

مدل سازی رشد ترک با استفاده از ترکیب تئوری بدون شبکه‌ی کمینه‌ی مربعات گسسته‌ی هم‌مکان و تئوری ترک چسبنده و روش فرانمایی

مجتبی لیب‌زاده* (استادیار)

حمیدرضا غفوری (استاد)

سید محمد جعفر هاشمی طباطبایی (دانشجوی کارشناسی ارشد)
گروه عمران، دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز

مهندسی عمران شریف، (پاییز ۱۳۹۷)
دوره‌ی ۲ - ۳۴، شماره‌ی ۲/۳، ص. ۱۲-۳

در پژوهش حاضر، روش بدون شبکه‌ی کمینه‌ی مربعات گسسته‌ی هم‌مکان برای مدل سازی رشد ترک براساس تئوری ترک چسبنده توسعه داده شده است. روش عددی کمینه‌ی مربعات گسسته‌ی هم‌مکان، یک روش بدون شبکه‌ی واقعی است که مبتنی بر مفهوم کمینه‌سازی مربعات خطا توسعه یافته است. روش حاضر برخلاف روش‌های بدون شبکه‌ی دیگر به هیچ‌گونه شبکه‌ی پیش‌زمینه برای حل معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مسئله نیاز ندارد و یک روش بدون شبکه‌ی واقعی است. در روش مذکور، لحظه‌ی ایجاد ترک توسط کنترل تنش چسبنده بر جداره‌ی ترک کنترل می‌شود و به تدریج با بازتر شدن دهانه‌ی ترک، میزان تنش مذکور کاهش می‌یابد و صفر شدن آن به معنی بازشدگی کامل ترک است. برای مدل سازی ناپیوستگی ناشی از ترک در توابع شکل، از روش فرانمایی استفاده شده است. در نهایت، کارایی و دقت روش پیشنهادی با حل مسائل استاندارد و مقایسه‌ی نتایج حاصل از حل عددی با نتایج تحلیلی و نتایج روش اجزاء محدود نشان داده شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهند که روش پیشنهادی، توانایی قابل قبولی در پیش‌بینی میدان تنش و تغییرشکل در مسائل حاوی ترک دارد و قادر است مسیر رشد ترک را در مودهای اول (کششی) و دوم (کششی - برشی) ترک به خوبی پیش‌بینی کند. دقت روش بالاست و نسبت به روش‌های بدون شبکه‌ی موجود، حساسیت کمتری نسبت به آرایش گره‌ها در دامنه‌ی مسئله دارد. در روش عددی کمینه‌ی مربعات گسسته‌ی هم‌مکان، توابع شکل به دست آمده، پیوستگی بالاتری نسبت به روش‌های دیگر که در آن‌ها از روش مشاهده‌ی برای تشخیص ترک استفاده می‌شود، دارند. همچنین شکل مشتقات معادلات به دست آمده با روش پیشنهادی، ساده‌تر از شکل نظیر معادلات به دست آمده با روش انکسار برای تشخیص ترک است.

واژگان کلیدی: ترک، روش بدون شبکه‌ی کمینه‌ی مربعات گسسته‌ی هم‌مکان، تئوری ترک چسبنده، روش فرانمایی.

la.bibzadeh_m@scu.ac.ir
ghafouri_h@scu.ac.ir
sed.mohamad.h.s@gmail.com

۱. مقدمه

در سال‌های اخیر، مطالعات متعددی بر روی روش‌های عددی جهت حل معادلات دیفرانسیل انجام شده است. یکی از قوی‌ترین و پرکاربردترین روش‌های عددی، روش اجزاء محدود است. روش اجزاء محدود، به دلیل استفاده از اجزاء در فرایند حل با مشکلاتی مواجه می‌شود. روش مذکور در تحلیل مسائلی با مرزهای پیچیده یا متحرک و یا مسائلی که در زمان، دچار تغییر در هندسه‌ی حوزه می‌شوند، مانند

* نویسنده مسؤل

تاریخ: دریافت ۱۳۹۴/۸/۲۶، اصلاحیه ۱۳۹۵/۳/۳، پذیرش ۱۳۹۵/۱۰/۴

DOI:10.24200/J30.2018.1416

مسائلی همچون رشد ترک و تغییر شکل‌های بزرگ نیازمند فرایند مداوم شبکه‌بندی مسئله است. به دلیل چنین محدودیت‌هایی، توجه بسیاری از پژوهشگران به روش‌های بدون شبکه معطوف شده است. برای حل مسائل حاوی ترک استفاده شده در پژوهش حاضر، از روش بدون شبکه‌ی کمینه‌ی مربعات گسسته استفاده شده است. روش کمینه‌ی مربعات گسسته، یک روش بدون شبکه‌ی واقعی است که مبتنی بر روش کمینه‌ی مربعات است. از مزایای روش مذکور، عدم نیاز به انتگرال‌گیری، تقارن ماتریس ضرایب و سادگی به‌کارگیری آن است. در روش گسسته‌سازی، حوزه‌ی مسئله از

طبیعی در مسائل کشسانی دو بُعدی و نیز در مسائل مکانیک سیالات اثبات شده است.^[۱۹] در مطالعه‌ی حاضر تلاش شده است تا کارایی روش کمینه‌ی مربعات گسسته در حل مسائل مربوط به ترک نیز بررسی شود.

۲. روش کمینه‌ی مربعات متحرک برای تشکیل توابع شکل

در روش کمینه‌ی مربعات متحرک، تابع تخمین زننده $\hat{u}(X)$ توسط حاصل ضرب داخلی یک بردار چندجمله‌ی $P(X)$ در یک بردار ضرایب $\alpha(X)$ حاصل می‌شود (رابطه‌ی ۱):

$$\hat{u}(X) = \sum_{j=1}^m p_j(X) \cdot a_j(X) \equiv P(X) \cdot a(X) \quad (1)$$

به منظور تعیین ضرایب مجهول $a(X)$ ، ابتدا تابع وزن‌دار $J(X)$ به صورت رابطه‌ی ۲ تعریف شده است:

$$J(X) = \sum_{i=1}^n W_i(X) \cdot [P^T(X_i) \cdot \alpha(X) - \tilde{u}_i]^2 \quad (2)$$

که در آن، $W_i(X)$ نشان‌دهنده‌ی تابع وزن مربوط به نقطه‌ی گره‌ی i و مقدار داخل کروشه اختلاف بین مقدار تخمین زده‌شده در نقطه‌ی i و مقدار جواب در همان نقطه است. همچنین n تعداد نقاط در حوزه‌ی اثر تابع W است. تابع وزن خواهد داشت (رابطه‌ی ۳):

$$W(X - X_i) = \begin{cases} 1 & d = 0 \\ 0 & d > d_{\max} \end{cases} \quad (3)$$

$$d = |X - X_i|$$

برای هر نقطه d_{\max} ، باید به گونه‌ی انتخاب شود که تعداد وزن‌های غیر صفر، بزرگ‌تر از تعداد تک جملات موجود در چندجمله‌ی باشند. در رابطه‌ی ۴، تابع وزنی با نام اسپیلاین مرتبه‌ی سوم، که در پژوهش حاضر از آن استفاده شده است، مشاهده می‌شود:

$$W(X - X_j) = W(\bar{d}) = \begin{cases} \frac{3}{4} - \frac{3}{2}\bar{d} + \frac{3}{4}\bar{d}^2 & \text{for } \bar{d} \leq \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} - \frac{3}{2}\bar{d} + \frac{3}{4}\bar{d}^2 - \frac{3}{4}\bar{d}^3 & \text{for } \frac{1}{4} \leq \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \text{for } \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (4)$$

که در آن، $\bar{d} = \|X - X_j\|/d_{\max}$ و d_{\max} شعاع تأثیر نقطه‌ی گره‌ی X_j است.

۳. روش بدون شبکه‌ی کمینه‌ی مربعات گسسته‌ی

هم‌مکان CDLSM برای تشکیل دستگاه معادلات^[۱۸]

استفاده از نقاط هم‌مکان، روشی جدید و مؤثر در بهبود جواب‌ها در روش‌های بدون شبکه است که در روند حل خود از انتگرال‌گیری استفاده نمی‌کنند. نقاط ذکرشده

طریق یک سری نقاط گره‌ی صورت می‌گیرد، که برای ساخت توابع شکل کمینه‌ی مربعات متحرک^۲ به‌کار می‌روند. روش مذکور مبتنی بر کمینه‌سازی تابع مجموع مربعات باقیمانده‌ی معادلات دیفرانسیل حاکم بر حوزه‌ی مسئله و مرزهاست.

اولین ایده‌ی استفاده از روش‌های بدون شبکه در روش هیدرودینامیک ذرات هموار به منظور مدل‌سازی پدیده‌های نجومی، همچون گسترش ستارگان و توده‌ی ابرهای غباری توسط برخی پژوهشگران، استفاده شد.^[۲۰] تقریب کمینه‌ی مربعات متحرک اولین بار در نوشتاری در سال ۱۹۹۲،^[۲۱] در روش گالرکین استفاده شد که آن را روش جزء پخش^۳ نامیدند. پس از انتشار نوشتار مذکور، روش‌های زیادی با عنوان روش‌های بدون شبکه ارائه شد که برای حل مسائل ترک استفاده شده‌اند. روش گالرکین بدون المان در سال ۱۹۹۴، برای حل مسائل ترک ارائه شد.^[۲۲] از آن سال تاکنون پژوهشگران زیادی از روش‌های بدون شبکه در حل مسائل ترک استفاده کرده‌اند. مثلاً در سال ۲۰۰۳، از روش بدون المان گالرکین برای تحلیل ترک در مواد مرکب همسان‌گرد ناهمگن استفاده شده است.^[۲۳] در نوشتار دیگری در همان سال، از روش پتروف - گالرکین موضعی و انتگرال مرزی برای حل مسئله‌ی ترک استفاده شده است.^[۲۴]

همچنین در سال ۲۰۰۶، روش بدون شبکه‌ی پتروف - گالرکین برای محاسبه‌ی ضریب شدت تنش و از روش کمینه‌ی مربعات متحرک بردار تنش در اطراف نوک ترک در اجسام جامد دو بُعدی با تغییر رفتار خطی مواد در دامنه‌ی مسئله و برای تقریب زدن تابع جواب در زیردامنه‌ها استفاده شده است.^[۲۵] در سال ۲۰۰۸، نیز روشی برای تعیین دامنه‌ی پشتیبان نقاط محاسباتی در اطراف نوک ترک ارائه و عنوان شد که روش پیشنهادی برای توزیع منظم و نامنظم نقاط گره‌ی درون دامنه‌ی مسئله، کاربرد دارد.^[۲۶] همچنین در سال ۲۰۱۰، برای حل مسئله‌ی ترک با استفاده از روش بدون شبکه، انتگرال‌گیری روی خط به جای انتگرال‌گیری روی سطح پیشنهاد شد و برای تقریب زدن تابع جواب از روش قوی کمینه‌ی مربعات متحرک استفاده شد.^[۲۷] در سال ۲۰۱۳ نیز از روش گالرکین بدون المان برای تحلیل ترک در صفحات همسان‌گرد و برای مدل‌سازی ناپیوستگی ناشی از ترک از توابع غنی‌شده^۴ استفاده شده است.^[۲۸]

همچنین در سال ۲۰۱۲، از روش بدون شبکه‌ی پتروف - گالرکین برای مدل‌سازی رفتار یک ترک قرارگرفته بین دو ماده‌ی متفاوت در یک جسم جامد دو بُعدی استفاده شده است.^[۲۹] در پژوهش دیگری در همان سال از ترکیب دو روش معیار مشاهده‌ی و مثلث‌های هم‌جوار برای شناسایی ترک و حل میدان تنش در اطراف آن استفاده و به مقایسه‌ی روش پیشنهادی با روش‌های موجود، مانند: روش فرانمایی^۵، مشاهده‌ی^۶، و شفافیت^۷ پرداخته شده است.^[۳۰] همچنین برخی پژوهشگران (۲۰۱۳) به مرور برخی مطالعات که در آن‌ها از روش بدون شبکه‌ی پتروف - گالرکین موضعی در حل مسائل مختلف و نیز حل مسئله‌ی ترک استفاده شده است، پرداختند.^[۳۱]

در سال ۲۰۱۵، نیز با ترکیب روش بدون شبکه‌ی درون‌یابی شعاعی و روش اجزاء محدود، اقدام به حل مسئله‌ی رشد ترک درون جسم جامد دو بُعدی شده است.^[۳۲] در میان روش‌های بدون شبکه، روش کمینه‌ی مربعات گسسته به دلیل استفاده از شکل دیفرانسیلی روابط حاکم و عدم نیاز به انتگرال‌گیری جهت کاهش مرتبه‌ی مشتقات، جذابیت خاصی دارد. از مزایای روش مذکور عدم نیاز به انتگرال‌گیری، تقارن ماتریس ضرایب، و سادگی به‌کارگیری آن است. روش مذکور در سال‌های اخیر جهت حل مسائل گوناگون استفاده شده است. از روش کمینه‌ی مربعات گسسته برای حل مسئله‌ی پواسون در حالت کشسانی استفاده شده است.^[۳۳] علاوه بر مسئله‌ی پواسون، روش ذکرشده تاکنون برای حل مسائل تراوش،^[۳۴] و برای حل معادلات با مشتقات جزئی بیضوی در حالت یک بُعدی،^[۳۵] ارائه شده است. همچنین کارایی روش کمینه‌ی مربعات گسسته جهت حل مسائل کشسانی و برآورد خطا و نظریف

$$R_k^{(u)} = u_k - \bar{u} = \sum_{j=1}^n (\varphi_j) u_j - \bar{u}$$

$$k = (1 \sim M_u) \quad (10)$$

حال تابع J به عنوان مجموع مربعات باقیمانده‌ها به صورت رابطه‌ی ۱۱ تعریف می‌شود:

$$J = \frac{1}{\nu} \sum_{k=1}^{M_d} [W_k R_k^{(d)}]^2 + \frac{1}{\nu} \alpha \cdot \sum_{k=1}^{M_t} [R_k^{(t)}]^2 + \frac{1}{\nu} \beta \cdot \sum_{k=1}^{M_u} [R_k^{(u)}]^2 \quad (11)$$

که در آن، اندیس k نشان‌دهنده‌ی یک نقطه‌ی هم‌مکان است. W_k در رابطه‌ی ۱۱، مقدار تابع وزن در نقطه‌ی هم‌مکان k ام است. در حقیقت تابع J مجموع مربعات باقیمانده‌ها در نقاط هم‌مکان است. ضرایب α و β ، نشان‌دهنده‌ی اهمیت بزرگی باقیمانده‌های مرزی در مقایسه با باقیمانده‌های حوزه هستند و ضرایب پناستی نام دارند. با مشتق گرفتن از تابع J نسبت به پارامترهای مجهول به راحتی می‌توان به یک دستگاه معادلات متقارن $n \times n$ دست یافت و با استفاده از روش‌های معمول حل دستگاه معادلات پارامترهای مجهول را به دست آورد. در روابط ۱۲ الی ۱۴، شکل کلی دستگاه معادلات حاصل ارائه شده است.

$$\frac{\partial J}{\partial u_i} = \sum_{i=1}^{M_d} \frac{\partial R_k^{(d)}}{\partial u_i} [R_k^{(d)}] + \alpha \sum_{i=1}^{M_t} \frac{\partial R_k^{(t)}}{\partial u_i} [R_k^{(t)}] + \beta \sum_{i=1}^{M_u} \frac{\partial R_k^{(u)}}{\partial u_i} [R_k^{(u)}] = 0 \quad (12)$$

$$K_{lm} = \sum_{i=1}^{M_d} [L(N_i)]_i^T [L(N_m)]_i + \alpha \sum_{i=1}^{M_t} [B(N_i)]_i^T [B(N_m)]_i + \beta \sum_{i=1}^{M_u} [(N_i)]_i^T [(N_m)]_i, \quad l, m = 1 \sim n \quad (13)$$

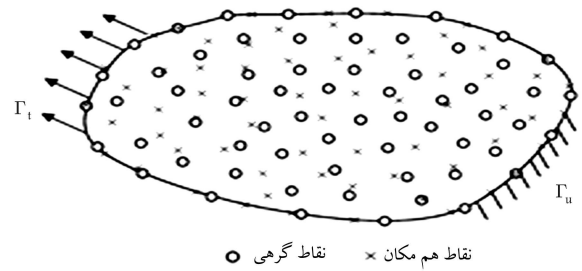
$$F_l = \sum_{i=1}^{M_d} [L(N_i)]_i^T f_i + \sum_{i=1}^{M_t} [B(N_i)]_i^T g_i + \sum_{i=1}^{M_u} [(N_i)]_i^T (u - \bar{u}); \quad l = 1 \sim n \quad (14)$$

روابط ذکر شده، نشان‌دهنده‌ی متقارن بودن ماتریس نهایی هستند. همچنین ماتریس نهایی به دلیل استفاده از تابع وزن با شعاع تأثیر محدود در محاسبه‌ی توابع شکل، نواری خواهد بود.

۴. روش‌های مختلف برای لحاظ کردن ناپیوستگی ترک

در توابع شکل پیوسته [۱۲]

استفاده از روش المان محدود به عنوان معروفترین روش‌های عددی جهت حل مسائلی که در حوزه‌ی مسئله، دچار کج‌شکلی و پیچیدگی می‌شوند، مشکلات متعددی را فرآوری مهندسان قرار داده است. استفاده از روش مذکور جهت مدل‌سازی



شکل ۱. نحوه‌ی گسسته‌سازی حوزه‌ی مسئله توسط نقاط گره‌یی و نقاط هم‌مکان CDLSM در روش

فقط در گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شوند و ابعاد دستگاه معادلات نهایی را افزایش نخواهند داد. معادله‌ی دیفرانسیل ارائه شده مطابق رابطه‌ی ۵ را در نظر بگیرید.

$$L(u) = f \quad \text{in } \Omega \quad (5)$$

شرط مرزی مشتقی و شرط مرزی اصلی به صورت رابطه‌ی ۶ تعریف می‌شوند:

$$B(u) = g \quad \text{in } \Gamma_t$$

$$u = \bar{u} \quad \text{in } \Gamma_u \quad (6)$$

که در آن، A و B عمل‌گرهای دیفرانسیلی هستند. q نیز نیروهای خارجی یا متناهی‌اند که بر حوزه‌ی مسئله عمل می‌کنند. همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، حوزه‌ی مسئله و مرزهای آن توسط n نقطه‌ی گره‌یی گسسته‌سازی شده است.

نقاط هم‌مکان نیز به صورت کاملاً دلخواه در حوزه‌ی مسئله و در مرزها قرار گرفته‌اند (شکل ۱). باید توجه داشت که بر هر نقطه‌ی گره‌یی حتماً یک نقطه‌ی هم‌مکان نیز باید قرار گیرد. لازم به ذکر است که از این پس هر جا عبارت نقطه استفاده شده است، منظور نقاط گره‌یی است. فرض کنید M_d تعداد نقاط هم‌مکان در حوزه‌ی مسئله M_u ، تعداد نقاط هم‌مکان در مرز اصلی M_t ، تعداد نقاط هم‌مکان در مرز مشتقی و M تعداد کل نقاط هم‌مکان هستند. مقدار تابع تقریب‌زنده‌ی u در یک نقطه‌ی هم‌مکان، مانند x_k را می‌توان توسط رابطه‌ی ۷ تعیین کرد:

$$u(x_k) = \sum_{i=1}^n \phi_i(x_k) \cdot u_i \quad (k = 1 \sim M) \quad (7)$$

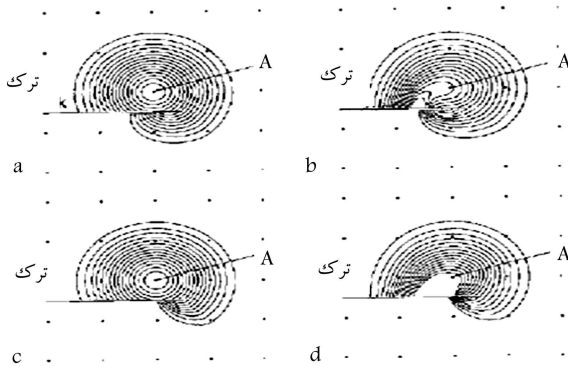
که در آن، n تعداد نقاط گره‌یی زیرحوزه‌ی است که x_k در آن قرار دارند. با جای‌گذاری رابطه‌ی ۷ در معادلات ۵ الی ۶ می‌توان به مقدار باقیمانده‌ها در حوزه‌ی مسئله‌ی $R^{(d)}$ و مرز مشتقی $R^{(t)}$ و مرز طبیعی $R^{(u)}$ به صورت روابط ۸ الی ۱۰ دست یافت:

$$R_k^{(d)} = L(u_k) - f(x_k) = \sum_{j=1}^n L(\varphi_j) u_j + f(x_k)$$

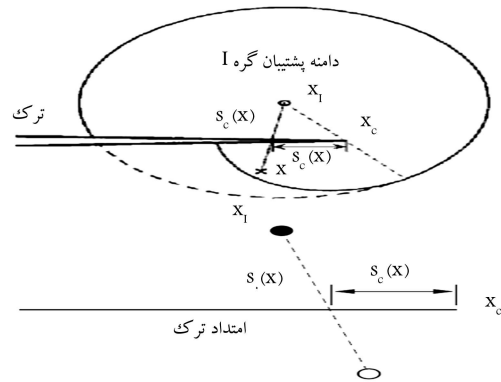
$$k = (1 \sim M_d) \quad (8)$$

$$R_k^{(t)} = B(u_k) - g(x_k) = \sum_{j=1}^n B(\varphi_j) u_j - g(x_k)$$

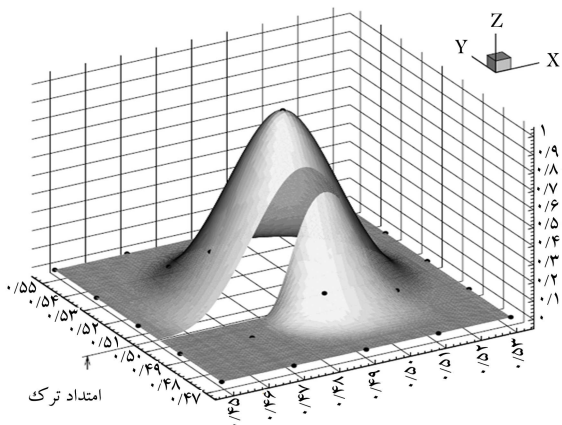
$$k = (1 \sim M_t) \quad (9)$$



شکل ۳. تابع شکل و تابع وزن تولید شده با استفاده از روش فرانمایی.



شکل ۲. طرح روش فرانمایی در نزدیکی نوک ترک.



شکل ۴. تابع شکل تولید شده با استفاده از روش فرانمایی در نزدیکی نوک ترک.

مطالعات صورت گرفته می توان این فاصله را چنین در نظر گرفت که بزرگ تر از γh باشد و در آن $0 < \gamma < 1$ باشد که معمولاً $\gamma = 0.25$ در نظر گرفته می شود.

۵. تئوری ترک چسبیده و فلوچارت حل مسئله

ترک چسبیده، روشی برای شبیه سازی رفتار غیرخطی مصالح در محدوده ی فرایند شکست است و بدین منظور فرض می شود که نیروهای سطحی چسبیده ی متقابل، بین لبه های ترک اعمال می شوند. نحوه ی اعمال این زوج نیروهای دوزنده به گونه یی است که در لحظه ی گسترش ترک، مساحت زیر نمودار نیروی سطحی - بازشدگی ترک، که نشانگر انرژی صرف شده برای جدا شدن دو سطح با مساحت واحد است، برابر با انرژی شکست ترک G_f خواهد بود.

۱.۵. معیار رشد ترک

در پژوهش حاضر، برای شبیه سازی رشد ترک در هر مرحله ی حل، با افزایش طول ترک به میزان فاصله تا نزدیک ترین نقطه، رشد ترک مدل سازی شده و فرض می شود توسعه ی ترک از نوع I Mode باشد. بنابراین رشد (افزایش طول ترک) زمانی رخ می دهد که بیشینه ی تنش کششی اصلی در نوک ترک به مقدار مقاومت کششی ماده ی مورد نظر برسد. در این حالت، جهت رشد ترک، عمود بر جهت تنش کششی اصلی است.

نایبوستگی ها و کج شکلی ها، نیازمند فرایند مداوم شبکه بندی است. فرایند تولید شبکه، بر هزینه و دشوار است. روش های بدون شبکه به دلیل عدم استفاده از شبکه بندی حوزه ی مسئله، بسیاری از مشکلات مربوط به المان بندی را مرتفع کرده است. در روش های بدون شبکه، حوزه ی مسئله توسط نقاط گرهی گسسته سازی می شوند. در حل مسائلی که مسئله دچار نایبوستگی است، روش های بدون شبکه از روش هایی جهت تعریف نایبوستگی بهره می برند که از جمله ی آنها می توان به روش های: مشاهده یی^۸، انکسار^۹ و فرانمایی^{۱۰} اشاره کرد. روش مشاهده یی شرط پیوستگی را تأمین نمی کند. روش انکسار مشتق پیچیده تری نسبت به روش فرانمایی دارد. لذا در پژوهش حاضر، روش فرانمایی که هم پیوسته است و هم فرمول بندی ساده تری دارد، استفاده شده است.

۱.۴. روش فرانمایی برای اصلاح تابع وزن در اطراف ترک [۱۲]

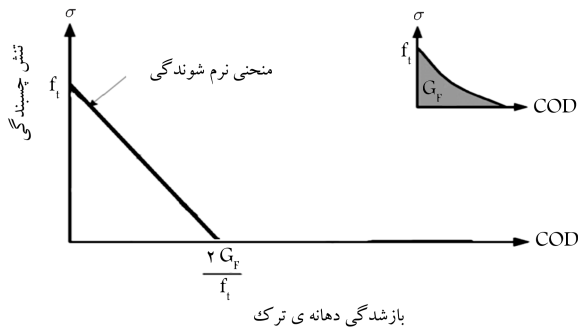
در روش فرانمایی، سطح یا خط نایبوستگی به وسیله ی تابعی با درجه های مختلف شفافیت^{۱۱} نسبت به نوک نایبوستگی تعریف می شود. در این صورت نوک نایبوستگی کاملاً شفاف در نظر گرفته می شود و با دور شدن از نوک ترک از میزان شفافیت کاسته می شود.

نایبوستگی در شکل ۲ را در نظر بگیرید. زمانی که پرتوی نوری که از نقطه ی x به گره ی x_I می تابد، با خط نایبوستگی برخورد می کند، پارامتر طولی تابع وزن در روش فرانمایی را می توان به صورت رابطه ی ۱۵ اصلاح کرد:

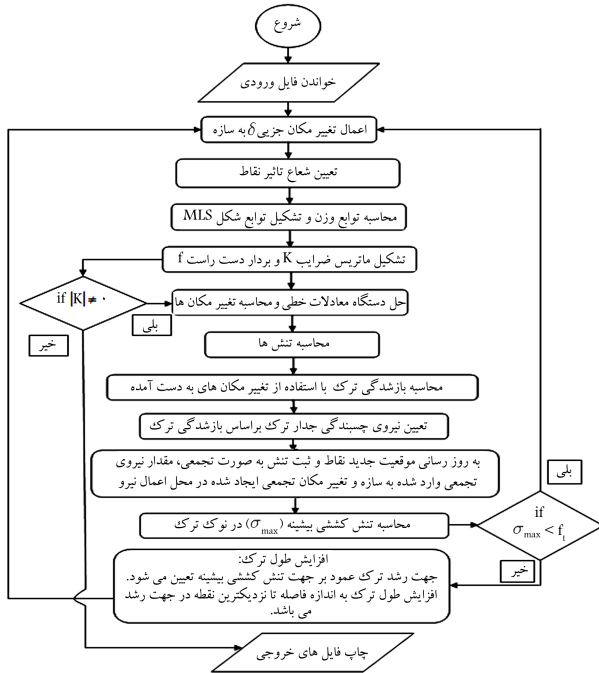
$$s(x) = s_0(x) + d_{\max} \left(\frac{s_c(x)}{\bar{s}_c} \right)^\lambda, \quad \lambda \geq 2 \quad (15)$$

که در آن، d_{\max} شعاع بیشینه ی حوزه ی تأثیر هر گره است، $s_0(x) = \|x - x_I\|$ فاصله ی نوک نایبوستگی تا نقطه ی برخورد خط xx_I و خط نایبوستگی است. \bar{s}_c پارامتری طولی است که با رابطه ی $\bar{s}_c = \kappa h$ به دست می آید. h فاصله ی گرهی و κ ضریب کدری ($0 < \kappa < 1$) است. شکل های ۳ و ۴، تابع وزن تولید شده توسط روش فرانمایی در نزدیک نوک نایبوستگی را نشان می دهند. مانند روش انکسار، تابع وزن در حوزه ی تأثیر بزرگ تر از صفر است و در خارج از آن ناپدید می شود.

یکی از معایب روش فرانمایی در این است که روش مذکور هنگامی که گره ها بسیار به سطح ترک نزدیک باشند، خوب کار نمی کند. در مواردی که گره به ترک بسیار نزدیک است، زاویه ی بین ترک و پرتو ساطع شده از گره به نوک ترک بسیار کوچک است که باعث ایجاد افتی شدید در تابع وزن ایجاد می شود. بنابراین باید یک فاصله ی کمیته را برای گره تا خط ترک در نظر گرفت. با استناد به



شکل ۵. نمودار نیروی چسبندگی ترک براساس میزان بازشدگی ترک.



شکل ۶. فلوجارت برنامه ی پیشنهادی برای حل مسائل ترک.

نیروی ذکرشده به نقطه ی متناظر به صورت یک شرط مرزی اختصاص داده می شود.

در شکل ۶، فلوجارت برنامه ی پیشنهادی برای حل مسائل ترک مشاهده می شود. نویسندگان نوشتار حاضر، برنامه ی مذکور را به زبان و ویژال فرترن نسخه ی ۶/۵ نوشته اند، که شامل یک برنامه ی اصلی و چند زیر برنامه است. هر زیر برنامه، که توسط برنامه ی اصلی فراخوانی می شود، وظیفه ی انجام یک کار خاص را به عهده دارد.

۶. مثال های عددی

در بخش حاضر، جهت بررسی قابلیت ها و کارایی روش کمیته ی مربعات گسسته در حل مسائل مکانیک شکست براساس تئوری ترک چسبیده، مسائل استاندارد از صفحات حاوی ترک بررسی شده است. به عنوان مسئله ی اول، آزمایش خمش سه نقطه یی بررسی شده و نتایج عددی به دست آمده، منتج از روش کمیته ی مربعات گسسته است، که توسط ابزار برنامه نویسی ویژال فرترن ۶/۵ نوشته شده و با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده است.

۲.۵. چگونگی توسعه ی ترک در حوزه ی مسئله

با شروع رشد ترک در حوزه ی مسئله، نوک ترک از یک نقطه ی مرزی به یک نقطه ی درون حوزه ی مسئله منتقل می شود. از آنجا که نوک ترک طبق فرمول بندی انجام شده در روش DLS باید یک نقطه ی مرزی باشد، گرهی که نوک ترک روی آن قرار می گیرد، به مجموعه ی نقاط مرزی افزوده می شود و تعداد نقاط مرزی یک عدد افزایش می یابد. همچنین شرایط مرزی نیز برای نقطه ی مذکور در آرایه های مرتبط، درون کد نرم افزاری اضافه می شوند. شرایط مرزی نوک ترک، شرایط مرزی بدون تنش است. زاویه ی بردار عمود بر مرز نیز در نقطه ی ذکرشده در راستای ترک و به سوی بیرون حوزه ی مسئله در نظر گرفته می شود.

حال باید گرهی که پیش از این نوک ترک بر روی آن قرار داشته است، به دو گره تقسیم شود؛ زیرا در نقطه ی مذکور، ترک باز و حوزه ی مسئله در آنجا به دو قسمت تقسیم می شود. میزان بازشدگی در نقطه ی مذکور، $\frac{1}{8}$ فاصله ی نقاط در آن محدوده در نظر گرفته می شود. نقطه ی موجود بر یک ضلع ترک و نقطه ی جدید بر ضلع دیگر قرار می گیرد. نقطه ی موجود، که از پیش جزء نقاط مرزی بوده است، تعداد نقاط مرزی را تغییر نمی دهد، ولی شرایط مرزی آن تغییر می کند. هم زاویه ی بردار عمود بر مرز تغییر می کند و هم تعداد شرط مرزی دست خوش تغییر می شود. زاویه ی بردار عمود بر مرز براساس زاویه ی رشد ترک به دست می آید، یعنی عمود بر آن است. مقدار نیروی روی مرز نیز براساس روش ترک چسبیده محاسبه می شود. فقط توجه شود که در اولین مرحله ی حل بعد از رشد ترک، بازشدگی در نقطه ی مذکور به لحاظ محاسباتی (نه هندسی) صفر در نظر گرفته می شود. شرایط نقطه ی جدید هم قرینه ی نقطه ی موجود روبرویی است. فقط تفاوت این است که چون گره مذکور، نقطه ی جدید است، هم تعداد نقاط گرهی و هم تعداد نقاط مرزی را یک عدد افزایش می دهد. پس با رشد ترک، تعداد کل گره ها، یک عدد و تعداد نقاط مرزی ۲ گره افزوده می شود.

هنگامی که مشخص می شود که طول ترک باید افزوده شود، نوک (رأس) ترک از گرهی که روی آن قرار داشته است، به گره ی دیگری منتقل می شود. یعنی نوک ترک حتماً بر روی یک گره قرار می گیرد و در فضای بین گره ها قرار نمی گیرد. پیدا کردن گرهی که نوک ترک به آن منتقل می شود، بدین صورت است که با در نظر گرفتن جهت تنش کششی، بیشینه ی جهت افزایش طول ترک (جهت رشد ترک) به دست می آید که عمود بر راستای تنش کششی بیشینه است. سپس در جهت به دست آمده با تکرار ۲۲/۵ درجه جستجو و نزدیک ترین نقطه در بازه ی زاویه ی مذکور یافت و نوک ترک به آنجا منتقل می شود.

۳.۵. نحوه ی محاسبه ی نیروی چسبندگی

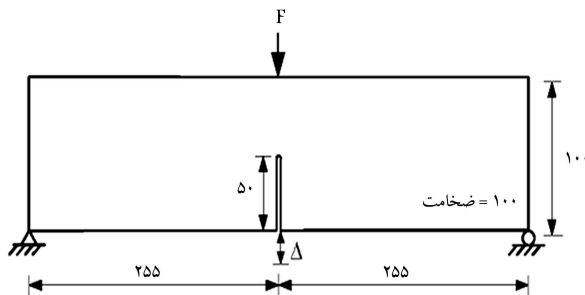
نیروی چسبندگی در مرز ترک نیز طبق نمودار شکل ۵ محاسبه و اعمال می شود؛ که مطابق آن، محور x نشان دهنده ی میزان بازشدگی ترک و محور y تنش مقاوم کششی است. بدین صورت که با فرض مقدار صفر برای بازشدگی ترک، در شروع حل مسئله مطابق شکل مذکور، مقدار تنش چسبندگی بر لبه های ترک برابر با f_t در نظر گرفته شده است. پس از یک بار حل و محاسبه ی میزان بازشدگی ترک در هر نقطه از طول آن در مرحله ی دوم به بعد، میزان نیروی وارده بر مرزهای ترک براساس نمودار شکل ۵ محاسبه می شود. مطابق نمودار مذکور با افزایش فاصله ی دو نقطه ی مقابل در دو سوی ترک، نیروی مقاوم کششی بر جدار ترک کاهش می یابد. در هر مرحله از فرایند حل، مقدار بازشدگی محاسبه و سپس نیروی کششی از روی نمودار قرائت می شود. سپس

۱.۶. مسئله‌ی اول: آزمایش خمش سه نقطه‌یی

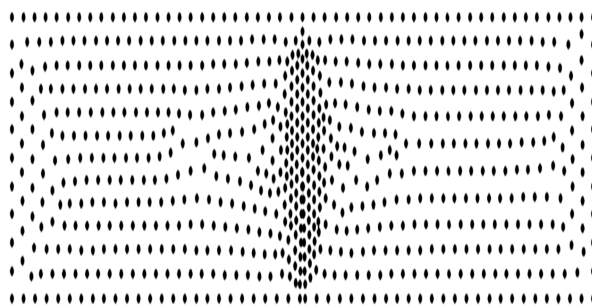
در بخش کنونی، نتایج عددی مسئله‌ی خمش سه نقطه‌یی ارائه شده است که در شکل ۷، هندسه و شرایط مرزی آن مشاهده می‌شود. در همه‌ی شکل‌ها، اندازه‌ها به میلی‌متر است. [۲۰] خصوصیات ماده‌ی به‌کار رفته در تیر نیز در جدول ۱ ارائه شده است.

در جدول ۱، E ضریب کشسانی، ν ضریب پواسون، f_t مقاومت کششی، G_f انرژی شکست (سطح زیر نمودار کشش - نرم‌شدگی) و f'_c مقاومت فشاری هستند. جهت حل مسئله‌ی مذکور، حوزه‌ی مسئله توسط آرایش گره‌یی نامنظم گسسته‌سازی شده است. شکل ۸، آرایش گره‌یی نامنظم با ۷۵۸ نقطه‌ی گره‌یی را نشان می‌دهد. در شکل ۹، مسیر رشد ترک در حوزه‌ی مسئله نشان داده شده است.

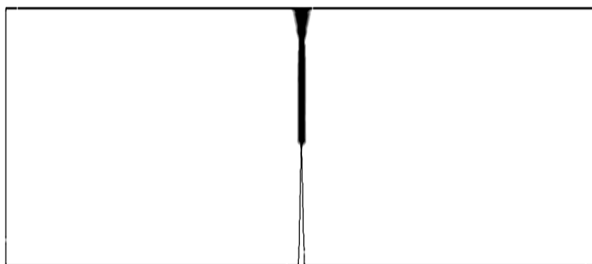
چنانچه بیان شد، هنگام رشد ترک، برنامه‌ی پیشنهادی با ایجاد نقطه‌ی جدید، بازشدگی را به‌طور واقعی مدل می‌کند. اما نمایش بازشدگی ذکر شده در نرم‌افزار تک‌پلات ۱۲ ممکن نیست. زیرا فاصله‌ی نقاط دو سوی بازشدگی کم است و نرم‌افزار مذکور هنگام مدل کردن هندسه، فضای بازشدگی را پیوسته فرض می‌کند. بنابراین برای نمایش ترک در نرم‌افزار تک‌پلات به نقاط دو سوی ترک مقدار ۱ و به نقاط دیگر مقدار صفر اختصاص داده می‌شود، تا مسیر ترک به‌صورت یک کانتور نمایش داده



شکل ۷. آزمایش خمش سه نقطه‌ی [۲۰]



شکل ۸. توزیع نقاط گره‌یی در حوزه‌ی مسئله (۷۵۸ نقطه‌ی گره‌یی).



شکل ۹. مسیر رشد ترک در تیر.

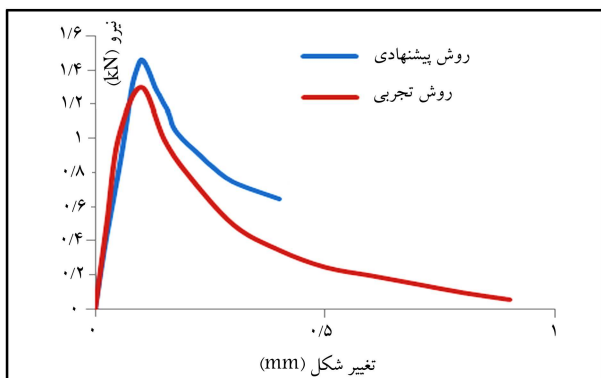
شود. نتیجه‌ی حل مسئله‌ی اول، براساس تئوری ترک چسبیده در نمودار شکل ۱۰ نشان داده شده است که در آن محور x تغییر مکان قائم بالای تیر و محور y نیروی وارده بر بالای تیر است. با مقایسه‌ی نتایج تجربی و نتایج حاصل از روش پیشنهادی مشخص می‌شود که روش مذکور موفق به پیش‌بینی رفتار جسم و ترک شده است.

۲.۶. مسئله‌ی دوم: جدایش گوه‌یی

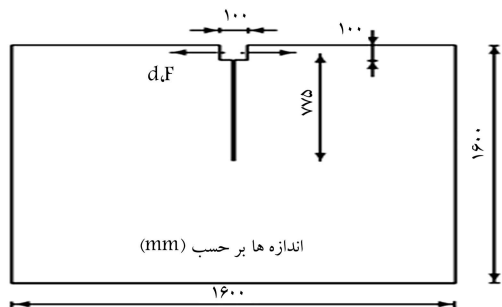
برای مثال دوم، مسئله‌ی جدایش گوه‌یی بررسی و نتایج عددی منتج از روش کمیته‌ی مربعات گسسته که توسط ابزار برنامه‌نویسی و بیژال فرتن ۶/۵ نوشته شده است، با نتایج تحلیلی و نتایج منتج از حل آزمایش تجربی ارائه شده است. [۲۱] در شکل ۱۱، هندسه و شرایط مرزی مسئله‌ی دوم مشاهده می‌شود (ابعاد به میلی‌متر است).

خصوصیات ماده‌ی به‌کار رفته بدین قرار است E ضریب کشسانی برابر ۲۸۰۳ مگاپاسکال، ν ضریب پواسون ۰/۱۸، f_t مقاومت کششی ۲/۱۱ مگاپاسکال، G_f انرژی شکست (سطح زیر نمودار کشش - نرم‌شدگی) ۰/۴۸۲ نیوتن متر بر میلی‌متر مربع و f'_c مقاومت فشاری ۲۱ مگاپاسکال است. جهت حل مسئله‌ی دوم، حوزه‌ی مسئله توسط آرایش گره‌یی نامنظم گسسته‌سازی شده است. در شکل ۱۲، آرایش گره‌یی با ۱۲۸۹ نقطه‌ی گره‌یی مشاهده می‌شود.

نتیجه‌ی حاصل از اعمال اولین جزء تغییر مکان و تنش‌های ناشی از تغییر شکل مذکور در شکل ۱۳ با استفاده از روش پیشنهادی (الف) و تنش به‌دست آمده از روش اجزاء محدود (ب) (نرم‌افزار آباکوس) نشان داده شده است. بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهد که توزیع تنش به درستی محاسبه شده است. لازم به توضیح است که مقایسه‌ی ذکر شده فقط برای اطمینان از درستی محاسبه‌ی تنش از طریق روش پیشنهادی انجام شده و برای بررسی برتری یکی بر دیگری نبوده است.



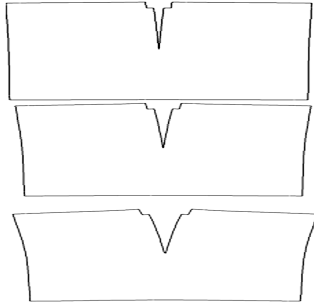
شکل ۱۰. مقایسه‌ی نمودار نیرو - خیز تیر برای مثال خمش تیر سه نقطه‌یی به‌دست آمده از روش پیشنهادی با نتیجه‌ی آزمایشگاهی. [۲۰]



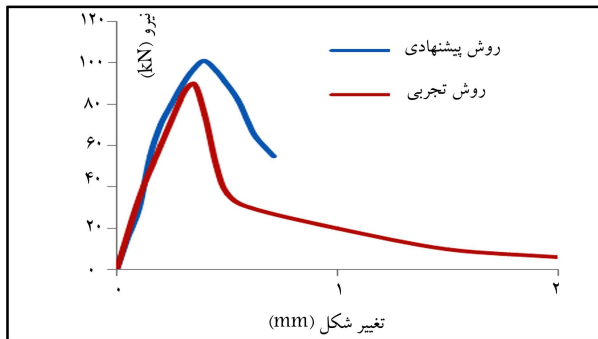
شکل ۱۱. آزمایش جدایش گوه‌یی. [۲۱]

جدول ۱. مشخصات بتن به کار رفته در ساخت نمونه.

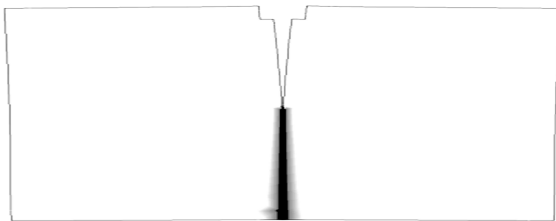
انرژی شکست بتن در مود یک ترک	مقاومت کششی بتن	ضریب پواسون بتن	مدول کشسان بتن	مقاومت فشاری بتن
$G_f (\frac{N}{M})$	$f_t' (MPa)$	ν	$E (MPa)$	$f_c' (MPa)$
۱۱۳/۰	۲/۴۰	۰/۲	۲۰/۰	۲۳/۰



شکل ۱۴. بازشدگی تدریجی ترک در اثر افزایش بار.



شکل ۱۵. نمودار نیرو - خیز برای مثال جدایش گوهی و مقایسه با نتیجه آزمایشگاهی [۲۱].



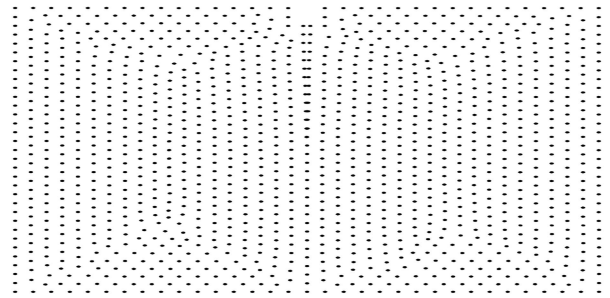
شکل ۱۶. مسیر رشد ترک.

مسیر ترک از ابتدا مشخص است؛ و توزیع نقاط در اطراف آن ایجاد می شود و با پیشرفت روند تحلیل، توزیع نقاط ثابت است. نتیجه حل مثال بالا براساس تئوری ترک چسبیده در نمودار شکل ۱۵ مشاهده می شود. در شکل ۱۶، مسیر رشد ترک در حوزه مسئله نشان داده شده است.

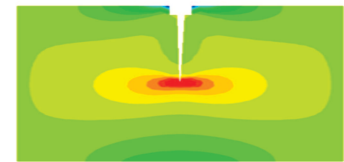
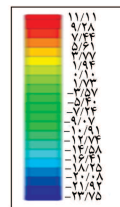
۳.۶. مسئله سوم: تیر آریا و اینگرافیا^{۱۳}

به عنوان مثال سوم، یک تیر که معروف به تیر آریا و اینگرافیاست، بررسی شده است. ابعاد تیر و بارگذاری آن در شکل ۱۷ ارائه شده است. این مسئله از نوشتاری در سال ۲۰۰۶^[۲۱] برداشت شده و نتایج اجزاء محدود ارائه شده مربوط به نوشتار حاضر است.

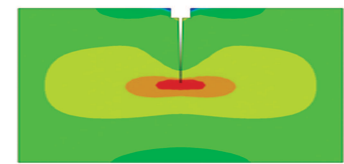
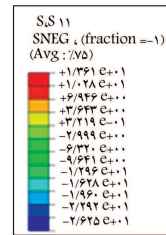
خصوصیات بتن به کار رفته در نمونه بدین قرار است: E ضریب کشسانی



شکل ۱۲. توزیع نامنظم نقاط گرهی در حوزه مسئله ۱۲۸۹ نقطه‌ی گرهی.



الف) روش پیشنهادی؛

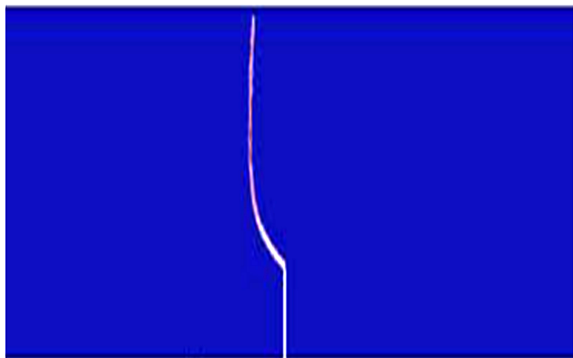


ب) تنش به دست آمده از روش اجزای محدود.

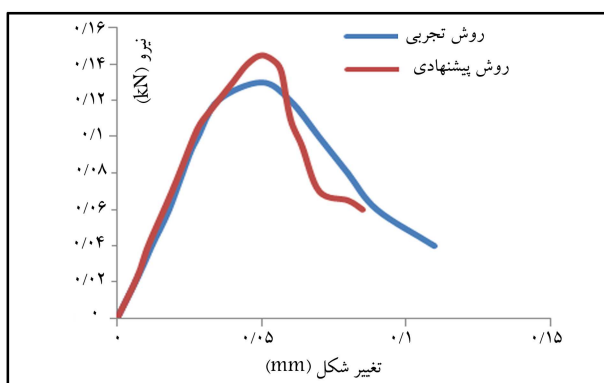
شکل ۱۳. توزیع تنش در راستای X.

برای بررسی عملکرد تئوری ترک چسبیده روند آنالیز به این صورت است: در شروع آنالیز، جفت نیرویی به مقدار ۱۵ کیلو نیوتن در بالای نمونه در دو جهت خلاف چپ و راست اعمال شده است. پس از آن در هر بار تکرار، مقدار آن افزایش یافته است. نیروی چسبندگی در مرز ترک نیز طبق نمودار محاسبه و اعمال شده است. بدین صورت که با فرض مقدار صفر برای بازشدگی ترک در شروع حل مسئله، مقدار تنش چسبندگی بر لبه های ترک برابر با f_t در نظر گرفته شده است. پس از یک بار حل و محاسبه میزبان بازشدگی ترک در هر نقطه از طول آن، در مرحله دوم به بعد میزان نیروی وارده بر مرزهای ترک براساس نمودار محاسبه شده است. در شکل ۱۴، باز شدن تدریجی ترک با افزایش بار نشان داده شده است.

در پایان حل هر مرحله، مقادیر نیروی وارده و تغییر مکان ثبت شده است، تا بتوان نمودار - نیرو جابه جایی را رسم کرد. توجه به این نکته ضروری است که در روش ترک چسبیده، قسمتی که به صورت ترک مشاهده می شود، در واقع یک ترک باز محسوب نمی شود، بلکه در ابتدا این قسمت کاملاً بسته در نظر گرفته می شود، هر چند که به لحاظ هندسی باز است. در واقع این باز بودن هندسی با اعمال نیروی معادل چسبندگی، رفتاری مانند یک قسمت بسته پیدا می کند. مزیت این کار آن است که دیگر لازم نیست با رشد ترک، محیط مسئله و توزیع نقاط تغییر کند و



شکل ۲۰. مسیر ترک در تیر با ۴۰۰۰۰ اجزاء محدود از تحلیل اجزاء محدود زی و همکاران [۲۲].



شکل ۲۱. نمودار نیرو - خیز برای تیر آریا و اینگرافیا [۲۲].

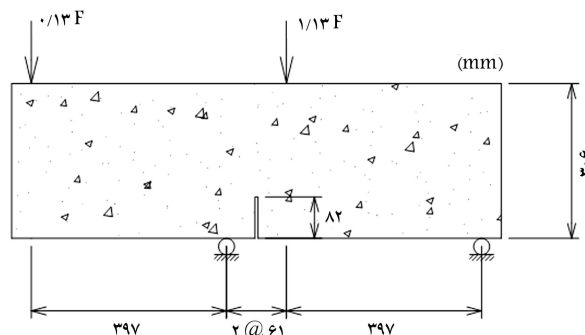
نتیجه‌ی حل مثال اخیر براساس تئوری ترک چسبیده در نمودار شکل ۲۱ مشاهده می‌شود.

با مقایسه‌ی نتایج نوشتار اخیر [۲۲] و نتایج حاصل از روش پیشنهادی مشخص می‌شود که روش مذکور موفق به پیش‌بینی رفتار بتن در شرایط ایجاد ترک و بعد از آن است.

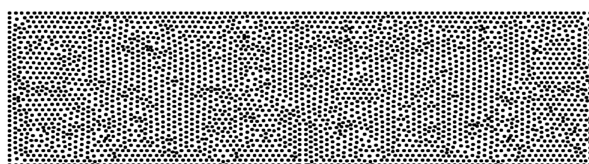
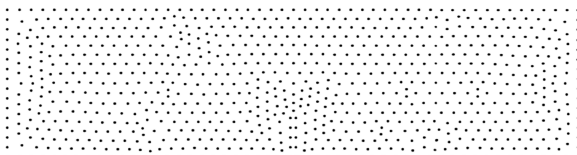
۷. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر، روش بدون شبکه‌ی کمینه‌ی مربعات گسسته‌ی هم‌مکان برای مدل‌سازی رشد ترک براساس تئوری ترک چسبیده توسعه داده شده است. در روش مذکور، شرایط قبل از ایجاد ترک توسط اعمال تنش بر جداری ترک مدل می‌شود و به تدریج با بازتر شدن ترک، میزان نیروی مذکور کاهش می‌یابد و صفر شدن آن به معنی بازشدگی کامل ترک است. برای مدل‌سازی ناپیوستگی ناشی از ترک در توابع شکل پیوسته‌ی روش بدون شبکه‌ی کمینه‌ی مربعات گسسته‌ی هم‌مکان از روش فرآینمایی استفاده شده است. روش معیار مشاهده‌ی شرط پیوستگی توابع شکل را در حوالی نوک ترک تأمین نمی‌کند. روش انکسار هم مشتقات پیچیده‌تری نسبت به روش فرآینمایی دارد. لذا در نوشتار حاضر، روش فرآینمایی که هم پیوسته است و هم فرمول‌بندی ساده‌تری دارد، استفاده شده است.

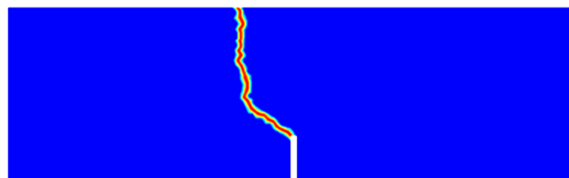
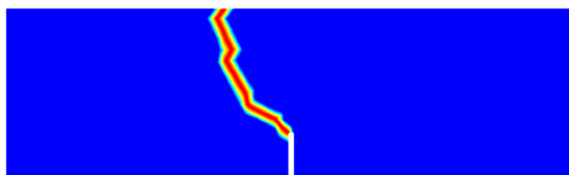
یکی از مزایای مهم استفاده از روش بدون شبکه‌ی کمینه‌ی مربعات گسسته‌ی هم‌مکان، سهولت در کاهش و یا افزایش نقاط گره‌ی به‌صورت دلخواه و پراکنده در حوزه‌ی مسئله است. بنابراین افزایش نقاط گره‌ی در نزدیکی نوک ترک و عدم نیاز



شکل ۱۷. هندسه و بارگذاری تیر آریا و اینگرافیا [۲۲].



شکل ۱۸. توزیع نامنظم نقاط گره‌ی در حوزه‌ی مسئله‌های ۸۷۵ و ۳۲۷۳ نقطه‌ی گره‌ی.



شکل ۱۹. مسیر ترک در تیر برای دو حالت ۸۷۵ و ۳۲۷۳ نقطه‌ی گره‌ی.

۲۸۰۰۰ مگاپاسکال، ν ضریب پواسون ۰/۱۸، f_t مقاومت کششی ۲/۸ مگاپاسکال و G_F انرژی شکست (سطح زیر نمودار کشش - نرم‌شدگی) 10^6 نیوتن بر متر است. جهت حل مسئله، حوزه‌ی مسئله توسط آرایش گره‌ی نامنظم گسسته‌سازی شده است. شکل ۱۸، آرایش گره‌ی با ۸۷۵ و ۳۲۷۳ نقطه‌ی گره‌ی را نشان می‌دهد. مسیر به‌دست آمده برای ترک در شکل ۱۹ مشاهده می‌شود. چنانچه قبلاً گفته شد، مسیر رشد ترک براساس جهت تنش کششی بیشینه (عمود بر این تنش) به‌دست می‌آید. با مقایسه‌ی شکل‌های ۱۹ و ۲۰ می‌توان نتیجه گرفت که روش پیشنهادی، مسیر ترک را با دقت بسیار خوب پیش‌بینی می‌کند. همچنین رفتار غیرخطی ناشی از ایجاد ترک را به درستی مدل می‌کند و نمودار نیرو - تغییرمکان به‌دست آمده، دقت قابل قبولی دارد. در پایان حل هر مرحله، مقادیر نیروی وارده و خیز تیر ثبت شده است، تا بتوان نمودار نیرو - جابه‌جایی را رسم کرد.

مثال عددی تحلیل و بررسی شده است. نتایج به دست آمده در پژوهش حاضر نشان می دهد که با استفاده از تئوری ترک چسبیده و روش بدون شبکه می توان رفتار بتن را در شرایط ترک خوردگی پیش بینی کرد و نتایج به دست آمده، هم خوانی خوبی با نتایج آزمایشگاهی دارد. همچنین روش مذکور، رفتار غیرخطی ناشی از ایجاد ترک را به درستی مدل کرده و نمودار نیرو - تغییر مکان به دست آمده، دقت قابل قبولی داشته است. در مجموع می توان گفت روش کمینه ی مربعات گسسته در حل مسائل حاوی ترک، کارایی و دقت بالایی دارد.

به افزایش بی مورد نقاط در دیگر بخش های حوزه ی مسئله، علاوه بر عدم افزایش هزینه ی محاسباتی، منجر به کسب جواب هایی با دقت بالا خواهد شد. همچنین افزودن گره هنگام رشد ترک بدون نیاز به شبکه بندی مجدد انجام می شود که مزیت مهمی نسبت به روش اجزاء محدود محسوب می شود. تئوری ترک چسبیده براساس مفهوم ساده ی مدل سازی رفتار ترک با کاهش نیروی مقاوم در اثر افزایش بازشدگی ترک پایه ریزی شده است و هزینه ی محاسباتی کمتری نسبت به روش های مبتنی بر خرابی دارد. جهت تعیین دقت و کارایی روش ارائه شده در حل صفحات ترک دار، سه

پانویس ها

1. discrete least squares
2. moving least squares
3. diffuse element method
4. enrichment functions
5. diffraction
6. visibility
7. transparency
8. visibility criterion
9. diffraction method
10. transparency method
11. transparency
12. TECPLOT
13. arrea-ingraffea beam

منابع (References)

1. Gingold, R.A. and Moraghan J.J. "Smoothed particle hydrodynamics: Theory and application to non spherical stars", *Man. Not. Roy. Astron. Soc Linear Elasticity, Master Of Science, Massachusetts Inistitute of Technology*, **181**, pp. 375-389 (1977).
2. Monaghan, J.J. "Why particle methods work", *Siam J. Sci. Sat. Comput.*, **3**(4), pp. 423-433 (1982).
3. Nayroles, B., Touzot, G. and Villon, P. "Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements", *Computational Mechanics*, **10**(5), pp. 307-318 (1992).
4. Belytschko, T., Gu, L. and Lu, Y.Y. "Fracture and crack growth by element free galerkin methods", *Modeling and Simulation in Materials Science and Engineering*, **2**(3A), pp. 519-534 (1994).
5. Rao, B.N. and Rahman, S. "Mesh-free analysis of cracks in isotropic functionally graded materials", *Engineering Fracture Mechanics*, **70**(1), pp. 1-27 (2003).
6. Han, Z.D. and Atluri, S.N. "Truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) solutions of traction & displacement BIEs", *CMES*, **4**(6), pp. 665-678 (2003).
7. Sladek, J., Chang, C. and Tan, C.L. "Evaluation of fracture parameters for crack problems in FGM by a meshless method", *Journal of Theoretical and Applied Mathematics*, **44**(3), pp. 603-636 (2006).
8. Wang, W.L., Gu, Y.T. and Zhang, L.C. "Crack analysis using an improved meshless technique with irregular nodes", *Advanced Materials Research*, **32**, pp. 263-266 (2008).
9. Sadeghirad, A., Mohammadi, S. and Mahmoudzadeh Kani, I. "Meshless equilibrium on line method (MELM) for linear elasticity", *Structural Engineering and Mechanics*, **35**(4), pp. 511-533 (2010).
10. Ghorashi, S.Sh., Sabbagh-Yazdi, S.R. and Mohammadi, S. "Element free galerkin method for crack analysis of orthotropic plates", *CMCE*, **1**(1), pp.1-13 (2010).
11. Krahulec, S., Sladek, J., Sladek, V. and et al. "Analysis of interface crack between elastic and piezoelectric solids by meshless methods", *Building Research Journal*, **60**(3-4), pp. 171-184 (2012).
12. Pirali, H., Djavanroodi, F. and Haghpanahi, M. "Combined visibility and surrounding triangles method for simulation of crack discontinuities in meshless methods", *Journal of Applied Mathematics*, **2012**, 16 p. (2012).
13. Sladek, J., Stanak, P., Han, Z. D. and et al. "Applications of the MLPG method in engineering & sciences: a review", *CMES*, **92**(5), pp. 423-475 (2013).
14. Peng, C., Wu, W. and Zhang, B. "Three-dimensional simulations of tensile cracks in geomaterials by coupling meshless and finite element method", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **39**(2), pp. 135-154 (2015).
15. Afshar M.H. and Arzani H. "Solving Poissons equations by the Discrete Least Square meshless method", *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, **42**, pp. 23-32 (2004).
16. Firoozjaee, A.R. and Afshar, M.H. "Collocation discrete least square meshless method for the solution of free surface seepage problem", *International Journal of Civil Engineering*, **5**(2), pp.134-143 (2007).
17. Firoozjaee, A.R. and Afshar, M.H. "Discrete least squares meshless method with sampling points for the solution of elliptic partial differential equations", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **33**(1), pp. 83-92 (2009).
18. Naisipour, M., Afshar, M.H., Hassani, B. and et al. "Collocation Discrete least square (CDLS) method for elasticity problem and grid irregularity effect assessment",

- American Journal of Applied Sciences*, **5**(11), pp. 1595-1601 (2008).
19. Afshar, M.H., Amani, J. and Naisipour, M. "Mixed discrete least squares meshless method for planar elasticity problems using regular and irregular nodal distributions", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **36**(5), pp. 894-902 (2012).
 20. Soparat, P. and Nanakorn, P. "Analysis of cohesive crack growth by the element-free galerkin method", *Journal of Mechanics*, **24**(1), pp. 45-54 (2008).
 21. Unger, F., Eckardt, S. and Carsten, K. "Modelling of cohesive crack growth in concrete structures with the extended finite element method", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **196**(41-46), pp. 4087- 4100 (2007).
 22. Zi, G., Rabczuk, T. and Wall, W. "Extended mesh-free methods without branch enrichment for cohesive cracks", *Computational Mechanics*, **40**(2) pp. 367-382 (2006).