjected to the moving oscillators using FEM", *Composite Structures*, **93**(3), pp. 1118-1126 (2011).
28. Azam, S.E., Mofid, M. and Khoraskani, R.A. "Dynamic response of Timoshenko beam under moving mass", *Scientia Iranica*, **20**(1), pp. 50-56 (2013).
29. Ahmadian, M.T., Jafari-Talookolaei, R.A. and Esmailzadeh, E. "Dynamics of a laminated composite beam on pasternak-viscoelastic foundation subjected to a moving oscillator", *Journal of Vibration and Control*, **14**(6), pp. 807-830 (2008).
30. Muscolino, G., Benfratello, S. and Sidoti, A. "Dynamic analysis distributed parameter system subjected to a moving oscillator with random mass, velocity and acceleration", *Probabilistic Engineering Mechanics*, **17**(1), pp. 63-72 (2002).
31. Ebrahimi, M., Gholampour, S., Kafshgarkolaei, H.J. and Nikbin, I.M. "Dynamic behavior of a multispan continuous beam traversed by a moving oscillator", *Acta Mechanica*, **226**(12), pp. 4247-4257 (2015).
32. Wang, Y.M. and Ko, M.Y. "The interaction dynamics of a vehicle traveling along a simply supported beam under variable velocity condition", *Acta Mechanica*, **225**(12), pp. 3601-3616 (2014).
33. Ryu, B.J., Kim, H.J. and Kim, Y. "Dynamic response and vibration of a cantilevered beam under an accelerated moving mass", *Advanced Materials Research*, **711**, pp. 305-311 (2013).
34. Esen, I. "Dynamic response of a beam due to an accelerating moving mass using moving finite element approximation", *Mathematical and Computational Applications*, **16**(1), pp. 171-182 (2011).
35. Oni, S.T. and Omolofe, B. "Dynamic response of prestressed rayleigh beam resting on elastic foundation and subjected to masses traveling at varying velocity", *Journal of Vibration and Acoustics*, **133**(4), 15 p. (2011).
36. Huang, M.H. and Thambiratnam, D.P. "Deflection response of plate on Winkler foundation to moving accelerated loads", *Engineering Structures*, **23**(9), pp. 1134-1141 (2001).
37. Lee, H.P. "Transverse vibration of a timoshenko beam acted on by an accelerating mass", *Applied Acoustics*, **47**(1), pp. 319-330 (1996).
38. Clough, R.W. and Penzien, J., *Dynamics of Structures*, 3ed Edition, Computers & Structures Inc., Berkeley, CA (2003).