طرح و تحلیل الگوریتم‌های جدید برای حل برخی دستگاه‌ها و برنامه‌ریزی خطی روی فضاهای حقیقی و صحیح

نظام‌الدین مهدوی‌امیری (استاد)
دانشکده‌ی علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شریف
مجید ادیب (استادیار)
گروه ریاضی، دانشگاه کاشان
حمید اسمعیلی (استادیار)
گروه ریاضی، دانشگاه بوعلی سینا همدان

بر اساس روش‌های ABS، ابتدا رهیافت جدیدی برای محاسبه‌ی جواب‌های عمومی دستگاه نامعادلات خطی حقیقی با رتبه‌ی سطری کامل ارائه می‌کنیم و سپس با استفاده از نتایج به دست آمده، حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با قیود نامساوی حقیقی رتبه‌ی کامل را ارائه خواهیم کرد. رهیافت ارائه شده چگونگی تعیین جواب‌های بهینه یا نامتناهی بودن این‌گونه مسائل را مشخص می‌کند. سپس به تخصیص روش اخیر برای حل دستگاه نامعادلات عمومی به حل دستگاه نامعادلات خطی صحیح می‌پردازیم. با استفاده از نتایج به دست آمده، مسئله‌ی برنامه‌ریزی صحیح با قیود نامساوی رتبه‌ی کامل را به مسئله‌یی با تعداد متناهی جواب‌های صحیح تبدیل می‌کنیم. نشان می‌دهیم که چگونه یک جواب صحیح برای این مسئله به‌دست می‌آید.[۱و۲] نهایتاً براساس روش‌های ABS، رده‌ی الگوریتم‌های جدیدی برای حل دستگاه معادلات خطی ارائه می‌دهیم که در هر تکرار دو معادله‌ی جدید را صدق می‌دهد. نتایج عددی حاصل از پیاده‌سازی و آزمون نمونه‌یی خاص از این الگوریتم‌ها مؤید کارایی الگوریتم‌های جدید و دقت جواب‌های به دست آمده است.

مقدمه

گرچه بیش از دو دهه از معرفی روش‌های ABS[۱] برای حل دستگاه‌های خطی نمی‌گذرد،[۳و۴] ولی این روش‌ها مورد توجه گسترده‌یی قرار گرفته‌اند.[۵] اهمیت این روش‌ها ناشی از: ۱. عمومیت (به‌نحوی که همه‌ی الگوریتم‌های مستقیم موجود برای حل دستگاه‌های خطی موارد خاصی از الگوریتم‌های ABS هستند)، ۲. انعطاف (به‌نحوی که دستگاه‌های خطی صحیح را هم حل می‌کنند)،[۶] ۳. کاربری در حل برخی دستگاه نامعادلات خطی، برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی است.

در این نوشتار ابتدا با استفاده از روش‌های ABS به تعیین جواب‌های عمومی دستگاه نامعادلات خطی با رتبه‌ی سطری کامل می‌پردازیم، و سپس نتایج به دست آمده را برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی با قیود نامساوی رتبه‌ی کامل به کار می‌گیریم.[۱] رهیافت ارائه شده نامتناهی بودن این‌گونه مسائل یا چگونگی تعیین جواب‌های بهینه (در صورت وجود) را مشخص می‌کند. سپس این رهیافت را به حل دستگاه نامعادلات خطی صحیح با رتبه‌ی سطری کامل تخصیص می‌دهیم، و چگونگی تعیین یک جواب صحیح را برای مسائل برنامه‌ریزی خطی صحیح، با قیود نامساوی رتبه‌ی کامل مشخص می‌کنیم.[۲] نهایتاً رده‌ی الگوریتم‌های جدیدی، مبتنی بر روش‌های ABS، برای حل دستگاه‌های خطی ارائه می‌کنیم که در هر تکرار تقریبی از جواب را محاسبه کند و در دو معادله‌ی جدید از دستگاه صدق کند.[۷] پیاده‌سازی و آزمون نمونه‌های خاصی از این الگوریتم‌ها نشانگر کارایی الگوریتم‌های جدید و دقت جواب‌های به دست آمده است.

جواب عمومی دستگاه نامعادلات و برنامه‌ریزی روی مخروط

ابتدا الگوریتم ABS برای حل دستگاه معادلات عمومی را بیان می‌کنیم.[۳و۴] فرض کنید A یک ماتریس $m\times n$ با سطرهای a_i^T است. دستگاه معادلات $Ax=b$ را در نظر بگیرید که در آن b یک بردار m بعدی با مؤلفه‌های b_i است.

الگوریتم ۰. حل دستگاه‌های خطی عمومی

(۱) $x_1\in\mathbb{R}^n$ دلخواه، $H_1\in\mathbb{R}^{n\times n}$ نامنفرد و دلخواه را اختیار کن. قرار ده $i=1$، $r_i=0$.

(۲) محاسبه کن: $t_i=a_i^T x_i-b_i$ و $s_i=H_i a_i$.

(۳) اگر $s_i=0$ و $t_i=0$ آنگاه قرارده $x_{i+1}=x_i$، $H_{i+1}=H_i$، $r_{i+1}=r_i$ و به گام ۷ برو (معادله‌ی iام زاید است). اگر $s_i=0$ و $t_i\neq 0$ آنگاه متوقف شو (معادله‌ی iام و لذا دستگاه ناسازگار است).

(۴) $\{s_i\neq 0\}$ جهت جستجوی $p_i=H_i^T z_i$ را محاسبه کن، کـه در آن $z_i\in\mathbb{R}^n$ یک بـردار دلخـواه صـادق در شـرط $z_i^T H_i a_i=z_i^T s_i\neq 0$ است. محاسبه کن:

$$\alpha_i=t_i/a_i^T p_i$$

و قرار ده $x_{i+1}=x_i-\alpha_i p_i$.

(۵) {به‌هنگام‌سازی H_i} H_i را به H_{i+1} به‌هنگام کن:

$$H_{i+1}=H_i-\frac{H_i a_i w_i^T H_i}{w_i^T H_i a_i}$$

که $w_i\in\mathbb{R}^n$ یک بردار دلخواه صادق در شرط $w_i^T s_i\neq 0$ است.

(۶) قرار ده $r_{i+1}=r_i+1$.

(۷) اگر $i=m$ آنگاه متوقف شو (x_{m+1} یک جواب برای دستگاه است)، در غیر این‌صورت قرار ده $i=i+1$ و به گام ۲ برو.

در صورت سازگار بودن دستگاه معادلات بالا، جواب عـمومی به‌صورت $x=x_{m+1}+H_{m+1}^T q$ قابل بیان است کـه در آن $q\in\mathbb{R}^n$ دلخواه است، و رتبه‌ی ماتریس A برابر r_{m+1} است.

در مأخذی دیگر، روشی مبتنی بـر الگـوریتم فـوق بـرای حـل دستگاه معادلات دیوفانتی خطی ارائه کرده‌ایم.[۶]

اکـنون فـرض کـنید $A=(a_1,\dots,a_m)^T\in\mathbb{R}^{m\times n}$، $m\le n$، یک ماتریس رتبه‌ی m است و $b\in\mathbb{R}^m$.

دستگاه نامعادلات خطی

$$Ax\le b,\qquad x\in\mathbb{R}^n \qquad (۱)$$

و دستگاه معادلات خطی

$$Ax=y,\qquad x\in\mathbb{R}^n \qquad (۲)$$

را در نظر بگیرید که در آن $y=(y_1,\dots,y_m)^T\in\mathbb{R}^m$ یک بردار پارامتر است. توجه داریم که x جواب دستگاه نامعادلات ۱ است اگر و تنها اگر x در دستگاه معادلات خطی ۲ به ازای بـرخـی $y\le b$ صـدق کـند. بنابراین جواب‌های دستگاه نامعادلات ۱ را می‌توان از حل دسـتگاه معادلات خطی ۲ به ازای پارامتر y با شرط $y\le b$ به دست آورد.

فـرض کـنید $A_i=(a_1,\dots,a_i)$ و $W_i=(w_1,\dots,w_i)$. مـاتریس $(W_i^T H_1 A_i)^{-1}\ W_i^T H_1$ را یک W_iـوارون چپ A_i می‌نامند و آن را با $A_{W_i}^{-1}$ نشان می‌دهند. از خواص رده روش‌های ABS می‌دانیم کـه $W_i^T H_1 A_i$ یک ماتریس قویاً نامنفرد است[۴]، و به‌علاوه:

$$H_{i+1}=H_1-H_1A_i\left(W_i^T H_1 A_i\right)^{-1}W_i^T H_1=H_1-H_1A_iA_{W_i}^{-1}.$$

بعداً به مقدار دترمینان $(W_i^T H_1 A_i)$ نیاز خواهیم داشت. لم زیـر را برای تعیین مقدار این دترمینان معرفی می‌کنیم. اثبات قضایا و نتایج ارائه شده در ادامه این بخش در دیگر مراجع قابل رجوع است.[۱و۲]

لم ۱. به ازای هر i، $(1\le i\le m)$، داریم:

$$\det(W_i^T H_1 A_i)=w_1^T s_1\times\dots\times w_i^T s_i,$$

که در آن $s_j=H_j a_j$، به ازای j، $1\le j\le i$. □

نتیجه‌ی ۱. بردارهای w_i را می‌توان به گونه‌یی اختیار کرد که برای هر i، $(1\le i\le m)$، داشته باشیم:

$$\det(W_i^T H_1 A_i)>0.$$

□

در قضیه‌ی زیر شکـل صـریح جـواب $x_{m+1}=x_{m+1}(y)$ بـرای دستگاه نامعادلات ۱ را ارائه می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱. اگر در الگوریتم ABS، به ازای هر i، $w_i=z_i$ انتخاب شود، آنگاه جواب عمومی دستگاه نامعادلات ۱ عبارت است از:

$$x=x_{m+1}+H_{m+1}^T q,\quad q\in\mathbb{R}^n$$

که در آن

$$x_{m+1}=A_{W_m}^{-T}y+H_{m+1}^T H_1^{-T}x_1,$$

و $y\in\mathbb{R}^m$، $y\le b$، دلخواه است به طوری کـه دسـتگاه مـعادلات ۲ سازگار است. □

تعریف. بردار $y\in\mathbb{R}^m$ را یک بردار (پارامتر) شدنی (feasible) برای دستگاه نامعادلات ۱ گوئیم هرگاه $y\le b$ و دستگاه ۲ سازگار باشد.

در قضیه‌ی زیر رابطه‌ی بین ماتریس ضـرایب A، مـاتریس L، تبدیل ضمنی حاصل از اعمال روش ABS بر A، و بردارهای شدنی y را نشان داده‌ایم.

قضیه‌ی ۲. فرض کنید $x_1\in\mathbb{R}^n$ نقطه اولیه دلخواه برای شـروع یک الگوریتم ABS با $w_i=z_i$، برای هر i، α برداری مـتشکل از α_iهـای حاصل از قدم‌های ABS باشد. بردار y برای دسـتگاه نـامعادلات ۱ شـدنی است اگـر و فـقط اگـر $y=A(x_1-P\alpha)=Ax_1-L\alpha$ و $L\alpha\ge Ax_1-b$. □

اکنون d و M را چنین در نظر بگیرید:

$$d=\left|\det(W_m^T H_1 A_m)\right|=\left|\det(W_m^T H_1 A^T)\right|$$

$$M=dA_{W_m}^{-T}.$$

برای سهولت، فرض کنید $H=H_{m+1}$. باتوجه به قضیه‌ی ۲ و این که برد (H^T) = پوچ (A)، قضیه‌ی ۳ را که جواب‌های عمومی دسـتگاه نامعادلات ۱ را ارائه می‌دهد، اثبات کرده‌ایم.

قضیه‌ی ۳. فرض کـنید $A_{W_m}^{-T}$ مـاتریس W_m–وارون A حـاصل از کاربرد یک الگوریتم ABS با $w_i=z_i$، برای همه i، بر A و H ماتریس

ابافی به دست آمده باشند و

$$M = \left| det\,(W_m^T H_1 A^T) \right| A_{W_m}^{-T} = d A_{W_m}^{-T}.$$

در این صورت داریم:

$$\{x\in\mathbb{R}^n \mid Ax\le b\} = \{A_{W_m}^{-T} b - M\gamma - H^T q \mid q\in\mathbb{R}^n, \gamma\in\mathbb{R}_+^m\}.$$

□

اکنون مسئله‌ی برنامه‌ریزی خطی

$$max\ c^Tx \ : Ax\le b,\quad x\in\mathbb{R}^n \qquad (۳)$$

را که در آن $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$، $m\le n$، m= رتبه (A)، در نظر بگیرید. با توجه به قضیه‌ی ۳، این مسئله هم ارز است با

$$min\,(c^TM\gamma + c^TH^Tq) \ : \ \gamma\in\mathbb{R}_+^m,\ q\in\mathbb{R}^n.$$

قرار دهید $\bar{c} = M^Tc$ و

$$I^+ = \{i \mid \bar{c}_i > 0\}$$

$$I^- = \{i \mid \bar{c}_i < 0\}$$

$$I^0 = \{i \mid \bar{c}_i = 0\}.$$

قضیه‌ی ۴ به حل مسئله برنامه‌ریزی خطی ۳ می‌پردازد.

قضیه‌ی ۴. فرض کنید که الگوریتم ABS همانند قضیه ۳ بر A اعمال شود، و $x^* = A_{W_m}^{-T} b$.

(الف) اگر $Hc\ne 0$، آنگاه مسئله‌ی ۳ نامتناهی است و جواب ندارد.

(ب) اگر $Hc=0$، و $I^-\ne\phi$، آنگاه مسئله‌ی ۳ نامتناهی است و جواب ندارد.

(ج) اگر $Hc=0$ و $I^-=\phi$، آنگاه بی‌نهایت جواب بهینه برای مسئله‌ی ۳ وجود دارد، به‌صورت:

$$x = x^* - H^Tq + \sum_{j\in I^0} \gamma_j M e_j,$$

که در آن $q\in\mathbb{R}^n$ دلخواه، $\gamma_j\ge 0$، $j\in I^0$ دلخواه و e_j، jامین بردار یکه در $\mathbb{R}^m$ است. □

اکنون دستگاه نامعادلات دیوفانتی خطی

$$Ax\le b,\quad x\in\mathbb{Z}^n \qquad (۴)$$

را که در آن $A=(a_1,...,a_m)^T\in\mathbb{Z}^{m\times n}$، $m\le n$، و $b\in\mathbb{Z}^m$ در نظر بگیرید و رتبه‌ی A را m در نظر بگیرید. مشابه روش حل مسئله‌ی ۱، جواب‌های دستگاه ۴ را می‌توان به کمک روش‌های ABS (برای دستگاه‌های دیوفانتی خطی) محاسبه کرد. اساس کار مشابه بخش قبلی است، با این استثناء که در این جا اعداد $(a_i^Tx_i - y_i)/d_i$، باید صحیح باشند. پس d_i یک مقسوم علیه $d_i = a_i^Tp_i > 0$، $a_i^Tx_i - y_i$ است، یعنی به ازای برخی اعداد صحیح α_i داریم $a_i^Tx_i - y_i = \alpha_i d_i$. لذا $y_i = a_i^Tx_i - \alpha_i d_i$ و چون $y_i\le b_i$ پس $\alpha_i \ge (a_i^Tx_i - b_i)/d_i$. بنابراین قضیه‌ی ۵ را نتیجه می‌گیریم.

قضیه‌ی ۵. بردارهای صحیح y برای دستگاه نامعادلات ۴ به صورت

$$y = A(x_1 - P\alpha) = Ax_1 - L\alpha$$

هستند که در آن $\alpha\in\mathbb{Z}^m$ دلخواه و صادق در

$$L\alpha \ge Ax_1 - b$$

است. □

اکنون به نمایش نقاط صحیح چندوجهی $Ax\le b$ می‌پردازیم. نشان می‌دهیم که هر نقطه‌ی صحیح x از این چند وجهی را می‌توان به‌صورت $x=\bar{x} - M\eta - H^Tq$ نوشت که $q\in\mathbb{Z}^n$، $\eta\in\mathbb{Z}_+^m$ و $\bar{x}$ یک نقطه صحیح از حجره‌ی نیمه‌باز $\{A_{W_m}^{-T}b - M\lambda \mid 0\le\lambda<e, \lambda\in\mathbb{R}^m\}$ است، که در آن 0 و e به‌ترتیب بردارهایی با تمام مؤلفه‌های برابر 0 و 1 هستند. توجه داریم که $A_{W_m}^{-1} = (W_m^T H_1 A^T)^{-1} W_m^T H_1$. اگر $d = \left|det(W_m^TH_1A^T)\right|$ آنگاه $M = d\,A_{W_m}^{-T}$ یک ماتریس صحیح است. در لم ۱ چگونگی محاسبه‌ی مقدار d را ارائه دادیم. نماد $\{...\}_I$ را برای مجموعه نقاط صحیح در مجموعه $\{...\}$ به کار می‌گیریم.

قضیه‌ی ۶. در الگوریتم ABS روی A، فرض کنید $w_i = z_i$، به‌ازای همه i. $x\in\mathbb{Z}^n$ در $Ax\le b$ صدق می‌کند اگر و تنها اگر $x = \bar{x} - M\eta - H^Tq$ به ازای برخی $\eta\in\mathbb{Z}_+^m$ و $q\in\mathbb{Z}^n$، که در آن $\bar{x}$ نقطه‌یی صحیح از مجموعه‌ی $\{A_{W_m}^{-T}b - M\lambda \mid 0\le\lambda<e,\lambda\in\mathbb{R}^m\}$ است. □

مسئله‌ی برنامه ریزی صحیح

$$max\ c^Tx \ : \ Ax\le b,\quad x\in\mathbb{Z}^n \qquad (۵)$$

را که در آن $A\in\mathbb{Z}^{m\times n}$، $m\le n$، A رتبه‌ی m است، $b\in\mathbb{Z}^m$ و $c\in\mathbb{Z}^n$ در نظر بگیرید. بنا بر قضیه‌ی ۶، x یک نقطه شدنی برای مسئله‌ی ۵ است هرگاه $x=\bar{x} - M\eta - H^Tq$، به ازای برخی $q\in\mathbb{Z}^n$ و $\eta\in\mathbb{Z}_+^m$ که در آن $\bar{x}$ یک نقطه صحیح از

$$S(A,b) = \{A_{W_m}^{-T}b - M\lambda \mid 0\le\lambda<e,\lambda\in\mathbb{R}^m\}$$

باشد. بنابراین داریم

$$c^Tx = c^T\bar{x} - c^TM\eta - c^TH^Tq.$$

فرض کنید x^* جواب بهینه‌ی مسئله

$$max\ c^Tx \ : \ x\in S(A,b)\cap\mathbb{Z}^n \qquad (۶)$$

باشد. مشابه با حالت حقیقی، قضیه‌ی ۷ در دست است ($\bar{c}$، I^+، I^- و I^0 همانند گذشته تعریف می‌شوند).

قضیه‌ی ۷. فرض‌کنید یک الگوریتم ABS، همانند قضیه‌ی ۶، بر ماتریس A اعمال‌شود. فرض‌کنید x^* جواب بهینه‌ی مسئله‌ی ۶ باشد.
(الف) اگر $Hc \neq 0$، آنگاه مسئله‌ی ۵ نامتناهی است و جواب ندارد.
(ب) اگر $Hc = 0$ و $I^- \neq \phi$، آنگاه مسئله‌ی ۵ نامتناهی است و جواب ندارد.
(ج) اگر $Hc = 0$ و $I^- = \phi$، آنگاه بی‌نهایت جواب بهینه برای مسئله‌ی ۵ به صورت

$$x = x^* - H^T q + \sum_{j \in I^\circ} \gamma_j M e_j$$

وجود دارد که در آن $q \in \mathbb{Z}^n$ دلخواه، $\gamma_j \geq 0$، $j \in I^\circ$، یک عدد صحیح دلخواه و e_j، j-امین بردار یکه در $\mathbb{R}^m$ است. □

اکنون به چگونگی تبدیل مسئله‌ی ۶ به یک مسئله‌ی معادل برنامه‌ریزی خطی، با تعداد متناهی جواب‌های شدنی می‌پردازیم. فرض کنید $x \in S(A,b) \cap \mathbb{Z}^n$. در این صورت به ازای برخی بردار λ، $0 \leq \lambda < e$، داریم $x = A^{-T}_{W_m} b - M\lambda$. چون $M = d\, A^{-T}_{W_m}$، پس $x = A^{-T}_{W_m}(b - d\lambda)$، و بنابراین x در دستگاه دیوفانتی $Ax = b - d\lambda$ صدق می‌کند. بدین ترتیب، مسئله‌ی ۶ معادل است با

$$\max \quad c^T x \quad : \quad Ax = b - d\lambda\,, \quad 0 \leq \lambda < e,\ x \in \mathbb{Z}^n \qquad (7)$$

که در آن $d = \left| \det (W_m^T H_1 A^T) \right|$. توجه داریم که تعداد جواب‌های شدنی برای مسئله‌ی ۷ متناهی است. چون x و A صحیح‌اند، $b - d\lambda$ نیز باید یک بردار صحیح باشد. توجه داریم که $b - de < b - d\lambda \leq b$. چون بازه‌ی m بعدی $(b - de, b]$ شامل حداکثر d^m نقطه صحیح است، پس حداکثر d^m بردار صحیح به شکل $b - d\lambda$، $0 \leq \lambda < e$، وجود دارند. در نتیجه تعداد نقاط صحیح شدنی برای مسئله‌ی ۷ حداکثر d^m است. پس مسئله‌ی برنامه‌ریزی صحیح ۵ معادل است با برنامه‌ی ۶ یا ۷. مشاهده می‌شود که تعداد جواب‌های صحیح برای مسئله‌ی ۷ متناهی است، در حالی که تعداد جواب‌های شدنی برای مسئله‌ی ۵، در حالت کلی نامتناهی است.

توجه: پیش از این نشان داده‌ایم که w_iها را می‌توان به‌گونه‌یی اختیار کرد که دترمینان فرم نرمال هرمیت ماتریس A برابر با دترمینان ماتریس L شود.[3] بدین ترتیب، d را می‌توان با استفاده از قطری‌های ماتریس L محاسبه کرد.

یک نقطه صحیح شدنی x متعلق به $S(A,b)$ را می‌توان به سادگی به دست آورد. می‌دانیم که هر نقطه $x \in S(A,b) \cap \mathbb{Z}^n$ به صورت $x = A^{-T}_{W_m}(b - d\lambda)$ است، که در آن $0 \leq \lambda < e$. به ازای $i = 1, \ldots, m$، قرار دهید: $\lambda_i = \frac{b_i}{d} - \left\lfloor \frac{b_i}{d} \right\rfloor$ و توجه کنید که $0 \leq \lambda < e$ و $b - d\lambda \in \mathbb{Z}^m$. از طرفی دیگر، چون M یک ماتریس صحیح است، پس داریم:

$$x = A^{-T}_{W_m}(b - d\lambda) = M(\frac{1}{d} b - \lambda) = M \left\lfloor \frac{b}{d} \right\rfloor \in S(A,b) \cap \mathbb{Z}^n\,,$$

که در آن $\left\lfloor \frac{b}{d} \right\rfloor \in \mathbb{Z}^m$ نشان دهنده‌ی برداری با مؤلفه‌های $\left\lfloor \frac{b_i}{d} \right\rfloor$، $i = 1, \ldots, m$، است. از آنجا که مسائل ۶ و ۷ ساختارهای خاصی دارند، برای حل این مسائل می‌توان روش‌های جستجوی مستقیم، مانند روش اِچولز و کوپر را به کار گرفت.[8]

رهیافتی جدیدبرای حل دستگاه‌های خطی

روش جدیدی ارائه می‌دهیم که در هر تکرار برقراری دو معادله را در نظر می‌گیرد.[7] این رهیافت منجر به الگوریتم‌های جدیدی می‌شود که به طور کامل ارائه خواهیم کرد. برای سادگی فرض می‌کنیم که رتبه‌ی A برابر m، و m یک عدد زوج است. توجه داریم که اگر m فرد باشد، می‌توان دستگاه

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$$

را متناظر با دستگاه $Ax = b$ با $A \in \mathrm{R}^{m \times n}$ در نظر گرفت. نماد a^T_i را برای سطر iام A به کار می‌گیریم. در الگوریتم ارائه شده خواهیم دید که x^+، جواب دستگاه، (در صورت وجود)، در حداکثر $m/2$ تکرار به دست می‌آید. جواب به دست آمده در تکرار iام یعنی جواب برای $2i$ معادله‌ی اول دستگاه را با x_i نشان می‌دهیم. بدین ترتیب، دنباله‌ی تولیدشده توسط این روش حداکثر شامل x_1، x_2، ...، $x_{m/2}$ خواهد بود. فرض کنید:

$$A^{2i} = (a_1, \ldots, a_{2i})^T$$

$$b^{2i} = (b_1, \ldots, b_{2i})^T\,.$$

اگر x_i در رابطه‌ی $A^{2i} x_i = b^{2i}$ صدق کند، ماتریس H_i را طوری تعیین می‌کنیم که ستون‌های H_i^T فضای پوچ A^{2i} را پوشش دهد، یعنی $A^{2i} H_i^T = 0$، یا

$$H_i a_j = 0\,, \quad j \leq 2i\,. \qquad (8)$$

بدین ترتیب، H_i را طوری تعیین می‌کنیم که

$$\text{بعد}\,(\text{پوچ}\,(H_i)) = 2i$$

$$\text{پوچ}\,(H_i) = \text{برد}\,\{a_1, \ldots, a_{2i}\}\,. \qquad (9)$$

در تکرار $(i+1)$ام قرار می‌دهیم:

$$x_{i+1} = x_i - H_i^T \, (\alpha_i z_i + \beta_i \bar{z}_i), \qquad (10)$$

که در آن $\alpha_i, \beta_i \in R$ و $z_i, \bar{z}_i \in R^n$. واضح است که x_{i+1} در دستگاه $A^{2i} x_{i+1} = b^{2i}$ صدق می‌کند. اکنون α_i و β_i را طوری تعیین می‌کنیم که $A^{2i+2} x_{i+1} = b^{2i+2}$. طبق تعریف:

$$r_i(x_j) = a_i^T x_j - b_i. \qquad (۱۱)$$

α_i و β_i باید به گونه‌یی تعیین شوند که:

$$r_{2i+1}(x_{i+1}) = 0, \quad r_{2i+2}(x_{i+1}) = 0. \qquad (۱۲)$$

با توجه به معادله‌ی ۱۰، معادلات ۱۲ به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$(a^T_{2i+1} H_i^T z_i)\alpha_i + (a^T_{2i+1} H_i^T \bar{z}_i)\beta_i = r_{2i+1}(x_i),$$

$$(a^T_{2i+2} H_i^T z_i)\alpha_i + (a^T_{2i+2} H_i^T \bar{z}_i)\beta_i = r_{2i+2}(x_i). \qquad (۱۳)$$

توجه داریم که اگر دترمینان ماتریس ضرایب در معادلات ۱۳ صفر باشد، آنگاه جواب‌های بی‌شماری برای α_i و β_i وجود خواهد داشت. از سوی دیگر، z_i و $\bar{z}_i$ را می‌توان به گونه‌یی تعیین کرد که دترمینان ماتریس ضرایب در معادلات ۱۳ صفر نباشد و در نتیجه دستگاه ۱۳ یک جواب یگانه برای α_i و β_i به دست دهد. در الگوریتم جدید، حالت اخیر را در نظر می‌گیریم و دترمینان دستگاه ۱۳ را با η_i نشان می‌دهیم. z_i و $\bar{z}_i$ باید طوری باشند که

$$\eta_i = \left[c^T_{2i+1} z_i c^T_{2i+2} - c^T_{2i+2} z_i c^T_{2i+1} \right] \bar{z}_i \neq 0 \qquad (۱۴)$$

که در آن $c_j = H_i a_j$. بدین ترتیب، مقادیر α_i و β_i به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\alpha_i = \left[r_{2i+1}(x_i) c^T_{2i+2} - r_{2i+2}(x_i) c^T_{2i+1} \right] \bar{z}_i / \eta_i \qquad (۱۵)$$

$$\beta_i = \left[r_{2i+2}(x_i) c^T_{2i+1} - r_{2i+1}(x_i) c^T_{2i+2} \right] \bar{z}_i / \eta_i. \qquad (۱۶)$$

اکنون نشان می‌دهیم که اگر H_i دارای خواص ۹ باشد، بردارهای z_i و $\bar{z}_i$ با شرط ۱۴ وجود دارند. با توجه به ۹ و استقلال خطی سطرهای A داریم:

$$c_{2i+2} = H_i a_{2i+2} \neq 0, \quad c_{2i+1} = H_i a_{2i+1} \neq 0, \qquad (الف-۱۷)$$

$$\beta c_{2i+1} + \alpha c_{2i+2} \neq 0 \qquad (ب-۱۷)$$

برای مقادیری از α و β که با هم صفر نباشند. لذا اگر بردار z_i طوری انتخاب شود که

$$q^T = c^T_{2i+1} z_i c^T_{2i+2} - c^T_{2i+2} z_i c^T_{2i+1} \neq 0,$$

آنگاه $q = \bar{z}_i$، و در نتیجه $\eta_i \neq 0$. به‌عنوان مثال، اگر $z_i = c_{2i+2}$، آنگاه:

$$q = (c^T_{2i+1} c_{2i+2}) c_{2i+2} - \| c_{2i+2} \|_2^2 c_{2i+1}$$

و از معادلات ۱۷ نتیجه می‌گیریم که $q \neq 0$. توجه داریم که برای z_i انتخاب‌های فراوانی می‌توان در نظر گرفت. یک مثال دیگر $z_i = c_{2i+1}$ است. برای انتخاب‌های دیگر می‌توان z_i را طوری انتخاب کرد که

$$c^T_{2i+1} z_i \neq 0, \quad c^T_{2i+2} z_i = 0$$

یا

$$c^T_{2i+1} z_i = 0, \quad c^T_{2i+2} z_i \neq 0.$$

بدین ترتیب، با انتخاب α_i و β_i مطابق با روابط ۱۵ و ۱۶ و x_{i+1} مطابق با رابطه‌ی ۱۰، معادلات $(2i+1)$ام و $(2i+2)$ام در x_{i+1} صدق می‌کند.

به‌هنگام کردن ماتریس اباقی

در تکرار iام، ماتریس H_i را با یک ماتریس رتبه‌ی دو تصحیح می‌کنیم. ماتریس H_i باید به‌گونه‌یی باشد که x_{i+1} در معادلات $1, 2, \ldots, 2i$ هم صدق کند. یعنی می‌خواهیم داشته باشیم:

$$a_j^T x_{i+1} = b_j, \quad j \le 2i,$$

که با توجه به ۱۰ و با فرض $c_j = H_i a_j$، باید داشته باشیم:

$$a_j^T x_i - \alpha_i c_j^T z_i - \beta_i c_j^T \bar{z}_i = b_j, \quad j \le 2i. \qquad (۱۸)$$

می‌دانیم که $A^{2i} x_i = b_{2i}$؛ لذا برای ارضای معادلات ۱۸، برقراری روابط زیر مورد نیاز است:

$$c_j^T(\alpha_i z_i + \beta_i \bar{z}_i) = 0, \quad j \le 2i. \qquad (۱۹)$$

کافی است که H_i به گونه‌یی باشد که

$$c_j = H_i a_j = 0, \quad j \le 2i. \qquad (۲۰)$$

به استقراء فرض کنید که H_i دارای این خواص باشد، یعنی داشته باشیم:

$$H_i a_j = 0, \quad j \le 2i. \qquad (۲۱)$$

ماتریس H_{i+1} را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H_{i+1} = H_i + D_i + E_i, \qquad (۲۲)$$

که در آن D_i و E_i ماتریس‌های رتبه‌ی یک هستند و

$$H_{i+1} a_j = 0, \quad j \le 2i+2. \qquad (۲۳)$$

برای ارضای روابط ۲۳، ماتریس‌های D_i و E_i را به طور مناسب تعیین می‌کنیم. فرض کنید:

$$D_i = g_i d_i^T, \quad E_i = e_i f_i^T, \qquad (۲۴)$$

که در آن $g_i, d_i, e_i, f_i \in R^n$. از ۲۲ و ۲۳ نتیجه می‌شود که باید داشته باشیم:

$$H_i a_j + (d_i^T a_j) g_i + (f_i^T a_j) e_i = 0, \quad j \le 2i+2. \qquad (۲۵)$$

به ازای $j = 2i+1$ و $j = 2i+2$ در رابطه‌ی ۲۵ داریم:

(۲۶) $$(d_i^T a_{2i+1})g_i + (f_i^T a_{2i+1})e_i = -c_{2i+1}$$

(۲۷) $$(d_i^T a_{2i+2})g_i + (f_i^T a_{2i+2})e_i = -c_{2i+2} \; .$$

حال، با توجه به روابط ۱۷، ۲۶ و ۲۷، و قرار

(۲۸) $$g_i = -c_{2i+2}, \quad e_i = -c_{2i+1}$$

و

(۲۹) $$f_i^T a_{2i+1} = 1, \quad f_i^T a_{2i+2} = 0,$$
$$d_i^T a_{2i+1} = 0, \quad d_i^T a_{2i+2} = 1,$$

روابط ۲۶ و ۲۷، یعنی همان رابطه‌ی ۲۵ به‌ازای $j=2i+2$ و $j=2i+1$ صدق می‌کنند. برای برقراری رابطه‌ی ۲۵ به‌ازای مقادیر $j \le 2i$ نیز با توجه به $H_i a_j=0$ و بنا بر فرض استقراء باید داشته باشیم:

(۳۰) $$(d_i^T a_j)c_{2i+2} + (f_i^T a_j)c_{2i+1} = 0, \quad j \le 2i$$

که با تعاریف $d_i = H_i^T w_i$ و $f_i = H_i^T \bar{w}_i$، به‌ازای برخی $w_i, \bar{w}_i \in R^n$، برقرار می‌شوند. حال، با توجه به رابطه‌ی ۲۹ کافی است که w_i و $\bar{w}_i$ با شرایط زیر تعیین شوند:

(۳۱) $$w_i^T H_i a_{2i+1} = 0 \quad , \quad w_i^T H_i a_{2i+2} = 1$$

(۳۲) $$\bar{w}_i^T H_i a_{2i+1} = 1 \quad , \quad \bar{w}_i^T H_i a_{2i+2} = 0 \; .$$

بنابراین فرمول به‌هنگام‌سازی H_i به صورت زیر خلاصه می‌شود:

(۳۳) $$H_{i+1} = H_i - H_i a_{2i+2} w_i^T H_i - H_i a_{2i+1} \bar{w}_i^T H_i$$

که در آن w_i و $\bar{w}_i$ با شرط برقراری روابط ۳۱ و ۳۲ تعیین می‌شوند. برقراری پایه‌ی استقراء به‌سادگی از فرمول ۳۳ تأیید می‌شود: $H_1 a_1 = 0$ و $H_1 a_2 = 0$ (با فرض انتخاب مناسب w_0 و $\bar{w}_0$ مطابق با روابط ۳۱ و ۳۲).

توجه: یک انتخاب مناسب برای z_i و $\bar{z}_i$ عبارت است از:

$$z_i = w_i, \quad \bar{z}_i = \bar{w}_i \; .$$

با این انتخاب، رابطه‌ی ۱۳ به رابطه‌ی ساده‌ی $\eta_i = -1$، روابط ۱۴ و ۱۵ به روابط:

$$\alpha_i = r_{2i+2}(x_i), \quad \beta_i = -r_{2i+1}(x_i)$$

تبدیل می‌شوند. نتیجتاً گام‌های الگوریتم برای حل دستگاه‌های سازگار و رتبه‌ی کامل به‌صورت زیر ارائه می‌شوند.

الگوریتم ۱: حل دستگاه‌های خطی عمومی
(با فرض سازگاری دستگاه و استقلال خطی سطرها)

(۱) $x_0 \in R^n$ را یک بردار دلخواه و $H_0 \in R^n \times^n$ را یک ماتریس دلخواه و وارون‌پذیر اختیار کن و قرار ده $i=0$.

(۲) بردارهای $c_{2i+1} = H_i a_{2i+1}$ و $c_{2i+2} = H_i a_{2i+2}$ را محاسبه کن.

(۳) بردارهای w_i و $\bar{w}_i$ را با شرایط زیر محاسبه کن:

$$w_i^T c_{2i+1} = 0, \quad w_i^T c_{2i+2} = 1$$
$$\bar{w}_i^T c_{2i+1} = 1, \quad \bar{w}_i^T c_{2i+2} = 0 \; .$$

قرار ده

$$\bar{z}_i = \bar{w}_i, \quad z_i = w_i \; .$$

(۴) مقادیر $\alpha_i = r_{2i+2}(x_i)$ و $\beta_i = -r_{2i+1}(x_i)$ را محاسبه کن و قرار ده

$$x_{i+1} = x_i - H_i^T(\alpha_i z_i + \beta_i \bar{z}_i) \; .$$

(۵) اگر $i = m/2 - 1$ آنگاه متوقف شو (x_{i+1} جواب مسئله است).

(۶) قرار ده

$$H_{i+1} = H_i - c_{2i+2} w_i^T H_i - c_{2i+1} \bar{w}_i^T H_i \; .$$

(۷) قرار ده $i = i+1$ و به گام ۲ برو.

خواص ماتریس اباقی

اکنون خواص ماتریس اباقی را دقیق‌تر بررسی می‌کنیم. اثبات قضایا و نتایج این بخش در مرجع ۷ آمده است.

قضیه‌ی ۸. فرض کنید $H_0 \in R^{n\times n}$ یک ماتریس وارون‌پذیر و بردارهای $a_1,\dots,a_m$ مستقل خطی باشند. فرض کنید H_iها ماتریس‌های تولیدشده از رابطه‌ی ۳۳ باشند. برای $2i+1 \le j \le m$، بردارهای $H_i a_j$ غیر صفر و مستقل خطی‌اند. □

قضیه‌ی ۹. برای $0 \le i \le m/2$ و ماتریس‌های H_i تعریف شده در رابطه‌ی ۳۳ داریم:

بعد [برد (H_i)] $= n - 2i$

بعد [پوچ (H_i)] $= 2i$.

□

اکنون دو نتیجه‌ی زیر را که اثبات آنها با توجه به قضایای ۸ و ۹ روشن است، داریم.

نتیجه‌ی ۲. بردارهای $H_i a_{2i+1}$ و $H_i a_{2i+2}$ صفر هستند اگر و فقط اگر a_{2i+1} و a_{2i+2} ترکیباتی خطی از $a_1,\dots,a_{2i}$ باشند.

نتیجه‌ی ۳. $\alpha_i = r_{2i+2} = 0$ و $\beta_i = -r_{2i+1} = 0$ اگر و فقط اگر a_{2i+1} و a_{2i+2} ترکیبی خطی از $a_1,\dots,a_{2i}$ باشند (یعنی با فرض استقلال خطی سطرهای ماتریس A داریم: $\alpha_i \ne 0$ و $\beta_i \ne 0$).

توجه داریم که اگر x_i در معادلات $(i+1)$ام و $(i+2)$ام نیز صدق کند، می‌توان گفت $H_{i+1} = H_i$ و $x_{i+1} = x_i$. همچنین، با توجه به نتیجه‌ی ۲،

دستگاه $Ax=b$ هنگامی ناسازگار است که $c_{2i+1}=0$ یا $c_{2i+2}=0$ و متناظراً $r_{2i+1}(x_i)$ یا $r_{2i+2}(x_i)$ مخالف صفر باشد. حال فرض کنید که دقیقاً برای یکی از مقادیر $s=1$ یا 2 داشته باشیم: $c_{2i+s}\neq 0$. در این صورت ممکن است $\alpha_i=r_{2i+2}=0$ یا $\beta_i=-r_{2i+1}=0$ (هم‌زمان صفر نیستند)، که در این حالت قرار می‌دهیم:

$$x_{i+1}=x_i-\theta_i H_i^T w_i^s$$

$$H_{i+1}=H_i-c_{2i+s}w_i^{sT}H_i ,$$

که در آن $\theta_i=\alpha_i$، مشروط بر آن‌که $\beta_i=0$ و $\theta_i=\beta_i$، مشروط بر آن که $\alpha_i=0$. w_i^s نیز در شرط $w_i^{sT}c_{2i+s}=1$ صدق می‌کند.

به‌سادگی می‌توان ملاحظه کرد که در حالت فوق، H_{i+1} در شرایط ۲۲ صدق می‌کند. بنابراین، الگوریتم تکمیل‌شده با گام‌های زیر ارائه می‌شود.

الگوریتم ۲: الگوریتم جدید برای حل دستگاه‌های خطی عمومی

(۱) $x_0\in R^n$ را یک بردار دلخواه و $H_0\in R^{n\times n}$ را یک ماتریس دلخواه وارون‌پذیر اختیار کن و قرار ده $i=0$.

(۲) بردارهای $c_{2i+1}=H_i a_{2i+1}$ و $c_{2i+2}=H_i a_{2i+2}$ و مقادیر r_{2i+1} و r_{2i+2} را محاسبه کن و قرار ده

$$\alpha_i=r_{2i+2}(x_i)\ ,\qquad \beta_i=-r_{2i+1}(x_i)\ .$$

(۳) اگر $\alpha_i=\beta_i=c_{2i+1}=c_{2i+2}=0$ آنگاه قرار ده

$$x_{i+1}=x_i$$

$$H_{i+1}=H_i$$

و به گام ۱۰ برو.

(۴) اگر ($c_{2i+2}=0$ و $\alpha_i\neq 0$) یا ($c_{2i+1}=0$ و $\beta_i\neq 0$) متوقف شو (دستگاه ناسازگار است).

(۵)

$\{c_{2i+s}\neq 0$ ، $s=1$ یا 2 ، $c_{2i+\bar{s}}=0$ ، $\bar{s}=1$ یا 2 و $\bar{s}\neq s\}$

اگر ($c_{2i+1}=0$ یا $c_{2i+2}=0$) آنگاه قرار ده

$$x_{i+1}=x_i-\theta_i H_i^T w_i^s$$

$$H_{i+1}=H_i-c_{2i+s}w_i^{sT}H_i$$

که در آن w_i^s در شرط $w_i^{sT}c_{2i+s}=1$ صدق می‌کند، و $\theta_i=\alpha_i$ اگر $\beta_i=0$ و $\theta_i=\beta_i$ اگر $\alpha_i=0$. به گام ۱۰ برو.

(۶) $\{c_{2i+1}\neq 0$ ، $c_{2i+2}\neq 0$ ، $\beta_i\neq 0$ ، $\alpha_i\neq 0\}$ بردارهای w_i و $\overline{w}_i$ را با شرایط زیر اختیار کن:

$$w_i^T c_{2i+1}=0\ ,\quad w_i^T c_{2i+2}=1$$

$$\overline{w}_i^T c_{2i+1}=1\ ,\quad \overline{w}_i^T c_{2i+2}=0\ .$$

قرار ده $z_i=w_i$ و $\bar{z}_i=\overline{w}_i$.

(۷) قرار ده

$$x_{i+1}=x_i-H_i^T(\alpha_i z_i+\beta_i \bar{z}_i)\ .$$

(۸) اگر $i=m/2-1$ آنگاه متوقف شو (x_i جواب مسئله است).

(۹) قرار ده

$$H_{i+1}=H_i-c_{2i+2}w_i^T H_i-c_{2i+1}\overline{w}_i^T H_i\ .$$

(۱۰) اگر $i=m/2-1$ آنگاه متوقف شو (x_i جواب مسئله است) در غیر این‌صورت $i=i+1$ و به گام ۲ برو.

پیاده‌سازی الگوریتم‌ها

برای پیاده‌سازی الگوریتم ارائه شده، ماتریس H_0 را در گام ۱ ماتریس همانی اختیار می‌کنیم. w_i و $\overline{w}_i$ در گام ۳، به‌صورت زیر انتخاب می‌شوند. فرض کنید:

$$c_{2i+1}^T=(c_1,\ldots,c_n)$$

$$c_{2i+2}^T=(\bar{c}_1,\ldots,\bar{c}_n)$$

$$w_i^T=(w_1,\ldots,w_n)$$

$$\overline{w}_i^T=(\overline{w}_1,\ldots,\overline{w}_n)\ .$$

با توجه به روابط ۳۱ و ۳۲ تعریف می‌کنیم:

$$|c_k|=Max\,\{\,|c_1|,\ldots,|c_n|\,\}$$

$$|\bar{c}_p|=Max\,\{\,|\bar{c}_1|,\ldots,|\bar{c}_n|\,\}$$

$$\left|\bar{c}_s-(\bar{c}_k c_s/c_k)\right|=$$
$$Max\,\left\{\left|\bar{c}_1-(\bar{c}_k c_1/c_k)\right|,\ldots,\left|\bar{c}_n-(\bar{c}_k c_n/c_k)\right|\right\}$$

$$\left|\bar{c}_u-(\bar{c}_p c_u/c_p)\right|=$$
$$Max\,\left\{\left|\bar{c}_1-(\bar{c}_p c_1/c_p)\right|,\ldots,\left|\bar{c}_n-(\bar{c}_p c_n/c_p)\right|\right\}$$

و قرار می‌دهیم:

$$w_k=-c_s w_s/c_k,\qquad w_s=1/(\bar{c}_s-(\bar{c}_k c_s/c_k)).$$

برای $j\neq k\ ,\ s$ تعریف می‌کنیم:

$$w_j=0$$

$\overline{w}_i$ نیز به‌طور مشابه به‌صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$\overline{w}_p=-c_s\overline{w}_s/c_p\ \text{ و }\ \overline{w}_u=1/(\bar{c}_1-(\bar{c}_p c_1/c_p)),$$

و برای $j\neq u, p$ تعریف می‌کنیم $\overline{w}_j=0$.

این الگوریتم و الگوریتم‌های هوآنگ و LX ضمنی[۴و۵] (دو نمونه از الگوریتم‌های ABS) را به‌زبان C پیاده‌سازی کرده‌ایم. اجرای برنامه‌ها را بر روی رایانه‌ی پنتیوم ۱۳۳ انجام داده‌ایم. برنامه‌های

تولیدشده را با مسائل گوناگون آزمون کرده‌ایم. نتایج عددی مؤید برتری روش جدید بر روش‌های ABS است.[۷]

لازم به ذکر است که این دو روش و خصوصاً روش هوآنگ در میان روش‌های ABS از برتری خاصی برخوردارند، از جمله این که در میان تمام انتخاب‌های w_i، انتخاب $w_i = a_i / a_i^T H_i a_i$ نرم فروبینیوس $H_{i+1} - H_i$ را کمینه می‌کند. آزمون‌های عددی مؤید آن است که برای مسائل بدحالت خطای جواب محاسبه‌شده‌ی x و باقی‌مانده‌ی $Ax - b$ برای روش هوآنگ در مقایسه با روش‌های دیگر عمدتاً کم‌تر است.[۴و۵]

نتیجه‌گیری

چگونگی حل نامعادلات خطی کلی و صحیح با رتبه‌ی سطری کامل، و نیز برنامه‌ریزی خطی کلی و صحیح با قیود نامساوی رتبه‌ی کامل با استفاده از الگوریتم‌های ABS بررسی شدند. همچنین رده‌ی الگوریتم‌های جدیدی برای حل دستگاه معادلات خطی که در هر تکرار دو معادله جدید را صدق می‌دهد، بر اساس روش‌های ABS ارائه شده است. نتایج نظری و محاسباتی مؤید کارایی روش‌های جدید ارائه شده در حل دستگاه‌های خطی و برنامه‌ریزی خطی کلی و صحیحِ مورد نظر است.

پانوشت

1. Abaffy-Broyden-Spedicato methods (ABS methods)

منابع

1. Esmaeili, H., Mahdavi-Amiri, N. and Spedicato, E. "Explicit ABS solution of a class of linear inequality systems and LP problems", *Report DMSIA* **2** (01), University of Bergamo, (2001).
2. Esmaeili, H., Mahdavi-Amiri, N. and Spedicato, E. "ABS solution of a class of linear integer inequalities and integer LP problems", *Optimization Methods and Software* **16**, pp.179-192, (2001)
3. Abaffy, J., Broyden, C.G. and Spedicato, E. "A class of direct methods for linear equations", *Numerische Mathematik* **45**, pp.361-376, (1984).
4. Abaffy, J. and Spedicato, E. *ABS Projection Algorithms: Mathematical Techniques for Linear and Nonlinear Equations*, Ellis Horwood, Chichester, (1989).
5. Spedicato, E., Bodon, E., Del Popolo, A. and Mahdavi-Amiri, N. "ABS methods and ABSPACK for linear systems and optimization: A review", 40R **1** (1), pp.51-66, (2003).
6. Esmaeili, H., Mahdavi-Amiri, N. and Spedicato, E. "A class of ABS algorithms for Diophantine linear systems", *Numerische Mathematik* **90**, pp.101-115, (2001).
7. Adib, M., Mahdavi-Amiri, N. and Spedicato, E. "ABS-type methods for solving m linear equations in m / 2 steps", submitted.
8. Taha, H.A. *Integer Programming, Theory, Applications and Computations*, Academic Press, (1975).