

شبیه‌سازی عددی بالاروی موج تک بر روی ساحل به روش بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه نمایی

سید مهدی زندی* (استادیار)

امین رفیع‌زاده (دانشجوی کارشناسی ارشد)

احمد شانه‌ساز زاده (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی عمران و حمل و نقل، دانشگاه اصفهان

در بررسی پدیده‌ی سونامی، عموماً تئوری امواج تک استفاده می‌شود. در نوشتار حاضر، روش بدون شبکه مبتنی بر توابع پایه نمایی برای شبیه‌سازی بالاروی موج تک در سیال با سطح آزاد مطالعه و بررسی شده است. فرمول‌بندی روش ارائه شده براساس بیان لاگرانژی معادلات ناویر-استوکس برای سیال غیرلزج تراکم‌ناپذیر بر مبنای فشار است. بر این اساس، معادله‌ی لاپلاس فشار در هر گام زمانی با استفاده از روش بدون شبکه‌ی توابع پایه نمایی حل می‌شود. پس از آن، با توجه به فرمول‌بندی لاگرانژی حرکت، هندسه‌ی حل به‌هنگام می‌شود و حل در زمان پیش می‌رود. با توجه به اینکه هندسه‌ی حل در طول زمان تغییر می‌کند، بدون شبکه بودن توابع پایه نمایی با توجه به بی‌نیازی به تولید شبکه در هر گام زمانی، به لحاظ صرفه‌جویی در زمان و هزینه‌ی محاسبات بسیار حائز اهمیت است. مقایسه‌ی انجام شده با داده‌های آزمایشگاهی نشان می‌دهد که نتایج به دست آمده در تعیین مقدار بیشینه‌ی بالاروی موج در حالت بدون شکست، دقت بالایی دارند.

واژگان کلیدی: سونامی، موج تک، روش بدون شبکه، توابع پایه نمایی، فرمول‌بندی لاگرانژی، بالاروی موج.

۱. مقدمه

سونامی از جمله امواج دریایی بزرگ است که به علت جابه‌جایی و لغزش بستر، رانش زمین به درون دریا و ... ایجاد می‌شود. امواج سونامی پس از انتشار و رسیدن به ساحل خسارت‌های جانی و مالی زیادی را به بار می‌آورند. لذا درک علمی و تخمین مشخصه‌های تولید^۱، انتشار^۲ و بالاروی^۳ امواج سونامی در سواحل، اهمیت زیادی دارد. از آنجایی که سونامی دوره‌ی تناوب طولانی و طول موج بلند دارد، بنابراین پدیده‌ی سونامی معمولاً به صورت یک موج تک شبیه‌سازی و مطالعه می‌شود.^۱ موج تک، که اولین بار در سال ۱۸۳۴ معرفی شده است، توسط سیستمی از معادلات دیفرانسیل بیان می‌شود و در روند تکاملی خود در طول انتشار بر یک بستر افقی، بدون تغییر در شکل یا اندازه باقی خواهد ماند. موج غیرخطی سونامی که کاربرد بسیار مهمی در مسائل مربوط به سیالات دارد، در مقایسه با طول موج، دامنه‌ی محدودی دارد و در طول انتشار بر یک بستر افقی با یک سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. موج تک به عنوان جانشین برای شبیه‌سازی و مطالعه‌ی سونامی به صورت آزمایشگاهی و عددی معرفی شده است. شبیه‌سازی حرکت و

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۴/۱۱/۱۸، اصلاحیه ۱۳۹۵/۰۶/۲۱، پذیرش ۱۳۹۵/۰۷/۱۸.

DOI: 10.24200/J30.2018.1349

بالاروی موج تک بر روی سطوح شیب‌دار نیز به وسیله‌ی شیوه‌های مختلفی، نظیر: روش‌های تحلیلی، عددی و آزمایشگاهی صورت گرفته است و مطالعات در راستای تدقیق پیش‌بینی مشخصه‌های اساسی آن ادامه دارد.^۱ همچنین در سال ۱۹۵۳، برای اولین بار مشخصه‌های موج تک به صورت آزمایشگاهی بررسی و بیشینه‌ی بالاروی موج تک بر روی ۵ سطح با شیب‌های: ۱:۱، ۱:۲/۱۴، ۱:۲/۷۵، ۱:۳/۷۳، ۱:۵/۶۷ و ۱:۱۱/۴۳ برای عمق‌های مختلف آب بین ۱۵/۲۴ تا ۶۸/۵۸ سانتی‌متر محاسبه شد و سپس با استفاده از اطلاعات آزمایشگاهی به دست آمده، یک رابطه‌ی تجربی برای محاسبه‌ی بیشینه‌ی بالاروی موج بر روی سطوح شیب‌دار ارائه شد.^۲ در سال ۱۹۷۸ نیز با استفاده از روش اجزاء محدود به حل معادله‌ی بوسینسک^۴ در حالت یک بعدی برای سیال سطح آزاد در عمق‌های مختلف پرداخته شد و ابتدا یک رویکرد برای تولید موج تک ارائه و سپس از آن برای تولید موج تک در آزمایشگاه استفاده شد. همچنین جابه‌جایی پدال موج^۵ برای تولید موج تک، با فرض پایدار بودن موج مذکور در طول فرایند تولید محاسبه و سپس به یک موج‌ساز کنترل‌شونده توسط رایانه اعمال شد. در سه دهه‌ی اخیر، از رویکرد مذکور به عنوان یک روش اصلی و عمده برای تولید موج تک استفاده شده است.^۳ همچنین در سال ۱۹۸۳ یک روش عددی براساس توصیفی از فرمول‌بندی لاگرانژی برای

مطالعه‌ی بالاروی موج تک با استفاده از روابط بوسینسک ارائه و عملکرد روش عددی با نتایج حل تحلیلی و اطلاعات آزمایشگاهی مقایسه شد و نتایج قابل قبولی به دست آمد.^[۵]

در پژوهشی در سال ۱۹۸۷ نیز بالاروی موج تک در سواحل از نظر تئوری و آزمایشگاهی مطالعه و با بررسی بالاروی موج تک در حالت بدون شکست^۶ از نظر تئوری و مقایسه‌ی آن با اطلاعات آزمایشگاهی، نتایج قابل قبولی ارائه شد. همچنین با استفاده از تئوری خطی و غیرخطی^۷ برای پیش‌بینی بالاروی موج تک در حالت بدون شکست بر روی سواحل، بالاروی موج تک در قالب یک فرمول ارائه و با نتایج آزمایشگاهی صحت‌سنجی شد.^[۷]

در پژوهش دیگری (۱۹۹۰)، نیز با توسعه‌ی فرم لاگرانژی روابط بوسینسک و استفاده از روش اجزاء محدود، به بررسی بالاروی موج تک برای هر دو حالت شکست و بدون شکست بر روی صفحه‌ی شیب‌دار پرداخته شد.^[۸] همچنین در سال ۱۹۹۴، انتشار و بالاروی موج تک بر روی سطوح شیب‌دار با استفاده از روش عددی معادلات انتگرال مرزی (BIEM)^۸ بررسی و پیشینه‌ی ارتفاع بالاروی موج تک با نسبت‌های مختلف ارتفاع موج به عمق آب برای سطوح شیب‌دار با زوایای ۱۵، ۲۰ و ۴۵ درجه محاسبه و رابطه‌ی بر روی نتایج عددی برآزش شده است. نتایج روش عددی مذکور با اطلاعات آزمایشگاهی مقایسه و دقت قابل قبولی حاصل شده است.^[۹] همچنین در پژوهش دیگری (۱۹۹۵)، معادله‌ی غیرخطی آب کم‌عمق (NLSW)^۹ با استفاده از روش تفاضل محدود،^{۱۰} حل و از آن برای محاسبه‌ی انتشار و بالاروی موج تک استفاده شد. نتایج حاصل از پیشینه‌ی بالاروی و تکامل موج تک تولیدی توسط روش تفاضل محدود در مقایسه با اطلاعات آزمایشگاهی، نشان‌دهنده‌ی تطابق خوب با اطلاعات ذکر شده است.^[۱۰] در سال ۲۰۰۱ نیز در بررسی بالاروی موج تک در حالت بدون شکست بر روی شیب سواحل، با استفاده از تئوری غیرخطی امواج، رابطه‌ی مشابه با رابطه‌ی سینولاکیس^{۱۱}،^[۱۱] برای بالاروی موج تک در حالت بدون شکست ارائه شد که براساس حل معادله‌ی غیرخطی آب کم‌عمق بود. همچنین رابطه‌ی مذکور با اطلاعات آزمایشگاهی مقایسه و نتایج قابل قبولی حاصل شده است.^[۱۱]

برخی پژوهشگران (۲۰۰۲)، نیز یک روش جدید آزمایشگاهی برای تولید موج تک توسط موج‌ساز پیستونی و تئوری رایلی^{۱۲} ارائه کردند و نتایج آن‌ها به همان اندازه بهینه و دقیق^{۱۳} بود که با روش بوسینسک انجام شده بود. همچنین در روش مذکور، دامنه‌ی^{۱۴} امواج دنباله‌ی^{۱۵} کوچک‌تری در پشت موج تک نسبت به روش گرینگ^{۱۶}،^[۱۲] تولید می‌شود. در پژوهش مذکور، از ۴ تئوری مختلف برای حرکت موج‌ساز نیز استفاده شده است، که عبارت‌اند از: بوسینسک، رایلی، تئوری مرتبه‌ی اول آب کم‌عمق (SWFO)،^{۱۷} و تئوری مرتبه‌ی دوم آب کم‌عمق (SWSO).^[۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵]

در سال ۱۳۸۹ نیز یک مدل حجم محدود بر مبنای معادلات غیرخطی آب کم‌عمق برای بررسی انتشار و بالاروی امواج تک در حالت با و بدون شکست ارائه شده و نتایج مربوط به نیمرخ‌های شیب‌سازی سطح آزاد و تاریخچه‌ی زمانی جابه‌جایی سطح آزاد، توافق رضایت‌بخشی با جواب تحلیلی موجود و نیز داده‌های آزمایشگاهی نشان داده است.^[۱۶]

همچنین در سال ۱۳۹۰، یک مدل دوبعدی براساس روش حجم سیال (VOF) برای تعیین مشخصه‌ی سطح آب معرفی و مدل موردنظر با نتایج آزمایشگاهی درخصوص یک مثال صحت‌سنجی شد. سپس میدان سرعت و فشار ناشی از برخورد یک موج تک به یک موج‌شکن شناور مهارشده با استفاده از مدل مذکور به دست آمد. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که امواج در حال شکست قادر

هستند نیروهای بسیار بیشتری در مقایسه با امواج بدون شکست به موج‌شکن وارد کنند.^[۱۷] در سال ۲۰۱۲ نیز با استفاده از روش عددی هیدرودینامیک ذره‌ی هموار به بررسی انتشار و عبور موج تک بر روی بستر ناهموار پرداخته و در روش عددی ذکر شده، فرم ضعیف معادلات ناویر - استوکس در حالت تراکم‌پذیر در نظر گرفته شد.^[۱۸]

همچنین برخی پژوهشگران (۲۰۱۴) با استفاده از روش نقاط محدود و براساس فرمول‌بندی پتانسیل سرعت، بر روی تولید موج بهینه و دقیق حاصل از موج‌ساز پیستونی تمرکز کردند که در ابتدا مدل عددی با نتایج حاصل از اطلاعات آزمایشگاهی مقایسه و صحت‌سنجی شد و سپس، شبیه‌سازی حرکت پدال موج‌ساز برای تولید موج تک توسط ۴ تئوری حرکت موج‌ساز مطالعه شد که عبارت‌اند از: بوسینسک، رایلی، گیرمشاو و فِشِن.^[۱۹-۲۱]

نتایج حاصل از پژوهش حاضر نشان می‌دهد که: اولاً، مدل‌سازی گرینگ برای تولید موج تک که با روش رایلی انجام می‌گیرد، فقط برای امواج با نسبت ارتفاع موج به عمق آب کم دقت خوبی دارد. ثانیاً، موج تولیدی توسط روش حل فِشِن با در نظر گرفتن فرمول حرکت پدال گرینگ بهینه‌تر و دقیق‌تر نسبت به سایر روش‌هاست. در سال ۲۰۱۵، نیز بالاروی موج تک بر روی سطوح شیب‌دار و همچنین فشار موج تک بر روی دیوار قائم با استفاده از یک سری روش‌های آزمایشگاهی انجام و پیشینه‌ی ارتفاع بالاروی حاصل از آزمایش‌ها با روابط موجود مقایسه شده است. آزمایش‌های مذکور بر روی سطوح شیب‌دار با زوایای ۱۵، ۲۰ و ۴۵ درجه انجام و مجموعه‌ی از معادلات تجربی بر روی اطلاعات آزمایشگاهی ذکر شده درون‌یابی شدند.^[۲۲]

در سال‌های اخیر، روشی بدون شبکه با استفاده از توابع پایه نمایی^{۲۰} برای حل مسائل مختلف مهندسی ارائه شده است.^[۲۳] و در سال ۲۰۱۲، نیز روش اخیر برای تحلیل لاگرانژی سیال تراکم‌ناپذیر با سطح آزاد و بررسی اندرکنش آن با مرزهای نفوذناپذیر در مسائل مختلف مکانیک سیالات توسعه داده شده است.^[۲۴، ۲۵] که در آن تراکم‌ناپذیری سیال در مسائل دینامیکی به صورت دقیق ارضاء و معادلات حاکم فقط به معادلات فشار ساده می‌شود و سایر مشخصه‌های سیال، نظیر: شتاب، سرعت و جابه‌جایی از آن به دست می‌آید. این ویژگی باعث می‌شود که شرایط مرزی مسئله بسیار ساده بیان شود. در این راستا، پاسخ کلی سیستم در هر گام زمانی، به صورت مجموعی از توابع پایه نمایی با یک سری ضرایب ثابت در نظر گرفته می‌شود؛ به صورتی که توابع پایه نمایی در معادلات دیفرانسیل به طور دقیق صدق می‌کنند و ضرایب ثابت از ارضاء شرایط مرزی در مرزهای سیال، شامل سطح آزاد و دیواره‌های نفوذناپذیر جامد به دست می‌آیند. در پژوهش حاضر، حل بدون شبکه با استفاده از توابع پایه نمایی مبتنی بر فرمول‌بندی لاگرانژی جهت تولید و انتشار موج تک و بالاروی آن بر روی شیب توسعه داده شده است؛ همچنین الگوریتم زمانی پایدار و مناسبی برای این مسائل ارائه شده است. سپس نتایج به دست آمده از روش عددی توسعه داده شده با مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی راستی‌آزمایی^{۲۱} شده‌اند.

۲. معادلات حاکم و شرایط مرزی مسائل سطح آزاد بر

مبنای فشار

معادلات لاگرانژی حاکم بر حرکت سیال غیر لزج و تراکم‌ناپذیر با سطح آزاد، شامل معادله‌ی پیوستگی (بقای جرم) و معادله‌ی تعادل دینامیکی (بقای اندازه‌ی حرکت)

۳. روش مبتنی بر توابع پایه نمایی برای حل معادله‌ی

لاپلاس فشار

باسخ رابطه‌ی ۴، در کل دامنه‌ی حل با استفاده از توابع پایه نمایی به صورت رابطه‌ی ۹ در نظر گرفته می‌شود: [۲۵]

$$\hat{p}_H = \sum C_i e^{\alpha_i x + \beta_i y} \quad (۹)$$

که در آن، x و y مختصات یک نقطه‌ی عمومی در دامنه‌ی Ω ، α_i و β_i اعداد مختلط و C_i ضرایب ثابت مستقل از مختصات هستند. حال با قرار دادن رابطه‌ی ۹ در معادله‌ی ۴، رابطه‌ی ۱۰ به دست می‌آید:

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 = 0 \quad (۱۰)$$

با توجه به رابطه‌ی ۱۰، می‌توان مقادیر α و β را به صورت رابطه‌ی ۱۱ به دست آورد:

$$\alpha_i = \pm i\beta_i \text{ or } \beta_i = \pm i\alpha_i \quad (۱۱)$$

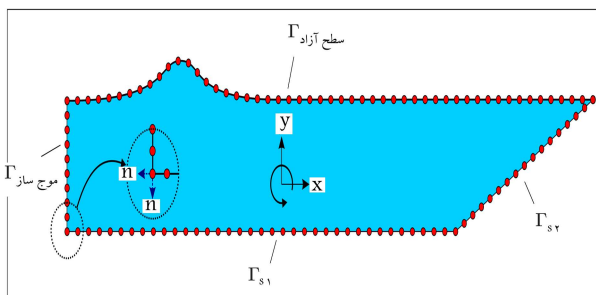
که در آن، $i = \sqrt{-1}$ است. نحوه‌ی گزینش پایه‌های موردنظر در پیوست الف ارائه شده است. [۲۳] در ادامه، حل معادله‌ی لاپلاس فشار، باید ضرایب C_i رابطه‌ی ۹ محاسبه شوند. برای این منظور، دامنه‌ی مسئله به تعدادی نقطه که مرزهای سیال را تشکیل می‌دهند، گسسته‌سازی می‌شود. به‌منظور سهولت در محاسبه‌ی بردارهای مختلف بر روی مرز و حفظ ترتیب نقاط مرزی، نقاط به صورت پادساعت‌گرد شماره‌گذاری می‌شوند. توجه شود که در گوشه‌های ناحیه‌ی حل، از دو نقطه در یک محل استفاده خواهد شد که هر کدام از آن‌ها جزء یکی از مرزهای متقاطع محسوب می‌شوند و بردار نرمال متفاوت خواهند داشت. در دو گوشه‌ی سطح آزاد نیز از دو نقطه‌ی مرزی استفاده می‌شود که یکی جزء دیواره و دیگری جزء سطح آزاد محسوب می‌شود (شکل ۲). [۲۴]

برای محاسبه‌ی ضرایب C_i از رابطه‌ی ۱۲ استفاده می‌شود: [۲۳]

$$C_i = \mathbf{V}_i^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{P}}_B \quad (۱۲)$$

که در آن، درایه‌های بردار $\bar{\mathbf{P}}_B$ ، مقادیر شرایط مرزی در نقطه‌ی مرزی موردنظر است (رابطه‌ی ۱۳):

$$\bar{\mathbf{P}}_B = \{(p_B)_1, (p_B)_2, \dots, (p_B)_m, (\partial(p_B)_{m+1}), (\partial(p_B)_{m+2}), \dots, (\partial(p_B)_n)^T\} \quad (۱۳)$$



شکل ۲. نقاط مرزی استفاده‌شده در روش عددی و قرارگیری دو نقطه‌ی مرزی در گوشه‌ها.

به صورت روابط ۱ و ۲ بیان می‌شود: [۲۴]

$$\nabla^2 p = 0 \quad (۱)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (۲)$$

که در آن‌ها، p فشار، ρ چگالی سیال، \mathbf{u} بردار سرعت سیال و $\mathbf{g} = \langle 0, -g \rangle^T$ بردار حاوی شتاب ثقل است. شرایط مرزی نیز براساس فشار معرفی می‌شود. در این راستا، فشار به صورت رابطه‌ی ۳ فرض می‌شود:

$$p = p_H - \rho g y \quad (۳)$$

که در آن، y مؤلفه‌ی قائم مختصات دکارتی، p_H یک جواب همگن و $-\rho g y$ جواب خصوصی برای معادلات دیفرانسیل حاکم است. با قراردادن فشار کل از رابطه‌ی ۳ در معادلات ۱ و ۲، روابط ۴ و ۵ به دست می‌آیند:

$$\nabla^2 p_H = 0 \quad (۴)$$

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p_H \quad (۵)$$

شرط مرزی معادله بر روی مرزهای نفوذناپذیر در تماس با سیال به صورت رابطه‌ی ۶ به دست می‌آید:

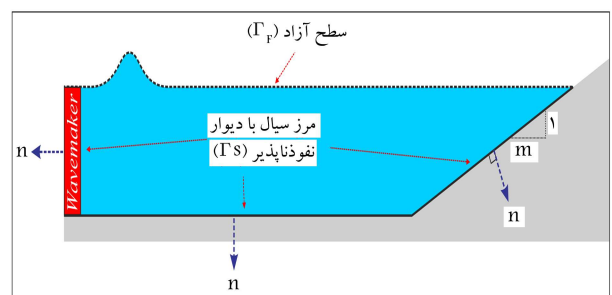
$$\rho \mathbf{n}^T \mathbf{a} = -\mathbf{n}^T \nabla p_H \Rightarrow \left. \frac{\partial p_H}{\partial n} \right|_{\Gamma_S} = -\rho \mathbf{n}^T \mathbf{a} \Big|_{\Gamma_S} = -\rho \mathbf{n}^T \mathbf{a}_s \quad (۶)$$

که در آن، \mathbf{n} بردار یکه‌ی عمود (نرمال خارجی) بر مرز سیال در تماس با دیواره‌ی صلب (Γ_S) است (شکل ۱) و بردار \mathbf{a} شتاب سازه‌ی صلب در تماس با سیال است. در مسئله‌ی تولید و انتشار موج تک، فقط در مرز مجاور موج‌ساز پیستونی، شتاب وجود خواهد داشت. بر این اساس اگر $\xi(t)$ معرف جابه‌جایی پدال موج‌ساز باشد در مرز مجاور موج‌ساز، $\mathbf{a} = \langle \xi(t), 0 \rangle^T$ در سایر دیواره‌ها، $\mathbf{a} = \langle 0, 0 \rangle^T$ خواهد بود. همچنین، شرط مرزی بر روی سطح آزاد (Γ_F) نیز به صورت رابطه‌ی ۷ در نظر گرفته می‌شود (شکل ۱).

$$p|_{\Gamma_F} = 0 \quad (۷)$$

که با توجه به رابطه‌ی ۳، رابطه‌ی ۸ را خواهیم داشت:

$$p_H|_{\Gamma_F} = \rho g y|_{\Gamma_F} \quad (۸)$$



شکل ۱. دامنه‌ی مسئله و مرزهای سیال احاطه‌شده توسط دیواره‌های صلب و موج‌ساز.

که در آن، G^+ شبه معکوس^{۲۳} ماتریس G است. در پایان \hat{P}_H به صورت رابطه‌ی ۲۳ محاسبه می‌شود:

$$\hat{p}_H = \Re \left[\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{s_i} e^{\alpha_i x + \beta_i y} \mathbf{V}_i^T \right) \mathbf{R} \bar{\mathbf{P}}_B \right] \quad (23)$$

که در آن، $\Re[\cdot]$ بیان‌گر قسمت حقیقی مقادیر محاسبه شده است.

۴. معادله‌ی تحریک‌کننده‌ی پدال موج‌ساز

قدم اول در بررسی بالا روی موج تک، تعیین معادله و شبه‌سازی عددی تولید موج تک است. یکی از روش‌های متداول تولید و انتشار موج تک در آزمایشگاه، استفاده از پدال موج‌ساز با یک سیستم تحریک‌کننده است. برای ایجاد موج تک با مشخصات موردنظر، ابتدا لازم است روابط ریاضی آن به دست آید و پس از تحلیل توسط رایانه به بخش آزمایشگاه اعمال شود. با فرض پایدار بودن شکل موج تک در طول فرایند تولید، گرینگ فرمولی برای تعیین حرکت پدال موج‌ساز پیستونی ارائه کرده است.^[۲] با فرض پایدار بودن شکل موج تک در طول فرایند تولید، گرینگ معادله‌ی موقعیت پدال موج‌ساز را با استفاده از رابطه‌ی ۲۴ بیان می‌کند:

$$\frac{d\xi}{dt} = \bar{u}(\xi, t) \quad (24)$$

که در آن، $\xi(t)$ موقعیت پدال موج در هر زمان t و \bar{u} برابر با سرعت پدال موج است. با تغییر متغیر $X = (ct - \xi)$ در رابطه‌ی ۲۴، رابطه‌های ۲۵ و ۲۶ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \frac{d\xi}{dX} \frac{dX}{dt} = \frac{d\xi}{dX} \left(c - \frac{d\xi}{dt} \right) \\ \rightarrow \bar{u} &= \frac{d\xi}{dX} (c - \bar{u}) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\frac{d\xi}{dX} = \frac{\bar{u}(X(\xi))}{c - \bar{u}(X(\xi))} \quad (26)$$

در رابطه‌ی ۲۵، \bar{u} به صورت رابطه‌ی ۲۷ محاسبه می‌شود:

$$\frac{d\xi}{dt} = \bar{u}(\xi, t) = \frac{c\eta(X)}{h + \eta(X)} \quad (27)$$

که در آن، η تغییرمکان قائم سطح آزاد سیال در مجاورت پدال، c سرعت موج و h عمق آب است. این روش به نام متدلوژی گرینگ برای تولید موج تک معرفی می‌شود و در دهه‌های اخیر، به آن به‌عنوان اصلی‌ترین روش برای تولید موج تک توجه شده است؛ بنابراین، در پژوهش حاضر نیز از این متدلوژی برای تولید موج تک و ادامه‌ی روند حل مسئله استفاده شده است.

یک تئوری مرسوم برای تعیین مشخصات موج تک تولیدشده مبتنی بر معادله‌ی حرکت پدال، تئوری بوسینسک است،^[۱] که براساس فرمول ارائه‌شده‌ی متدلوژی گرینگ (رابطه‌ی ۲۴) اعمال می‌شود. در تئوری بوسینسک، جابه‌جایی سطح آزاد سیال به صورت رابطه‌ی ۲۸ بیان می‌شود:

$$\eta = H \operatorname{Sech}^2(KX) \quad (28)$$

که در آن، K ضریب کاهنده‌ی مرزی، H ارتفاع موج و $X = (ct - \xi)$ است. ضریب کاهنده‌ی مرزی برای تئوری بوسینسک به صورت رابطه‌ی ۲۹ حاصل می‌شود:

$$K = \sqrt{\frac{3H}{4h^3}} \quad (29)$$

که در آن، n تعداد کل نقاط بر روی مرزهای سیال و m تعداد نقاط استفاده‌شده بر روی سطح آزاد است. همچنین $(p_B)_k$ و $(\partial p_B)_k$ از رابطه‌های ۱۴ و ۱۵ به دست می‌آید:

$$(p_B)_k = [\rho g y]_{x=x_k, y=y_k} \quad (14)$$

$$\forall (x_k, y_k) \in \Gamma_F, k = 1, \dots, m$$

$$(\partial p_B)_k = -\rho [n_x \dot{u}_x + n_y \dot{u}_y]_{x=x_k, y=y_k}$$

$$\forall (x_k, y_k) \in \Gamma_S, k = m+1, \dots, n \quad (15)$$

باید توجه داشت که مقدار رابطه‌ی ۱۵ فقط در مجاورت دیواره‌های متحرک (نظیر پدال موج‌ساز در کانال تولید موج) مخالف صفر است. بردار \mathbf{V}_i براساس شرایط مرزی موجود در هر یک از نقاط مرزی و یا به عبارت دیگر، براساس درایه‌های بردار $\bar{\mathbf{P}}_B$ تعریف می‌شود. بنابراین در نقاط مربوط به Γ_S ، باید $\partial/\partial n$ پایه‌ی \mathbf{V}_i در آن نقطه محاسبه شود؛ در نقاط مربوط به Γ_F نیز مقدار پایه‌ی \mathbf{V}_i در آن نقطه محاسبه و در درایه‌ی نظیر آن در بردار \mathbf{V}_i قرار داده می‌شود. بنابراین، با توجه به توضیحات ارائه‌شده می‌توان \mathbf{V}_i را از رابطه‌ی ۱۶ به دست آورد:

$$\mathbf{V}_i = \frac{1}{s_j} \{ (p_i)_1, (p_i)_2, \dots, (p_i)_m \} \quad (16)$$

$$(\partial p_i)_{(m+1)}, (\partial p_i)_{m+2}, \dots, (\partial p_i)_n \}^T$$

که در آن، $(p_i)_k$ و $(\partial p_i)_k$ از روابط ۱۷ و ۱۸ به دست می‌آید:

$$(p_i)_k = [e^{\alpha_i x + \beta_i y}]_{x=x_k, y=y_k} \quad (17)$$

$$\forall (x_k, y_k) \in \Gamma_F, k = 1, \dots, m$$

$$(\partial p_i)_k = [(\alpha_i n_x + \beta_i n_y) e^{\alpha_i x + \beta_i y}]_{x=x_k, y=y_k}$$

$$\forall (x_k, y_k) \in \Gamma_S, k = m+1, \dots, n \quad (18)$$

همچنین s_i ضریب یکه کردن بردارهای مشارکت پایه‌هاست که از رابطه‌ی ۱۹ به دست می‌آید:^[۲۳]

$$s_i = \max_l (|V_i^l|), l = 1, \dots, M \quad (19)$$

که در آن، V_i^l برابر l امین المان \mathbf{V}_i و عبارت $|\cdot|$ طول خودالحاقی^{۲۲} است. سری \hat{P}_H با درنظر گرفتن رابطه‌ی ۱۲، به صورت رابطه‌ی ۲۰ نوشته می‌شود:

$$\hat{P}_H = \sum_{i=1}^N (\mathbf{V}_i^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{P}}_B) e^{\alpha_i x + \beta_i y} \quad (20)$$

حال اگر درایه‌های بردار $\bar{\mathbf{P}}_B$ را توسط سری \hat{P}_H برآورد کنیم، رابطه‌ی ۲۱ را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{P}}_B &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{V}_i^T \mathbf{R} \bar{\mathbf{P}}_B) \mathbf{V}_i = \mathbf{G} \bar{\mathbf{P}}_B, \\ \mathbf{G} &= \sum_{i=1}^N (\mathbf{V}_i \mathbf{V}_i^T) \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن، \mathbf{G} ماتریس متقارن $M \times M$ است. از آنجایی که ممکن است مرتبه‌ی ماتریس اخیر کمتر از M شود؛ بنابراین ماتریس \mathbf{R} به صورت رابطه‌ی ۲۲ محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{R} = \mathbf{G}^+ \quad (22)$$

حال اگر $\mathbf{a}^{n-1} = \mathbf{a}(\mathbf{x}^{n-1}, t^{n-1})$ شتاب نقاط مرزی در یک گام زمانی قبل باشد، شتاب به صورت رابطه ۳۸ در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathbf{a}(\bar{t}) = \mathbf{a}^{n-1} + \frac{\mathbf{a}^n - \mathbf{a}^{n-1}}{\Delta t} \bar{t} \quad 0 \leq \bar{t} \leq 2\Delta t \quad (38)$$

که در آن، $\bar{t} = 0$ متناظر با $t = t^{n-1}$ است. حال با انتگرال‌گیری از رابطه ۳۸، سرعت به صورت رابطه ۳۹ حاصل می‌شود:

$$\mathbf{u}(\bar{t}) = c_1 + \mathbf{a}^{n-1} \bar{t} + \frac{1}{2} \frac{\mathbf{a}^n - \mathbf{a}^{n-1}}{\Delta t} \bar{t}^2 \quad (39)$$

که در آن، ضریب c_1 براساس مقدار اولیه‌ی زمان به صورت رابطه ۴۰ محاسبه می‌شود:

$$\bar{t} = 0 \rightarrow c_1 = \mathbf{u}^{n-1} \quad (40)$$

سپس با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی سرعت (رابطه ۳۹)، موقعیت نقاط مرزی سیال به صورت رابطه ۴۱ به دست می‌آید:

$$\mathbf{x}(\bar{t}) = c_2 + \mathbf{u}^{n-1} \bar{t} + \frac{\mathbf{a}^{n-1}}{2} \bar{t}^2 + \frac{1}{6} \frac{\mathbf{a}^n - \mathbf{a}^{n-1}}{\Delta t} \bar{t}^3 \quad (41)$$

که در آن نیز، ضریب c_2 براساس مقدار اولیه‌ی زمان به صورت رابطه ۴۲ حاصل می‌شود:

$$\bar{t} = 0 \rightarrow c_2 = \mathbf{x}^{n-1} \quad (42)$$

حال برای محاسبه‌ی جابه‌جایی نقاط مرزی در بازه‌ی زمانی $\bar{t} = \Delta t$ تا $\bar{t} = 2\Delta t$ (متناظر با $t = t^n$ تا $t = t^{n+1}$) رابطه‌های ۴۳ و ۴۴ را خواهیم داشت:

$$\Delta \tilde{\mathbf{x}}^n = \mathbf{x}(\bar{t} = 2\Delta t) - \mathbf{x}(\bar{t} = \Delta t) \quad (43)$$

$$\Delta \tilde{\mathbf{x}}^n = \mathbf{u}^{n-1} \Delta t + \frac{1}{6} (2\mathbf{a}^{n-1} + 3\mathbf{a}^n) \Delta t^2 \quad (44)$$

بنابراین رابطه ۴۵ به دست می‌آید:

$$\tilde{\mathbf{x}}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta \tilde{\mathbf{x}}^n \quad (45)$$

و در نهایت رابطه ۴۶ را خواهیم داشت:

$$\tilde{\mathbf{x}}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \mathbf{u}^{n-1} \Delta t + \frac{1}{6} (2\mathbf{a}^{n-1} + 3\mathbf{a}^n) \Delta t^2 \quad (46)$$

که در آن، $\tilde{\mathbf{x}}^{n+1}$ هندسه‌ی واسطه ۲۴ نامیده می‌شود؛ زیرا از هندسه‌ی واسطه برای ارضاء تعادل در انتهای بازه استفاده و سپس هندسه‌ی نهایی در این گام زمانی محاسبه می‌شود. بنابراین شرایط مرزی در انتهای گام زمانی، لحظه‌ی t^{n+1} و در هندسه‌ی واسطه $\tilde{\mathbf{x}}^{n+1}$ ، با استفاده از رابطه ۱۳ به صورت رابطه ۴۷ بیان می‌شود:

$$\bar{\mathbf{P}}_B^{n+1} = \bar{\mathbf{P}}_B(\tilde{\mathbf{x}}^{n+1}, t^{n+1}) \quad (47)$$

بردار \mathbf{V}_i نیز با استفاده از رابطه ۱۶ در لحظه‌ی t^{n+1} و در هندسه‌ی $\tilde{\mathbf{x}}^{n+1}$ محاسبه و به صورت رابطه ۴۸ بیان می‌شود:

$$\mathbf{V}_i^{n+1} = \mathbf{V}_i(\tilde{\mathbf{x}}^{n+1}, t^{n+1}) \quad (48)$$

همچنین سرعت موج نیز در تئوری بوسینسک به صورت رابطه ۳۰ بیان می‌شود:

$$c = \sqrt{g(h+H)} \quad (30)$$

باید توجه داشت که گرینگ توانست امواج دنباله‌ی تولیدی در پشت موج نک را توسط تئوری بوسینسک به میزان کمینه برساند.

۵. الگوریتم لاگرانژی حل و به‌هنگام‌سازی هندسه

پس از ارائه‌ی نحوه‌ی حل معادله‌ی لاپلاس فشار توسط توابع پایه‌ی نمایی، لازم است تا نحوه‌ی حل مسائل در زمان بیان شود. در اینجا، الگوریتم موردنظر براساس اصلاح الگوریتم بیان‌شده توسط نویسنده‌ی مسئول و همکاران،^[۲۴] توسعه داده شده است. در ابتدا، هندسه‌ی اولیه‌ی مسئله‌ی موردنظر تعریف و نقاط مرزی بر روی مرزها قرار داده می‌شود. سرعت نقاط مرزی نیز براساس شرایط اولیه‌ی مسئله مقداردهی می‌شود؛ بدیهی است در مسائلی که از حالت سکون آغاز می‌شوند، سرعت اولیه‌ی همه‌ی نقاط مرزی برابر صفر خواهد بود. پس از تقسیم کل زمان حل به بازه‌های زمانی کوچک Δt در هر گام زمانی، معادله‌ی ۴ دو مرتبه حل می‌شود. اگر شبیه‌سازی در گام n ام $\Delta t^n = t^{n+1} - t^n$ است، سرعت سیال در ابتدای گام n ام، یعنی لحظه‌ی t^n به صورت $\mathbf{u}^n = \mathbf{u}(\mathbf{x}^n, t^n)$ نشان داده می‌شود. ابتدا، شرایط مرزی در لحظه‌ی t^n و در هندسه‌ی \mathbf{x}^n در لحظه‌ی t^n ، با استفاده از رابطه ۱۳ مطابق رابطه ۳۱ محاسبه می‌شود:

$$\bar{\mathbf{P}}_B^n = \bar{\mathbf{P}}_B(\mathbf{x}^n, t^n) \quad (31)$$

بردار \mathbf{V}_i نیز با استفاده از رابطه ۱۶ در لحظه‌ی t^n و در هندسه‌ی \mathbf{x}^n محاسبه و به صورت رابطه ۳۲ بیان می‌شود:

$$\mathbf{V}_i^n = \mathbf{V}_i(\mathbf{x}^n, t^n) \quad (32)$$

بدین ترتیب پاسخ معادله‌ی ۴ به صورت رابطه ۳۳ در نظر گرفته می‌شود:

$$\hat{p}_H^n = \sum C_i^n e^{\alpha_i x + \beta_i y} \quad (33)$$

و ضرایب C_i^n از رابطه ۳۴ به دست خواهد آمد:

$$C_i^n = \mathbf{V}_i^{nT} \mathbf{R}^n \bar{\mathbf{P}}_B^n \quad (34)$$

که در آن، \mathbf{R}^n از رابطه ۳۵ محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{R}^n = \left(\sum (\mathbf{V}_i^n \mathbf{V}_i^{nT}) \right)^{-1} \quad (35)$$

بنابراین حل معادله‌ی لاپلاس فشار در ابتدای گام زمانی n ام در لحظه‌ی t^n کامل خواهد بود. حال رابطه ۵ را در نظر بگیرید؛ اگر شتاب لاگرانژی $\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$ را با \mathbf{a} نشان دهیم، از رابطه ۳۶ به دست می‌آید:

$$\mathbf{a} = -\frac{1}{\rho} \nabla \hat{P}_H \quad (36)$$

و بنابراین می‌توان شتاب نقاط مرزی در موقعیت \mathbf{x}^n و در لحظه‌ی t^n را به صورت رابطه ۳۷ نوشت:

$$\mathbf{a}^n = \mathbf{a}(\mathbf{x}^n, t^n) = -\frac{1}{\rho} \Re \left[\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{s_i^n} \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} e^{\alpha_i x + \beta_i y} \mathbf{V}_i^{nT} \right) \mathbf{R}^n \bar{\mathbf{P}}_H^n \right] \quad (37)$$

از طرفی با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی سرعت (رابطه‌ی ۵۶)، موقعیت نقاط مرزی سیال به صورت رابطه‌ی ۶۰ به دست می‌آید:

$$\mathbf{x}(\bar{t}) = \frac{1}{\sqrt{4}\Delta t^2} (12\mathbf{a}^{n-1}\bar{t}^2\Delta t^2 - (6\mathbf{a}^{n-1} - 8\mathbf{a}^n + 2\mathbf{a}^{n+1})\bar{t}^2\Delta t + (\mathbf{a}^{n-1} - 2\mathbf{a}^n + \mathbf{a}^{n+1})\bar{t}^2) + c_2 \quad (60)$$

که در آن، ضریب c_2 براساس مقدار اولیه‌ی زمان به صورت رابطه‌ی ۶۱ به دست می‌آید:

$$\bar{t} = 0 \rightarrow c_2 = \mathbf{x}^{n-1} \quad (61)$$

حال برای محاسبه‌ی جابه‌جایی نقاط مرزی در بازه‌ی زمانی $\bar{t} = \Delta t$ تا $\bar{t} = 2\Delta t$ (متناظر با $t = t^n$ تا $t = t^{n+1}$) رابطه‌های ۶۲ و ۶۳ را خواهیم داشت:

$$\Delta \mathbf{x}^n = \mathbf{x}(\bar{t} = 2\Delta t) - \mathbf{x}(\bar{t} = \Delta t) \quad (62)$$

$$\Delta \mathbf{x}^n = \mathbf{u}^{n-1}\Delta t + \frac{1}{\sqrt{4}}(9\mathbf{a}^{n-1} + 26\mathbf{a}^n + \mathbf{a}^{n+1})\Delta t^2 \quad (63)$$

حال می‌توان رابطه‌ی ۶۴ را نوشت:

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \Delta \mathbf{x}^n \quad (64)$$

و در نهایت، هندسه‌ی نهایی \mathbf{x}^{n+1} در انتهای گام n ام ($t^{n+1} - t^n$) به صورت رابطه‌ی ۶۵ محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \mathbf{u}^{n-1}\Delta t + \frac{1}{\sqrt{4}}(9\mathbf{a}^{n-1} + 26\mathbf{a}^n + \mathbf{a}^{n+1})\Delta t^2 \quad (65)$$

سرعت نهایی نقاط مرزی در هندسه‌ی نهایی با توجه به رابطه‌ی ۵۹، به صورت رابطه‌ی ۶۶ محاسبه و به عنوان سرعت اولیه‌ی گام زمانی بعدی جایگزین می‌شود:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}(\mathbf{x}^{n+1}, t^n) + \frac{1}{\sqrt{4}}(-\mathbf{a}^{n-1}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n-1}) + 8\mathbf{a}^n(\mathbf{x}^{n+1}, t^n) + 5\mathbf{a}^{n+1}(\mathbf{x}^{n+1}, t^{n+1}))\Delta t \quad (66)$$

۶. شبیه‌سازی بالاروی موج تک بر روی سطوح شیب‌دار

در بخش کنونی، ابتدا دقت نتایج روش عددی حاضر در شبیه‌سازی بالاروی موج تک در سطوح شیب‌دار در مقایسه با یک نمونه‌ی آزمایشگاهی بررسی و تأیید شده است. پس از اطمینان از دقت نتایج، مقدار بیشینه‌ی بالاروی موج محاسبه و با مقادیر آزمایشگاهی مقایسه شده است.

۱.۶. صحت‌سنجی شبیه‌سازی عددی

سینولاکس در سال ۱۹۸۶، مطالعه‌ی مهم و گسترده در زمینه‌ی بالاروی موج تک بر روی شیب سواحل انجام داده است.^[۷۶] که اهمیت مطالعه‌ی مذکور در آن است که شبیه‌سازی عددی و آزمایش‌های انجام‌شده، علاوه بر دقت بالا در حصول نتایج، با مقیاس مناسب، وضعیت واقعی پدیده‌ی مذکور را بررسی کرده است؛ به طوری که دامنه‌ی گسترده‌ی مطالعات موجود در این زمینه نیز از نتایج آزمایش ذکرشده به عنوان یک مرجع اصلی استفاده کرده‌اند. در آزمایش مذکور، موج تک

به این ترتیب ماتریس \mathbf{R}^{n+1} ، ضرایب C_i^{n+1} و پاسخ معادله‌ی ۴ به صورت رابطه‌های ۴۹ الی ۵۱ خواهند بود:

$$\mathbf{R}^{n+1} = (\sum (\mathbf{V}_i^{n+1} \mathbf{V}_i^{n+1T}))^{-1} \quad (49)$$

$$C_i^{n+1} = \mathbf{V}_i^{n+1T} \mathbf{R}^{n+1} \bar{\mathbf{P}}_B^{n+1} \quad (50)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_H^{n+1} = \sum C_i^{n+1} e^{\alpha_i x + \beta_i y} \quad (51)$$

و شتاب لاگرانژی نقاط مرزی در انتهای بازه‌ی زمانی، لحظه‌ی t^{n+1} و در موقعیت $\tilde{\mathbf{x}}^{n+1}$ ، با توجه به رابطه‌ی ۳۶ به صورت رابطه‌ی ۵۲ محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{a}^{n+1} = \mathbf{a}(\tilde{\mathbf{x}}^{n+1}, t^{n+1}) = \frac{1}{\rho} \Re \left[\left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{s_i^{n+1}} \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} e^{\alpha_i x + \beta_i y} \mathbf{V}_i^{n+1T} \right) \mathbf{R}^{n+1} \bar{\mathbf{P}}_H^{n+1} \right] \quad (52)$$

توجه شود که ضرایب α_i و β_i در تمامی روابط ذکرشده و در طول حل ثابت در نظر گرفته می‌شوند. حال می‌توان برآورد دقیق‌تری از توزیع شتاب به دست آورد؛ بنابراین در این حالت شتاب لاگرانژی به صورت رابطه‌ی سهموی (رابطه‌ی ۵۳) بیان می‌شود:

$$\mathbf{a}(\bar{t}) = \mathbf{A}_{-1} + \mathbf{A}_0 \bar{t} + \mathbf{A}_1 \bar{t}^2, \quad 0 \leq \bar{t} \leq 2\Delta t \quad (53)$$

که در آن، $\bar{t} = 0$ متناظر با $t = t^{n-1}$ است. در این حالت، یک دستگاه ۳ معادله با ۳ مجهول به صورت رابطه‌ی ۵۴ خواهیم داشت:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \Delta t & \Delta t^2 \\ 1 & 2\Delta t & 4\Delta t^2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{-1} \\ \mathbf{A}_0 \\ \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{n-1} \\ \mathbf{a}^n \\ \mathbf{a}^{n+1} \end{bmatrix} \quad (54)$$

حال با حل دستگاه ذکرشده، ضرایب شتاب به صورت رابطه‌ی ۵۵ به دست می‌آیند:

$$\mathbf{a}(\bar{t}) = \mathbf{a}^{n-1} + \left(-\frac{3\mathbf{a}^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{2\mathbf{a}^n}{\Delta t} - \frac{\mathbf{a}^{n+1}}{2\Delta t} \right) \bar{t} + \left(\frac{\mathbf{a}^{n-1}}{2\Delta t^2} - \frac{\mathbf{a}^n}{\Delta t^2} + \frac{\mathbf{a}^{n+1}}{2\Delta t^2} \right) \bar{t}^2 \quad (55)$$

حال با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی ۵۵، سرعت به صورت رابطه‌ی ۵۶ به دست می‌آید:

$$\mathbf{u}(\bar{t}) = c_1 + \mathbf{a}^{n-1} \bar{t} - \frac{(3\mathbf{a}^{n-1} - 4\mathbf{a}^n + \mathbf{a}^{n+1})\bar{t}^2}{4\Delta t} + \frac{(\mathbf{a}^{n-1} - 2\mathbf{a}^n + \mathbf{a}^{n+1})\bar{t}^3}{6\Delta t^2} \quad (56)$$

که در آن، ضریب c_1 براساس مقدار اولیه‌ی زمان به صورت رابطه‌ی ۵۷ محاسبه می‌شود:

$$\bar{t} = 0 \rightarrow c_1 = \mathbf{u}^{n-1} \quad (57)$$

حال برای محاسبه‌ی تغییر در سرعت نقاط مرزی در بازه‌ی زمانی $\bar{t} = \Delta t$ تا $\bar{t} = 2\Delta t$ (متناظر با $t = t^n$ تا $t = t^{n+1}$) رابطه‌ی ۵۸ و ۵۹ را خواهیم داشت:

$$\Delta \mathbf{u}^n = \mathbf{u}(\bar{t} = 2\Delta t) - \mathbf{u}(\bar{t} = \Delta t) \quad (58)$$

$$\Delta \mathbf{u}^n = \frac{1}{\sqrt{4}}(-\mathbf{a}^{n-1} + 8\mathbf{a}^n + 5\mathbf{a}^{n+1})\Delta t \quad (59)$$

زمان مشاهده شده در زیر تصاویر موجود در شکل ۵ با استفاده از رابطه ۶۷ بی بعد شده است:

$$T = \frac{t}{\sqrt{h/g}} \quad (67)$$

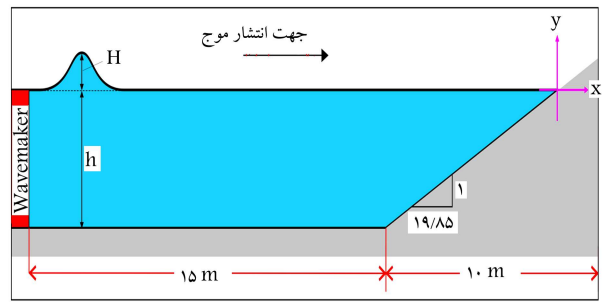
که در آن، t زمان محاسباتی توسط روش عددی حاضر است؛ همچنین x_0 در شکل های ۵ و ۶، مبدأ مختصات با توجه به شکل ۳ است. با مقایسه ی نتایج شکل های ۵ و ۶، دقت قابل قبولی بین نتایج آزمایشگاهی و روش عددی مشاهده می شود.

تکامل موج تک از ابتدای تولید تا بالاروی بر روی شیب در شکل ۷ مشاهده می شود که مطابق آن شبیه سازی عددی به جز در انتهای شیب ($x = -0.24 m$)، در نزدیکی محل قطع سطح آب، در بقیه ی دامنه ی حل توانسته است پروفیل سطح آب را با دقت بالا تخمین بزند.

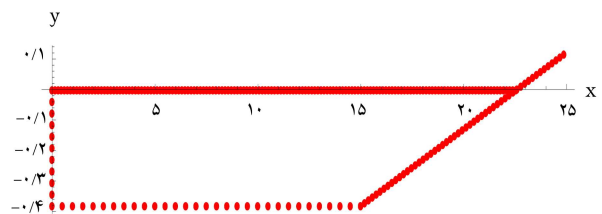
در سال ۱۹۹۷، نیز پژوهشی گسترده بر روی شبیه سازی بالاروی موج تک بر روی سطح شیب دار با استفاده از روش عددی معادلات انتگرال مرزی انجام شده است که در آن از یک کانال عددی با طولی به اندازه ۳۰ برابر عمق و برای موج تک با $H/h \leq 0.12$ به همراه عمق آب ۱ متر استفاده شده است. در شبیه سازی انجام شده از ۲۵۴ نقطه به همراه ۱۵۸ المان با گام زمانی ۰/۰۹ استفاده شده و

جدول ۱. مقایسه ی بیشینه ی ارتفاع بالاروی موج تک بر روی شیب 2.88° برای موج تک در حالت بدون شکست.

Input	R/h		$\frac{ R_{num.} - R_{exp.} }{R_{exp.}} \times 100$
	Exp.	num.	
0.05	0.19	0.17	10.52
0.06	0.22	0.21	4.54
0.07	0.26	0.25	3.84
0.08	0.29	0.3	3.33
0.09	0.36	0.34	5.55
0.12	0.48	0.46	4.16
0.14	0.52	0.53	1.88
0.17	0.63	0.66	4.54
0.19	0.76	0.77	1.29
0.22	0.98	1.05	6.66
0.25	1.02	0.97	4.90
0.28	1.23	1.32	6.81
0.34	1.44	1.45	0.68
0.38	1.46	1.44	1.36
0.4	1.56	1.58	1.26
0.47	1.91	1.9	0.52
0.51	1.98	1.89	4.54
0.55	2.07	2.23	7.17



شکل ۳. طرح کانال آزمایش سینولاکسیس برای بالاروی موج تک. [۷]

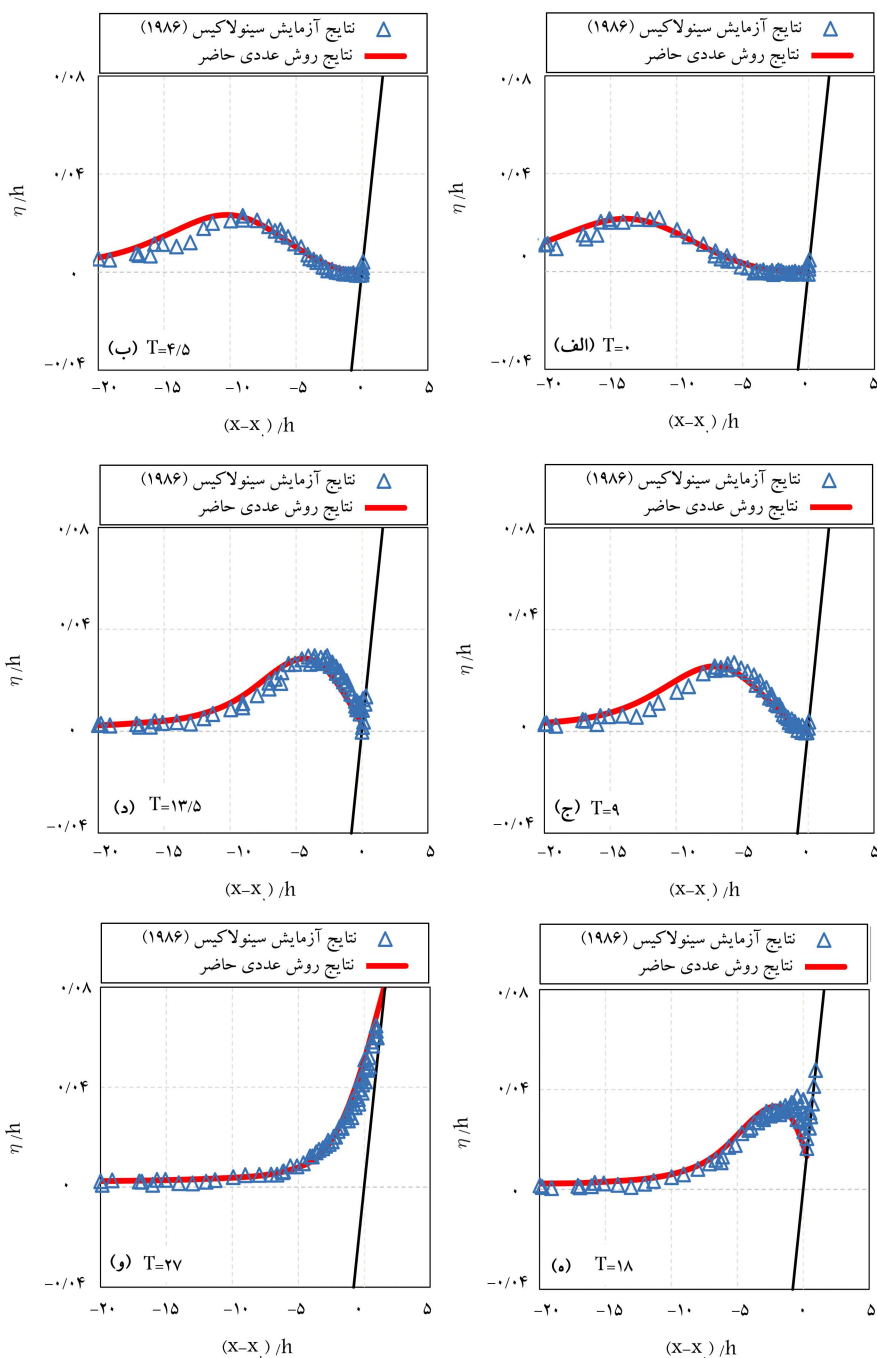


شکل ۴. نمونه یی از نقاط مرزی برای کانال آزمایش در مسئله ی بالاروی موج تک بر روی سطح شیب دار.

توسط مدلوی گرینگ و تئوری حرکت پدال بوسینسک تولید شده است. کانال آزمایشگاهی مورد استفاده در آزمایش مذکور، ۲۵ متر طول داشت که شامل دو قسمت بود: قسمت اول، به طول ۱۵ متر که به صورت مستقیم بود؛ و قسمت دوم، به طول ۱۰ متر که به صورت شیب دار با شیب ۱ به ۱۹/۸۵ (2.88° درجه) بود (شکل ۳). همچنین در آزمایش مذکور، عمق آب در کانال (h) بین ۰/۲۵ تا ۰/۳۲ سانتی متر و نسبت ارتفاع موج به عمق آب (H/h) بین ۰/۰۵ تا ۰/۶۳۳ متغیر در نظر گرفته شده است.

از آنجایی که در پژوهش حاضر، بالاروی موج تک در حالت بدون شکست مدنظر است، بنابراین فقط به اطلاعات آزمایشگاهی مربوط به حالت بدون شکست موج نیاز است. مطابق مطالعات سینولاکسیس، [۷] در کانال آزمایش مذکور برای نسبت $H/h \leq 0.55$ ، موج در حالت بالاروی دچار شکست نمی شود؛ بنابراین در ادامه ی بخش کنونی نیز از همین شرط برای انتخاب نسبت های ارتفاع موج به عمق آب در حالت بدون شکست استفاده شده است. تعداد نقاط مرزی مورد استفاده در روش عددی بسته به نوع مشخصات مسئله بین ۲۰۷ تا ۲۸۱ عدد، تعداد کل پایه ها ۱۶۰ عدد و گام زمانی انتخاب شده برای هر حل برابر ۰/۰۵ ثانیه بوده است. همچنین، بیشینه ی مدت زمان حل کامل توسط یک رایانه ی رومیزی ۶۴ بیتی ۲۶ برابر ۵۳۵ ثانیه (تقریباً ۹ دقیقه) است. نمونه یی از نقاط مرزی محاسباتی در روش عددی با توجه به ابعاد کانال برای آزمایش مذکور در شکل ۴ مشاهده می شود.

جهت انجام صحت سنجی روش عددی حاضر، از دو مورد آزمایش بیان شده در نوشتار سینولاکسیس، [۷] استفاده شده است. مشخصات مورد اول $H/h = 0.19$ با $h = 0.2855 m$ و مورد دوم $H/h = 0.4$ با $h = 0.3097 m$ است. انتخاب دو مورد ذکر شده به این علت است که علاوه بر بالاروی موج، مشخصات و تغییرات سطح آزاد سیال برای آن ها در نوشتار سینولاکسیس، موجود است. [۷] مقایسه ی تغییرات سطح آزاد سیال برای ۶ زمان مختلف در کانال موج بین روش عددی حاضر و اطلاعات آزمایشگاهی در شکل های ۵ و ۶ مشاهده می شود. به منظور یکسان سازی مشخصات مسئله با آنچه که در نوشتار سینولاکسیس، [۷] بیان شده است،



شکل ۵. مقایسه‌ی تغییرات سطح آزاد سیال در نقاط مختلف کانال آزمایش برای شرایط $H/h = 0.19$ با $h = 0.3097 \text{ m}$.

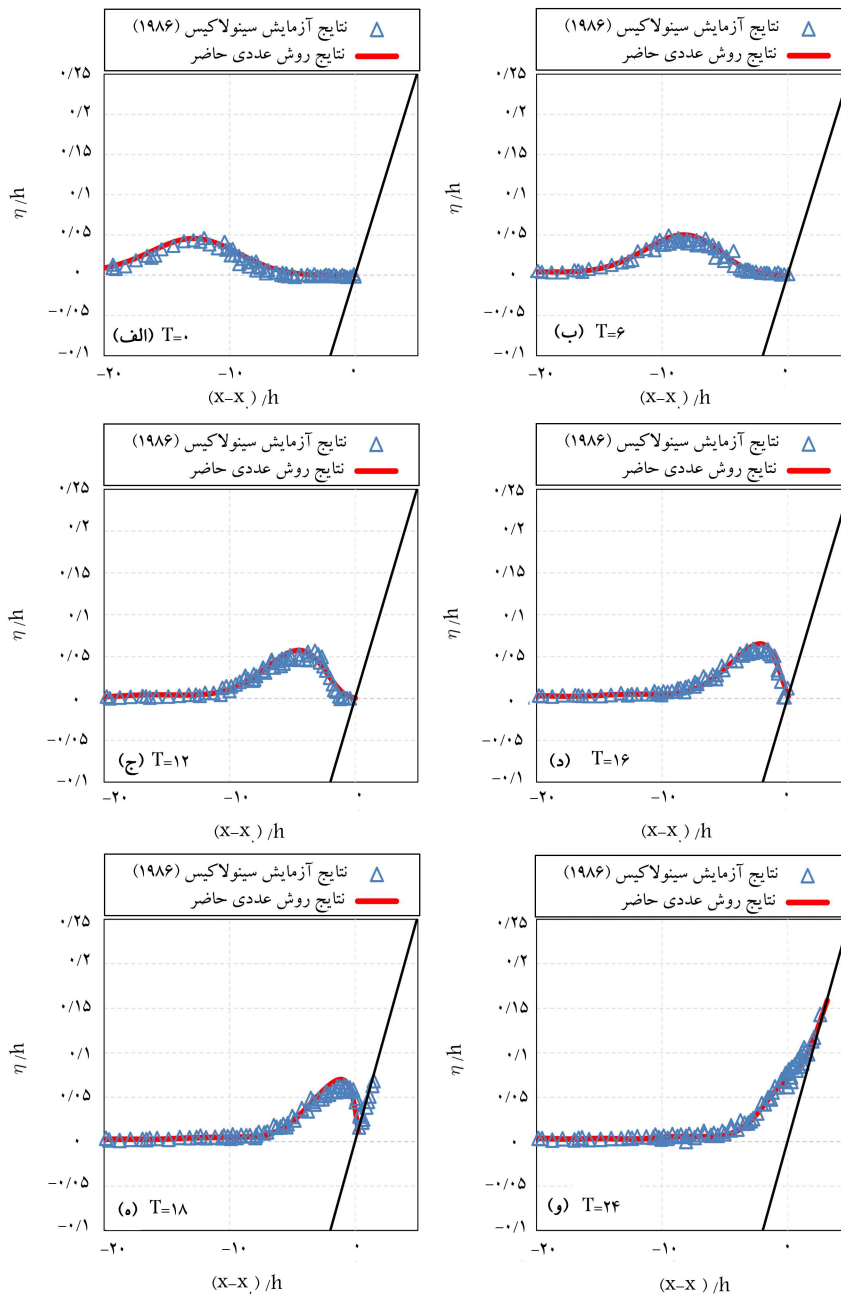
در شکل ۸ مشاهده می‌شود. نتایج حاصل بیان‌گر آن است که روش عددی پژوهش حاضر در مقایسه با یک روش عددی مشابه به‌خوبی و با دقت مناسبی بالا روی و برگشت موج تک را شبیه‌سازی می‌کند. با وجود این، اختلاف‌های اندکی بین روش پژوهش حاضر با روش‌های دیگر، مانند کمتر بودن ارتفاع موج انتشار یافته وجود دارد.

۲.۶. تخمین مقدار بالا روی موج تک

تعیین مقدار بالا روی سونامی در سواحل و پیش‌بینی محدوده‌ی ساحلی

کل مدت زمان شبیه‌سازی بر روی یک رایانه‌ی رومیزی و جدید برابر ۶۶ دقیقه بوده است. [۲۷]

به منظور مقایسه‌ی روش عددی حاضر با روش معادلات انتگرال مرزی، مشخصات مسئله‌ی بیان‌شده در پژوهش اخیر، در روش پژوهش حاضر اعمال شده است. برای این منظور، ۲۳۸ عدد نقطه‌ی مرزی به همراه ۱۶۰ عدد پایه و گام زمانی 0.05 ثانیه انتخاب شده است. در شبیه‌سازی انجام‌شده، بیشینه‌ی مدت زمان حل کامل توسط یک رایانه‌ی رومیزی برابر 600 ثانیه (۱۰ دقیقه) است. مقایسه‌ی تغییرات سطح آزاد سیال در کانال موج برای زمان‌های مختلف (تولید، انتشار و بالا روی) بین روش عددی پژوهش حاضر و روش معادلات انتگرال مرزی

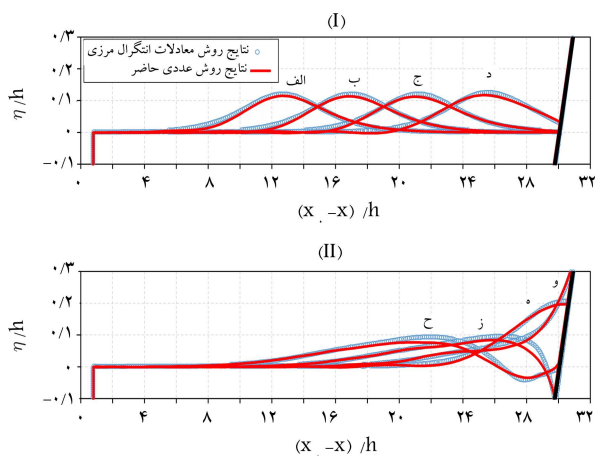


شکل ۶. مقایسه‌ی تغییرات سطح آزاد سیال در نقاط مختلف کانال آزمایش برای شرایط $H/h = 0.4$ با $h = 0.2855 \text{ m}$.

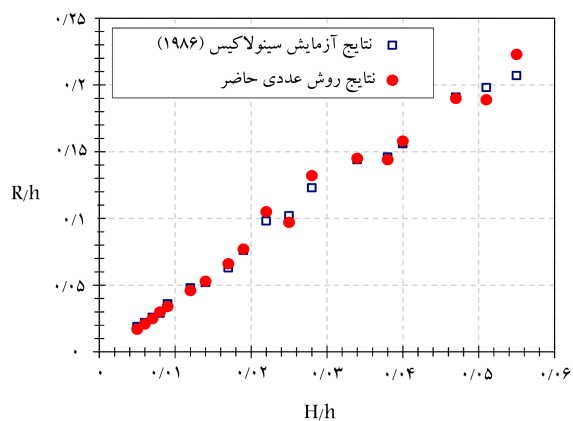
۷. نتیجه‌گیری

شبیه‌سازی انتشار یک موج تک که نماینده‌ی پیش‌روی سونامی به سمت سواحل و بالاروی آن است، اهمیت ویژه‌ی دارد. در نوشتار حاضر، روش بدون شبکه‌ی توابع پایه‌ی برای شبیه‌سازی دوبعدی انتشار موج تک توسعه داده شده است. استفاده از مفهوم لاگرانژی حرکت در کنار بدون شبکه بودن حل معادلات در روش مذکور، این امکان را فراهم می‌کند تا جابه‌جایی‌های سطح آزاد به‌خوبی توسط نقاط مرزی مدل‌سازی شود. در روش ذکرشده با دنبال کردن نقاط مرزی سیال می‌توان هندسه‌ی حل را به‌هنگام و به سادگی سرعت نقاط را محاسبه کرد. لذا هیچ‌گونه انتقال اطلاعات بین شبکه‌ی حل و یا نامنظمی شبکه و هزینه‌ی تولید شبکه‌ی جدید

که در معرض پدیده‌ی سونامی قرار می‌گیرد، اهمیت ویژه‌ی دارد. بدین منظور تخمین مقدار بیشینه‌ی بالاروی موج تک به عنوان نتیجه‌ی کاربردی پژوهش حاضر ارائه شده است. مقدار بیشینه‌ی بالاروی موج تک، که از طریق روش عددی مطرح شده در پژوهش حاضر تخمین زده شده است، با مقادیر آزمایشگاهی برای موج نشکسته مقایسه شده است که در جدول ۱ و شکل ۹ مشاهده می‌شود. همچنین در جدول ۱، مقدار خطای روش عددی حاضر در تخمین میزان بالاروی نسبی موج تک بر روی شیب 2.88° ارائه شده است. مقدار متوسط خطای 4.08% و بیشینه‌ی خطای 10% نشان می‌دهد که روش حاضر توانایی بالایی در تخمین بالاروی موج تک در حالت موج نشکسته را دارد. باید توجه داشت که امواج سونامی به علت طول موج بلند و ارتفاع نسبی کوتاه معمولاً نمی‌شکنند.

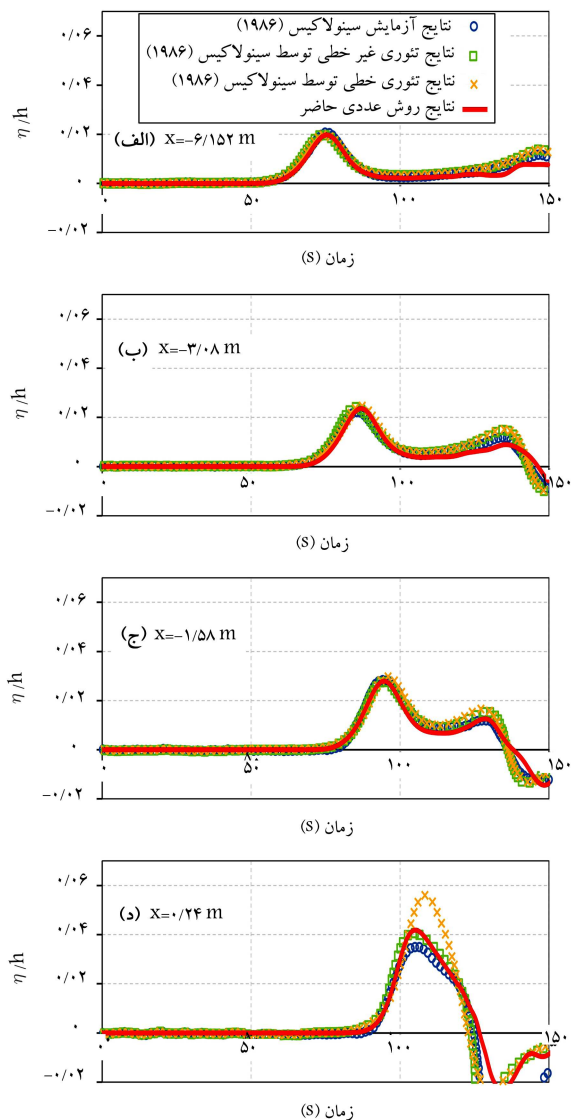


شکل ۸. مقایسه‌ی تغییرات سطح آزاد سیال در نقاط مختلف T .



شکل ۹. مقایسه‌ی بیشینه‌ی ارتفاع بالا‌روی موج تک بر روی شیب $2/88^\circ$ برای موج تک در حالت بدون شکست.

سپس مقدار بیشینه‌ی بالا‌روی موج تک تخمین زده شده است. مقایسه‌ی انجام شده با نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهد که روش حاضر به درستی توانسته است مقدار بالا‌روی موج تک را در حال نشکسته تخمین بزند. با توجه به نتایج قابل قبول به دست آمده از روش بدون شبکه‌ی مورد استفاده در پژوهش حاضر و سرعت بالای حل، انتظار می‌رود روش ارائه شده بتواند انتشار سه بعدی موج سونامی و پدیده‌هایی نظیر برخورد امواج بلند با موانع سطحی و زیرسطحی را به خوبی شبیه‌سازی کند. همچنین حل مسائل مربوط به موج‌های تناوبی^{۲۷} توسط موج سازه‌های پیستونی، بررسی مشخصه‌های امواج نامنظم، بررسی مشخصه‌های موج تک در بسترهای ترکیبی یا چند ضلعی^{۲۸} و حل مسائل مربوط به نیروی وارد بر سازه‌های مختلف دریایی با استفاده از روش عددی حاضر نیز از جمله موضوعات مهم برای ادامه‌ی پژوهش حاضر هستند.



شکل ۷. مقایسه‌ی تاریخچه‌ی زمانی پروفیل تکامل موج تک در ۵ اندازه‌گیر محاسباتی برای $H/h = 0/19$ با $h = 0/3097 m$ در فواصل مختلف از انتهای شیب

نیاز نخواهد بود. این مزیت باعث شده است که فرایند محاسبات عددی چند برابر کوتاه‌تر از روش‌های مرسوم شود.

مهم‌ترین و کاربردی‌ترین نتیجه‌ی پژوهش حاضر، تخمین بالا‌روی موج تک بر روی انواع سطوح مختلف است. در این راستا، ابتدا نتایج روش عددی پژوهش حاضر در انتشار موج تک بر روی شیب شامل برآورد پروفیل سطح آب و روند توسعه‌ی آن توسط یک نمونه‌ی معتبر و جامع آزمایشگاهی صحت‌سنجی و تأیید شده است.

پانویس‌ها

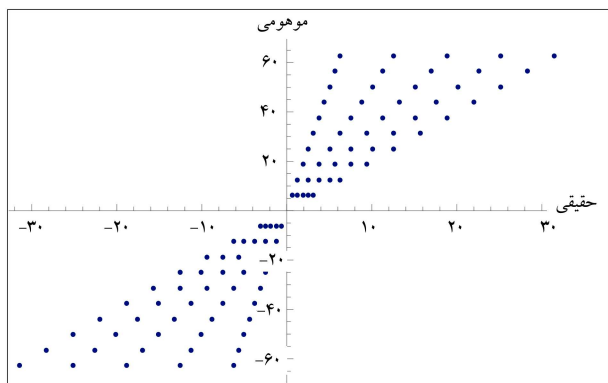
1. generation
2. propagation
3. runup

4. boussinesq
5. trajectory
6. Non-breaking
7. linear and nonlinear theory
8. boundary integral equation method (BIEM)

9. nonlinear shallow water wave equation (NLSW)
10. finite-analytic method
11. synolakis
12. rayleigh
13. pure
14. amplitude
15. tailing waves
16. Goring
17. shallow water first order (SWFO)
18. shallow water second order (SWSO)
19. fenton
20. exponential basis function
21. validation
22. hermitian length
23. pseudo inverse
24. intermediate geometry
25. final geometry
26. CPU:Corei7 2600k3.8GHz ,RAM:8GB DDR3,
VGA:nVidia560 GTX1GB GDDR5
27. periodic waves
28. compound or multilinear-slopes

منابع (References)

1. Wazwaz A.M., *Partial Differential Equations and Solitary Wave Theory*, Higher Education Press, Springer (2009).
2. Hall, J.V. and Watts, J.W. "Laboratory investigation of the vertical rise of solitary waves on impermeable slopes", Technical Report, Beach Erosion Board, US Army Corps of Engineering, 33 (1953).
3. Goring, D.G. "Tsunami: The propagation of long waves onto a shel", Ph.D. Thesis, California Institute of Technology (1979).
4. Boussinesq, M.J. "Theorie de lintumescence liquide, appelee onde solitaire ou de translation, se propageant dans un canal rectangulaire", *C.R. Acad. Sci., Paris*, **72**, pp. 755-759 (1871).
5. Pedersen, G. and Gjevik, B. "Run-up of solitary waves", *Journal of Fluid Mechanics*, **135**, pp. 283-299 (1983).
6. Synolakis, C.E. "The run-up of long waves", Ph.D. Thesis, California Institute of Technology (1986).
7. Synolakis, C.E. "The runup of solitary waves", *Journal of Fluid Mechanics*, **185**, pp. 523-545 (1987).
8. Zelt, J.A. and Raichlen, F. "A Lagrangian model for water-induced harbor oscillations", *Journal of Fluid Mechanics*, **213**, pp. 203-225 (1990).
9. Liu, P.L-F. and Cho, Y.-S. "Integral equation model for wave propagation with bottom frictions", *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, ASCE*, **120**(6), pp. 594-608 (1994).
10. Titov, V.V. and Synolakis, C.E. "Modeling of breaking and non-breaking long-wave evolution and run-up using VTCS-2", *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering, ASCE*, **121**(6), pp. 308-461 (1995).
11. Li, Y. and Raichlen, F. "Solitary wave runup on plane slopes", *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE*, **127**(1), pp. 33-44 (2001).
12. Guizien, K. and Barthelemy, E. "Short waves modulations by large free surface solitary waves. Experiments and models", *Physics of Fluids*, **13**(12), pp. 3624-3635 (2002).
13. Rayleigh, L. "On waves", *Phil. Mag.*, **1**, pp. 257-279 (1876).
14. Clamond, D. and Germain, J.-P. "Interaction between a stokes wave packet and a solitary wave", *Eur. J. Mech. B/Fluids*, **18**(1), pp. 67-91 (1999).
15. Temperville, A. "Contribution a letude des ondes de gravite en eau peu profonde", These d Etat, Universite Joseph Fourier - Grenoble I (1985).
16. Mahdavi, A. and Talebbeydokhti, N. "Numerical modeling of shallow water equation for simulation of long waves runup", **27-2**(2), pp. 107-115 (2012).
17. Rezaei, H. and Ketabdari, J. "Estimation of breaking solitary wave pressure on moored pontoon floating breakwaters using VOF method", *Sharif Journal Civil Engineering*, **27-2**(4), pp. 111-122 (2012).
18. Li, J., Liu, H., Gong, K., Tan, S.K. and Shao, S. "SPH modeling of solitary wave fissions over uneven bottoms", *Coastal Engineering*, **60**, pp. 261-275 (2012).
19. Wu, N.J., Tsay, T.K. and Chen, Y. "Generation of stable solitary waves by a piston-type wave maker", *Wave Motion*, **51**(2), pp. 240-255 (2014).
20. Grimshaw, R.H.J. "The solitary wave in water of variable depth: Part 2", *Journal Fluid Mechanics*, **46**(03), pp. 611-622 (1971).
21. Fenton, J. "A ninth-order solution for the solitary wave", *Journal Fluid Mechanics*, **53**(2), pp. 257-271 (1972).
22. Han, S.H.T. and Cho, Y.-S. "Laboratory experiments on run-up and force of solitary waves", *Journal of Hydro-Environment*, **9**(4), pp. 582-591 (2015).
23. Boroomand, B., Soghrati, S. and Movahedian, B. "Exponential basis functions in solution of static and time harmonic elastic problems in a meshless style", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **81**(8), pp. 971-1018 (2010).
24. Zandi, S.M., Boroomand, B. and Soghrati, S. "Exponential basis functions in solution of incompressible fluid problems with moving free surfaces", *Journal of Computational Physics*, **231**(2), pp. 505-527 (2012a).
25. Zandi, S.M., Boroomand, B. and Soghrati, S. "Exponential basis functions in problems with fully incompressible materials: A mesh-free method", *Journal of Computational Physics*, **231**(2), pp. 7255-7273 (2012b).
26. Grilli, S.T., *Fully Nonlinear Potential Flow Models Used for Long Wave Run-up Prediction. Long-wave Run-up Models*, H. Yeh, P. Liu, and C. Synolakis, eds., World Scientific, Singapore, pp. 116-180 (1997).



شکل ۱۰. الگوی انتخاب ضرایب α و β در صفحه اعداد مختلط. [۲۳]

جدول ۲. اثر تغییر تعداد نقاط و پایه‌های مختلف در کارایی روش عددی.

ارتفاع بالاروی موج تک (بر حسب متر)	تعداد پایه‌ها	تعداد نقاط
۰٫۰۶۸	۱۶۰	۲۰۰
۰٫۰۷۶	۱۶۰	۲۲۵
۰٫۰۷۹	۱۶۰	۲۵۰
۰٫۰۸۰	۱۶۰	۲۷۵
۰٫۰۷۶	۱۸۵	۲۲۵
۰٫۰۷۶	۲۰۵	۲۲۵
۰٫۰۷۷	۲۳۰	۲۲۵
۰٫۰۷۷	۲۵۵	۲۲۵

عددی حاضر، اقدام به گزینش تعداد نقاط و پایه‌های مختلف شده است. در این راستا، اثر هر یک از این پارامترها در مقدار بالاروی موج تک برای آزمایش بیان شده در نوشتار سینولاکسیس،^[۶] با مشخصات $H/h = ۰٫۱۹$ و $h = ۰٫۳۰۹۷ m$ گام زمانی $۰٫۰۵$ ثانیه بررسی و نتایج در جدول ۲ گردآوری شده است.

پیوست الف) نحوه‌ی گزینش ضرایب α_i و β_i

برای به‌دست آوردن تعداد مناسبی پایه جهت ساخت جواب، با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای α ، مقادیر متناظر β به‌دست می‌آید؛ و با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای β ، مقادیر متناظر α به‌دست می‌آید و پایه‌های مورد نیاز حل ساخته می‌شود. در پژوهش حاضر، از الگوی پیشنهادی در مرجع [۲۳] برای در نظر گرفتن مقادیر مناسب α و β استفاده شده است. در مرجع [۲۳] از الگوی مذکور برای حل معادلات مختلف از جمله معادله‌های: هلمهولتز، معادلات کشسانی، موج کشسان، خمش و ارتعاش اجباری ورق استفاده و نتایج بسیار خوبی حاصل شده است. شکل ۱۰، نحوه‌ی در نظر گرفتن ضرایب مذکور را در صفحه‌ی مختلط نشان می‌دهد.

$$\alpha = \pm \frac{\bar{m}\bar{\gamma}}{\bar{L}} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{N}} + 2i \right), \quad \bar{m} = 1, 2, \dots, \bar{M}, \bar{k} = 1, 2, \dots, \bar{N} \quad (۶۸)$$

به‌طور مشابه، برای انتخاب $\alpha = \pm i\beta$ رابطه‌ی ۶۹ را خواهیم داشت:

$$\beta = \pm \frac{\bar{m}\bar{\gamma}}{\bar{L}} \left(\frac{\bar{k}}{\bar{N}} + 2i \right), \quad \bar{m} = 1, 2, \dots, \bar{M}, \bar{k} = 1, 2, \dots, \bar{N} \quad (۶۹)$$

که در روابط ذکر شده، $(\bar{M}, \bar{N}) \in \mathbb{N}^2$ است و $\bar{\gamma} \in \mathbb{R}$ مشخصه‌ی ابعادی ناحیه‌ی حل است که به صورت رابطه‌ی ۷۰ تعریف می‌شوند:

$$۵٫۶ \leq \bar{\gamma} \leq ۷٫۲, \bar{L} = ۱٫۶ \max(L_x, L_y), \quad \bar{M}_{\min} = ۴, \bar{N}_{\min} = ۲, \bar{N}_{\max} = ۸ \quad (۷۰)$$

که در آن، L_x و L_y به ترتیب برابر با مقادیر طول و عرض مستطیل محیط بر ناحیه‌ی حل هستند. در نهایت با توجه به الگوی مذکور، به ازاء هر مقدار α و یا β ، دو پایه‌ی حل ساخته می‌شود و بنابراین کل تعداد پایه‌های حل $۸\bar{M} \times \bar{N}$ است.

پیوست ب) بررسی اثر تغییر پارامترها در کارایی روش

عددی

در پژوهش حاضر، به منظور بررسی اثر تغییر پارامترهای مختلف در نتایج روش