مهندسی عمران شریف، (زمستان ۱۳۹۷)
دوره‌ی ۲ - ۳۴، شماره‌ی ۲/۴، ص. ۳-۱۴

Original Article

بررسی تغییرشکل ورق‌های ویسکوکشسان ضخیم در طول زمان بارگذاری به روش نوار محدود

حسین عموشاهی (استادیار)
دانشکده‌ی فنی مهندسی، دانشگاه اصفهان

h.amoushahi@eng.ui.ac.ir

در نوشتار حاضر، به بررسی چگونگی استفاده از روش نوار محدود در آنالیز ورق‌های ویسکوکشسان ضخیم پرداخته شده است. یکی از خواص اغلب پلیمرها، خاصیت ویسکوکشسانی است، که در نوشتار حاضر به کمک سری پرونی مدل و روش نوار محدود بر اساس آن بازنویسی شده است. سپس به کمک رابطه‌ی کار مجازی، ماتریس‌های سختی و بردارهای نیرویی موردنیاز استخراج شده‌اند. پس از آن به کمک روش جداسازی زمانی، رابطه‌ی کار مجازی در بازه‌های زمانی کوچک تقریب زده شده و مسئله به‌صورت یک مسئله‌ی مقادیر اولیه آنالیز شده است. نتایج به دست آمده از حل مسئله‌ی ورق در اولین گام زمانی با نتایج دقیق یک مسئله‌ی کشسان مقایسه و رفتار ماده در طول زمان بررسی شده است. همچنین اثر باربرداری در رفتار و تغییرشکل‌های ایجاد شده در ورق نیز ارزیابی شده است. در ادامه، آثار تغییر ضخامت، ابعاد ورق و نیز تئوری‌های مختلف تغییر شکل برشی بررسی شده است.

واژگان کلیدی: ورق ضخیم ویسکوکشسان، آسودگی تنش‌ها، باربرداری، تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی سوم، روش نوار محدود.

۱. مقدمه

امروزه استفاده از مواد پلیمری، به سرعت جای خود را در بین مصالح به‌کارگرفته شده در سازه‌ها بازکرده است. از این رو بررسی خواص مربوط به آن‌ها، اهمیت زیادی دارد. از طرفی تحلیل رفتار سازه‌ها تحت اثر بارهای مختلف، نیازمند شناخت کامل خواص مکانیکی مواد تشکیل‌دهنده‌ی آن است. در پژوهش حاضر، به طور خاص به بررسی خاصیت ویسکوکشسانی مواد پرداخته شده است. خاصیت ویسکوکشسانی خاصیتی از مواد است که تحت اثر تغییرشکل‌های به وجود آمده، هر دو خاصیت کشسان بودن و ویسکوز بودن را به‌صورت هم‌زمان از خود نشان می‌دهد. در مواد ویسکوز، تنش‌های ایجاد شده در زمان در برابر جریان برشی و کرنش‌ها به‌صورت خطی است؛ در حالی که در مواد کشسان، کرنش هم‌زمان با تنش‌های وارده، کم و یا زیاد می‌شود و با از بین رفتن تنش‌ها، کرنش‌های موجود در جسم نیز از بین می‌روند. مواد ویسکوکشسان این خواص را توأمان دارند و بنابراین کرنش‌های به وجود آمده در آن‌ها وابسته به زمان هستند. در نوشتار حاضر، حل غیرخطی ورق‌های ویسکوکشسان به روش نوار محدود انجام می‌گیرد، که یکی از روش‌های عددی پرکاربرد برای تحلیل ورق‌های مستطیلی است. شاید بتوان گفت که برای اولین بار در کتابی در سال ۱۹۷۵،[۱] مبانی تئوریک و پایه‌ی ویسکوکشسانی ارائه و روش‌های تحلیلی به شکل موفقیت‌آمیزی برای بررسی پاسخ مکانیکی محیط‌های پیوسته‌ی ویسکوکشسان و نیز روش تبدیل لاپلاس در آنالیز تیرهای ویسکوکشسان استفاده شدند. به طور خاص روش اجزاء محدود در حل مسائل ویسکوکشسان در بسیاری از مطالعات استفاده شده است. برای نمونه، در سال ۱۹۷۰،[۲] روش اجزاء محدود در حل مسائل ویسکوکشسان و نیز اطلاعات مربوط به هرگام زمانی برای تعیین وضعیت سازه درگام زمانی بعد استفاده شده است. همچنین در سال ۱۹۹۵،[۳] به طور موفقیت‌آمیزی یک تیر با فرضیات تیموشنکو تحلیل و به کمک تبدیل لاپلاس، روابط اجزاء محدود وابسته به زمان با روابط تحلیلی ساده‌تری در حوزه‌ی متغیر لاپلاس (s) جایگزین شده است و در نهایت، پاسخ‌های سازه در حوزه‌ی زمان به کمک تبدیل‌های معکوس لاپلاس به دست آمده‌اند. در روند محاسبات اخیر، نسبت پواسون ثابت فرض شده است، که با فرضیات مطالعات دیگری در سال ۲۰۰۲،[۴] سازگاری دارد، که در آن یک روش تحلیلی برای آنالیز تیر با فرضیات تیموشنکو برای ضریب پواسون وابسته به زمان و مستقل از زمان ارائه شده بود. در سال ۲۰۰۰،[۵] نیز روش اجزاء محدود برای تیرها، ورق‌ها و پوسته‌ها به کمک تبدیل فوریه برای حل مسائل در حوزه‌ی بسامد به جای حوزه‌ی زمان در حل یک مسئله مقادیر ویژه به کار گرفته شد. همچنین در سال ۲۰۰۸،[۶] روابط تغییرشکل غیرکشسان در آنالیز یک تیر برنولی استفاده شد. باید دقت داشت که وقتی بتوان مدول آسودگی را به‌صورت یک سری پرونی نوشت، معادلات بنیادی ویسکوکشسان خطی که به شکل انتگرال‌های پیچیده هستند، را می‌توان به‌صورت

تاریخ: دریافت ۱۳۹۵/۷/۱۲، اصلاحیه ۱۳۹۶/۱/۱۴، پذیرش ۱۳۹۶/۲/۲۳.
DOI:10.24200/J30.2019.1444

مجموعه‌یی از معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب مجموعه‌یی از متغیرهای کرنش داخلی نوشت.[۷] در سال ۱۹۹۷،[۸] نیز روش مذکور برای حل مسائل تیرهای ویسکوکشسان غیرخطی تحت تأثیر تغییرشکل‌های برشی و جانبی به کار برده شد.

همچنین در سال ۲۰۰۹، روش اجزاء محدود شبه استاتیکی برای آنالیز تیرهای اولر ـ برنولی و تیموشنکو ارائه شد، که در آن خواص ویسکوکشسان خطی برای در نظرگرفتن اثر تغییرشکل‌های غیرخطی هندسی در نظرگرفته شده است.[۷] در سال ۱۹۹۸،[۹] نیز به تحلیل ورق‌ها و پوسته‌های کامپوزیت به روش اجزاء محدود پرداخته شد و پاسخ غیرخطی ویسکوکشسان کامپوزیت‌های لایه‌یی به کمک المان‌های ۸ گره‌یی پوسته مدل و مدول خزشی مکمل در مدل ویسکوکشسان به صورت یک سری تابع نمایی به اضافه‌ی یک مقدار جریان پایدار فرض شد. همچنین در سال ۲۰۰۴،[۱۰] رفتار دینامیکی ورق‌های ویسکوکشسان غیرخطی بررسی و به کمک فرضیات تیموشنکو برای ورق و جمع آثار بولتزمان برای ماده‌ی ویسکوکشسان خطی، روابط غیرخطی برای ارزیابی رفتار دینامیکی ورق ضخیم تیموشنکو استخراج شد. برخی پژوهشگران نیز در سال ۲۰۰۸،[۱۱] ارتعاش آزاد ورق‌های ویسکوکشسان متحرک محوری را بررسی کردند و از روش نوار محدود ماتریس‌های سختی را در حوزه‌ی بسامد استخراج کردند، که شامل توابع ضمنی مقادیر ویژه‌ی ارتعاش آزاد نیروهای داخل صفحه، پارامترهای ویسکوکشسانی، سرعت محوری و هندسه‌ی ورق می‌شد. بدین ترتیب اثر سرعت محوری و پارامترهای ویسکوکشسان را در ارتعاش آزاد ورق متحرک محوری ارزیابی کردند. آنالیز ترمومکانیک دینامیکی کمانش و پس از کمانش ورق‌های لایه‌یی کامپوزیت ویسکوکشسان و همچنین آنالیزهای حساسیت بر روی اثر پارامترهای آسودگی، نرخ بارگذاری، گرمادهی سریع و تنش اولیه در مطالعه‌یی در سال ۲۰۱۱،[۱۲] انجام شد. کمانش موضعی ورق‌های نازک و همچنین ورق‌های نسبتاً ضخیم مستطیلی ویسکوکشسان نیز در سال‌های ۲۰۱۱ و ۲۰۱۲ بررسی شد،[۱۳و۱۴] و در روش مذکور ماتریس‌های سختی و پایداری در حوزه‌ی زمان ارزیابی و به کمک حل یک مسئله، مقادیر ویژه‌ی بار بحرانی محاسبه شده است. همچنین در سال‌های ۲۰۱۴ و ۲۰۱۵، در آنالیز استاتیکی و پایداری ورق‌های ویسکوکشسان نازک و نسبتاً ضخیم از روش سری پرونی برای مدل‌سازی خاصیت ویسکوکشسانی و نیز از روش نوار محدود جهت آنالیز ورق استفاده شد و ورق‌های نازک به کمک تئوری کلاسیک و روش‌های نوار محدود معمولی و حبابی و نیز ورق نسبتاً ضخیم بر اساس تئوری برشی مرتبه‌ی اول و روش نوار محدود معمولی تحلیل شدند.[۱۵-۱۷] همچنین در سال‌های اخیر تحقیقاتی بر روی رفتار مکانیکی ورق‌های ویسکوکشسان به روش‌های مختلف عمودی انجام شده است.[۱۸-۲۰]

در نوشتار حاضر، ابتدا خاصیت ویسکوکشسانی مواد معرفی و سپس روابط تنش ـ کرنش حاکم بر رفتار آن‌ها برای استفاده در مسئله‌ی ورق استخراج شده است. در پایان، روش نوار محدود برای حل مسائل ویسکوکشسان توسعه داده شده است، که به کمک آن بتوان هم محدوده‌ی وسیع‌تری از مسائل را پوشش داد و هم از طریق سرعت بالای حل روش نوار محدود، تعداد حالات متنوعی از ورق‌های ویسکوکشسان را بررسی کرد. بررسی تاریخچه‌ی مطالعات انجام‌شده‌ی پیشین، نشان‌دهنده‌ی این موضوع است که تغییر خواص مواد در طول زمان بارگذاری سازه‌ها، همواره مشکلاتی را برای روش‌های عددی ایجاد کرده است، به گونه‌یی که در بسیاری از موارد، پژوهشگران از روش‌هایی مثل تبدیل لاپلاس برای از بین بردن وابستگی روش حل به زمان بهره برده‌اند. به همین دلیل در پژوهش حاضر سعی شده است تا از یک سو، حتی‌الامکان به کمک روش جداسازی زمانی، پیچیدگی انتگرال‌های موجود در زمان ساده‌سازی شود و از سوی دیگر، مسئله بدون وابستگی به روش‌های تبدیل، مستقیماً در حوزه‌ی زمان تحلیل شود تا بتوان تاریخچه‌ی تغییرشکل‌های به وجودآمده در ورق را ارزیابی کرد. همچنین به کمک روش مذکور، گستره‌ی زیادی از مواد ویسکوکشسان، که دارای تابع تغییرات متنوعی در زمان هستند، نیز قابل حل است.

۲. استخراج روابط

علی‌رغم آنکه مدل‌های بیان شده بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی اول، تغییرات جابه‌جایی‌های ورق را در راستای محورهای x و y یعنی u و v، به‌صورت خطی در ضخامت مقطع تخمین می‌زنند، معمولاً حل دقیق کشسانی آن‌ها نشان‌دهنده‌ی تغییرات درجه سه از z یا حتی در برخی موارد تغییرات مرتبه‌ی بالاتر است. بر همین اساس می‌توان میدان جابه‌جایی را برای ورق به‌صورت روابط ۱ و ۲ در نظر گرفت:

$$u = u_0 + z\left[\psi_x - \frac{4}{3}\frac{z^2}{h^2}\left(\psi_x + \frac{\partial w}{\partial x}\right)\right] \quad (۱)$$

$$v = v_0 + z\left[\psi_y - \frac{4}{3}\frac{z^2}{h^2}\left(\psi_y + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\right] \quad (۲)$$

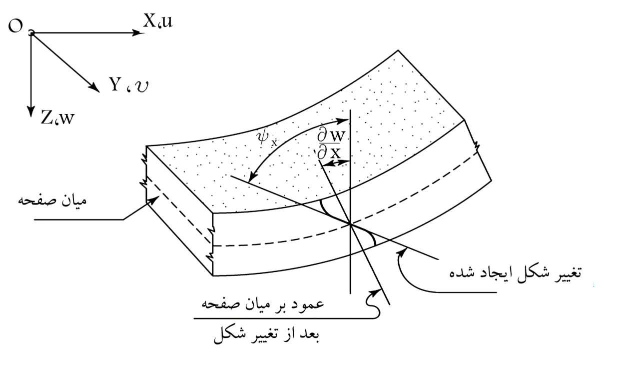
که در آن‌ها، ψ_x و ψ_y بیان‌کننده‌ی چرخش‌های میان صفحه‌ی ورق به ترتیب حول محورهای y و x هستند. روابط مذکور، سطوح آزاد برشی را در بالا و پایین سطح ورق برآورده می‌کنند و تغییرات درجه دو را برای تنش‌های برشی در ضخامت ورق به دست می‌دهند. بنابراین می‌توان تغییرشکل مقطع ورق را با توجه به اعوجاج ایجاد شده مطابق شکل ۱ نشان داد.

همچنین جهت حل عددی ورق ضخیم بر اساس شکل ۲، یک نوار محدود با درجه‌های آزادی نشان داده شده مد نظر قرار می‌گیرد.

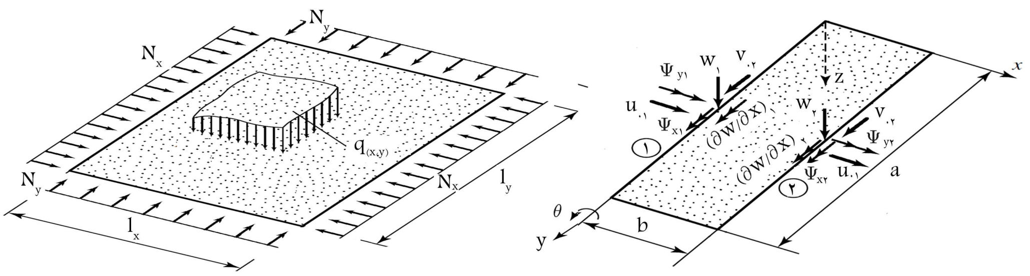
از آن‌جایی که درجه‌های آزادی انتخاب شده برای ورق ضخیم در هر لبه مستقل از هم هستند، نیازی به منظورکردن توابع شکل مرتبه‌ی بالا جهت درون‌یابی آن‌ها نیست. از این رو و برای سادگی بیشتر، هر سه درجه آزادی انتخاب شده در لبه‌های المان فقط توسط توابع شکل خطی درون‌یابی می‌شوند. به این ترتیب توابع جابه‌جایی جانبی میان صفحه و چرخش‌های لبه‌های المان را در روش نوار محدود می‌توان به‌صورت روابط ۳ الی ۷ نوشت:

$$u_0 = \sum_{m=1}^{r} \boldsymbol{f}^u \boldsymbol{u}_{0m} \boldsymbol{Y}_{1m} \quad (۳)$$

$$v_0 = \sum_{m=1}^{r} \boldsymbol{f}^v \boldsymbol{v}_{0m} \boldsymbol{Y}_{2m} \quad (۴)$$



شکل ۱. نحوه‌ی تغییر شکل ورق نسبتاً ضخیم با فرضیات تئوری برشی مرتبه‌ی سه[۲۱].



شکل ۲. یک نوار محدود برای ورق ضخیم.

$$w=\sum_{m=1}^{r}\boldsymbol{f}^{w}\boldsymbol{w}_{m}\boldsymbol{Y}_{3m} \qquad (5)$$

$$\psi_x=\sum_{m=1}^{r}\boldsymbol{f}^{\psi_x}\boldsymbol{\psi}_{x,m}\boldsymbol{Y}_{4m} \qquad (6)$$

$$\psi_y=\sum_{m=1}^{r}\boldsymbol{f}^{\psi_y}\boldsymbol{\psi}_{y,m}\boldsymbol{Y}_{5m} \qquad (7)$$

که در آن‌ها، r تعداد مودهای در نظرگرفته شده از توابع مثلثاتی جهت طولی هستند، که از شمارنده‌ی m برای آن استفاده شده است. همچنین $\boldsymbol{u}_{\circ m}$، $\boldsymbol{v}_{\circ m}$ ، $\boldsymbol{w}_m$، $\boldsymbol{\psi}_{x,m}$، $\boldsymbol{\psi}_{y,m}$ به ترتیب بردارهای درجه‌های آزادی داخل صفحه در راستای x و y، درجه‌های آزادی خارج صفحه، چرخش لبه‌یی حول محور y و x برای المان موردنظر در مود mام هستند، که هر یک به کمک بردارهای ۸ الی ۱۲ نشان داده می‌شوند:

$$\boldsymbol{u}_{\circ m}=\langle u_{\circ 1,m} \quad u_{\circ 2,m}\rangle^T \qquad (8)$$

$$\boldsymbol{v}_{\circ m}=\langle v_{\circ 1,m} \quad v_{\circ 2,m}\rangle^T \qquad (9)$$

$$\boldsymbol{w}_{m}=\langle w_{1,m} \quad (\partial w/\partial x)_{1,m} \quad w_{2,m} \quad (\partial w/\partial x)_{2,m}\rangle^T \qquad (10)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{x,m}=\langle \psi_{x1,m} \quad \psi_{x2,m}\rangle^T \qquad (11)$$

$$\boldsymbol{\psi}_{y,m}=\langle \psi_{y1,m} \quad \psi_{y2,m}\rangle^T \qquad (12)$$

که در آن‌ها، $\boldsymbol{u}_{\circ 1,m}$ و $\boldsymbol{u}_{\circ 2,m}$ جابه‌جایی گره‌ها در راستای محور x، $\boldsymbol{v}_{\circ 1,m}$ و $\boldsymbol{v}_{\circ 2,m}$ جابه‌جایی گره‌ها در راستای محور y، $\boldsymbol{w}_{1,m}$ و $\boldsymbol{w}_{2,m}$ جابه‌جایی گره‌ها در راستای محور z، $\boldsymbol{\psi}_{x1,m}$ و $\boldsymbol{\psi}_{x2,m}$ چرخش لبه‌های المان حول محور y و $\boldsymbol{\psi}_{y1,m}$ و $\boldsymbol{\psi}_{y2,m}$ چرخش لبه‌های المان حول محور x هستند. در واقع روابط مذکور به تعداد r و برای مقادیر مختلف $m=1\sim r$ نوشته می‌شود. در روابط ۳ الی ۷، بردارهای $\boldsymbol{f}^u$ ، $\boldsymbol{f}^v$، $\boldsymbol{f}^w$، $\boldsymbol{f}^{\psi_x}$ ، $\boldsymbol{f}^{\psi_y}$ توابع درون‌یابی در جهت عرضی هستند و همان‌گونه که پیش‌تر نیز اشاره شد، برای سادگی از توابع خطی و هرمیتی برای بیان آن‌ها استفاده می‌شود (رابطه‌ی ۱۳):

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}^u=\boldsymbol{f}^v=\boldsymbol{f}^{\psi_x}=\boldsymbol{f}^{\psi_y}=\langle N_1\ N_2\rangle=\langle 1-\xi\ \ \xi\rangle\\
&\boldsymbol{f}^w=\langle H_{11}\ H_{12}\ H_{21}\ H_{22}\rangle\\
&=\langle 1-3\xi^2+2\xi^3\ \ b(\xi-2\xi^2+\xi^3)\\
&3\xi^2-2\xi^3\ \ b(-\xi^2+\xi^3)\rangle
\end{aligned} \qquad (13)$$

که در آن، ξ پارامتر بدون بُعدی است که از رابطه‌ی ۱۴ به دست می‌آید و در آن b عرض نوار است:

$$\xi=\frac{x}{b} \qquad (14)$$

همچنین در روابط ۳ الی ۷، Y_{1m} تا Y_{5m} توابع شکل درون‌یابی تغییرشکل‌ها در جهت طولی هستند. این توابع را باید بر اساس ارضاء شرایط مرزی لبه‌های عرضی ورق انتخاب کرد، که به صورت روابط ۱۵ و ۱۶ بیان می‌شود:

$$Y_{1m}=Y_{3m}=Y_{4m}=\sin\frac{m\pi y}{a} \qquad (15)$$

$$Y_{2m}=Y_{5m}=\cos\frac{m\pi y}{a} \qquad (16)$$

شایان ذکر است که علت تفاوت توابع فوق منظور کردن اثر تعامد آن‌هاست، که به وسیله‌ی توابع سینوس و کسینوس که اختلاف فاز ۹۰ درجه‌یی دارند، ایجاد شده است. در پژوهش حاضر، بردار کرنش‌های در نظرگرفته شده برای استفاده در روابط ورق ضخیم بر اساس تئوری تغییرشکل‌های کوچک و با صرف نظرکردن از کرنش‌های مرتبه‌ی بالاترگرین به کمک رابطه ۱۷ بیان می‌شود:

$$\varepsilon=\begin{cases}
\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}\\
\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}\\
\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\\
\gamma_{xz}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\\
\gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}
\end{cases} \qquad (17)$$

به این ترتیب کرنش‌های ایجاد شده بر اساس تئوری برشی مرتبه‌ی سوم از ترکیب روابط ۱۷، ۱ و ۲ به صورت رابطه‌ی ۱۸ نوشته می‌شود، که در آن h ضخامت ورق است.

$$\varepsilon=\begin{cases}
\varepsilon_x=\frac{\partial u_\circ}{\partial x}+z\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x}-\frac{4z^2}{3h^2}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right)\\
\varepsilon_y=\frac{\partial v_\circ}{\partial y}+z\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y}-\frac{4z^2}{3h^2}\left(\frac{\partial \psi_y}{\partial y}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right)\\
\gamma_{xy}=\frac{\partial u_\circ}{\partial y}+\frac{\partial v_\circ}{\partial x}+z\left(\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y}+\frac{\partial \psi_y}{\partial x}\right)\right.\\
\qquad\left.-\frac{4z^2}{3h^2}\left(\frac{\partial \psi_x}{\partial y}+\frac{\partial \psi_y}{\partial x}+2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\right)\\
\gamma_{xz}=\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi_x\right)-\frac{4z^2}{3h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\psi_x\right)\\
\gamma_{yz}=\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\psi_y\right)-\frac{4z^2}{h^2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\psi_y\right)
\end{cases} \qquad (18)$$

برای حل مسئله به روش عددی، نیاز به گسسته‌سازی توابع تغییرشکل است، که با جای‌گذاری روابط ۳ الی ۷ در رابطه‌ی ۱۸ انجام می‌گیرد. بدین ترتیب بردار کرنش به‌صورت رابطه‌ی ۱۹ بازنویسی می‌شود:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\sum_{m=1}^{r}\boldsymbol{B}_m\boldsymbol{\Delta}_m=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\Delta} \qquad (19)$$

که در آن، $\boldsymbol{\Delta}_m$ بردار ۱۲ درجه آزادی شامل جابه‌جایی و چرخش‌های لبه‌یی المان در مود mام است، که از رابطه‌ی ۲۰ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Delta}_m = \langle & u_{01,m} \;\; v_{01,m} \;\; w_{1,m} \;\; (\partial w/\partial x)_{1,m} \\ & \psi_{x1,m} \;\; \psi_{y1,m} \;\; u_{02,m} \;\; v_{02,m} \\ & w_{2,m} (\partial w/\partial x)_{2,m} \;\; \psi_{x2,m} \;\; \psi_{y2,m}\rangle^T\end{aligned} \tag{۲۰}$$

همچنین بردار $\boldsymbol{\Delta}$ بردار کل درجه‌های آزادی $12r \times 1$ برای هر نوار است، که از زیر هم قرارگرفتن بردارهای $\boldsymbol{\Delta}_m$ به دست می‌آید (رابطه‌ی ۲۱):

$$\Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_{m=1} \\ \Delta_{m=2} \\ \vdots \\ \Delta_{m=r} \end{Bmatrix} \tag{۲۱}$$

همچنین $\boldsymbol{B}_m$ یک ماتریس 5×12 و $\boldsymbol{B}$ یک ماتریس $5 \times 12r$ هستند، که به کمک روابط ۲۲ و ۲۳ بیان می‌شوند:

$$\boldsymbol{B}_m = \boldsymbol{B}_{1m} z + \boldsymbol{B}_{2m} z^3 + \boldsymbol{B}_{3m} + \boldsymbol{B}_{4m} z^2 \tag{۲۲}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{m=1} & \boldsymbol{B}_{m=2} & \dots & \boldsymbol{B}_{m=r} \end{bmatrix} \tag{۲۳}$$

که در آن‌ها، $\boldsymbol{B}_{1m}$ ، $\boldsymbol{B}_{2m}$، $\boldsymbol{B}_{3m}$، $\boldsymbol{B}_{4m}$ از رابطه‌هایی ۲۴ الی ۲۸ به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{B}_{1m} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^1_{1m} & \boldsymbol{B}^2_{1m} \end{bmatrix} ; \boldsymbol{B}_{2m} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^1_{2m} & \boldsymbol{B}^2_{2m} \end{bmatrix} \\ &\boldsymbol{B}_{3m} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^1_{3m} & \boldsymbol{B}^2_{3m} \end{bmatrix} ; \boldsymbol{B}_{4m} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^1_{4m} & \boldsymbol{B}^2_{4m} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{۲۴}$$

$$\boldsymbol{B}^i_{1m} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & N'_i Y_{4m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_i Y'_{5m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i Y'_{4m} & N'_i Y_{5m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; i = 1, 2 \tag{۲۵}$$

$$\boldsymbol{B}^i_{2m} = -\frac{4}{3h^2} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & H''_{i1} Y_{3m} & H''_{i2} Y_{3m} & N'_i Y_{4m} & 0 \\ 0 & 0 & H_{i1} Y''_{3m} & H_{i2} Y''_{3m} & 0 & N_i Y'_{5m} \\ 0 & 0 & 2H'_{i1} Y'_{3m} & 2H'_{i2} Y'_{3m} & N_i Y'_{4m} & N'_i Y_{5m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad i = 1, 2 \tag{۲۶}$$

$$\boldsymbol{B}^i_{3m} = \begin{bmatrix} N'_i Y_{1m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_i Y'_{2m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_i Y'_{1m} & N'_i Y_{2m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H'_{i1} Y_{3m} & H'_{i2} Y_{3m} & N_i Y_{4m} & 0 \\ 0 & 0 & H_{i1} Y'_{3m} & H_{i2} Y'_{3m} & 0 & N_i Y_{5m} \end{bmatrix} \quad i = 1, 2 \tag{۲۷}$$

$$\boldsymbol{B}^i_{4m} = -\frac{4}{h^2} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H'_{i1} Y_{3m} & H'_{i2} Y_{3m} & N_i Y_{4m} & 0 \\ 0 & 0 & H_{i1} Y'_{3m} & H_{i2} Y'_{3m} & 0 & N_i Y_{5m} \end{bmatrix} ; i = 1, 2 \tag{۲۸}$$

که در آن‌ها، علامت پریم (′) نشانگر مشتق تابع موردنظر نسبت به مختصه‌ی x و یا y است (برای توابع N و H مشتق نسبت به محور x و برای توابع Y_{1m} تا Y_{5m} مشتق نسبت به محور y).

گام بعدی تعیین رابطه‌ی تنش و کرنش برای ماده‌ی موردنظر است. به همین منظور رابطه‌ی تنش و کرنش با فرض ثابت ماندن نسبت پواسون برای یک ماده‌ی ایزوتروپیک ویسکوکشسان خطی به صورت رابطه‌ی ۲۹ بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\sigma}(x, y, z, t) = \boldsymbol{Q}(t = 0)\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t) \\ &+ \int_0^t \dot{\boldsymbol{Q}}(t - s)\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, s) ds\end{aligned} \tag{۲۹}$$

که پارامترهای آن از روابط ۳۰ الی ۳۲ به دست می‌آیند:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, z, t) = \langle \sigma_x \;\; \sigma_y \;\; \tau_{xy} \;\; \tau_{xz} \;\; \tau_{yz}\rangle^T \tag{۳۰}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t) = \langle \varepsilon_x \;\; \varepsilon_y \;\; \gamma_{xy} \;\; \gamma_{xz} \;\; \gamma_{yz}\rangle^T \tag{۳۱}$$

$$\boldsymbol{Q}(t) = \frac{E(t)}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \tag{۳۲}$$

درگام بعدی، رابطه‌ی کار مجازی برای ورق ضخیم مطابق رابطه‌ی ۳۳ نوشته می‌شود:

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \tag{۳۳}$$

که در آن، $\boldsymbol{\delta W}_{int}$ تغییرات کار نیروهای داخلی در ورق را نشان می‌دهد، که می‌توان آن را به کمک رابطه‌ی ۲۹ به‌صورت رابطه‌ی ۳۴ نوشت:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta W}_{int} &= \delta \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV \\ &= \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T(t) \boldsymbol{Q}(0) \boldsymbol{\varepsilon}(t) \boldsymbol{dV} \\ &+ \int_0^t \left(\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T(s) \boldsymbol{Q}(t - s) \boldsymbol{\varepsilon}(t) dV \right) ds \\ &= \delta \boldsymbol{\Delta}^T \left(\int_V \boldsymbol{B}^T \boldsymbol{Q}(0) \boldsymbol{B} \boldsymbol{dV} \right) \boldsymbol{\Delta}(t) + \\ & \delta \boldsymbol{\Delta}^T \int_0^t (\int_V \boldsymbol{B}^T \dot{\boldsymbol{Q}}(t - s) \boldsymbol{B} dV) \boldsymbol{\Delta}(s) ds\end{aligned} \tag{۳۴}$$

همچنین W_{ext} در رابطه‌ی ۳۳، بیانگر کار ناشی از نیروهای خارجی است، که از رابطه‌ی ۳۵ به دست می‌آید:

$$W_{ext} = \int_A wq dA \tag{۳۵}$$

که در آن، q بارگسترده‌ی وارد بر سطح ورق است (شکل ۲). بر این اساس تغییرات کار خارجی به کمک رابطه‌ی ۳۶ بیان می‌شود:

$$\delta \boldsymbol{W}_{ext} = \int_A \delta w q dA \tag{۳۶}$$

تابع w در رابطه‌ی ۳۶ را می‌توان مطابق رابطه‌ی ۳۷ بر حسب درجه‌های آزادی نوشت:

$$w = \sum_{m=1}^{r} \boldsymbol{H}_m \boldsymbol{\Delta}_m = \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta};\;\; \boldsymbol{H}_m = \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_m^1 & \boldsymbol{H}_m^2 \end{bmatrix} \tag{۳۷}$$

که در آن، $\boldsymbol{H}$ یک ماتریس $12r \times 1$ است و ماتریس‌های $\boldsymbol{H}_m^1$ و $\boldsymbol{H}_m^2$ هر کدام یک ماتریس 6×1 هستند و برای مقادیر $i = 1, 2$ به صورت رابطه‌ی ۳۸ نوشته می‌شود:

$$\boldsymbol{H}_m^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & H_{i1}Y_{3m} & H_{i2}Y_{3m} & 0 & 0 \end{bmatrix} i = 1, 2 \tag{۳۸}$$

بدین ترتیب تغییرات کار خارجی در رابطه‌ی ۳۶ به صورت رابطه‌ی ۳۹ بازنویسی می‌شود:

$$\delta W_{ext} = \delta \boldsymbol{\Delta}^T \int_A \boldsymbol{H}^T q dA \tag{۳۹}$$

در نهایت، رابطه‌ی کار مجازی ۳۳ به کمک رابطه‌های ۳۴ و ۳۹ به صورت رابطه‌ی ۴۰ بازنویسی می‌شود:

$$\boldsymbol{K}(0)\boldsymbol{\Delta}(t) + \int_0^t \tilde{\boldsymbol{K}}(t-s)\boldsymbol{\Delta}(s)ds = \boldsymbol{F} \tag{۴۰}$$

که در آن، $\boldsymbol{k}(0)$، $\dot{\boldsymbol{k}}(t-s)$ و F به ترتیب ماتریس‌های سختی ثابت، سختی وابسته به زمان، و بردار نیرویی هستند، که با فرض عدم تغییرات مشخصات مصالح در راستای ضخامت آن به کمک روابط ۴۱ الی ۴۳ بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}(0) = & \\ & \int_A \{\boldsymbol{B}_3^T \boldsymbol{D}_1(0)\boldsymbol{B}_3 + \boldsymbol{B}_1^T \boldsymbol{D}_2(0)\boldsymbol{B}_1 + + \boldsymbol{B}_3^T \boldsymbol{D}_2(0)\mathbf{B}_4 \\ & \boldsymbol{B}_4^T \boldsymbol{D}_2(0)\boldsymbol{B}_3 + \boldsymbol{B}_1^T \boldsymbol{D}_3(0)\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{B}_2^T \boldsymbol{D}_3(0)\boldsymbol{B}_1 \\ & + \boldsymbol{B}_4^T \boldsymbol{D}_3(0)\boldsymbol{B}_4 + + \boldsymbol{B}_2^T \boldsymbol{D}_4(0)\boldsymbol{B}_2\} dA \end{aligned} \tag{۴۱}$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{k}}(t) = & \\ & \int_A \boldsymbol{B}_3^T \dot{\boldsymbol{D}}_1(t)\boldsymbol{B}_3 + + \boldsymbol{B}_1^T \dot{\boldsymbol{D}}_2(t)\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_3^T \dot{\boldsymbol{D}}_2(t)\boldsymbol{B}_4 \\ & + \boldsymbol{B}_4^T \dot{\boldsymbol{D}}_2(t)\boldsymbol{B}_3 + \boldsymbol{B}_1^T \dot{\boldsymbol{D}}_3(t)\boldsymbol{B}_2 + \boldsymbol{B}_2^T \dot{\boldsymbol{D}}_3(t)\boldsymbol{B}_1 \\ & + \boldsymbol{B}_4^T \dot{\boldsymbol{D}}_3(t)\boldsymbol{B}_4 + \boldsymbol{B}_2^T \dot{\boldsymbol{D}}_4(t)\boldsymbol{B}_2\} dA \end{aligned} \tag{۴۲}$$

$$\boldsymbol{F} = \int_A \boldsymbol{H}^T q dA \tag{۴۳}$$

در رابطه‌های ۴۱ و ۴۲، ماتریس‌های $\boldsymbol{D}_j(0)$ و $\dot{\boldsymbol{D}}_j(t)$ برای مقادیر $j = 1 \sim 4$ از رابطه‌های ۴۴ و ۴۵ به دست می‌آیند:

$$\{\boldsymbol{D}_1(0), \boldsymbol{D}_2(0), \boldsymbol{D}_3(0), \boldsymbol{D}_4(0)\} = \left\{\frac{h}{1}, \frac{h^3}{12}, \frac{h^5}{80}, \frac{h^7}{448}\right\}\boldsymbol{Q}(0) \tag{۴۴}$$

$$\{\dot{\boldsymbol{D}}_1(t), \dot{\boldsymbol{D}}_2(t), \dot{\boldsymbol{D}}_3(t), \dot{\boldsymbol{D}}_4(t)\} = \left\{\frac{h}{1}, \frac{h^3}{12}, \frac{h^5}{80}, \frac{h^7}{448}\right\}\dot{\boldsymbol{Q}}(t) \tag{۴۵}$$

جهت انجام جداسازی، ابتدا انتگرال موجود در رابطه‌ی ۴۰ در بازه‌ی زمانی موردنظر به صورت مجموع انتگرال‌های مذکور روی بازه‌های زمانی کوچک‌تر نوشته خواهد شد، و در هر بازه‌ی زمانی کوچک، مقدار جابه‌جایی $\boldsymbol{\Delta}(t_k)$ ثابت فرض می‌شود (رابطه‌ی ۴۶):

$$\begin{aligned} \int_0^t \tilde{\boldsymbol{K}}(t-s)\boldsymbol{\Delta}(s)ds &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{tk}^{t_{k+1}} \tilde{\boldsymbol{K}}(t_n - s)\boldsymbol{\Delta}(s)ds \\ &\cong \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{\Delta}(t_k) \int_{tk}^{t_{k+1}} \tilde{\boldsymbol{K}}(t_n - s)ds \end{aligned} \tag{۴۶}$$

بر این اساس، رابطه‌ی نوار محدود ویسکوکشسان (۴۰) در هر گام زمانی به صورت رابطه‌ی ۴۷ نوشته می‌شود و در هر گام زمانی به کمک آن مقدار $\boldsymbol{\Delta}(t_n)$ محاسبه خواهد شد:

$$\boldsymbol{\Delta}(t_n) = (\boldsymbol{K}(0))^{-1}(\boldsymbol{F} - \sum_{k=0}^{n-1} \boldsymbol{\Delta}(t_k) \int_{tk}^{t_{k+1}} \tilde{\boldsymbol{K}}(t_n - s)ds) \tag{۴۷}$$

برای استفاده از رابطه‌ی ۴۷ لازم است تا بر طبق یک مدل مناسب و منطبق بر رفتار ماده، تابع تغییرات مدول آسودگی در طول زمان حدس زده شود. در پژوهش حاضر، تغییرات مدول آسودگی براساس سری پرونی به صورت رابطه‌ی ۴۸ در نظر گرفته شده است:[۲۲]

$$E(t) = E_0 + \sum_{l=1}^{Nmat} E_l e^{-\frac{t}{\tau_l^E}} \tag{۴۸}$$

که در آن، E_l و τ_l^E ثوابت سری پرونی هستند، که برای هر ماده به کمک آزمایش به دست می‌آیند و همچنین $Nmat$ مرتبه‌ی سری پرونی است. این تذکر لازم است که برای انواع مواد ویسکوکشسان موجود، روابط متنوعی جهت توصیف تغییرات خاصیت ماده توسط پژوهشگران و مهندسان استفاده شده است، ولی مدل سری پرونی یکی از پرکاربردترین آن‌هاست، که مدل رفتاری آن بر خواص بسیاری از کامپوزیت‌ها انطباق دارد.[۲۲] به طوری که می‌توان با بالا بردن مرتبه‌ی سری، مدل‌های دقیق‌تری نیز به دست آورد. بنابراین برای بالا رفتن دقت محاسبات و انطباق بیشتر رفتار ماده‌ی مورد بررسی با رفتار سایر مواد می‌توان مرتبه‌ی سری پرونی را افزایش داد. بدین ترتیب با در نظر گرفتن رابطه‌ی ۴۸، توابع $\boldsymbol{E}(0)$ و $\dot{\boldsymbol{E}}(t_n - s)$ که در تعریف توابع $\boldsymbol{Q}(0)$ و $\dot{\boldsymbol{Q}}(t_n - s)$ (رابطه‌ی ۳۴) در رابطه‌ی ۴۰ ظاهر می‌شوند، را می‌توان مطابق روابط ۴۹ و ۵۰ بیان کرد:

$$E(0) = E_0 + \sum_{l=1}^{Nmat} E_l \tag{۴۹}$$

$$\dot{E}_{(tn-s)} = \sum_{l=1}^{Nmat} \frac{-E_l}{\tau_l} \exp(-\frac{t_n - s}{\tau_l}) \tag{۵۰}$$

برای ارزیابی مقدار $\Delta_{(t_n)}$ از رابطه‌ی ۴۷، باید انتگرال زیر مطابق رابطه‌ی ۵۱ محاسبه شود:

$$\begin{aligned} \int_{tk}^{t_{k+1}} \dot{E}_{(t_n - s)}ds = & \\ & \sum_{l=1}^{Nmat} E_l \exp\left(-\frac{t_n - t_k}{\tau_l}\right)\left(1 - \exp\left(\frac{\Delta t_k}{\tau_l}\right)\right) \end{aligned} \tag{۵۱}$$

که در آن:

$$\Delta t_k = t_{k+۱} - t_k \tag{۵۲}$$

با استخراج روابط مورد نیاز حل ورق‌های ویسکوکشسان، یک برنامه‌ی رایانه‌یی جهت حل عددی نوشته شده و به کمک آن به حل مثال پرداخته شده است. در واقع، رابطه‌ی اصلی و حاکم بر انجام محاسبات در فصل حاضر، رابطه‌ی نوار محدود ویسکوکشسان (رابطه‌ی ۴۰) است، که به کمک رابطه‌ی کار مجازی استخراج شده است. پس از آن به کمک فرضیات روش جداسازی زمانی، انتگرال کانوولوشن موجود در آن به صورت مناسب تقریب زده شده است، تا جهت حل عددی مسئله آماده شود.

۳. بررسی عددی نتایج

در ادامه‌ی پژوهش، به تحلیل عددی چند مثال بر اساس روش ارائه شده پرداخته شده است. بدین منظور ابتدا صورت مسئله کاملاً تعریف و پس از آن جواب‌های حاصل صحت‌سنجی شده‌اند. پس از آن کمیت‌های مختلفی بررسی و اثر آن‌ها در رفتار ورق ارزیابی شده است.

در بخش حاضر، ابتدا مشخصات مصالح و کمیت‌های ویسکوکشسان مورد نیاز معرفی و پس از آن به تحلیل استاتیکی ورق تحت بارگسترده پرداخته شده است. سپس اثر باربرداری بررسی و در ادامه، به تحلیل کمانش و بار بحرانی پرداخته شده است.

۱.۳. مشخصات ویسکوکشسان مصالح

در ابتدای کار لازم است تا مشخصات یک ماده‌ی ویسکوکشسان بر اساس ضرایب ثابت سری پرونی به کمک آزمایش تعیین شود. بدین منظور در پژوهش حاضر، از مشخصات یک ماده‌ی ویسکوکشسان به نام PMMA استفاده شده است. نتایج به دست آمده برای ضرایب به کار رفته در رابطه‌ی ۴۸ در جدول ۱ ارائه شده است. با توجه به واحدهای به کار رفته در محاسبه‌ی مقادیر جدول ۱، زمان‌ها بر حسب ثانیه در روابط استفاده می‌شوند. همچنین نتایج آزمایش‌های لای و بیکر،[۲۲] برای ماده‌ی مذکور، مقدار ضریب پواسون را در طول زمان ثابت و برابر ۰٫۴ گزارش کرده است. همان‌گونه که پیشتر نیز اشاره شد، رابطه‌ی ۲۹ با فرض ثابت ماندن نسبت پواسون

جدول ۱. ثابت‌های سری پرونی برای یک ماده‌ی ویسکوکشسان نمونه به نام PMMA[۲۲].

۱	$E_۱(MPa)$	$\tau_۱^E(s)$
۰	۱۴۱۹٫۴۳۶۰	-
۱	۲۹۷٫۶۹۷۰	$۹/۱۹۵۵ \times ۱۰^{-۱}$
۲	۶۳٫۶۳۲۴	$۹/۸۱۲۰ \times ۱۰^{۰}$
۳	۱۵۸٫۲۶۶۴	$۹/۵۲۶۸ \times ۱۰^{۱}$
۴	۱۸۱٫۰۸۸۷	$۹/۴۳۱۸ \times ۱۰^{۲}$
۵	۲۳۸٫۷۶۴۱	$۹/۲۰۶۶ \times ۱۰^{۳}$
۶	۲۷۸٫۰۱۱۱	$۸/۹۹۷۴ \times ۱۰^{۴}$
۷	۳۲۷٫۶۹۰۶	$۸/۶۸۵۲ \times ۱۰^{۵}$
۸	۳۲۲٫۷۴۹۱	$۸/۵۱۴۳ \times ۱۰^{۶}$
۹	۴۰۴٫۶۸۴۳	$۷/۷۳۹۶ \times ۱۰^{۷}$

در زمان نوشته شده است و در شرایطی که این ضریب نیز به زمان وابسته باشد و در طول زمان تغییر کند، باید علاوه بر آزمایش‌های کشش یک بُعدی، آزمایش‌های دو بُعدی نیز روی ماده‌ی موردنظر انجام گیرد.

۲.۳. آنالیز ورق‌های ویسکوکشسان تحت بارگذاری قائم

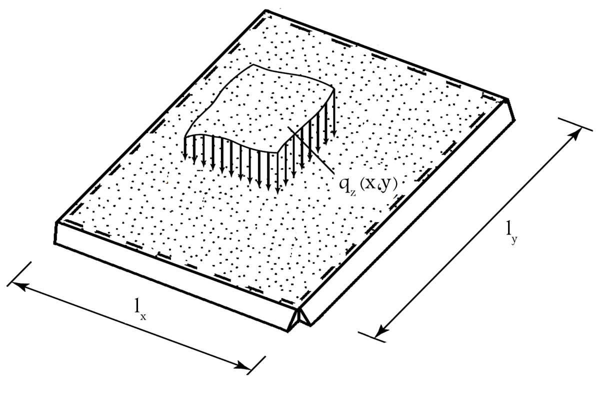
برای بررسی صحت روابط استخراج شده و همچنین نمایش قدرت روش نوار محدود در آنالیز ورق‌های ضخیم ویسکوکشسان، لازم است تا چند مثال از ورق‌های مذکور به روش ذکر شده تحلیل و بررسی شود. به همین منظور در بخش حاضر، به آنالیز ورق‌های مستطیلی ویسکوکشسان تحت بارگذاری قائم پرداخته شده است. در آنالیزهای ذکر شده، اثر شرایط مرزی در جهت طولی ورق (لبه‌های عرضی ورق) با انتخاب توابع شکل مناسب منظور شده است. همچنین اثر شرایط مرزی جهت عرضی ورق (لبه‌های طولی ورق) به کمک مقید کردن درجه‌های آزادی لبه‌های نوارهای کناری ورق ارضا می‌شود، که با توجه به درجه‌های آزادی جابه‌جایی و چرخشی مد نظر قرارگرفته در توابع هرمیتی، می‌توان شرایط مرزی مفصلی، گیردار، آزاد و گیردار هدایت شونده را بر اساس آن مدل کرد.

به عنوان اولین مثال، یک ورق ۴ طرف مفصل مطابق شکل ۳ مد نظر قرار گرفته است. همچنین درجه‌های آزادی جابه‌جایی برای دو نوارکناری در تمامی مودها برای منظور کردن اثر شرایط مرزی جهت عرضی مقید شده است. نظیر آنچه در اغلب مراجع مربوط به تحلیل ورق‌ها استفاده شده است، در حالت کلی می‌توان جابه‌جایی بیشینه‌ی یک ورق را بر اساس رابطه‌ی ۵۳ بیان کرد:

$$w_{mid} = \alpha \frac{۱۲(۱-\nu^۲) q_z (l_x)^۴}{E_{(t=۰)} h^۳} \tag{۵۳}$$

که در آن، W_{mid} جا به جایی بیشینه‌ی ورق است، که برای ورق‌های مستطیلی مورد بحث در بخش حاضر، تحت بارگسترده با شدت یکنواخت در وسط سطح ورق رخ می‌دهد. همچنین ν نسبت پواسون، q_z شدت بارگسترده‌ی یکنواخت، l_x عرض ورق، h ضخامت ورق، و $E_{(t=۰)}$ بیان‌کننده‌ی مقدار مدول آسودگی ماده در زمان اولیه یعنی $t = ۰$ است. از طرف دیگر، α ضریب بدون بُعدی است که تغییر شکل ورق بر حسب آن ارائه می‌شود.

برای یک ورق نازک مربعی کشسان تحت بارگسترده با شدت یکنواخت مقدار ضریب α برابر $\alpha = ۰/۰۰۴۰۶۳$ خواهد بود، که می‌توان از آن برای صحت‌سنجی محاسبات نوار محدود در زمان اولیه‌ی بارگذاری استفاده کرد.[۲۳] مشخصات هندسی ورق مورد مطالعه مطابق جدول ۲ است.



شکل ۳. یک ورق مستطیلی ۴ طرف مفصل تحت بارگسترده‌ی یکنواخت.

به این ترتیب برای یک ورق مربعی با مشخصات جدول ۱، جابه‌جایی‌های بیشینه‌ی ورق در طول زمان مطابق با جدول ۳ به دست آمده است. با توجه به مقادیر نشان داده شده در جدول مذکور می‌توان دریافت که اولاً با افزایش زمان بارگذاری، تغییرشکل‌های ورق افزایش می‌یابد، به گونه‌یی که در اولین لحظه‌ی بارگذاری، یک تغییر شکل اولیه ناشی از رفتارکشسان آن به وجود می‌آید. درواقع در لحظه‌ی شروع بارگذاری، هنوز رفتار ویسکوز ماده نمایان نشده و به همین دلیل می‌توان جابه‌جایی بیشینه‌ی ورق در لحظه‌ی اولیه را با مقادیر دقیق حل ورق، که از سایر روش‌های آنالیز ورق به دست آمده است، مقایسه کرد. به همین منظور برای صحت‌سنجی محاسبات، مقدار ضریب بدون بُعد α در رابطه‌ی ۵۳ به کمک جابه‌جایی‌های به دست آمده از روش نوار محدود ارزیابی و نتیجه‌ی آن با نتایج ارائه شده در مرجع[۲۳] مقایسه شده است، که نتایج آن در جدول ۴ مشاهده می‌شود. در جدول مذکور از ورقی با مشخصات ارائه شده در جدول ۲ و تعداد نوار و مود متفاوت استفاده شده است. این تذکر لازم است که در مرجع مذکور از سری فوریه برای حصول مقادیر تغییر شکل استفاده شده است. نتایج حاصل از جدول ۴، بیانگر همگرایی مناسب روش نوار محدود در ارزیابی پاسخ‌های به دست آمده است. بر همین اساس ورق‌های مربعی با ضخامت‌های متفاوت بر اساس مشخصات جدول ۵ مد نظر قرار گرفته‌اند. مقادیر جابه‌جایی بیشینه‌ی ورق و ضریب بدون بُعد α بر اساس روش نوار محدود محاسبه و نتایج حاصل با نتایج حاصل از مرجع[۲۳] مقایسه شده است، که نتایج آن

جدول ۲. مشخصات هندسی ورق مورد مطالعه.

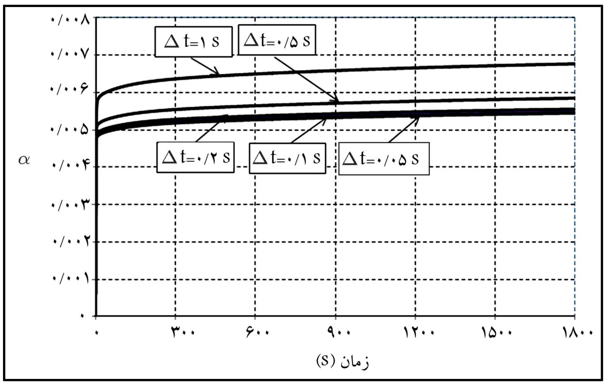
طول ورق	$l_y = ۵۰۰mm$
عرض ورق	$l_x = ۵۰۰mm$
ضخامت ورق	$h = ۵۰mm$
شدت بارگسترده	$q_z = ۰/۹۸۱kPa$
تعداد مود	$r = ۳$
تعداد نوار	۱۰
بازه‌ی زمانی	$\Delta t = ۰/۰۵ \sim ۱s$

در جدول ۶ ارائه شده است. نتایج به دست آمده از جدول ۶ نشان می‌دهد که روش نوار محدود با دقت بسیار مناسبی می‌تواند تغییرشکل‌های ورق را ارزیابی کند.

برای بررسی رفتار ویسکوکشسان ورق، مقادیر ضریب بدون بُعد α در زمان‌های گوناگون در شکل ۴ مشاهده می‌شود، که مطابق آن از ورقی با مشخصات جدول ۲ و همچنین بازه‌های زمانی مختلفی استفاده شده است. نتایج حاصل، همگرایی نتایج را با انتخاب بازه‌های زمانی مختلف نشان می‌دهد.

از سوی دیگر، جهت نشان دادن میزان اختلاف موجود، پاسخ‌های به دست آمده از انتخاب بازه‌های زمانی مختلف با پاسخ‌های بازه‌ی زمانی $\Delta t = ۰/۰۵s$ مقایسه شده‌اند، که نتایج آن در جدول ۷ ارائه شده است.

خطاهای به دست آمده در جدول ۷ نشان می‌دهد که با انتخاب بازه‌های زمانی کمتر از ۰٫۱ ثانیه، خطای محاسبات حدود ۰٫۵٪ خواهد بود. از طرف دیگر، انتخاب بازه‌های زمانی بزرگ، جابه‌جایی‌های ورق را بزرگ‌تر از پاسخ دقیق نتیجه می‌دهد و همواره پاسخ دقیق کمتر از پاسخ به دست آمده از حل روش جداسازی زمانی است. همچنین با افزایش زمان بارگذاری، خطای اندازه‌گیری تغییرشکل‌ها به میزان اندکی افزایش می‌یابد. در واقع هر چه عمر بارگذاری سازه افزایش یابد، حل



شکل ۴. تغییرات ضریب بدون بُعد در طول زمان برای ورقی با مشخصات ارائه شده در جدول ۲.

جدول ۳. جابه‌جایی بیشینه‌ی ورق مربعی با مشخصات ارائه شده در جدول ۲ برای بازه‌های زمانی مختلف بر حسب میلی‌متر.

زمان (s)	$\Delta t = ۱s$	$\Delta t = ۰/۵s$	$\Delta t = ۰/۲s$	$\Delta t = ۰/۱s$	$\Delta t = ۰/۰۵s$
۰	۰٫۰۰۰۵۸۴	۰٫۰۰۰۵۸۴	۰٫۰۰۰۵۸۴	۰٫۰۰۰۵۸۴	۰٫۰۰۰۵۸۴
۵	۰٫۰۰۰۷۶۴	۰٫۰۰۰۶۸۳	۰٫۰۰۰۶۵۵	۰٫۰۰۰۶۴۸	۰٫۰۰۰۶۴۵
۱۰	۰٫۰۰۰۷۸۲	۰٫۰۰۰۶۹۱	۰٫۰۰۰۶۶۱	۰٫۰۰۰۶۵۳	۰٫۰۰۰۶۵۰
۵۰	۰٫۰۰۰۸۰۹	۰٫۰۰۰۷۱۰	۰٫۰۰۰۶۷۸	۰٫۰۰۰۶۶۹	۰٫۰۰۰۶۶۶
۱۰۰	۰٫۰۰۰۸۲۴	۰٫۰۰۰۷۲۱	۰٫۰۰۰۶۸۸	۰٫۰۰۰۶۸۰	۰٫۰۰۰۶۷۶
۲۰۰	۰٫۰۰۰۸۴۲	۰٫۰۰۰۷۳۵	۰٫۰۰۰۷۰۰	۰٫۰۰۰۶۹۲	۰٫۰۰۰۶۸۸
۴۰۰	۰٫۰۰۰۸۵۹	۰٫۰۰۰۷۴۸	۰٫۰۰۰۷۱۲	۰٫۰۰۰۷۰۳	۰٫۰۰۰۶۹۹
۶۰۰	۰٫۰۰۰۸۷۰	۰٫۰۰۰۷۵۶	۰٫۰۰۰۷۱۹	۰٫۰۰۰۷۱۰	۰٫۰۰۰۷۰۶
۸۰۰	۰٫۰۰۰۸۷۸	۰٫۰۰۰۷۶۲	۰٫۰۰۰۷۲۵	۰٫۰۰۰۷۱۶	۰٫۰۰۰۷۱۱
۱۰۰۰	۰٫۰۰۰۸۸۵	۰٫۰۰۰۷۶۷	۰٫۰۰۰۷۳۰	۰٫۰۰۰۷۲۰	۰٫۰۰۰۷۱۶
۱۲۰۰	۰٫۰۰۰۸۹۲	۰٫۰۰۰۷۷۲	۰٫۰۰۰۷۳۴	۰٫۰۰۰۷۲۴	۰٫۰۰۰۷۲۰
۱۴۰۰	۰٫۰۰۰۸۹۲	۰٫۰۰۰۷۷۶	۰٫۰۰۰۷۳۸	۰٫۰۰۰۷۲۸	۰٫۰۰۰۷۲۴
۱۶۰۰	۰٫۰۰۰۹۰۲	۰٫۰۰۰۷۸۰	۰٫۰۰۰۷۴۱	۰٫۰۰۰۷۳۱	۰٫۰۰۰۷۲۷
۱۸۰۰	۰٫۰۰۰۹۰۶	۰٫۰۰۰۷۸۳	۰٫۰۰۰۷۴۴	۰٫۰۰۰۷۳۴	۰٫۰۰۰۷۳۰

جدول ۴. مقایسه‌ی جابه‌جایی بیشینه‌ی ورق مربعی با مشخصات ارائه شده در جدول ۲ با تعداد نوار و مود متفاوت و مقدار ضریب بدون بُعد α در رابطه‌ی ۵۳ در لحظه‌ی شروع بارگذاری با پاسخ‌های حاصل از مرجع[۲۳].

مقدار اختلاف ۱ (٪)	روش نوار محدود		تعداد نوار	تعداد مود
	ضریب α	جابه جایی بیشینه (mm)		
۱٫۲۴۳	۰٫۰۰۰۴۳۲۵۸	۰٫۰۰۶۲۷۴۶۶	۱۰	۱
۱٫۳۴۱	۰٫۰۰۴۳۳۰۰	۰٫۰۰۶۲۸۰۷۵	۲۰	۱
۱٫۳۶۰	۰٫۰۰۴۳۳۰۸	۰٫۰۰۶۲۸۱۸۹	۵۰	۱
۱٫۳۷۴	۰٫۰۰۴۳۳۱۴	۰٫۰۰۶۲۸۲۷۱	۹۵	۱
۰٫۲۵۳	۰٫۰۰۴۲۶۱۹	۰٫۰۰۶۱۸۱۹۳	۱۰	۳
۰٫۱۵۴	۰٫۰۰۴۲۶۶۱	۰٫۰۰۶۱۸۸۰۴	۲۰	۳
۰٫۱۳۶	۰٫۰۰۴۲۶۶۹	۰٫۰۰۶۱۸۹۱۸	۵۰	۳
۰٫۱۲۴	۰٫۰۰۴۲۶۷۴	۰٫۰۰۶۱۹۰۰۰	۹۵	۳
۰٫۰۸۷	۰٫۰۰۴۲۶۹۰	۰٫۰۰۶۱۹۲۲۱	۱۰	۵
۰٫۰۱۲	۰٫۰۰۴۲۷۳۲	۰٫۰۰۶۱۹۸۳۲	۲۰	۵
۰٫۰۳۰	۰٫۰۰۴۲۷۴۰	۰٫۰۰۶۱۹۹۴۷	۵۰	۵
۰٫۰۴۲	۰٫۰۰۴۲۷۴۵	۰٫۰۰۶۲۰۰۲۸	۹۵	۵
۰٫۱۳۱	۰٫۰۰۴۲۶۷۱	۰٫۰۰۶۱۸۹۵۵	۱۰	۷
۰٫۰۳۰	۰٫۰۰۴۲۷۱۴	۰٫۰۰۶۱۹۵۶۶	۲۰	۷
۰٫۰۱۴	۰٫۰۰۴۲۷۲۱	۰٫۰۰۶۱۹۶۸۰	۵۰	۷
۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۴۲۷۲۷	۰٫۰۰۶۱۹۷۶۲	۹۵	۷

مقدار ضریب بدون بعد α بر اساس مرجع[۲۳] برابر با ۰٫۰۰۴۲۷۲۷ به دست آمده است.

جدول ۵. مشخصات هندسی ورق مورد مطالعه جهت صحت‌سنجی نتایج.

طول ورق	$l_y = ۵۰۰mm$
عرض ورق	$l_x = ۵۰۰\mathrm{mm}$
ضخامت ورق	$h = ۰/۵ \sim ۲۵۰\mathrm{mm}$
شدت بارگسترده	$q_z = ۰/۹۸۱kPa$
تعداد مود	$r = ۷$
تعداد نوار	۹۵

عددی و روش جداسازی زمانی به کار رفته در پژوهش حاضر، خطای محاسباتی بیشتری خواهد داشت، که علت این امر را می‌توان در وابستگی روش حل مذکور به نتایج حاصل از گام‌های زمانی قبل دانست. در واقع از آنجا که در هر گام زمانی، تغییرشکل‌های گام‌های زمانی قبلی نیز در محاسبات دخیل هستند، خطای محاسبات اندکی افزایش می‌یابد؛ هر چند این افزایش مقدار قابل ملاحظه‌یی نیست. برای بررسی اثر ضخامت صفحات بر مبنای تئوری برشی مرتبه‌ی بالاتر در رفتار ویسکوکشسان صفحات، جابه‌جایی بیشینه‌ی صفحاتی با ضخامت‌های متفاوت در طول زمان بررسی و نتایج آن در شکل ۵ نشان داده شده است. به منظور مشاهده‌ی

جدول ۶. مقایسه‌ی جابه‌جایی بیشینه‌ی ورق مربعی با مشخصات ارائه شده در جدول ۵ با ضخامت‌های مختلف و مقدار ضریب بدون بُعد α در رابطه‌ی (۵۳) در لحظه‌ی شروع بارگذاری با پاسخ‌های حاصل از مرجع[۲۳].

مقدار اختلاف	ضریب α		نسبت ضخامت به	ضخامت
	مرجع[۲۳]	روش نوار محدود	عرض ورق	(mm)
۰٫۰۰۵	۰٫۰۰۴۰۶۲۴	۰٫۰۰۴۰۶۲۲	۰٫۰۰۱	۰٫۵
۰٫۰۰۷	۰٫۰۰۴۰۶۴۴	۰٫۰۰۴۰۶۴۷	۰٫۰۱	۵
۰٫۰۰۰	۰٫۰۰۴۲۷۲۷	۰٫۰۰۴۲۷۲۷	۰٫۱۰	۵۰
۰٫۰۰۴	۰٫۰۰۴۵۳۵۳	۰٫۰۰۴۵۳۵۱	۰٫۱۵	۷۵
۰٫۰۱۲	۰٫۰۰ ۴۹۰۲۵	۰٫۰۰۴۹۰۱۹	۰٫۲۰	۱۰۰
۰٫۲۰	۰٫۰۰۵۳۷۳۸	۰٫۰۰۵۳۷۲۷	۰٫۲۵	۱۲۵
۰٫۰۲۷	۰٫۰۰۵۹۴۸۴	۰٫۰۰۵۹۴۶۸	۰٫۳۰	۱۵۰
۰٫۰۳۲	۰٫۰۰۶۶۲۵۷	۰٫۰۰۶۶۲۳۶	۰٫۳۵	۱۷۵
۰٫۳۶	۰٫۰۰۷۴۰۴۷	۰٫۰۰۷۴۰۲۰	۰٫۴۰	۲۰۰
۰٫۰۴۰	۰٫۰۰۸۲۸۳۴	۰٫۰۰۸۲۸۱۰	۰٫۴۵	۲۲۵
۰٫۰۴۱	۰٫۰۰۹۲۶۳۲	۰٫۰۰۹۲۵۹۴	۰٫۰۵۰	۲۵۰

جدول ۷. خطای روش جداسازی زمانی با انتخاب بازه‌های زمانی مختلف (بر حسب درصد) برای ورقی با مشخصات ارائه شده در جدول ۲.

زمان (s)	$\Delta t = ۱s$	$\Delta t = ۰/۵s$	$\Delta t = ۰/۲s$	$\Delta t = ۰/۱s$
۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰	۰/۰۰
۵	۱۸/۴۵	۵/۸۹	۱/۵۵	۰/۴۷
۱۰	۲۰/۳۱	۶/۳۱	۱/۶۹	۰/۴۶
۵۰	۲۱/۴۷	۶/۶۱	۱/۸۱	۰/۴۵
۱۰۰	۲۱/۸۹	۶/۶۶	۱/۷۶	۰/۵۹
۲۰۰	۲۲/۳۸	۶/۸۳	۱/۷۴	۰/۵۸
۴۰۰	۲۲/۸۹	۷/۰۱	۱/۸۶	۰/۵۷
۶۰۰	۲۳/۰۷	۷/۰۳	۱/۸۳	۰/۵۶
۸۰۰	۲۳/۴۹	۷/۱۷	۱/۹۷	۰/۷۰
۱۰۰۰	۲۳/۶۰	۷/۱۲	۱/۹۶	۰/۵۶
۱۲۰۰	۲۳/۸۹	۷/۲۲	۱/۹۴	۰/۵۶
۱۴۰۰	۲۳/۲۰	۷/۱۸	۱/۹۳	۰/۵۵
۱۶۰۰	۲۴/۰۷	۷/۲۹	۱/۹۳	۰/۵۵
۱۸۰۰	۲۴/۱۱	۷/۲۶	۱/۹۲	۰/۵۵

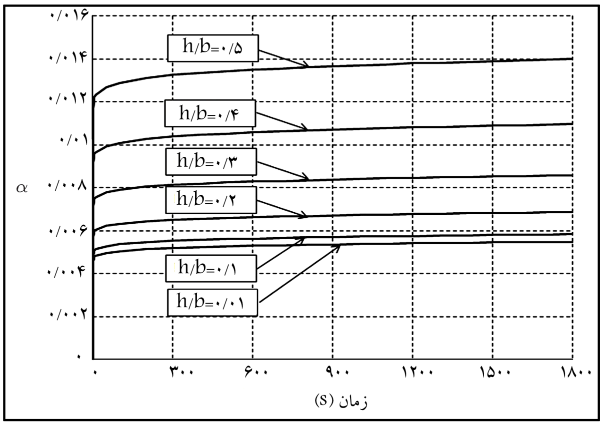
جدول ۸. مقادیر ضریب بدون بُعد α بر اساس تئوری‌های برشی متفاوت.

زمان (s)	$h = ۵۰\,\mathrm{mm}$			$h = ۱۰\,\mathrm{mm}$		
	HSDT (Presentstudy)	FSDT [۱۷]	CPT [۱۶]	HSDT (Presentstudy)	FSDT [۱۷]	CPT [۱۶]
۰	۰/۰۰۴۳۵۱	۰/۰۰۴۲۳۶	۰/۰۰۴۰۶۳	۰/۰۰۵۱۲۳	۰/۰۰۵۰۹۱	۰/۰۰۴۰۶۳
۵	۰/۰۰۵۰۸۹	۰/۰۰۴۹۵۵	۰/۰۰۴۷۲۹	۰/۰۰۵۹۹۲	۰/۰۰۵۹۵۵	۰/۰۰۴۷۲۹
۱۰	۰/۰۰۵۱۴۴	۰/۰۰۵۰۰۸	۰/۰۰۴۷۸۰	۰/۰۰۶۰۵۷	۰/۰۰۶۰۱۹	۰/۰۰۴۷۸۰
۵۰	۰/۰۰۵۲۸۶	۰/۰۰۵۱۴۶	۰/۰۰۴۹۱۱	۰/۰۰۶۲۲۳	۰/۰۰۶۱۸۵	۰/۰۰۴۹۱۱
۱۰۰	۰/۰۰۵۳۷۲	۰/۰۰۵۲۳۰	۰/۰۰۴۹۹۲	۰/۰۰۶۳۲۵	۰/۰۰۶۲۸۵	۰/۰۰۴۹۹۲
۲۰۰	۰/۰۰۵۴۷۳	۰/۰۰۵۳۲۸	۰/۰۰۵۰۸۵	۰/۰۰۶۴۴۴	۰/۰۰۶۴۰۴	۰/۰۰۵۰۸۵
۴۰۰	۰/۰۰۵۵۷۰	۰/۰۰۵۴۲۲	۰/۰۰۵۱۷۵	۰/۰۰۶۵۵۸	۰/۰۰۶۵۱۷	۰/۰۰۵۱۷۵
۶۰۰	۰/۰۰۵۶۲۹	۰/۰۰۵۴۸۰	۰/۰۰۵۲۳۰	۰/۰۰۶۶۲۷	۰/۰۰۶۵۸۶	۰/۰۰۵۲۳۰
۸۰۰	۰/۰۰۶۵۷۶	۰/۰۰۵۵۲۶	۰/۰۰۵۲۷۴	۰/۰۰۶۶۸۳	۰/۰۰۶۶۴۱	۰/۰۰۵۲۷۴
۱۰۰۰	۰/۰۰۵۷۱۶	۰/۰۰۵۵۶۵	۰/۰۰۵۳۱۱	۰/۰۰۶۷۳۰	۰/۰۰۶۶۸۰	۰/۰۰۵۳۱۱
۱۲۰۰	۰/۰۰۵۷۵۱	۰/۰۰۵۵۹۹	۰/۰۰۵۳۴۴	۰/۰۰۶۷۷۱	۰/۰۰۶۷۲۹	۰/۰۰۵۳۴۴
۱۴۰۰	۰/۰۰۵۷۸۱	۰/۰۰۵۶۲۸	۰/۰۰۵۳۷۲	۰/۰۰۶۸۰۷	۰/۰۰۶۷۶۵	۰/۰۰۵۳۷۲
۱۶۰۰	۰/۰۰۵۸۰۸	۰/۰۰۵۶۵۴	۰/۰۰۵۳۹۷	۰/۰۰۶۸۳۸	۰/۰۰۶۷۹۶	۰/۰۰۵۳۹۷
۱۸۰۰	۰/۰۰۵۸۳۲	۰/۰۰۵۶۷۷	۰/۰۰۵۴۱۹	۰/۰۰۶۸۶۶	۰/۰۰۶۸۲۴	۰/۰۰۵۴۱۹

بهتر نتایج به جای جابه‌جایی بیشینه، مقدار ضریب بدون بُعد α در نمودار مذکور به نمایش در آمده است. برای محاسبه‌ی جابه‌جایی بیشینه از مشخصات ورقی مشابه ورق جدول ۵ با ۱۵ نوار استفاده شده است. نمودار شکل ۵، به خوبی بیان‌گر رفتار ویسکوکشسان ورق‌هاست. از سوی دیگر، با افزایش ضخامت ورق‌ها مقدار ضریب بدون بُعد α افزایش می‌یابد، که این موضوع در نتایج ارائه شده در جدول ۶ نیز به خوبی نمایان است. تغییر مذکور بر خلاف مقادیر جابه‌جایی بیشینه‌ی ورق است، که با افزایش ضخامت ورق، مقدار آن نیز کاهش می‌یابد. جهت مقایسه‌ی تئوری‌های برشی متفاوت و تأثیر آن‌ها در رفتار ویسکوکشسان ورق‌ها، مقادیر ضریب بدون بُعد α برای یک ورق مربعی با ابعاد نشان داده شده در جدول ۲ و بازه‌ی زمانی $\Delta t = ۰/۵s$ و ضخامت‌های ۵۰ و ۱۰۰ میلی‌متر توسط روش نوار محدود محاسبه و نتایج آن با نتایج حاصل از تئوری برشی مرتبه‌ی اول،[۱۶] و تئوری کلاسیک ورق،[۱۶] در زمان‌های مختلف مقایسه شده است، که نتایج آن در جدول ۸ ارائه شده است.

۳.۳. اثر باربرداری در ورق ضخیم ویسکوکشسان

یکی از مهم‌ترین تفاوت‌های مواد ویسکوکشسان با مواد کشسان، زمانی قابل مشاهده است که بارهای وارد بر سازه‌ی ساخته شده از هر یک از مواد کشسان کاهش یابد و یا به طور کلی حذف شود. در سازه‌های کشسان، رفتار ماده در هنگام باربرداری همانند بارگذاری رفتاری کاملاً خطی است و به همین دلیل با حذف بارهای وارده، تغییرشکل‌های سازه نیز به مرور و با همان نرخ کاهش بارگذاری حذف می‌شود، به



شکل ۵. تغییرات ضریب بدون بُعد α در طول زمان برای ورق‌های با ضخامت مختلف.

گونه‌یی که با حذف کامل بارهای وارده، کلیه‌ی تغییرشکل‌های سازه نیز حذف می‌شود و سازه به حالت اولیه‌ی خود باز می‌گردد. به همین دلیل نیز در سازه‌های کشسان نیازی به بررسی تاریخچه‌ی بارهای وارده نیست و تغییرشکل‌های سازه در هر لحظه و بر مبنای بار وارده محاسبه می‌شوند.

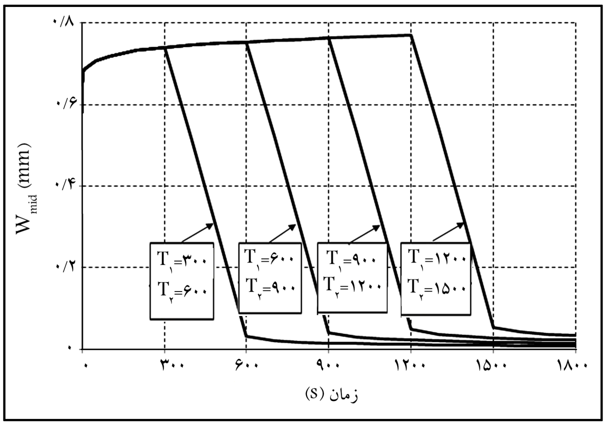
برخلاف مواد کشسان، وضعیت ذکر شده برای مواد ویسکوکشسان کاملاً متفاوت خواهد بود. در مواد ویسکوکشسان، بارگذاری اعمالی به یک سازه‌ی ویسکوکشسان پس از ایجاد یک تغییرشکل ناگهانی کشسان به مرور زمان ایجاد تغییرشکل‌های بیشتری می‌کند، که ناشی از رفتار ویسکوز ماده است.

بنابراین در صورت حذف بارهای وارده انتظار می‌رود که در لحظه‌ی اولیه‌ی حذف بارها، ابتدا فقط تغییرشکل‌های ناشی از رفتار کشسان ماده حذف شوند و سپس با گذشت زمان، تغییرشکل‌های باقی‌مانده‌ی ناشی از رفتار ویسکوز ماده نیز به مرور از بین بروند. با توجه به این‌که خاصیت اشاره شده مختص خواص ماده است، باید در مورد بارگذاری ورق‌ها نیز صادق باشد.

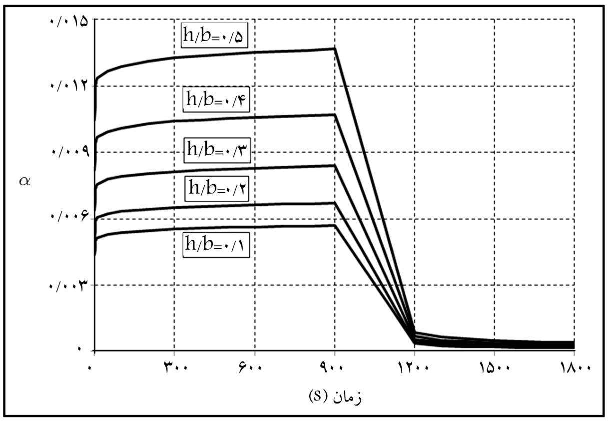
برای بررسی پدیده‌ی مذکور و توانایی روش نوار محدود در نشان دادن خاصیت ذکر شده، یک ورق ویسکوکشسان مربعی تحت بارگذاری گسترده‌ی یکنواخت منظور شده است. از آن‌جا که هدف بررسی رفتار ورق تحت اثر باربرداری است، در زمان مشخصی بار وارد بر ورق حذف می‌شود. در صورتی که زمان آغاز حذف بارگذاری $T_۱$ و زمان پایان حذف بارگذاری $T_۲$ نامیده شود، می‌توان بار وارد بر ورق را به کمک رابطه‌ی ۵۴ محاسبه کرد:

$$q_z = \begin{cases} ۹۸/۱ kPa & : ۰ \le t \le T_۱ \\ \frac{(T_۲ - t)}{T_۲ - T_۱} \times ۹۸/۱ kPa & : T_۱ \le t \le T_۲ \\ ۰ & : t \ge T_۲ \end{cases} \qquad (۵۴)$$

جهت بررسی اثر ذکر شده، یک ورق با مشخصات ارائه شده در جدول ۲ و تعداد ۱۵ نوار و بازه‌ی زمانی $\Delta T = ۰/۵s$ در نظر گرفته شده است، که تغییرشکل‌های به دست آمده برای آن در شکل ۶ مشاهده می‌شود. مطابق شکل مذکور، تغییرشکل‌های ورق تا قبل از شروع زمان باربرداری منطبق بر روند موردانتظار یک ماده‌ی ویسکوکشسان، که پیشتر درباره‌ی آن صحبت شد، رفتار می‌کند. سپس با شروع حذف بار وارده، جابه‌جایی‌های ورق شروع به کاهش می‌کنند. از آن‌جایی که حذف بار گسترده وارد بر ورق در هر لحظه‌ی زمانی به‌صورت آنی انجام می‌گیرد، در هر لحظه فقط جابه‌جایی‌های ناشی از رفتار کشسان ورق



شکل ۶. جابه‌جایی بیشینه‌ی ورق مربعی ویسکوکشسان تحت بارگذاری متغیر بر اساس رابطه‌ی ۵۴.



شکل ۷. جابه‌جایی بیشینه‌ی ورق مربعی ویسکوکشسان تحت بارگذاری متغیر بر اساس رابطه ۵۴ برای ضخامت‌های متفاوت.

حذف می‌شوند و این روند تا به صفر رسیدن کل بار وارده یعنی زمان $t = T_۲$ ادامه خواهد داشت. پس از حذف کامل بار وارد بر ورق، تغییرشکل کشسان در ورق رخ نمی‌دهد و جابه‌جایی‌های به وجود آمده در آن فقط به دلیل خاصیت ویسکوز ماده است و از آن‌جایی که باری بر ورق اعمال نمی‌شود، به مرور زمان تغییرشکل‌های مذکور به سمت صفر میل می‌کنند. همان‌گونه که در شکل ۶ نیز مشاهده می‌شود، هر چه زمان حذف بار دیرتر باشد (نمودارهای سمت راست)، چون که جابه‌جایی ورق در زمان حذف بار بزرگ‌تر است، جابه‌جایی ورق پس از حذف بار نیز بزرگ‌تر خواهد بود. از سوی دیگر، برای نشان دادن اثر ضخامت ورق ضخیم در باربرداری ورق‌های ویسکوکشسان، تغییرات ضریب بدون بُعد α بر حسب زمان برای ورق‌هایی با ضخامت‌های متفاوت و مشخصات ارائه شده در جدول ۲ به ازاء مقادیر $T_۱ = ۹۰۰s$ و $T_۲ = ۱۲۰۰s$ در شکل ۷ نشان داده شده است، که به خوبی بیانگر خواص ویسکوکشسان ورق و اثر ضخامت در تئوری برشی مرتبه‌ی اول است.

۴. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر، به بررسی خاصیت ویسکوکشسانی ورق‌های ضخیم پرداخته شده است. از این رو از مدل سری پرونی، که یکی از دقیق‌ترین و مؤثرترین مدل‌های منطبق

بر رفتار مواد مذکور است، استفاده شده است. همچنین روش نوار محدود به عنوان روش پژوهش انتخاب شده است، که در جهت طولی نوار، ترکیبات سینوس و کسینوس برای ارضاء شرایط مرزی لبه‌های عرضی ورق و در جهت عرضی، توابع شکل هرمیتی دارد. جهت استخراج ماتریس‌های سختی و بردارهای نیرویی از رابطه‌ی کار مجازی استفاده شده است. به این ترتیب پس از درون‌یابی تغییرشکل‌ها، رابطه‌ی کار مجازی برای هر المان نوشته و ماتریس‌های سختی استاندارد، سختی هندسی و بردارهای نیرویی بر اساس آن استخراج شده است. از آن‌جایی مشخصات ماده در طول زمان تغییر می‌کند، لازم است تا بازه‌ی زمانی موردنظر در مسئله به تعدادی بازه‌ی زمانی کوچک‌تر تقسیم شود. به این ترتیب مسئله به کمک حل یک مسئله‌ی مقادیر اولیه بررسی خواهد شد. در واقع انتگرال‌های به کار رفته در بیان رفتار ویسکوکشسان ماده به‌صورت حاصل جمع انتگرال‌های مجزا در بازه‌های زمانی کوچک‌تر تقریب زده می‌شوند. بدین ترتیب حل مسئله در هر زمان به تاریخچه‌ی تغییرشکل‌های آن وابسته خواهد بود. از سوی دیگر، با در نظر گرفتن این مطلب که یکی از مهم‌ترین تفاوت‌های مواد ویسکوکشسان با مواد کشسان زمانی قابل مشاهده است که بارهای وارد بر سازه‌ی ساخته شده از هر یک از مواد مذکور کاهش یابد و یا به طور کلی حذف شود، مثال‌هایی از ورق‌های ویسکوکشسان تحت اثر باربرداری نیز بررسی شد.

بر اساس نتایج حاصل می‌توان گفت که در ورق‌های ویسکوکشسان تحت یک بارگذاری ثابت در طول زمان در راستای عمود بر سطح ورق، با افزایش زمان بارگذاری تغییرشکل‌های ورق افزایش می‌یابد؛ به‌گونه‌یی که در اولین لحظه‌ی بارگذاری، یک تغییرشکل اولیه ناشی از رفتار کشسان آن به وجود می‌آید. سپس جابه‌جایی بیشینه‌ی رخداده در ورق با افزایش زمان بارگذاری به مرور اضافه می‌شود، به گونه‌یی که نرخ افزایش تغییرشکل مذکور با افزایش زمان بارگذاری کم می‌شود. به این ترتیب اثر خاصیت ویسکوزیته‌ی ماده نمایان‌تر می‌شود و با کاهش نرخ افزایش تغییرشکل‌ها، جابه‌جایی‌های ایجاد شده در ورق به مقدار مشخصی میل می‌کند. تغییرشکل‌های ورق تا قبل از شروع زمان باربرداری منطبق بر روند موردانتظار یک ماده‌ی ویسکوکشسان، که پیش‌تر درباره‌ی آن صحبت شد، رفتار می‌کند. سپس با شروع حذف بار وارده، جابه‌جایی‌های ورق شروع به کاهش می‌کنند. از آن‌جایی که حذف بار گسترده وارد بر ورق در هر لحظه‌ی زمانی به‌صورت آنی انجام می‌گیرد، در هر لحظه فقط جابه‌جایی‌های ناشی از رفتار کشسان ورق حذف می‌شوند و این روند تا به صفر رسیدن کل بار وارده ادامه خواهد داشت. پس از حذف کامل بار وارد بر ورق، تغییرشکل کشسان در ورق رخ نمی‌دهد و جابه‌جایی‌های به وجود آمده در آن فقط به دلیل خاصیت ویسکوز ماده است و از آن‌جایی که باری بر ورق اعمال نمی‌شود، به مرور زمان تغییرشکل‌های مذکور به سمت صفر میل می‌کنند. هر چه زمان حذف بار دیرتر باشد، به دلیل آن‌که جابه‌جایی ورق در زمان حذف بار بزرگ‌تر است، جابه‌جایی ورق پس از حذف بار نیز بزرگ‌تر خواهد بود.

منابع (References)

1. Flugge, W., *Viscoelasticity (2nd edn)*, Springer, Berlin, Heidelberg (1975).
2. Taylor, R.L., Pister, K.S. and Goudreau, G.L. "Thermomechanical analysis of viscoelastic solids", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **2**(1), pp. 45-90 (1970).
3. Chen, T.M. "The hybrid laplace transform/finite element method applied to the quasi-static and dynamic analysis of viscoelastic Timoshenko beams", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **38**(1), pp. 509-522 (1995).
4. Zheng-you, Z., Gen-guo, L. and Chang-jun, C. "Quasi-static and dynamical analysis for viscoelastic timoshenko beam with fractional derivative constitutive relation", *Applied Mathematics and Mechanics*, **23**(1), pp. 1-12 (2002).
5. Chen, Q. and Chan, Y.W. "Integral finite element method for dynamical analysis of elastic-viscoelastic composite structures", *Computers and Structures*, **74**(1), pp. 51-64 (2000).
6. Palfalvi, A. "A comparison of finite element formulations for dynamics of viscoelastic beams", *Finite Elements in Analysis and Design*, **44**(14), pp. 814-818 (2008).
7. Payette, G.S. and Reddy, J.N. "Nonlinear quasi-static finite element formulations for viscoelastic Euller-Bernoulli and Timoshenko beams", *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **26**(12), pp. 1736-1755 (2010).
8. Johnson, A.R., Tessler, A. and Dambach, M. "Dynamics of thick viscoelastic beams", *Journal of Engineering Materials and Technology*, **119**(3), pp. 273-278 (1997).
9. Kennedy, T.C. "Nonlinear viscoelastic analysis of composite plates and shells", *Composite Structures*, **41**(3-4), pp. 265-272 (1998).
10. Sheng, D.F. and Cheng, C.J. "Dynamical behavior of nonlinear viscoelastic thick plates with damage", *International Journal of Solids and Structures*, **41**(26), pp. 7287-7308 (2004).
11. Hatami, S., Ronagh, H.R. and Azhari, M. "Exact free vibration analysis of axially moving viscoelastic plates", *Computers and Structures*, **86**(17-18), pp. 1738-1746 (2008).
12. Shariyat, M. "A nonlinear double-superposition global-local theory for dynamic buckling of imperfect iscoelastic composite/sandwich plates: A hierarchical constitutive model", *Composite Structures*, **93**(7), pp. 1890-1899 (2011).
13. Jafari, N., Azhari, M. and Heidarpour, A. "Local buckling of thin and moderately thick variable thickness viscoelastic composite plates", *Structural Engineering and Mechanics*, **40**(6), pp. 783-800 (2011).
14. Jafari, N., Azhari, M. and Heidarpour, A. "Local buckling rectangular viscoelastic composite plates", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **21**(4), pp.263-272 (2012).

15. Amoushahi, H. and Azhari, M. “Static analysis and buckling of viscoelastic plates by a fully discretized nonlinear finite strip method using bubble functions”, *Composite Structures*, **100**, pp. 205-217 (2013).

16. Amoushahi, H. and Azhari, M.“Static and instability analysis of moderately thick viscoelastic plates using a fully discretized nonlinear finite strip formulation”, *Composite Part B- Engineering*, **56**, pp. 222-231 (2014).

17. Amoushahi, H., Azhari, M. and Heidarpour, A. “A fully discretised nonlinear finite strip formulation for prebuckling and buckling analyses of viscoelastic plates subjected to time-dependent loading”, *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **22**(8), pp. 655-669 (2015).

18. Huang, B., Kim, H.S., Wang, J. and et al. “Time-dependent stress variations in symmetrically viscoelastic composite laminates under uniaxial tensile load”, *Composite Structures*, **142**, pp. 278-285 (2016).

19. Mohammadimehr, M., Navi, B.R. and Arani, A.G. “Free vibration of viscoelastic double-bonded polymeric nano-composite plates reinforced by FG-SWCNTs using MSGT, sinusoidal shear deformation theory and meshless method”, *Composite Structures*, **131**, pp. 654-671 (2015).

20. Jin, G., Yang, C. and Liu, Z. “Vibration and damping analysis of sandwich viscoelastic-core beam using Reddy’s higher-order theory”, *Composite Structures*, **140**, pp. 390-409 (2016).

21. Szilard, R. “Theories and Applications of Plate Analysis”, *John Wiley & Sons inc.* (2004).

22. Lai, J. and Bakker, A. “3-D Schapery representation for non-linear viscoelasticity and finite element implementation”, *Computational Mechanics*, **18**(3), pp. 182-191 (1996).

23. Ready, J.N. “A simple higher order theory for laminated composite plates”, *Journal of Applied Mechanics*, **51**(4), pp. 745-752 (1985).