

# تعیین دوره‌ی تناوب و میرایی مؤثر سازه‌های متکی در پی‌های نواری صلب مدفون واقع در توده‌ی خاک غیرمتراکم

عباس اسلامی حقیقت (استادیار)  
دانشکده‌ی فنی مهندسی، دانشگاه ارومیه

مهندسی عمران شریف، تابستان ۱۳۹۷ (۳۳-۲۵)  
دوره‌ی ۲ - شماره‌ی ۲/۲، ص. ۲۵-۳۳

در نوشتار حاضر، دوره‌ی تناوبی و میرایی مؤثر سازه‌های متکی بر پی‌های نواری با درنظ گرفتن اثر اندرکنش خاک و سازه بررسی شده است. توده‌ی خاک غیرمتراکم که می‌تواند معرف رفتار خاک رس اشباع در حالت زهکشی نشده باشد، توده‌ی نیمه‌بی‌نهایت است، که پی نواری مدفون را احاطه کرده است. به علت غیرمتراکم فرض کردن محیط ایزوتروپیک، ضریب پواسون برای چنین محیطی برابر ۰/۵ است و در این حالت، سرعت موج فشاری بی‌نهایت می‌شود. بنابراین برای جلوگیری از مشکلات عددی در روش المان مرزی مورداستفاده، لازم است حل‌های اساسی جابه‌جایی و تنش سطحی در حوزه‌ی بسامد را با استفاده از روابط هم‌ارزی، به‌صورت مستقل از سرعت موج فشاری بیان کرد. با به‌کارگیری حل‌های اساسی تصحیح‌شده، توابع امیدانس پی‌های نواری مدفون محاسبه و با نتایج موجود در حالت مذکور مقایسه شده است. در ادامه، سازه‌ی یک درجه آزادی تحت اثر اندرکنش خاک و سازه با سازه‌ی گیردار معادل جایگزین و درنهایت، دوره‌ی تناوب و میرایی مؤثر سازه‌های پهن، متوسط و لاغر محاسبه و با هم مقایسه شده‌اند.

**واژگان کلیدی:** روش المان مرزی، اندرکنش خاک و سازه، پی نواری مدفون، توابع امیدانس، دوره‌ی تناوب، میرایی مؤثر.

a.eslami@urmia.ac.ir

## ۱. مقدمه

محدوده‌ی نزدیک و با المان محدود مدل‌سازی و بقیه‌ی توده‌ی نیمه بی‌نهایت خاک به‌عنوان محدوده‌ی دور در نظر گرفته شده و با یک سری فنر و میراگرهایی جایگزین شده است که مقادیر سختی و میرایی آن‌ها، مقادیر حقیقی و مختلط توابع امیدانس محدوده‌ی دور هستند و با روش سیستم شناسایی<sup>۱</sup> محاسبه می‌شوند. در روش عددی مذکور،<sup>[۲]</sup> اعلام شده است که نتایج تحلیلی پژوهشی در سال ۱۹۷۲،<sup>[۱]</sup> مربوط به پی نواری سطحی واقع بر توده‌ی نیم‌فضا، برای بسامدهای بالا جواب مناسبی نمی‌دهد و نتایج خود را با نتایج تحلیلی پژوهش دیگری در سال ۱۹۷۱،<sup>[۲]</sup> مقایسه کردند. با این حال، نتایج به‌دست‌آمده‌ی آن‌ها نیز در بسامدهای بالا هم‌خوانی خوبی با نتایج تحلیلی پژوهش اخیر،<sup>[۳]</sup> نداشت. قابل ذکر است که نتایج تحلیلی پژوهش انجام‌شده در سال ۱۹۷۲،<sup>[۱]</sup> برای مقدار ضریب پواسون ۰/۵ منجر به جواب دقیق شده است، ولی برای دیگر مقادیر ضریب پواسون فقط در محدوده‌ی بسامدهای پایین، جواب‌ها دقت لازم را داشته‌اند.<sup>[۵]</sup> برخی پژوهشگران،<sup>[۶]</sup> نیز با روش المان مرزی و با استفاده از المان‌های گسسته، توانستند توابع نرمی<sup>۲</sup> پی‌های نواری سطحی واقع بر توده‌ی کشتان و ویسکوکشتان را برای ضریب پواسون ۰/۲۵ محاسبه کنند. همچنین در پژوهش‌های دیگری،<sup>[۸]</sup> نحوه‌ی تأثیر خاک به‌عنوان یک بستر انعطاف‌پذیر در پاسخ سازه و نیز اثر لایه‌ی خاک زیرین و نیز عمق مدفون‌شدگی پی در محاسبه‌ی دوره‌ی تناوب و میرایی مؤثر سازه توسط دیگر پژوهشگران، بررسی شده است.<sup>[۹]</sup>

سختی دینامیکی یا توابع امیدانس<sup>۱</sup> از مطالب مهم و زیربنایی در مسئله‌ی اندرکنش خاک و سازه است. با معرفی توابع امیدانس پی می‌توان توده‌ی خاک زیر آن را با یک سری فنر و میراگر وابسته و یا مستقل از بسامد جایگزین و سازه‌ی واقع بر توده‌ی خاک را به‌راحتی تحلیل کرد. روش‌های مختلف عددی و تحلیلی را می‌توان برای محاسبه‌ی توابع امیدانس به‌کار برد. به‌طور خلاصه، دو دسته نتایج تحلیلی برای تعیین توابع امیدانس پی‌های نواری واقع بر سطح نیم‌فضا موجود است.<sup>[۱۰]</sup> از جمله روش‌های نیمه‌تحلیلی نیز می‌توان به روش ارائه‌شده‌ی در سال ۱۹۷۷،<sup>[۳]</sup> اشاره کرد که در آن ناحیه‌ی زیر پی به تعدادی المان خطی تقسیم و هر بار تنش هارمونیک و یکنواختی به هر یک از المان‌های مذکور اعمال و جابه‌جایی هر گره در اطراف پانل‌های بارگذاری‌شده‌ی مذکور با یک روند تحلیلی به‌دست آمده است. علی‌رغم اینکه انتگرال‌های منفرد حاصل در روش ذکرشده به‌صورت عددی و بدون درنظر گرفتن منفرد بودن آن‌ها محاسبه می‌شوند، جواب‌های مناسبی از روش نیمه تحلیلی اشاره‌شده به‌دست می‌آید.

در روش عددی دیگری (۱۹۸۱)،<sup>[۴]</sup> پی و قسمتی از خاک زیر آن به‌عنوان

تاریخ: دریافت ۱۳۹۵/۲/۲۹، اصلاحیه ۱۳۹۵/۸/۱، پذیرش ۱۳۹۵/۸/۱۰.

DOI:10.24200/J30.2018.1367

المان مرزی در یک محیط کشسان و همگن دو بعدی با استفاده از تئوری برگشتی بتی<sup>۶</sup> به صورت رابطه‌ی ۱ بیان می‌شود:

$$c_{ij}(\eta)u_j(\eta) = - \int_L P_{ij}^*(\xi, \chi)u_j(\chi)dL(\chi) + \int_L p_j(\chi)U_{ij}^*(\xi, \chi)dL(\chi) \quad (1)$$

که در آن،  $\xi$  معرف نقطه‌ی چشمه (نقطه‌ی اعمالی بار واحد) و  $\chi$  معرف نقطه‌ی مشاهده (نقطه‌ی تحت تأثیر بار واحد) است.  $u_j$  و  $p_j$  به ترتیب جابه‌جایی و تنش سطحی نقاط روی مرز در راستای  $z$  هستند.  $dL(\xi)$  نمو طول بر روی مرز است که به صورت مثلثاتی پیموده می‌شود.  $c_{ij}$  نرم جهش است که برای مرزهای هموار<sup>۷</sup> برابر  $\frac{1}{\nu}\delta_{ij}$  است که  $\delta_{ij}$  معرف دلتای کرونگر<sup>۸</sup> است.  $U_{ij}^*(\xi, \chi)$  و  $P_{ij}^*(\xi, \chi)$  نیز به ترتیب حل‌های اساسی جابه‌جایی و تنش سطحی هستند که معرف جابه‌جایی و تنش سطحی در نقطه‌ی مشاهده‌ی  $\chi$  و در راستای  $z$  به ازاء بار واحد اعمالی در نقطه‌ی چشمه‌ی  $\xi$  و در راستای  $i$  هستند. رابطه‌ی ۱ را که برای هر نقطه‌ی دلخواه  $\eta$  می‌توان نوشت، نشان می‌دهد که پاسخ جابه‌جایی هر نقطه، یعنی  $u(\eta)$ ، به کلیه‌ی جابه‌جایی‌ها و تنش سطحی نقاط مرزی وابسته شده است. حل‌های اساسی جابه‌جایی و تنش سطحی در مسائل دو بعدی و در حوزه‌ی بسامد در مراجع مختلف ارائه شده است.<sup>[۲۳-۲۵]</sup>

در حالت ضریب پواسون برابر ۰/۵ که معرف رفتار توده‌ی خاک غیرمتراکم و مخصوصاً از نقطه‌نظر ژئوتکنیکی رفتار رس اشباع در حالت زهکشی نشده است، طبق رابطه‌ی ۲، مقدار سرعت موج فشاری به بی‌نهایت میل می‌کند. لذا در حالت ضریب پواسون برابر ۰/۵، محاسبه‌ی ترم‌های مختلف حل‌های اساسی جابه‌جایی و تنش سطحی که بر حسب سرعت موج فشاری و سرعت موج برشی بیان می‌شوند، ممکن نیست. بنابراین برخی پژوهشگران،<sup>[۲۶]</sup> با استفاده از روش المان مرزی توانستند تأثیر تغییرات ضریب پواسون در مقادیر توابع امیدانس را تا مقدار بیشینه‌ی ۰/۴۹ محاسبه کنند:

$$\frac{C_P}{C_S} = \sqrt{\frac{2 - 2\nu}{1 - 2\nu}} \quad (2)$$

با استفاده از روابط هم ارزی در حالت سه بعدی، حل‌های اساسی جابه‌جایی و تنش سطحی برای حالت ضریب پواسون برابر ۰/۵ تصحیح و براساس آن توابع امیدانس پی‌مربعی محاسبه شدند.<sup>[۲۷، ۲۸]</sup> و در اینجا نیز با استفاده از هم‌ارزی‌های انجام‌شده برای توابع بسل<sup>۹</sup> و رفع ابهام و ساده‌سازی‌های لازم، حل‌های اساسی جابه‌جایی و تنش سطحی دو بعدی به صورت مستقل از سرعت موج فشاری به صورت روابط ۳ الی ۹ بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{cases} \lim_{z \rightarrow 0^+} K_1(z) \equiv \lim_{z \rightarrow 0^+} (\ln(z)) \\ \lim_{z \rightarrow 0^+} K_1(z) \equiv \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{1}{z} \\ \lim_{z \rightarrow 0^+} K_2(z) \equiv \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{1}{z^2} \end{cases} \quad (3)$$

$$U_{ij}^* = \frac{1}{\sqrt{\pi\rho C_S^2}} [\psi\delta_{ij} - \chi r_{,i}r_{,j}] \quad (4)$$

$$P_{ij}^* = \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \begin{bmatrix} (-\frac{1}{r})r_{,i}n_j + (\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\chi}{r}) \\ (\delta_{ij}\frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j}n_i) \\ -2\frac{\chi}{r}(n_j r_{,i} - r_{,i}r_{,j}\frac{\partial r}{\partial n}) \\ -2\frac{\partial\chi}{\partial r}r_{,i}r_{,j}\frac{\partial r}{\partial n} \end{bmatrix} \quad (5)$$

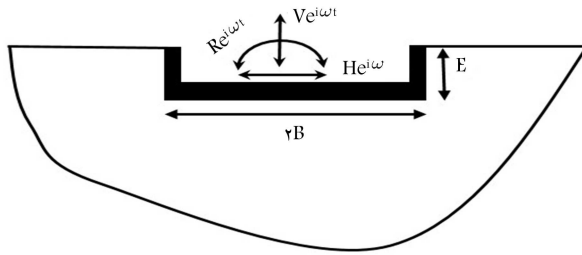
در شیوه‌ی دیگری که برخی پژوهشگران نیز استفاده کرده‌اند، پی‌نواری مدفون با یک محیط همگن معادل جایگزین و سپس توابع امیدانس پی محاسبه شده است.<sup>[۱۰]</sup> همچنین توابع امیدانس نواحی اورتوتروپیک با روش المان مرزی غیرمستقیم نیز محاسبه شدند.<sup>[۱۱]</sup> در سال ۲۰۰۸،<sup>[۱۲]</sup> نیز به کمک مدل مخروطی، یک مطالعه‌ی پارامتری عمق مدفون‌شدگی پی صورت گرفته و روابطی در مورد آن ارائه شده است. همچنین جایگزینی سازه‌ی یک درجه آزادی مدفون تحت حرکت ورودی پی با یک سازه‌ی سطحی با خواص دینامیکی معادل و تحت حرکت آزاد، باعث ساده‌سازی مسئله‌ی اندرکنش خاک و سازه شده است.<sup>[۱۳]</sup> به کمک چنین ساده‌سازی و نیز معرفی پارامتر نرمی معادل<sup>۴</sup>، پاسخ سیستم‌های غیرخطی را نیز می‌توان بررسی کرد.<sup>[۱۲]</sup> تأثیر انواع امواج فشاری، برشی و راپلی در پاسخ سازه و نیز دوره‌ی تناوب و میرایی مؤثر توسط برخی پژوهشگران بررسی،<sup>[۱۵]</sup> و تأثیر هم‌زمان اندرکنش اینرسی و سینماتیک خاک و سازه در نظر گرفته شده است. دوره‌ی تناوب و میرایی سازه‌ی یک درجه آزادی واقع بر شمع تکی و نیز گروه شمع توسط برخی پژوهشگران بررسی شد،<sup>[۱۶، ۱۷]</sup> و آن‌ها توانستند ترم‌های کوپل ماتریس امیدانس را وارد محاسبه‌ی دوره‌ی تناوب و میرایی مؤثر کنند. همچنین برای ارزیابی خواص دینامیکی سازه، نتایج لرزه‌خیزی صحرایی،<sup>[۱۸]</sup> و نیز آزمایش‌های آزمایشگاهی استفاده شده است.<sup>[۱۹]</sup> و نیز اثر اندرکنش خاک و سازه در قالب تغییر دوره‌ی تناوب و میرایی سازه در آیین‌نامه‌های مختلفی همچون ATC<sup>[۲۰]</sup>، FEMA<sup>[۲۱]</sup> و ASCE<sup>[۲۲]</sup> مشاهده می‌شود.

تحلیل‌های صورت‌گرفته در تاریخچه برای محاسبه‌ی دوره‌ی تناوب و میرایی مؤثر سازه‌ها عمدتاً مربوط به پی‌های مدور واقع بر توده‌ی نیمه‌بی‌نهایت خاکی است. در نوشتار حاضر، ابتدا توابع امیدانس پی‌های نواری مدفون واقع بر توده‌ی خاک غیرمتراکم با روش المان مرزی محاسبه و بدین منظور حل‌های اساسی جابه‌جایی و تنش سطحی برای مدل‌سازی توده‌ی خاک غیرمتراکم تصحیح شده‌اند. سپس با یک روند تکرار، توابع امیدانس متناسب با سختی سازه تصحیح شده و در نهایت، دوره‌ی تناوب و میرایی مؤثر سازه به دست آمده است. ضمناً به منظور ارائه‌ی گراف‌های طراحی برای پی‌های نواری، پارامترهای بی‌بعد مناسب در این حالت تعریف شده‌اند.

## ۲. روش المان مرزی

روش المان مرزی، یکی از روش‌های قدرتمند برای تحلیل محیط‌های کشسان و همگن در حالات استاتیکی و دینامیکی است. از جمله مزیت‌های مهم روش المان مرزی می‌توان به مدل‌سازی محیط‌های بی‌نهایت و نیمه‌بی‌نهایت اشاره کرد. همچنین روش المان مرزی برخلاف روش‌های دامنه‌ی موجود، نظیر روش المان محدود و یا روش تفاضل محدود، جزء روش‌های مرزی محسوب می‌شود و به عبارت دیگر، این مزیت را دارد که کلیه‌ی محاسبات موردنیاز در روش المان مرزی فقط بر روی مرز محیط صورت می‌گیرد. لذا به جای مجراسازی دامنه‌ی محیط، فقط کافی است مرز محیط مجراسازی شود و در نتیجه بعد المان‌بندی مسئله یک درجه کاهش یابد. البته در شرایطی نظیر غیرخطی بودن رفتار محیط، نیاز به مجراسازی دامنه‌ی محیط نیز پیدا می‌شود. با این حال در کاربردهای عملی، استفاده از روش المان مرزی در حالت الاستودینامیک منجر به جواب‌های کاملاً قابل قبولی می‌شود.

معادلات انتگرالی مورد استفاده در روش المان مرزی از فرم ضعیف معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر محیط به دست می‌آید، به طوری که تابع وزن مورد استفاده‌ی تابع دلتای دیراک<sup>۵</sup> باشد. با صرف نظر از نیروی جسم، معادله‌ی انتگرالی حاکم در روش



شکل ۱. پی نواری مدفون واقع بر توده‌ی کشسان خاک تحت نیروهای هارمونیک افقی، قائم و چرخشی.

ارتعاش می‌کند. توده‌ی خاک با چگالی  $\rho$  مدول برشی  $G$  و ضریب پواسون  $\nu$  فرض می‌شود.

در حالت دو بعدی، ۳ درجه آزادی برای پی متصور است که عبارت‌اند از: جابه‌جایی قائم  $\Delta V$ ، جابه‌جایی افقی  $\Delta H$ ، و چرخش پی  $\Delta R$ . دامنه‌های نیروهای هارمونیک متناظر با جابه‌جایی‌های مذکور به ترتیب  $V$ ،  $H$  و  $R$  در نظر گرفته می‌شوند. رابطه‌ی ۱۲، بین دامنه‌ی نیروها و جابه‌جایی‌ها برقرار است:

$$\begin{Bmatrix} V \\ H \\ R/B \end{Bmatrix} = \pi G \underbrace{\begin{bmatrix} K_{VV}(a_0) & \circ & \circ \\ \circ & K_{HH}(a_0) & K_{HR}(a_0) \\ \circ & K_{RH}(a_0) & K_{RR}(a_0) \end{bmatrix}}_K \begin{Bmatrix} \Delta V \\ \Delta H \\ \Delta R/B \end{Bmatrix} \quad (12)$$

که در آن،  $K$  ماتریس توابع امیدانس یا سختی دینامیکی است. مؤلفه‌های ماتریس توابع امیدانس است که وابسته به پارامتر بی‌بعد  $a_0$  هستند. پارامتر  $a_0$  به صورت رابطه‌ی ۱۳ تعریف می‌شود:

$$a_0 = \frac{\omega B}{C_S} \quad (13)$$

که در آن،  $\omega$  بسامد ارتعاش پی است و لذا براساس رابطه‌ی ۱۳، پارامتر بی‌بعد  $a_0$  به هندسه‌ی پی و نیز خواص خاک وابسته است. همان‌طور که در رابطه‌ی ۱۲ مشاهده می‌شود، نیروی قائم  $V$  فقط باعث جابه‌جایی  $\Delta V$  در راستای قائم می‌شود، در حالی که نیروهای افقی و ممان باعث ایجاد جابه‌جایی در راستاهای دیگر نیز می‌شوند. بنابراین ترم‌های  $K_{RH}$  و  $K_{HR}$  ترم‌های کوپل هستند و در حالت کلی مخالف صفر هستند. همچنین به علت وجود تقارن در ماتریس سختی، رابطه‌ی ۱۴ را خواهیم داشت:

$$K_{HR} = K_{RH} \quad (14)$$

رابطه‌ی ۱۲ را به صورت رابطه‌ی ۱۵ نیز می‌توان نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \Delta V \\ \Delta H \\ \Delta R \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{VV}(a_0) & \circ & \circ \\ \circ & C_{HH}(a_0) & C_{HR}(a_0) \\ \circ & C_{RH}(a_0) & C_{RR}(a_0) \end{bmatrix}}_C \begin{Bmatrix} V \\ H \\ R \end{Bmatrix} \quad (15)$$

که در آن، ماتریس  $C$  ماتریس نرمی  $13$  نام دارد که ضریبی از وارون ماتریس امیدانس  $K$  است و مؤلفه‌های آن توابع نرمی هستند.

در اینجا توده‌ی خاک یک محیط غیرمتراکم کشسان، همگن و ایزوتروپیک فرض می‌شود. همچنین فرض شده است که هیچ لغزشی بین پی و خاک وجود نداشته

$$\psi = K_1 \left( \frac{i\omega r}{C_S} \right) + \frac{C_S}{i\omega r} \times \left[ K_1 \left( \frac{i\omega r}{C_S} \right) + \frac{iC_S}{\omega r} \right] \quad (6)$$

$$\chi = K_2 \left( \frac{i\omega r}{C_S} \right) + 2 \frac{C_S}{\omega^2 r^2} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{i\omega}{C_S} K_1 \left( \frac{i\omega r}{C_S} \right) - \frac{2}{r} K_2 \left( \frac{i\omega r}{C_S} \right) - \frac{2}{r} \frac{C_S}{\omega^2 r^2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} = -\frac{i\omega}{C_S} K_1 \left( \frac{i\omega r}{C_S} \right) - \frac{1}{r} K_2 \left( \frac{i\omega r}{C_S} \right) - \frac{2}{r} \frac{C_S}{\omega^2 r^2} \quad (9)$$

که در آن‌ها،  $\rho$  چگالی،  $K_1$ ،  $K_2$  و  $K_3$  به ترتیب توابع شبه بسط نوع دوم از درجه ۰، ۱ و ۲ هستند. همچنین  $r$  فاصله‌ی نقطه‌ی چشمه و مشاهده و  $\omega$  و  $C_S$  به ترتیب بسامد زاویه‌ی و سرعت موج برشی هستند.

برای محاسبه‌ی رابطه‌ی انتگرالی در معادله‌ی ۱، لازم است ابتدا مرز محیط را به یک سری المان‌های مرزی مجزاسازی کرد. لذا المان‌های خطی با یک گره در میانه‌ی آن در نظر گرفته شده و فرم مجزاشده‌ی رابطه‌ی انتگرالی  $10$  به صورت رابطه‌ی ۱۰ به دست آمده است:

$$\begin{aligned} [c_q] \left\{ \begin{matrix} u_{2q-1} \\ u_{2q} \end{matrix} \right\} + \sum_{e=1}^{ne} \left\{ \int_{L_e} [P^*][N] dL_e \right\} \{u^e\} \\ = \sum_{e=1}^{ne} \left\{ \int_{L_e} [U^*][N] dL_e \right\} \{p^e\} \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن،  $q$  شماره‌ی درجه آزادی هر گره،  $ne$  تعداد المان‌های مرزی،  $L_e$  طول المان  $e$ ام،  $[N]$  ماتریس توابع شکل،  $[c_q]$  ماتریس حاوی مؤلفه‌های ترم جهش گره‌ی  $q$ ام است. بردارهای  $\{u^e\}$  و  $\{p^e\}$  به ترتیب شامل مقادیر گره‌ی جابه‌جایی و تنش سطحی المان  $e$ ام هستند.

انتگرال بر روی هر المان مرزی در مختصات محلی و به کمک نقاط گوس صورت می‌گیرد. با به کار بردن رابطه‌ی ۱۰ در هر گره‌ی مرزی، معادلات جبری خطی به صورت رابطه‌ی ۱۱ به دست می‌آید:

$$[F]\{u\} = [G]\{p\} \quad (11)$$

که در آن،  $[G]$  و  $[F]$  ماتریس‌های ضرایب تأثیر و بردارهای  $\{u\}$  و  $\{p\}$  به ترتیب بردارهای جابه‌جایی و تنش سطحی کلیه‌ی نقاط مرزی هستند. با مرتب کردن مقادیر معلوم و مجهول در رابطه‌ی ۱۱، دستگاه معادلات خطی حاصل و در نهایت مقادیر جابه‌جایی و تنش سطحی مجهول گره‌ی به کمک آن محاسبه می‌شوند.

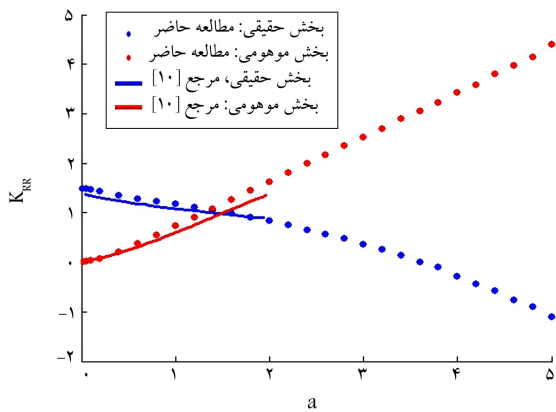
برنامه‌ی MATLAB براساس تئوری ارائه‌شده تدوین و در آن به منظور محاسبه‌ی ترم‌های ماتریس جهش و متناظراً مؤلفه‌های قطری، ماتریس ضریب تأثیر  $[F]$ ، از مرزهای بسته  $11$  (مرزهای مجازی  $12$ ) استفاده شده است. ایده‌ی مرزهای بسته برای مدل‌سازی مرزهای بی‌نهایت و یا نیمه‌بی‌نهایت توسط برخی پژوهشگران (۱۹۸۸، [۲۹]) ارائه شده است. مرزهای بسته توسط دیگر پژوهشگران در مسائل بارگذاری دینامیکی، [۳۰] و نیز مسئله‌ی تفرق امواج برشی SH، [۳۱] و همچنین تفرق امواج فشاری، برشی، و رایلی، [۳۲، ۳۵] با موفقیت استفاده شده است.

### ۳. محاسبه‌ی توابع امیدانس پی نواری واقع بر توده‌ی

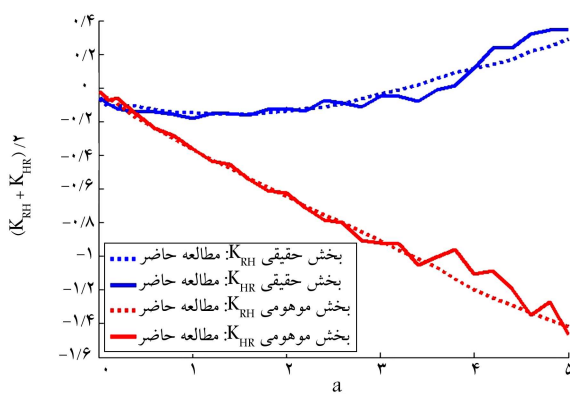
#### خاک غیرمتراکم با روش المان مرزی

شکل ۱، مقطع عرضی یک پی صلب نواری مدفون با عرض  $2B$  و عمق مدفون شدگی  $E$  را نشان می‌دهد که بر روی توده‌ی نیمه بی‌نهایت کشسان، همگن و ایزوتروپیک

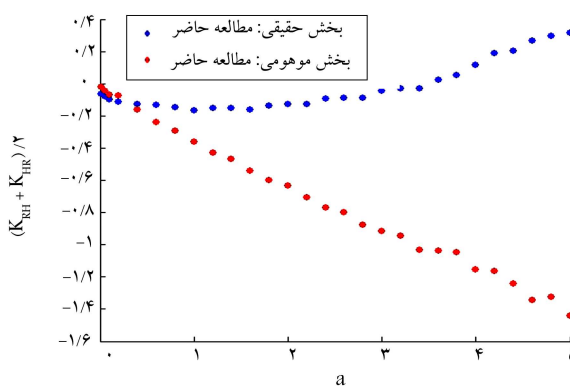
ماتریس امیدانس نیز انتظار می‌رفت، ضمن اینکه بیان‌گر صحت روند اعمال شده در برنامه است، معرف دقت جواب‌های به دست آمده نیز خواهد بود. همچنین در شکل ۶، میانگین مؤلفه‌های کوپل  $K_{RH}$  و  $K_{HR}$  ارائه شده است. قابل ذکر است که کلیه توابع امیدانس و یا نرمی، مقادیری مختلط هستند. مقدار حقیقی آن‌ها معرف هم‌فاز بودن نیرو و جابه‌جایی است و مقدار مختلط آن‌ها نشان‌دهنده‌ی یک اختلاف



شکل ۴. مقایسه‌ی تابع امیدانس قائم  $K_{RR}$  برای پی‌های نواری مدفون واقع بر نیم‌فضای بی‌نهایت غیرمتراکم.



شکل ۵. ترم‌های کوپل  $K_{RH}$  و  $K_{HR}$  برای پی‌های نواری مدفون بر نیم‌فضای بی‌نهایت غیر متراکم.

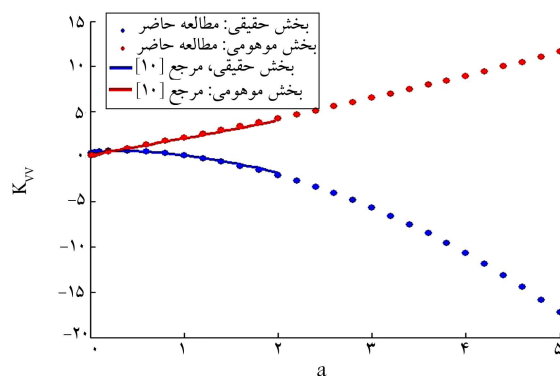


شکل ۶. میانگین ترم‌های کوپل  $K_{RH}$  و  $K_{HR}$  برای پی‌های نواری مدفون بر نیم‌فضای بی‌نهایت غیر متراکم.

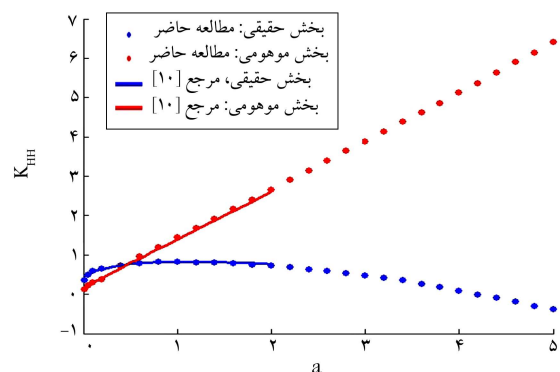
باشد. به عبارت دیگر، کف پی کاملاً زبر است و جابه‌جایی یک نقطه از خاک در زیر پی با جابه‌جایی نقطه‌ی مجاور آن بر روی پی کاملاً یکسان باشد. به منظور دست‌یابی به توابع امیدانس پی نواری صلب به کمک روش عناصر مرزی، کافی است یک جابه‌جایی واحد در هر یک از راستاهای درجات آزادی پی اعمال شود و نیروهای قائم، افقی و ممان از روی تنش سطحی ایجاد شده در زیر پی و به کمک روابط تعادل به دست آید.

به منظور مدل‌سازی مرز پی نواری با میزان مدفون‌شدگی  $E = 0.5B$  و نیز محیط اطراف آن، در برنامه‌ی عناصر مرزی مربوط، ۱۸۴ المان استفاده شد، به طوری که تراکم تعداد المان‌ها در لبه‌های پی نسبت به سایر مناطق بیشتر اتخاذ شد. همچنین برای بالا بردن دقت جواب‌های حاصل، لازم شد محدوده‌ی قابل توجهی از اطراف پی در محاسبه وارد شود. با سعی و خطا مشخص شد که مدل‌سازی حدود  $2^\circ$  برابر نصف عرض پی در هر طرف پی برای این منظور مناسب است.

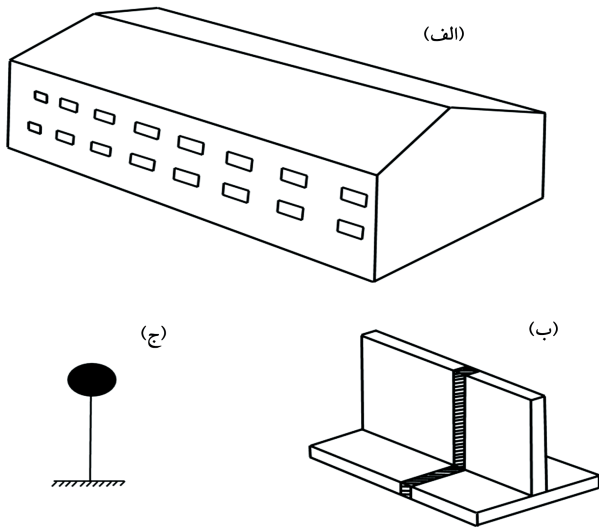
شکل‌های ۲ تا ۵، مقادیر حقیقی و مختلط توابع امیدانس را برای حالت  $v = 0.5$  که معرف توده‌ی غیرمتراکم است، نشان می‌دهد. همچنین در شکل‌های مذکور، نتایج حاصل با نتایج پژوهشی در سال ۱۹۸۸ [۱۰] مقایسه شده است که در آن فقط تا بسامد بی‌بعد مساوی ۲ ارائه شده است. با این حال هم‌خوانی خوبی بین نتایج در محدوده‌ی مذکور وجود دارد. شکل ۵، به‌طور جداگانه ترم‌های کوپل  $K_{RH}$  و  $K_{HR}$  را نشان می‌دهد. نمودارهای توپرازا اعمال چرخش واحد ( $K_{HR}$ ) و نمودارهای نقطه‌چین از اعمال جابه‌جایی افقی واحد ( $K_{RH}$ ) به دست آمده است. انطباق مناسب دیاگرام‌های مربوط به مؤلفه‌های کوپل  $K_{RH}$  و  $K_{HR}$  که از تقارن



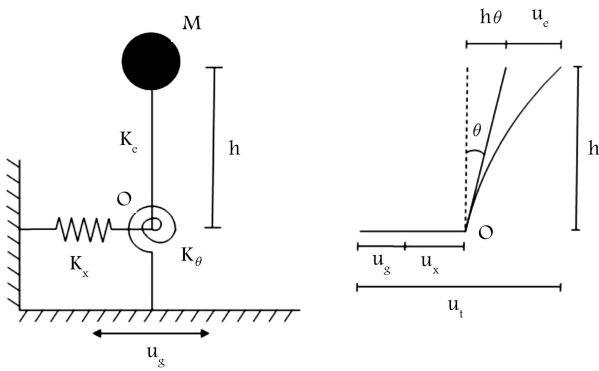
شکل ۲. مقایسه‌ی تابع امیدانس قائم  $K_{VV}$  برای پی‌های نواری مدفون واقع بر نیم‌فضای بی‌نهایت غیرمتراکم.



شکل ۳. مقایسه‌ی تابع امیدانس قائم  $K_{HH}$  برای پی‌های نواری مدفون واقع بر نیم‌فضای بی‌نهایت غیرمتراکم.



شکل ۷. مدل سازی یک سازی طولی و یا دیوار واقع بر پی نواری با سازی یک درجه آزادی.



شکل ۸. سیستم یک درجه آزادی بر روی بستر انعطاف پذیر.

سازی مذکور (رابطه ۱۷):

$$\begin{cases} \omega_{fix} = \sqrt{\frac{K_c}{M}} \\ \omega_x = \sqrt{\frac{K_x}{M}} \\ \omega_\theta = \sqrt{\frac{K_\theta}{M h^2}} \end{cases} \quad (17)$$

و نیز در نظر گرفتن تعادل نیرویی و لنگری نقطه  $o$  واقع در پای سازه، روابط ۱۸ الی ۲۰ حاصل می شود: [۳۴]

$$\frac{1}{\omega_t^2} = \frac{1}{\omega_{fix}^2} + \frac{1}{\omega_x^2} + \frac{1}{\omega_\theta^2} \quad (18)$$

$$\omega_{fix} = \frac{2\pi}{T_{fix}}, \omega_t = \frac{2\pi}{T_t} \quad (19)$$

$$T_t = T_{fix} \sqrt{1 + \frac{K_c}{K_x} \left(1 + \frac{K_x}{K_\theta} h^2\right)} \quad (20)$$

که در آن،  $\omega_t$  و  $T_t$  به ترتیب دوره تناوب و بسامد غالب سازه با اثر اندرکنش خاک است. روابط مذکور نشان می دهند که دوره تناوب غالب سازه با اثر اندرکنش همواره از دوره تناوب سازه با پای صلب بیشتر خواهد بود.

روند بررسی دوره تناوب و میرایی مؤثر سازی یک درجه آزادی در حالت پی نواری مدفون مشابه پی مدور است. [۳۵] پارامتر  $\gamma$  بعد  $\gamma$  در حالت پی نواری در

فاز به میزان  $90^\circ$  بین نیرو و جابه جایی است. بنابراین مقادیر حقیقی توابع امیدانس، معرف سختی سیستم است که با فنر شبیه سازی می شود و مقادیر مختلط آن ها معرف میرایی سیستم است و با میراگر مدل سازی می شود. در مسئله اندرکنش خاک و سازه، به کمک توابع امیدانس می توان توده ی خاک را با یک سری فنر و میراگرهای افقی، قائم و چرخشی جایگزین کرد، به طوری که مقادیر سختی و میرایی فنرها و میراگرهای مذکور ثابت نباشند، بلکه تابع بسامد  $\omega$  و یا به طور معادل تابع بسامد  $a_0$  باشند.

#### ۴. دوره تناوب طبیعی و میرایی مؤثر سازی یک درجه آزادی با تأثیر نرمی توده ی خاک غیرمتراکم

توابع امیدانس و نرمی به دست آمده برای توده های غیر متراکم را می توان در مسائل مختلف بررسی کرد. به عنوان کاربردی از نتایج حاصل شده، مسئله ی اندرکنش خاک و سازه در قالب دوره ی تناوب و میرایی مؤثر سازه بررسی شده است. تحلیل های موجود در تاریخچه به منظور محاسبه ی دوره ی تناوب و میرایی مؤثر سازه ها عمدتاً مربوط به پی های مدور مدفون و غیرمدفون واقع بر توده ی نیمه بی نهایت خاک است، اما در پژوهش حاضر، تمرکز بر روی پی نواری مدفون بر روی توده ی نیمه بی نهایت و غیرمتراکم خاک صورت گرفته است.

رفتار سازه بر روی خاک به عنوان یک بستر انعطاف پذیر در برابر بارگذاری دینامیکی به خصوصیات سازه، خاک و همچنین بارگذاری لرزه یی بستگی دارد. بنابراین برای بررسی رفتار سازه علاوه بر خصوصیات سازه، باید نیروهای اندرکنش بین خاک و سازه را نیز در محاسبات ملحوظ داشت. لذا دوره ی تناوب و میرایی مؤثر سازه متأثر از اندرکنش خاک و سازه خواهد بود.

می توان نشان داد که بیشترین تأثیر اندرکنش خاک و سازه و به ویژه تغییر در دوره ی تناوب سازه در مود اول ارتعاشی سازه صورت می گیرد. [۳۳] لذا سازه با یک سیستم یک درجه آزادی مدل سازی می شود. ضمناً از جمله اهداف مدل سازی با سازه ی یک درجه آزادی، مشاهده ی پدیده های بعضاً پیچیده در قالب یک مدل ساده شده است. شکل ۷، چگونگی مدل سازی یک سازی طولی و یا دیوار واقع بر پی نواری را با سازی یک درجه آزادی نشان می دهد. در این حالت تحلیل به صورت کرنش صفحه یی انجام شده و ضخامت قطعه ی اتخاذ شده در راستای طولی سازه و یا دیوار برابر واحد است.

همچنین به منظور دست یابی به روابط ساده تر، از جرم پی نسبت به جرم سازه صرف نظر شده است و یا می توان این گونه عنوان کرد که تأثیر جرم پی در همان جرم کل متمرکز سازه مشاهده شده است. بنابراین در اینجا جرمی در محل پی وجود ندارد و پی صلب و بستر آن با دو درجه آزادی افقی و چرخشی با سختی های  $K_x$  و  $K_\theta$  در نظر گرفته شده است. بدین ترتیب سازه با جرم کل متمرکز  $M$  و سختی  $K_c$  است. همچنین سازه با یک درجه آزادی است و لذا فقط حرکت افقی آن مدنظر است. بر این اساس، کل جابه جایی افقی جرم  $M$  در اثر حرکت زمین به صورت رابطه ی ۱۶ خواهد بود:

$$u_t = u_g + u_x + h\theta + u_e \quad (16)$$

که در آن،  $u_g$  جابه جایی ناشی از حرکت زمین،  $u_x$  جابه جایی افقی پی،  $\theta$  چرخش پی،  $h$  ارتفاع سازه و  $u_e$  تغییر شکل کشسان سازه است (شکل ۸).

با معرفی بسامدهای سازه با بستر صلب، همچنین بسامدهای افقی و چرخشی

پژوهش حاضر به صورت رابطه‌ی ۲۱ تعریف می‌شود:

$$\gamma = \frac{M}{\rho B h} \quad (21)$$

که در آن،  $\gamma$  در واقع معرف جرم سازه به جرم خاک هم حجم آن در واحد طول پی نواری است. پارامتر بی بعد دیگر ( $\sigma_0$ ) همانند آنچه در تاریخچه برای پی مدور آمده است،<sup>[۲۵]</sup> به صورت رابطه‌ی ۲۲ بیان می‌شود:

$$\sigma_0 = \frac{C_S T_{fix}}{h} \quad (22)$$

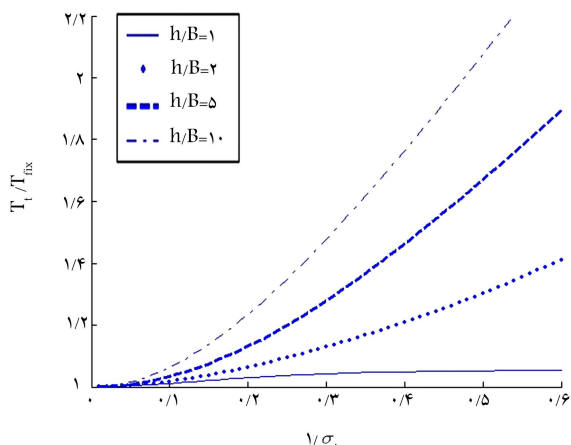
همچنین از آنجا که با افزایش ارتفاع سازه و نیز نرم‌تر بودن توده‌ی خاک و بالطبع کم‌بودن سرعت موج برشی در آن، اثر اندرکنش خاک و سازه افزایش می‌یابد، با توجه به رابطه‌ی ۲۲،  $\frac{1}{\sigma_0}$  بیان‌گر میزان اثر اندرکنش خاک و سازه خواهد بود. براساس روابط ۲۱ و ۲۲، رابطه‌ی ۲۰ را به صورت رابطه‌ی ۲۳ می‌توان بازنویسی کرد.<sup>[۲۶]</sup> رابطه‌ی برگشتی ۲۳ نشان می‌دهد که دوره‌ی تناوب سیستم سازه با اثر اندرکنش، وابسته به سختی سازه و توابع امیدانس پی نواری مدفون است. از آنجا که سختی پی نواری نیز به نوبه‌ی خود وابسته به بسامد و متناظراً وابسته به دوره‌ی تناوب است، بنابراین برای یک سازه با دوره‌ی تناوب  $T_{fix}$  با یک روند تکرار می‌توان دوره‌ی تناوب تصحیح‌شده‌ی آن در اثر اندرکنش ( $T_i$ ) را محاسبه کرد.

از آنجا که رابطه‌ی ۲۳ تابع مقادیر مختلط است، بسامد و دوره‌ی تناوب به دست آمده نیز مختلط خواهد بود. بسامد و میرایی واقعی سیستم از روابط ۲۴ و ۲۵ به دست می‌آیند:<sup>[۲۷]</sup>

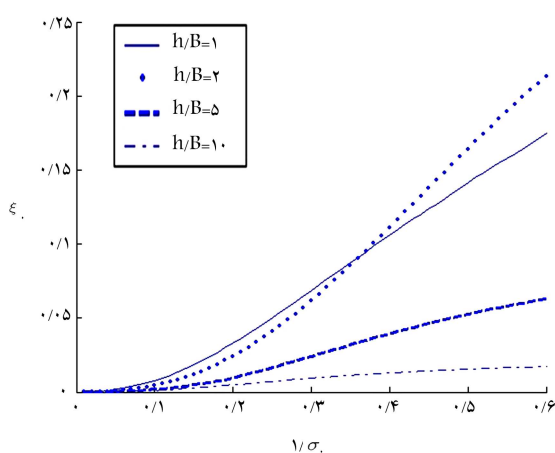
$$\omega_{real} = real(\omega) \quad (24)$$

$$\xi_s = \frac{imag(\omega)}{abs(\omega)} \quad (25)$$

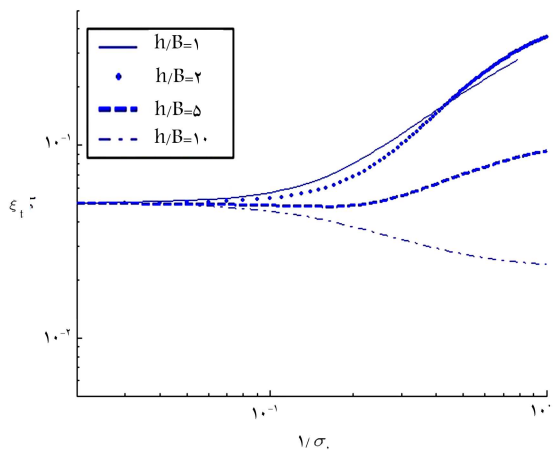
به‌عنوان کاربردی از روابط مذکور، پی نواری مدفون بر روی توده‌ی کثسان با ضریب پواسون  $\nu = 0.5$  که توابع امیدانس آن در بخش ۳ محاسبه شد، در نظر گرفته می‌شود و محاسبات برای سازه‌هایی با نسبت عرض به نصف پی ( $\frac{h}{B} = 1, 2, 5, 10$ ) صورت می‌گیرد. مقدار پارامتر بی بعد  $\gamma$  که معمولاً بین ۰.۱ تا ۰.۲ متغیر است،<sup>[۲۵]</sup> در اینجا برابر ۰.۱۵ فرض شده است. شکل‌های ۹ و ۱۰، دوره‌ی تناوب و میرایی تصحیح‌یافته را بر حسب  $\frac{1}{\sigma_0}$  نشان می‌دهند. همان‌طور که انتظار می‌رفت، تأثیر انعطاف‌پذیری بستر پی در افزایش دوره‌ی تناوب سازه‌های لاغرتر نسبت به سازه‌های پهن‌تر بیشتر است. همچنین مطابق شکل‌های مذکور، با افزایش پارامتر  $\frac{1}{\sigma_0}$ ، اثر اندرکنش قابل توجه است و ارزش دخالت دادن در تحلیل را دارد. برخی پژوهشگران، مقدار حدی  $\frac{1}{\sigma_0}$  به منظور لحاظ کردن اثر اندرکنش خاک و سازه در تحلیل پی مدور را برابر با ۰.۵ معرفی کرده‌اند.<sup>[۸]</sup> در حالت پی نواری با اتخاذ  $\frac{h}{B} = 10$ ،  $\frac{1}{\sigma_0} = 0.13$ ، بیشینه‌ی میزان افزایش دوره‌ی تناوب در سازه‌ی لاغر با  $\frac{h}{B} = 10$  حدود ۱۰٪ است. همچنین از آنجا که سازه و توده‌ی خاک کثسان فرض شده‌اند، میرایی  $\xi_s$  به دست آمده در شکل ۱۱، معرف میرایی تشعشی یا هندسی ناشی از اثر نیمه بی‌نهایت بودن توده‌ی خاک است که اثر مذکور برخلاف دوره‌ی تناوب، برای سازه‌های پهن‌تر بیشتر از سازه‌های لاغرتر است. با این حال در شکل ۱۰، تداخلی



شکل ۹. دوره‌ی تناوب تصحیح‌شده‌ی سازه در اثر اندرکنش برای  $h/B$  های مختلف.



شکل ۱۰. میرایی تصحیح‌شده‌ی سازه در اثر اندرکنش برای  $h/B$  های مختلف.



شکل ۱۱. میرایی موثر کل سازه در اثر اندرکنش برای  $h/B$  های مختلف.

$$T_f = T_{fix} = \sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\sigma_0^2 \left(\frac{h}{B}\right)^2} \frac{4\pi^2}{(real(k_{HH}) + i imag(k_{HH}))} \times \left(1 + \frac{(real(k_{HH}) + i imag(k_{HH})) \left(\frac{h}{B}\right)^2}{(real(k_{RR}) + i imag(k_{RR}))}\right)} \quad (23)$$

جمع نمی‌شوند و اثر اندرکنش خاک و سازه سهم میرایی سازه را کاهش می‌دهند. به عبارت دیگر، با افزایش اثر اندرکنش خاک و سازه،  $\xi$  و  $\frac{T_t}{T_{fix}}$  همواره افزایش می‌یابند. اما در سازه‌های بلند، افزایش  $\frac{T_t}{T_{fix}}$  ممکن است به قدری باشد که اثر میرایی سازه را کاهش دهد و میرایی کل سیستم خاک و سازه از میرایی سازه با پای صلب نیز کمتر شود. از لحاظ فیزیکی، پدیده مذکور به تأثیر قابل توجه چرخش پی در جابه‌جایی افقی سازه‌های بلندتر نسبت به سازه‌های کوتاه‌تر مربوط می‌شود.

## ۵. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر، حل‌های اساسی جابه‌جایی و تنش سطحی دو بعدی در حوزه‌ی بسامد برای حالت ضریب پواسون برابر ۰/۵ تصحیح شد. برای این منظور، روابط هم‌ارزی و نیز ساده‌سازی‌های لازم استفاده شد. با استفاده از حل‌های اساسی به دست آمده، رفتار دینامیکی توده‌های غیرمترکم و به‌طور خاص خاک رس اشباع در حالت زهکشی‌نشده را می‌توان با روش المان مرزی بررسی کرد. به‌عنوان کاربردی از حل‌های اساسی به دست آمده، قابلیت روش المان مرزی در محاسبه‌ی توابع امیدانس یک پی نواری مدفون واقع بر روی توده‌ی نیمه‌بی‌نهایت خاک غیرمترکم بررسی شد. همچنین با معرفی پارامترهای بی بعد مناسب در حالت پی نواری، رابطه‌ی برای دوره‌ی تناوب و میرایی مؤثر سازه بر حسب دوره‌ی تناوب سازه با پای صلب و نیز مقادیر حقیقی و مختلط توابع امیدانس به دست آمد. از آنجا که در رابطه‌ی به دست آمده، دوره‌ی تناوب به توابع امیدانس و توابع امیدانس نیز به نوبه‌ی خود به بسامد بی‌بعد و متناظراً به دوره‌ی تناوب وابسته است، بنابراین با یک روند تکرار، دوره‌ی تناوب و میرایی مؤثر سازه به دست آمدند. مقدار حدی پارامتر  $\frac{1}{\sigma}$  برای پی‌های نواری با مدفون‌شدگی برابر یک چهارم عرض پی، به منظور در نظر گرفتن اثر اندرکنش خاک و سازه حدود ۰/۱۳ محاسبه شد. همچنین با تلفیق میرایی سازه با میرایی مؤثر، میرایی مؤثر کل سازه محاسبه شد. در حالت خاص در نظر گرفته نیز مشاهده شد که اثر اندرکنش خاک و سازه به‌گونه‌ی است که برای سازه‌های لاغر می‌تواند باعث کاهش میرایی مؤثر کل سازه نسبت به میرایی سازه با پای صلب شود. نتیجه‌ی به دست آمده از نظر کیفی همانند پی مدور است و به تأثیر بیشتر چرخش پی در سازه‌های بلندتر نسبت به سازه‌های کوتاه‌تر مربوط می‌شود.

بین گراف‌های مربوط به  $\frac{h}{B} = ۱, ۲$  مشاهده می‌شود که به روند غیرخطی توابع امیدانس پی نواری مدفون مربوط می‌شود.

برای در نظر گرفتن میرایی سازه در میرایی مؤثر کل، ابتدا باید نحوه‌ی اشتراک سهم میرایی‌های مختلف در میرایی کل مشخص شود. با در نظر گرفتن سختی‌ها به صورت مختلط و استفاده از روابط تعادل لنگر و نیرو همانند قبل، رابطه‌ی ۲۶ برای میرایی کل سیستم خاک و سازه به دست می‌آید: [۲۴]

$$\xi_t = \xi_s \left( \frac{\omega_t^2}{\omega_s^2} \right) + \xi_h \left( \frac{\omega_t^2}{\omega_s^2} \right) + \xi_\theta \left( \frac{\omega_t^2}{\omega_s^2} \right) + \xi_{soil} \left( 1 - \frac{\omega_t^2}{\omega_s^2} \right) \quad (26)$$

که در آن،  $\xi_\theta$  و  $\xi_h$  به ترتیب معرف میرایی تشعشعی یا هندسی افقی و چرخشی توده‌ی خاک،  $\xi_{soil}$  معرف میرایی مصالح توده‌ی خاک و  $\xi_s$  معرف میرایی سازه است. در صورتی که توده‌ی خاک کثیف نیز باشد، به علت مستهلک ساختن و پخش امواج وارده از طرف سازه با میرایی تشعشعی است، به طوری که قسمت مختلط توابع امیدانس بیان‌گر چنین میرایی است. همچنین با ویسکوکثیفان فرض کردن توده‌ی خاک و محاسبه‌ی توابع امیدانس در این حالت، در واقع میرایی مصالح خاک نیز در توابع امیدانس مستتر می‌شود. براساس توضیحات فوق میرایی  $\xi$  محاسبه شده در شکل ۱۰ شامل اثر ۳ ترم آخر سمت راست رابطه‌ی ۲۶ است. رابطه‌ی ۲۶ را به صورت رابطه‌ی ۲۷ می‌توان بازنویسی کرد:

$$\xi_t = \xi_s \left( \frac{\omega_t^2}{\omega_s^2} \right) + \xi_o = \frac{\xi_s}{\left( \frac{T_t}{T_{fix}} \right)^2} + \xi_o \quad (27)$$

با این حال رابطه‌ی ۲۸ برای میرایی مؤثر کل خاک و سازه پیشنهاد شده است: [۲۸]

$$\xi_t = \frac{\xi_s}{\left( \frac{T_t}{T_{fix}} \right)^3} + \xi_o \quad (28)$$

با فرض میرایی ۵٪  $\xi_s = 0.05$  برای سازه، میرایی مؤثر کل سیستم خاک و سازه براساس رابطه‌ی ۲۸ نسبت به پارامتر  $\frac{1}{\sigma}$  در مختصات لگاریتمی در شکل ۱۱ مشاهده می‌شود. همان‌طور که ملاحظه می‌شود برای مقادیر  $\frac{h}{B}$  بالا میرایی کل سیستم خاک و سازه می‌تواند کاهش یابد. این کاهش را با رابطه‌ی ۲۷ و یا ۲۸ می‌توان توجیه کرد. همچنین روابط مذکور نشان می‌دهند که میرایی سازه و خاک مستقیماً با هم

## پانویس‌ها

1. impedance functions
2. system identification
3. compliance functions
4. effective ductility
5. dirac delta function
6. Betti's reciprocal theorem
7. smooth boundaries
8. Kronecker delta
9. Bessel functions
10. convoluted form
11. enclosing boundaries
12. virtual boundaries
13. compliance matrix

## منابع (References)

1. Luco, J.E. and Westmann, R.A. "Dynamic response of a rigid footing bonded to an elastic half space", *Journal of Applied Mechanics, ASME*, **39**(E2), pp. 527-534 (1972).
2. Oien, M.A. "Steady motion of a rigid strip bonded to an elastic half space", *Journal of Applied Mechanics, ASME*, **38**(E2), pp. 328-334 (1971).
3. Dasgupta, G. and Chopra, A.K. "Dynamic stiffness matrices for homogeneous viscoelastic half planes", *EERC*, **77**(26), pp. 109 (1977).
4. Tzong, T.J., Gupta, S. and Penzian, J. "Two-dimensional hybrid modelling of soil-structure interaction", *EERC*, **81**(11), pp. 54(1981).

5. Wang, J., Lo, S.H., Zhou, D. and Xu, B.Q. "Frequency-dependent impedance of a strip foundation group and its representation in time domain", *Appl. Math. Model.*, **39**(10-11), pp. 2861-2881 (2014).
6. Yerli, H.R. and Deneme, I.O. "Elastodynamic boundary element formulation employing discontinuous curved elements", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **28**(6), pp. 480-491 (2008).
7. Veletsos, A.S., *Dynamic of Structure-Foundation Systems*, Structural and Geotechnical Mechanics, A Volume Honoring N.M. Newmark (Editor: W.J. Hall), Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., pp. 333-361 (1977).
8. Veletsos, A.S. and Meek, J.W. "Dynamic behavior of building-foundation systems", *Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **3**(2), pp. 121-138 (1974).
9. Aviles, J. and Perez-Rocha, L.E. "Evaluation of interaction effects on the system period and the system damping due to foundation embedment and layer depth", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **15**(1), pp. 11-27 (1996).
10. Rajapakse, R.K.N.D. and Shah, A.H. "Impedances of embedded rigid strip foundations", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **16**(2), pp. 255-273 (1988).
11. Wang, Y. and Rajapakse, R.K.N.D. "Dynamics of rigid strip foundations embedded in orthotropic elastic soils", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **20**(10), pp. 927-947 (1991).
12. Ghannad, M.A., Rahmani, M.T. and Jahankhah, H. "The frequency and damping of soil-structure systems with embedded foundation", *Seismic International Conference Commemorating 1908 Messina and Reggio Calabria Earthquake (MERCEA'08)*, Reggio Calabria, Italy (2008).
13. Aviles, J. and Perez-Rocha, L.E. "Effects of foundation embedment during building-soil interaction", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **27**(12), pp. 1523-1540 (1998).
14. Aviles, J. and Perez-Rocha, L.E. "Design concepts for yielding structures on flexible foundation", *Proceedings Third UJNR Workshop on Soil-Structure Interaction*, Menlo Park, California, USA, (March 29-30, 2004).
15. Aviles, J., Suarez, M. and Sanchez-Sesma, F.J. "Effects of wave passage on the relevant dynamic properties of structures with flexible foundation", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **31**(1), pp. 139-159 (2002).
16. Maravas, A., Mylonakis G. and Karabalis, D. "Dynamic characteristics of simple structures on piles and footings", *Proceedings of 4th international conference on earthquake geotechnical engineering*, No. 1672, Thessaloniki, Greece (2007).
17. Medina, C., Aznarez, J.J., Padron, L.A. and Maeso, O. "Effects of soil-structure interaction on the dynamic properties and seismic response of piled structures", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **53**, pp. 160-175 (Oct, 2013).
18. Stewart, J.P., Seed R.B. and Fenves G.L. "Seismic soil-structure interaction in buildings. II: empirical findings", *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, **125**(1), pp. 38-48 (1999).
19. Wei, X., Li-Zhong, J. and Yao-Zhuang, L. "Influence of soil-structure interaction (structure-to-soil relative stiffness and mass ratio) on the fundamental period of buildings: Experimental observation and analytical verification", *Bulletin of Earthquake Engineering*, **14**(1), pp. 139-160 (2016).
20. ATC, "Tentative provisions for the development of seismic regulations for buildings", *Applied Technology Council Publication*, **ATC3**(06), pp. 507 (1978).
21. FEMA, "NEHRP recommended seismic provisions for new buildings and other structures", FEMA P-750/2009 Edition, prepared by the Building Seismic Safety Council of the National Institute of Building Sciences for the Federal Emergency Management Agency, Washington, D.C. (2009).
22. ASCE, "Minimum design loads for buildings and other structures", ASCE/SEI7-10, American Society of Civil Engineers, Reston, Virginia (2010).
23. Kokkinos, F.T. and Spyros, C.C. "Dynamic analysis of flexible foundations in the frequency domain", *Computers and Structures*, **8**(5), pp. 473-482 (1991).
24. Cruse, T.A. "The transient problem in classical elastodynamics solved by integral equations", Ph.D. Thesis, University of Washington (1967).
25. Eslami Haghighat, A. "Diffraction of rayleigh wave by simple surface irregularity using boundary element method", *Journal of Geophysics and Engineering*, **12**(3), pp. 365-375 (2015).
26. Israil, A.S.M. and Ahmad S. "Dynamic vertical compliance of strip foundations in layered soils", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **18**(7), pp. 933-950 (1989).
27. Bu, S. and Davies T.G. "Boundary element technique for geotechnical problems of incompressible soils", *Commun Numer Methods Eng.*, **11**(11), pp. 927-935 (1995).
28. Bu, S. "Impedance functions of square foundations embedded in an incompressible half-space", *Engineering Analysis with Boundary Element*, **22**(1), pp. 1-11 (1998).
29. Ahmad, S. and Banerjee, P.K. "Multi-domain BEM for Two-dimensional problems of elastodynamics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **26**(4) pp. 891-911 (1988).
30. Eslami Haghighat, A. and Anvar, S.A. "Study on numerical analysis of cavity subjected to inner step uniform pressure modeled by boundary element method", *Journal of Seismology and Earthquake Engineering (JSEE)*, **16**(2), pp. 1-9 (2014).
31. Heymsfield, E. "Infinite domain correction for Anti-plane shear waves in a Two-dimensional boundary element analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **40**(5), pp. 953-964 (1997).
32. Kamalian, M., Gatmiri, B. and Sohrabi, A. "On Time-domain Two-dimensional site response analysis of topographic structures by BEM", *Journal of Seismology and Earthquake Engineering (JSEE)*, **5**(2), pp. 35-45 (2003).



33. Ghodrat, E., Jahankhah, H. and Ghannad, M.A. "Effect of soil structure interaction on higher modes of vibration", *6th National Conference of Civil Engineering*, Semnan, (In Persian) ( April 26. 2011).
34. Wolf, J.P., *Dynamic Soil Structure Interaction*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1985).
35. Veletsos A.S., *Dynamic of Structure-Foundation Systems, Structural and Geotechnical Mechanics*, Hall WJ (ed.), Prentice-Hall: Englewood Cliffs (NJ), pp. 333-361 (1977).
36. Eslami Haghighat, A. "Plastic soil structure interaction using coupled finite element and boundary element", Ph.D. Thesis, Shiraz University (In Persian) (2010).
37. Ghannad, M.A., Fukuwa, N. and Nishizaka, R. "A study on the frequency and damping of Soil-structure systems using a simplified model", *Journal of Structural Engineering, AIJ*, **44B**, pp. 85-93 (1988).
38. Veletsos, A.S. and Nair, V.V. "Seismic interaction of structures on hysteretic foundations", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **101**(1), pp. 109-129 (1975).