حل مسئله‌ی تخصیص هواپیما به پرواز با روش SA

سید علیرضا سید وکیلی (کارشناس ارشد)
هدایت ذکایی آشتیانی (استاد)
دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

تخصیص هواپیما به پرواز از جمله زیرمسائل برنامه‌ریزی پرواز در شرکت‌های هواپیمایی است. در این مسئله با معلوم بودن زمان پروازها و مشخصات هواپیماهای آماده‌ی پرواز، نوع هواپیمای هر پرواز تعیین می‌شود. در چند مطالعه‌ی اخیر، این مسئله به‌صورت یک مسئله‌ی جریان در شبکه‌ی چندکالایی با متغیرهای صحیح مدل‌سازی و حل شده است. در این نوشتار با استفاده از روش جستجوی ابتکاری[1] (SA)[2] الگوریتمی برای حل مسئله ارائه شده و در حل چند مسئله‌ی نمونه به‌کار گرفته شده است. مقایسه‌ی نتایج الگوریتم پیشنهادی با نتایج نرم‌افزار بهینه‌سازی GAMS نشان می‌دهد که این الگوریتم به‌طور متوسط ۷ برابر سریع‌تر و ۲ برابر دقیق‌تر عمل می‌کند.

مقدمه

شرکت‌های هوایی از دیرباز برای پایین‌آوردن هزینه‌ها و ارائه‌ی خدماتی با قابلیت اطمینان بالا، به مقوله‌ی برنامه‌ریزی پرواز به‌عنوان یکی از ارکان کار خویش نگاه کرده‌اند. برنامه‌ریزی پرواز بخش عمده‌یی از فعالیت‌های یک شرکت هوایی را در بر می‌گیرد و معمولاً حاصل کار چند بخش مختلف است که فعالیت هر یک به‌طور موازی و هماهنگ با دیگر بخش‌ها صورت می‌گیرد. با گسترش عملیات پروازِ شرکت‌های هوایی، تصمیم‌گیری بهینه برای مسائل مطرح در برنامه‌ریزی پرواز بسیار دشوار می‌شود. از این رو سال‌هاست که حل این مسئله به‌کمک برنامه‌ریزی ریاضی مورد توجه تصمیم‌گیرندگان و محققین بوده است.[1]

به‌طور کلی در یک برنامه‌ی پرواز جامع، ابعاد مسئله‌ی بهینه‌سازی از نظر انواع محدودیت‌ها، توابع هدف و متغیرهای تصمیم‌گیری، بسیار بزرگ می‌شود. بدین علت معمولاً مسئله را به چند مسئله‌ی کوچک‌تر و مستقل تقسیم می‌کنند. عناوین اصلی این مسائل به‌شرح زیر است:[۲ و ۳]

۱. برآورد تقاضای پرواز
۲. زمان‌بندی پرواز
۳. تخصیص هواپیما به پرواز
۴. تخصیص دروازه‌ی پرواز به هواپیما
۵. تعیین مسیر پرواز
۶. برنامه‌ریزی خدمه‌ی پرواز
۷. برنامه‌ریزی نگه‌داری هواپیما

مطالعه‌ی حاضر به بررسی و حل مسئله‌ی تخصیص هواپیما به پرواز اختصاص یافته است. ابتدا به شرح یکی از مدل‌های موجود پرداخته و برای تطبیق بهتر با شرایط ایران اصلاح مختصری در آن صورت گرفته است. سپس به‌عنوان یک رویکرد نو در حل این مسئله، از روش جستجوی ابتکاریِ SA استفاده شده است. پس از طراحی و پیاده‌سازی روش با زبان ++C، چند مسئله‌ی نمونه برای بررسی کارایی این روش حل شده است.

تخصیص هواپیما به پرواز

در مسئله‌ی تخصیص هواپیما به پرواز، نوع هواپیمای هر پرواز به‌نحوی تعیین می‌شود که هزینه‌ی ناشی از انجام کل پروازها حداقل شود. مفروضات اصلی این مسئله به‌شرح زیرند:

۱. معلوم بودن زمان‌بندی پروازها، شامل زمان نشست و برخاست هر پرواز و مدت زمان آماده‌سازی هواپیمای فرود آمده برای برخاست بعدی؛
۲. معلوم بودن مشخصات ناوگان آماده‌ی پرواز مانند ظرفیت هواپیما (صندلی) و هزینه‌ی عملیات پرواز شامل هزینه‌ی سوخت، تعمیرات، خدمه و...؛
۳. مشخص بودن تقاضای سفر هوایی برای هر پرواز یا به‌صورت روزانه؛
۴. حذف محدودیت‌های مربوط به برنامه‌ی خدمه و تعمیرات هواپیما؛
۵. تکراری بودن دوره‌ی زمانی برنامه‌ریزی (در یک شبانه‌روز).

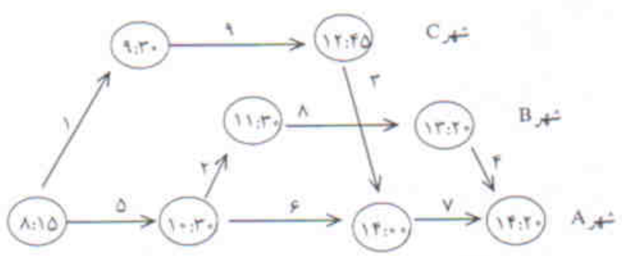
با وسیع شدن عملیات یک شرکت هواپیمایی، یعنی زیاد شدن تعداد شهرهای تحت پوشش و پروازهای روزانه آن، اتخاذ بهترین

تصمیم در تخصیص هواپیما به پرواز برای کارشناسان مشکل می‌شود. از این‌رو با پیشرفت چشمگیر فناوری رایانه‌یی در دهه‌ی اخیر، گرایش به سمت مدل‌سازی ریاضی و حل آن در ابعاد واقعی افزایش یافته است.

یکی از نخستین مطالعات چاپ شده، این مسئله را به‌عنوان مسئله‌ی تخصیص هواپیما مطرح و با استفاده از یک مدل اعداد صحیح بررسی و حل می‌کند.[۴] این درحالی‌است که عده‌یی دیگر از کارشناسان امر پرواز در خطوط هوایی دلتا، مسئله را به‌عنوان مسئله‌یی در مقیاس بسیار بزرگ شبیه‌سازی و حل می‌کنند.[۵] خطوط هوایی دلتا با عملیات بیش از ۲۵۰۰ پرواز در روز و حدود ۴۵۰ هواپیما، در سال ۱۹۹۴، از گسترده‌ترین مؤسسات در نوع خود بوده است. در سال ۱۹۹۵ نیز هین و همکارانش مسئله‌ی تخصیص هواپیما به پرواز را به‌عنوان یک مسئله‌ی جریان در شبکه‌ی چندکالایی به‌نحو مطلوبی مدل‌سازی می‌کنند.[۶] این عده با ارائه‌ی مدلی مرکب از متغیرهای صحیح و حقیقی (MIP)، سه روش مختلف برای حل مسئله به‌کار می‌گیرند. پس از آنان جمعی از محققین مؤسسه‌ی تکنولوژی جورجیا، محدودیت برنامه‌ی تعمیر هواپیما و محدودیت پرواز خدمه را به آن مطالعه می‌افزایند.[۷]

از جمله مطالعات تکمیلی انجام شده پیرامون مسئله‌ی تخصیص هواپیما، می‌توان به مقاله‌ی گو (۱۹۹۴)[۸] و کلاینسویچ (۱۹۹۵)[۹] اشاره کرد. مقاله‌ی اول به بررسی برخی خواص و ویژگی‌های محاسباتی مسئله می‌پردازد و مقاله‌ی دوم امکان وارد کردن استثنائات یک برنامه‌ی پرواز را به مسئله‌ی تخصیص هواپیما فراهم می‌کند. در ادامه‌ی روند بهبود مسئله‌ی تخصیص هواپیما در سال ۲۰۰۰، امکان تصحیح زمانبندی پروازها به مدل هین اضافه شد.[۱۰]

در این بخش از مقاله، مدل مورد استفاده در این تحقیق که از مقاله‌ی هین اقتباس شده است ارائه می‌شود. این مدل به‌صورت مسئله‌ی جریان در شبکه‌ی چندکالاییِ گسترده در زمان[۳] بیان می‌شود. کالاهای مختلف همان انواع هواپیما هستند و گسترده در زمان بودن شبکه بدان سبب است که اساس تشکیل گره‌ها بر زمان نشست و برخاست در هر فرودگاه قرار دارد. به‌دلیل متفاوت بودن زمان آماده‌سازی و سرعت هواپیماها، هر نوع هواپیما می‌تواند شبکه‌ی متفاوتی داشته باشد. شبکه دارای دو نوع کمان است: کمان‌های پرواز و کمان‌های زمینی. در شکل ۱ مثال ساده‌یی از یک شبکه‌ی پرواز با یک نوع هواپیما نشان داده شده است. این شبکه‌ی کوچک دارای سه شهر A، B و C با چهار پرواز است. برای هر شهر یک محور زمان در نظر گرفته شده که گره‌ها بر روی آن قرار دارند. کمان‌های ۱، ۲، ۳



شکل ۱. شبکه‌ی پرواز با یک نوع هواپیما.

و ۴ از نوع پروازی و کمان‌های ۵، ۶، ۷، ۸، ۹ از نوع زمینی هستند.

علائم مورد استفاده در مدل به‌شرح زیر تعریف می‌شوند:

C = مجموعه‌ی فرودگاه‌ها (شهرها)؛

F = مجموعه‌ی انواع ناوگان آماده‌ی پرواز؛

$S(f)$ = تعداد هواپیمای نوع f، $f \in F$؛

L = مجموعه‌ی پروازها در برنامه‌ی زمان‌بندی شده. اعضاء مجموعه به‌صورت {i} یا {odt} نشان داده می‌شوند که در آن o معرف شهر مبدأ، d معرف شهر مقصد و t معرف زمان است؛

$O(f)$ = زیرمجموعه‌یی از کمان‌های پرواز شبکه‌ی هواپیمای نوع f که تا پایان دوره‌ی زمانی (یک شبانه‌روز) هنوز به مقصد نرسیده‌اند؛

H = مجموعه‌پروازهای زنجیره‌وار (برخی از پروازها که باید توسط یک هواپیما انجام شوند)؛

c_{fi} = هزینه‌ی تخصیص هواپیمای نوع f به پرواز i ؛

N = مجموعه‌ی گره‌های شبکه با اعضاء {fot} که در آن f معرف نوع هواپیما، o معرف یک شهر و t معرف زمان است که ممکن است مربوط به زمان فرود در o یا زمان برخاست از آن باشد.

گاهی اوقات شرایط ایجاب می‌کند که در یک پرواز، توقفی در مسیر وجود داشته باشد. این شرایط توسط مجموعه‌ی H و محدودیت مربوطه‌اش در نظر گرفته می‌شود.

متغیرهای تصمیم‌گیری مدل به شرح زیر تعریف می‌شوند:

x_{fi} یا x_{fodt} = متغیرهای دوتایی پرواز؛ در صورتی که از هواپیمای نوع f در پرواز زمان t از شهر o به d استفاده شود، این متغیر برابر یک و درغیر این‌صورت برابر صفر خواهد بود.

y_{fott^+} = متغیرهای حقیقی کمان‌های زمینی. این متغیر نشان‌دهنده‌ی تعداد هواپیمای نوع f روی زمین در شهر o است که بین گره زمانی t و گره بعدیش، t^+، قرار دارد.

هین مسئله‌ی تخصیص هواپیما به پرواز را به‌صورت مدل ریاضی زیر بیان می‌کند:

$$\text{Min} \sum_{i\in L} \sum_{f\in F} c_{fi} \cdot x_{fi}$$

$$\text{s.t} \sum_{f} x_{fi} = 1 \qquad \forall i \in L \qquad (۱)$$

$$\sum_{d} x_{fodt} + y_{fott^{+}} = y_{fot^{-}t} + \sum_{d} x_{fdot} \qquad \forall \{fot\} \in N \quad (۲)$$

$$\sum_{i\in o(f)} x_{fi} + \sum_{o\in C} y_{fot_n t_1} \le S(f) \qquad \forall f \in F \qquad (۳)$$

$$x_{fi} - x_{fj} = 0 \qquad \forall (i, j) \in H ,\ f \in F \qquad (۴)$$

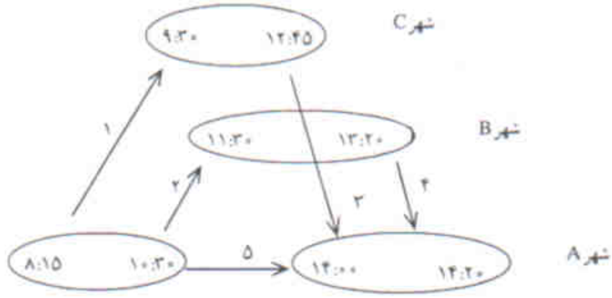
$$y_{fott^{+}} \ge 0 \qquad \forall \{fot\} \in N \qquad (۵)$$

$$x_{fi} \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in L ,\ f \in F \qquad (۶)$$

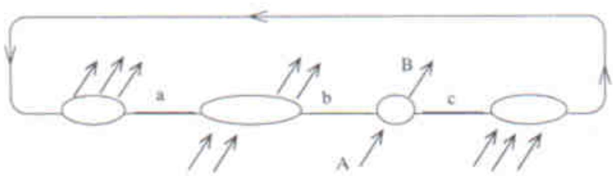
محدودیت اول تعیین می‌کند که پس از حل مدل، فقط یک نوع هواپیما به هر پرواز {odt} اختصاص یابد. محدودیت دوم تعادل جریان را در گره‌های شبکه برقرار می‌کند. محدودیت سوم نیز اندازه‌ی ناوگان هر نوع هواپیما را کنترل می‌کند ($fot_n t_1$ شاخص کمان زمینی است که در فرودگاه O آخرین گره را به اولین گره وصل می‌کند). تعداد هواپیمای استفاده شده از هر نوع، با جمع کردن هواپیماهای روی زمین و هواپیماهای در حال پرواز در انتهای هر دوره‌ی زمانی، به دست می‌آید. محدودیت چهارم نیز برای پروازهای زنجیره‌وار اعمال شده است. لازم به ذکر است که در این مدل نیازی به صحیح فرض کردن متغیرهای y نیست زیرا با برقرار شدن محدودیت دوم و صحیح بودن مقادیر x، yها نیز خودبه‌خود صحیح خواهند شد.

برای آنکه ابعاد مسئله کاهش یابد، می‌توان از یک ایده‌ی همفزون‌سازی برای گره‌های شبکه استفاده کرد. شکل ۲ گره‌های جدید را پس از همفزونی گره‌های شکل ۱ نشان می‌دهد. چنانچه ملاحظه می‌شود تعداد گره‌های شبکه از ۸ عدد به ۴ عدد و تعداد کمان‌های زمینی از ۵ عدد به ۱ عدد رسیده است. قاعده‌ی کلی این همفزون‌سازی چنین است که در هر شهر می‌توان تمامی برخاست‌های پیاپی را که پس از نشست‌های پیاپی رخ می‌دهند، در یک گره جای داد.[۶]

در مسائل مختلف بسته به شکل شبکه‌ی پرواز، ساده‌سازی‌های دیگری نیز امکان‌پذیر است. برای مثال وقتی شبکه به‌صورت شعاعی[۴] است، در فرودگاه‌های فرعی معمولاً تعداد نشست‌ها با تعداد برخاست‌هایی که بلافاصله پس از آنها صورت می‌گیرند برابر است. در چنین مواردی می‌توان برخی از کمان‌های زمینی آن فرودگاه را حذف کرد. این کار را اصطلاحاً «ایجاد جزیره» می‌نامند، زیرا با



شکل ۲. شبکه‌ی پرواز با یک نوع هواپیما پس از همفزون‌سازی.



شکل ۳. شبکه‌ی پرواز به صورت جزیره.

حذف تعدادی از کمان‌های زمینی گره‌های مربوط به آنها به جزایری مستقل در شبکه‌ی پرواز تبدیل می‌شوند. مثلاً در شکل ۳ می‌توان کمان‌های a و b و c را حذف کرد و مسئله را به‌لحاظ تعداد متغیرهای حقیقی و صحیح کوچک‌تر نمود. آنگاه هواپیمای تخصیص یافته به دو پرواز A و B از یک نوع خواهد بود.

هزینه‌ی عملیات با یک نوع هواپیمای خاص معمولاً مواردی چون سوخت، حقوق خدمه، تعمیرات، عوامل فرودگاهی و عوامل فروش بلیط و استهلاک سرمایه‌ی خرید هواپیما یا قیمت اجاره‌ی آن را شامل می‌شود. در این خصوص، مطالعاتی بر انواع هزینه‌های مرتبط با پرواز انجام گرفته است. نوع دیگری از هزینه نیز به‌نام «هزینه‌ی مسافر از دست رفته[۵]» وجود دارد که وقتی ظرفیت هواپیما کم‌تر از تعداد متقاضیان باشد به وجود می‌آید.[۱۱] یکی از نکات موجود در محاسبه‌ی هزینه‌های مسافرین از دست رفته، ثابت نبودن تقاضای یک پرواز است. در یکی از بررسی‌ها انجام شده، برای لحاظ کردن این مسئله، تقاضا را به‌صورت تابعی با توزیع نرمال که میانگین و انحراف معیار آن از مشاهدات گذشته به دست می‌آید، منظور کرده‌اند.[۵] در این‌صورت با فرض آنکه این تابع یک تابع توزیع محدود شده نباشد (حداقل و حداکثر آن به‌ترتیب منها و مثبت بی‌نهایت باشد)، برای هر نوع هواپیما می‌توان هزینه‌ی مسافر از دست رفته را چنین محاسبه کرد:

$$\text{Spill Cost}_{fi} = (\text{price}_i) \cdot \int_{\text{capacity}_f}^{\infty} f(\mu_i, \sigma_i, x) \cdot (x - \text{cap}_f) \cdot dx$$

تغییر درمدل مسئله

در مدل ارائه شده، برای محاسبه‌ی ضرایب c_{fi} لازم است مقدار تقاضا برای هر پرواز معلوم باشد. تقاضای یک پرواز معمولاً زمانی قابل برآورد است که رقابت کافی میان شرکت‌های هوایی وجود داشته باشد. در این صورت، برای مسافرین تعدد انتخاب پرواز به‌وجود می‌آید، و آنان مناسب‌ترین ساعت را برای خویش انتخاب می‌کنند. آنگاه می‌توان با استفاده از مشاهدات گذشته، برآورد خوبی از تقاضای هر پرواز به دست آورد. حال در کشورهایی چون کشور ما، که عرضه‌ی حمل و نقل هوایی محدود است، برآورد تقاضا به‌طور روزانه و بلکه چندروزه، از دقت بیشتری نسبت به برآورد تقاضای هر پرواز برخوردار است. در این حالت نمی‌توان از مدل‌هایی که تاکنون مورد بحث قرار گرفته‌اند استفاده کرد.

یک روش برای در نظرگیری تقاضای روزانه در مدل تخصیص هواپیما این است که به‌جای محاسبه‌ی هزینه‌ی از دست دادن مسافر برای هر پرواز، این هزینه را برای هر گروه از پروازهای موازی (پروازهای میان یک زوج مبدأ ـ مقصد) محاسبه کرد. بدین ترتیب می‌توان تابع هدف اصلی را به‌صورت زیر نوشت:

$$\text{Min} \sum_i \sum_f oc_{fi} \cdot x_{fi} + \sum_m p_m \cdot \max\left\{d_m - \sum_{i \in L(m)} \sum_f cap_f \cdot x_{fi}, \cdot\right\}$$

m = اندیس زوج‌های مبدأـ مقصد از مجموعه‌ی M،

$L(m)$ = مجموعه پروازهای بین زوج مبدأ ـ مقصد m،

p_m = قیمت بلیط بین زوج مبدأ ـ مقصد m،

d_m = تقاضای پیش‌بینی شده بین زوج مبدأ ـ مقصد m،

oc_{fi} = هزینه‌ی عملیاتی انجام پرواز i با نوع f،

cap_f = تعداد صندلی قابل فروش از هواپیمای نوع f.

برای خطی کردن تابع هدف، یک متغیر جدید به مسئله اضافه می‌شود و بخش هزینه‌ی مسافر از دست رفته به محدودیت‌های مدل انتقال می‌یابد:

$$\text{Min} \sum_i \sum_f oc_{fi} \cdot x_{fi} + \sum_m p_m \cdot spill_m$$

$$spill_m \geq d_m - \sum_{i \in L(m)} \sum_f cap_f \cdot x_{fi}$$

$$spill_m \geq \cdot$$

که در آن:

$spill_m$ عبارت است از تعداد مسافر از دست رفته در پروازهای بین زوج مبدأ ـ مقصد m.

چنان‌که بیان شد، مسئله‌ی تخصیص هواپیما به پرواز پس از تعیین نتایج برآورد تقاضا و زمان‌بندی پرواز بررسی می‌شود. در شرایطی که برنامه‌ریزی پرواز برای یک شرکت هوایی کوچک یا متوسط انجام می‌شود ومقادیر تقاضا به‌طور روزانه در دست است، می‌توان این چند مسئله را به‌طور همزمان حل کرد. بدین منظور لازم است ابتدا یک زمان‌بندی اولیه، با تعداد زیاد پرواز اما در زمان‌های مناسب از نظر تقاضا، طراحی شود. آنگاه با توجه به تقاضای میان شهرها، ظرفیت ناوگان و هزینه‌ی عملیات، مدل ریاضی اصلاح شده بهترین مقادیر مربوط به تعداد پروازها، زمان انجام پروازها و نوع هواپیمای آنها را به دست می‌دهد. برای اصلاح مدل ریاضی کافی است محدودیت اول به محدودیت جدید زیر تغییر کند:

$$\sum_f x_{fi} \leq ۱$$

این محدودیت جدید، الزام انجام همه‌ی پروازها را از مدل برمی‌دارد و امکان انتخاب پروازهای مناسب برای جابه‌جایی تقاضا را به وجود می‌آورد.

الگوریتم SA برای حل مسئله‌ی تخصیص هواپیما

الگوریتم SA از جمله روش‌های جستجوی ابتکاری است که از ایده‌ی رسیدن به پائین‌ترین سطح انرژی در عملیات حرارتی مواد استفاده می‌کند. در سال‌های اخیر این الگوریتم کاربردهای زیادی در حل مسئله بهینه‌سازی پیدا کرده است[۱۲]. از جمله در حل مسئله‌ی مکان‌یابی پایانه‌های اتوبوس‌رانی.[۱۳] در روش‌های جستجوی ساده با داشتن یک جواب امکان‌پذیر، جواب دیگری در همسایگی آن تولید می‌شود و چنانچه جواب جدید تابع هدف بهتری داشته باشد، انتخاب می‌گردد. این روند آنقدر ادامه می‌یابد تا دیگر امکان بهبود جواب وجود نداشته باشد. در الگوریتم SA در صورتی‌که تابع هدفِ جواب جدید بدتر از جواب قبلی باشد، جواب جدید با احتمالی خاص مورد قبول واقع می‌شود. این امر کمک می‌کند تا الگوریتم کمتر در جواب‌های بهینه‌ی محلی متوقف شود. تابع احتمال به‌گونه‌یی است که هر چه جواب جدید بدتر باشد، احتمال قبول آن کمتر است. الگوریتم SA هر چه به جواب بهینه نزدیک‌تر شود، احتمال پذیرش جواب‌های بدتر کاهش می‌یابد. گام‌های این الگوریتم برای حل مسائل کمینه‌سازی به شکل زیر است:

گام ۰. دمای اولیه $T_\cdot$ و جواب اولیه $x_\cdot$ را انتخاب کنید.

گام ۱. جواب امکان‌پذیر x_{i+1} در همسایگی x_i را انتخاب کرده، $C(x_i)$ را محاسبه کنید.

گام ۲. اگر $C(x_{i+1})<C(x_i)$ آنگاه $x_i \leftarrow x_{i+1}$ و به گام ۳ بروید. اگر

$C(x_{i+1}) > C(x_i)$ آنگاه با احتمال $p=\exp\left[\frac{C(x_{i+1})-C(x_i)}{T}\right]$ قرار دهید: $x_i \leftarrow x_{i+1}$،

گام ۳. اگر شرط توقف صدق می‌کند، الگوریتم را پایان داده، بهترین جواب یافته شده را ارائه کنید. در غیر این صورت به گام ۴ بروید.

گام ۴. با استفاده از تابع کاهش دما قرار دهید $T \leftarrow f(T)$ و به گـام ۱ بازگردید.

گام اصلی الگوریتم SA مربوط به حرکت از یک جواب به جواب همسایه‌ی آن می‌شود. بنابرایـن پس از تـولید جـواب اولیـه، بـاید به‌راحتی بتوان یک جواب امکان‌پذیر در همسایگی آن پیدا کرد. در ادامه، روش پیاده‌سازی این گام الگوریتم بـرای مسأله‌ی تـخصیص هواپیما تبیین می‌گردد.

تعاریف

کمان پرواز: کمانی که از یک شهر شروع و به شهر دیگر ختم می‌شود، و زمان مربوط به گره انتهایی آن بعد از زمان مربوط به گره ابتدایی آن است.

کمان زمینی: کمانی که دو گره متوالی در یک شهر را به یکدیگر متصل می‌کند.

کمان شبانه: نوعی کمان زمینی برای هر شهر کـه ابـتدا و انـتهای آن به‌ترتیب بر آخرین و اولین گره‌های آن شهر قرار دارد.

زنجیره‌ی پرواز: دنباله‌یی از کمان‌های شبکه‌ی پرواز کـه یک نـوع هواپیما بر روی همگی آنها وجود دارد.

حلقه: یک زنجیره‌ی پرواز که گره ابتدایی اولین کمان آن همان گـره انتهایی آخرین کمان آن است.

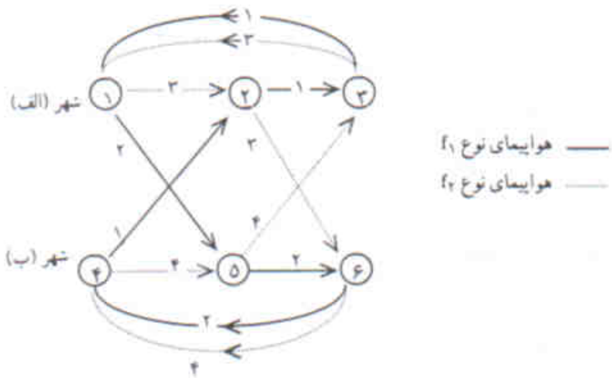
خواص شبکه‌ی پرواز

۱. شبکه‌ی پرواز بدون کـمان‌های شـبانه، یک شـبکه‌ی بـدون دور (acyclic) است. زیرا برای هر کمان شبکه، زمان مربوط بـه گـره انتهایی آن، بعد از زمان مربوط به گره ابتدایـی قـرار دارد (شـبکه گسترده در زمان است).

۲. هر حلقه در شبکه‌ی پرواز شامل حداقل یک کمان شبانه را شامل می‌شود.

خاصیت جواب امکان‌پذیر

با توجه به آنکه معادلات توازن جریان در گره‌های شبکه‌ی پـرواز، برای هر نوع هواپیما برقرار است؛ هر جواب امکان‌پذیر این خاصیت را دارد که برای هر هواپیما از نوع f حتماً یک حلقه در شبکه وجود دارد. به‌طوری‌که کلیه‌ی کمان‌های پرواز آن حلقه با هواپیمای نوع f



شکل ۴. شبکه‌یی با دوشهر، دو هواپیما از نوع f_1 و دو هواپیما از نوع f_2.

انـجام مـی‌شود ($x_{fi} = 1$) و بـر روی کـلیه‌ی کـمان‌های زمـینی آن، حداقل یک هواپیما از نوع f وجود دارد ($y_{fi} \geq 1$).

با استفاده از خواص بالا می‌توان نتیجه گرفت که در هر جـواب امکان‌پذیر، برای هر هواپیمای نوع f یک حلقه با حداقل یک کـمان شبانه وجود دارد. البته این حلقه می‌تواند بیش از یک کـمان شـبانه داشته باشد. به طور مثال در شکل ۴، شبکه‌یی با دو شهر، دو هواپیما از نوع f_1 و دو هواپیما از نوع f_2 وجود دارد که هواپیماهای شماره‌ی ۱ و ۲ از نوع f_1 و هواپیماهای شماره ۳ و ۴ از نوع f_2 هستند. مشاهده می‌شود که دنباله‌ی گره‌های ۱-۳-۲-۴-۶-۵-۱ یک حلقه بـرای هواپیمای نوع f_1 است که شامل دو کمان شبانه می‌شود. نکته‌ی قابل ذکر در شکل ۴ آن است که هر یک از ۴ هواپیما باید یک شب در شهر (الف) و شب بـعد در شـهر (ب) مستقر شـوند. مـعمولاً ایـن نـوع برنامه‌ریزی برای شرکت‌های کوچک یا متوسط مناسب نیست. زیرا امکانات این‌گونه شـرکت‌ها، مـحدود بـه شـهرهای خـاصی است و خدمه‌ی یک هواپیما باید در آخر شب به آنجا (معمولاً محل سکونت) بازگردانده شوند. بدین ترتیب برای جلوگیری از به‌وجود آمدن جوابی از نوع بالا، و از آنجا که در این تحقیق مسئله مورد بررسی در ارتباط با یک شرکت متوسط است فرض زیر اتخاذ می‌شود:

فرض: هر نوع هواپیما شب را فقط در یک فرودگاه مشخص می‌تواند بگذراند.

با این فرض، در هر جواب امکان‌پذیر، برای هر هواپیما از نوع f یک حلقه در شبکه وجود خواهد داشت که تنها دارای یک کمان شبانه باشد (در این حلقه گره تکراری وجود نخواهـد داشت). بـه عـبارت دیگر، طبق این فرض تعداد هواپیماهایی که از هر نوع، بر روی کمان شبانه‌ی هر شهر قرار دارد معلوم فرض شـده است. در نـتیجه بـرای حالتی که یک نوع هواپیما بتواند بر کمان شبانه‌ی چند شهر قرار گیرد، اولاً تعداد این نوع هواپیما بـرای هـر یک از شـهرها مـعلوم فـرض می‌شود، و ثانیاً این نوع هواپیما باید به‌صورت چند نوع مختلف (به

تعداد شهرهایی که بر کمان شبانه‌ی آنها قرار می‌گیرد) و با مشخصات یکسان در نظر گرفته شود.

پیدا کردن حلقه

فرض کنید یک جواب امکان‌پذیر در دست است. می‌خواهیم برای پرواز a که از هواپیمای نوع f استفاده می‌کند، یک حلقه پیدا کنیم. بدین منظور هر بار یکی از کمان‌های خروجی از گره انتهایی کمان a را که از هواپیمای نوع f استفاده می‌کند انتخاب می‌کنیم. این عمل را برای کمان جدید ادامه می‌دهیم تا به گره ابتدایی کمان a برسیم.

بدین ترتیب می‌توان الگوریتم زیر را برای یافتن جواب همسایه ارائه کرد:

الگوریتم مقدماتی یافتن جواب همسایه

گام ۱. کمان a_1 را به‌طور تصادفی از مجموعه کمان‌های شبکه انتخاب کنید:
اگر a_1 کمان پرواز است، نوع هواپیمای تخصیص یافته به آن‌را f_1 بنامید.
و اگر a_1 کمان زمینی است از میان انواع هواپیماهای مستقر بر آن، یک نوع را به‌طور تصادفی انتخاب و آن‌را f_1 بنامید (اگر هیچ نوعی وجود ندارد به ابتدای گام ۱ بازگردید).

گام ۲. در جواب امکان‌پذیر فعلی، برای کمان a_1 حلقه‌یی پیدا کنید که از هواپیمای نوع f_1 استفاده کند. این حلقه را c_1 بنامید.

گام ۳. گام‌های ۱ و ۲ را برای انتخاب کمان a_2، هواپیمای نوع f_2 و حلقه‌ی c_2 به‌نحوی که $f_1 \neq f_2$ باشد تکرار کنید.

گام ۴. دو نوع هواپیمای اختصاص‌یافته به حلقه‌های c_1، c_2 را با یکدیگر جابه‌جا کنید.

اگر چه با استفاده از این الگوریتم به‌سادگی می‌توان از هر جواب امکان‌پذیر به جواب امکان‌پذیر دیگر حرکت کرد، ممکن است نتوان به تمام جواب‌های امکان‌پذیر همسایه دسترسی پیدا کرد. مثلاً، دو جواب امکان‌پذیر در شکل ۵ را برای یک شبکه‌ی پرواز ساده با دو هواپیما از نوع f_1 و f_2 در نظر بگیرید.

با توجه به شکل ۵ به‌سادگی مشاهده می‌شود که جواب امکان‌پذیر (الف) دارای دو حلقه‌ی ۱-۳-۲-۴-۱ و ۱-۳-۵-۲-۱ است و با جابه‌جایی هواپیماهای این دو حلقه هیچگاه نمی‌توان به جواب امکان‌پذیر (ب) رسید. در واقع برای دست‌یابی به جواب (ب) باید نوع هواپیماهای دو زنجیره‌ی ۳-۲ و ۳-۵-۲ را جابه‌جا کرد.

راه حل این مشکل و امکان دسترسی به تمام جواب‌های امکان‌پذیر این است که به‌جای جابه‌جایی هواپیماها در تمامی کمان‌های دو حلقه، این جابه‌جایی فقط در زنجیره‌هایی از دو حلقه صورت گیرد. حال برای امکان‌پذیر بودن جواب جدید، زنجیره‌هایی از دو حلقه انتخاب می‌شوند که ابتدا و انتهای یکسان داشته باشند. در نهایت، الگوریتم یافتن جواب همسایه به‌صورت زیر ارائه می‌شود.

الگوریتم یافتن جواب همسایه

گام ۰. یک جواب اولیه در نظر بگیرید.

گام ۱. کمان a_1 را به‌طور تصادفی از مجموعه کمان‌های شبکه انتخاب کنید.
اگر a_1 کمان پرواز است، نوع هواپیمای تخصیص یافته به آن را f_1 بنامید.
و اگر a_1 کمان زمینی است، از میان انواع هواپیماهای مستقر بر آن یکی را به‌طور تصادفی انتخاب و آن‌را f_1 بنامید (چنانچه هیچ هواپیمایی بر روی آن نیست به ابتدای گام ۱ بازگردید).

گام ۲. در جواب امکان‌پذیر فعلی، برای کمان a_1 یک حلقه پیدا کنید که از هواپیمای نوع f_1 استفاده کند و آن‌را c_1 بنامید.

گام ۳. گام ۱ و ۲ را برای انتخاب کمان a_2، هواپیمای نوع f_2 و حلقه‌ی c_2 به‌نحوی که $f_1 \neq f_2$ باشد تکرار کنید.

گام ۴. فرض کنید گره‌های حلقه‌ی c_1 عبارت‌اند از $i_1, i_2, \ldots, i_n, i_1$ و گره‌های حلقه‌ی c_2 عبارت‌اند از $j_1, j_2, \ldots, j_m, j_1$. گره‌های مشترک دو حلقه را پیدا کرده و در مجموعه‌یی به‌صورت $k_1, k_2, \ldots, k_t$ نگه‌دارید. از میان اعضاء این مجموعه دو عضو را به‌طور تصادفی انتخاب کنید و آنها را k_e و k_s بنامید (از نظر زمانی k_s جلوتر از k_e قرار دارد).

شکل ۵. دوجواب امکان‌پذیر برای یک شبکه پرواز ساده با دونوع هواپیمای f_1 و f_2.

گام ۵. برای کمان‌هایی از دو حلقه که بین دو گره k_s، k_e قرار دارند نوع f_1 و نوع f_2 را جابه‌جا کنید.

جواب اولیه توسط خود الگوریتم قابل تولید است. بدین منظور، ابتدا به همه‌ی پروازها یک نوع مجازی با هزینه‌ی بسیار زیاد تخصیص داده می‌شود. آنگاه طی یک اجرای اولیه به الگوریتم فرصت کافی برای جایگزین ساختن کل ناوگان مجازی با ناوگان حقیقی داده می‌شود.

حل چند مسئله‌ی نمونه

در این تحقیق مسئله‌ی تخصیص هواپیما به پروازهای داخلی شرکت هواپیمایی ایران‌ایر مورد بررسی و حل قرار گرفته است. اطلاعات مورد استفاده مربوط به برنامه‌ی زمان‌بندی در روزهای دوشنبه بوده و از دفترچه‌ی تابستانی سال ۲۰۰۰ ایران‌ایر استخراج شده است. برای حل مسئله از دو روش شاخه و کرانه، و جستجوی ابتکاری SA استفاده شده است. برای به‌کارگیری الگوریتم SA برنامه‌یی به زبان C++ نوشته شده و برای روش شاخه و کرانه از نرم‌افزار GAMS۲/۲۵ استفاده شده است. کلیه‌ی برنامه‌ها بر روی یک رایانه‌ی شخصی مدل ۴۸۶DXV-۱۳۳ اجرا شده است.

برنامه‌ی پرواز روزهای دوشنبه‌ی شرکت هواپیمایی ایران ایر، ۸۰ پرواز بین ۱۷ شهر را شامل می‌شود که مجموعاً ۳۸ زوج مبدأ ـ مقصد را پدید می‌آورد. برای عملیات این برنامه از ۱۱ هواپیما در ۶ نوع مختلف استفاده می‌شود. دوره‌ی برنامه‌ریزی این پروازها یک شبانه‌روز است و به‌دلیل محدودیت پرواز در شب هیچ پروازی پس از نیمه شب انجام نمی‌شود. کلیه‌ی هواپیماها باید شب را در تهران بگذرانند و لذا هیچ شهر دیگری دارای کمان شبانه نیست. فرض شده است همه‌ی شهرها امکان پذیرش هر نوع هواپیما را دارند و مدت زمان آماده‌سازی هر هواپیما ۳۰ دقیقه است. شبکه‌ی ساخته شده دارای ۸۰کمان پرواز، ۴۴کمان زمینی و ۶۰گره همفزون شده است و حداقل با ۱۰ هواپیما قابل انجام است.

برای حل مسئله، لازم است مقادیر ضرایب c_{fi} در تابع هدف مدل محاسبه شوند. از آنجا که عرضه‌ی حمل و نقل هوایی در کشور ما کم‌تر از تقاضا به‌نظر می‌رسد، تقاضای هر پرواز بیش از ظرفیت بزرگ‌ترین هواپیمای موجود فرض می‌شود. برای واقعی‌تر شدن این فرض، بزرگ‌ترین ضریب پری مشاهده شده برای هر پرواز در تعیین تقاضا تأثیر داده می‌شود. در نتیجه هزینه‌ی تخصیص هواپیمای نوع f به پرواز iبه‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$c_{fi}=FT_i \,.\, OC_f - LF_i^{max} \,.\, P_i \,.\, CAP_f$$

که در آن،

FT_i = مدت زمان پرواز i، بر حسب ساعت؛

OC_f = هزینه‌ی یک ساعت عملیات با هواپیمای نوع f؛

LF_i^{max} = بزرگ‌ترین ضریب پری مشاهده شده در پرواز i؛

P_i = قیمت بلیط پرواز i؛

CAP_f = ظرفیت هواپیمای نوع f.

مدل ساخته شده، یک مسئله‌ی بهینه‌سازی خطی از نوع MIP است. این مسئله ۲۶۴ متغیر حقیقی، ۴۸۰ متغیر دوتایی، ۴۴۷ محدودیت و در مجموع ۲۴۵۵ عنصر غیر صفر در ماتریس ضرایب، دارد. پارامترهای الگوریتم SA که در حل مسئله استفاده شده‌اند عبارت‌اند از: دمای اولیه ۰/۸، دمای انتهایی ۰/۰۰۳، تعداد گام کاهش دما ۱۶، ضریب کاهنده‌ی دما ۰/۷ و تعداد ثابت تکرار در هر دما ۱۵۰۰. حل مسئله از هر دو روش به تابع هدف ۳۸۹۸۶ـ می‌رسد، تعداد هواپیمای استفاده شده در جواب نهایی هر دو روش ۱۰ عدد از کل ۱۱ عدد موجود است. زمان حل مسئله با نرم‌افزار GAMS حدود ۱۵ ثانیه، و با الگوریتم SA حدود ۴۵ ثانیه است. شایان ذکر است که در این مثال ساده نرم‌افزار GAMS با حل LP مسئله به جواب بهینه می‌رسد و به همین دلیل زمان حل مسئله بسیار کم است.

به‌عنوان یک مثال دیگر، مسئله‌ی تخصیص هواپیما برای شرکت هواپیمایی ایران ایر با تقاضای روزانه حل شده است. از آنجا که در زمینه‌ی تقاضای حمل و نقل هوایی مطالعه‌یی مشاهده نشده است، معمولاً تقاضای روزانه‌ی سفر هوایی بین شهرها برابر تعداد مسافر جابه‌جا شده فرض می‌شود. طبیعتاً این فرض باعث می‌شود بخش هزینه‌ی مسافر از دست رفته نسبت به هزینه‌ی عملیات پرواز کوچک شود. از طرف دیگر به‌نظر می‌رسد زمانی که رقابت مناسبی میان شرکت‌های هوایی وجود داشته باشد و همچنین قیمت بلیط هواپیما با هزینه‌های عملیات پرواز تناسب پیدا کند، مقادیر دو هزینه‌ی مذکور هم‌مرتبه باشند. از این رو برای نزدیک شدن به یک مسئله‌ی واقعی و بررسی کارایی دو روش شاخه و کرانه، و جستجوی ابتکاری SA، مسئله برای مقادیر مختلف تقاضا حل شده است. این مقادیر از ضرب ضرایب ثابتی در تعداد مسافر جابه‌جا شده به‌دست می‌آید.

جدول ۱ نتایج حل مسئله با نرم‌افزار GAMS و الگوریتم SA را برای مقادیر مختلف افزایش تقاضا نشان می‌دهد. شرط توقف برنامه‌ی GAMS، خطای نسبی ۲٪ یا زمان ۱ ساعت است و حافظه‌ی لازم برای جستجوی تمام درخت شمارش دراختیار آن گذاشته شده است. همچنین پارامترهای روش SA چنین بوده‌اند: دمای اولیه ۰/۰۱، دمای نهایی ۰/۰۰۰۰۱۵، ضریب کاهش دما ۰/۶۵، ۱۶گام برای کاهش دما و ۲۰۰۰ تکرار در هر دما.

برای دو حالت افزایش ۴۰٪ و ۶۰٪ تقاضا در جدول ۱، برنامه‌ی

جدول ۱. نتایج حل مسئله‌ی ایران‌ایر برای مقادیر مختلف افزایش تقاضای روزانه.

الگوریتم SA			نرم‌افزار GAMS				
زمان (دقیقه)	حداکثرخطای نسبی از حد پایینی GAMS(٪)	بهترین جواب	زمان (دقیقه)	حداکثر خطای نسبی (٪)	بهترین جواب	بزرگترین حد پایینی	افزایش تقاضا (٪)
۵	۱/۱	۱۲۹۷	۶	۱/۱	۱۲۹۸	۱۲۸۳	۰
۵	۱/۳	۱۳۳۷	۴	۱/۸	۱۳۴۳	۱۳۲۰	۱۰
۵	۱/۲	۱۴۱۴	۶۰	۵/۲	۱۴۷۰	۱۳۹۷	۲۰
۵	۱/۰	۱۶۴۹	۶۰	۳/۹	۱۶۹۵	۱۶۳۲	۴۰
۵	۱/۱	۱۹۵۴	۶۰	۲/۹	۱۹۸۹	۱۹۳۳	۶۰
۵	۱/۰	۲۲۶۲	۳	۱/۹	۲۲۸۳	۲۲۴۰	۸۰
۵	۰/۵	۲۵۶۶	۲	۰/۵	۲۵۶۶	۲۵۵۴	۱۰۰

جدول ۲. نتایج حل مسئله‌ی ترکیب شده ایران‌ایر و ایران‌ایرتور برای مقادیر افزایش تقاضای روزانه.

الگوریتم SA			نرم‌افزار GAMS				
زمان (دقیقه)	حداکثرخطای نسبی از حد پایینی (GAMS٪)	بهترین جواب	زمان (دقیقه)	حداکثر خطای نسبی (٪)	بهترین جواب	بزرگترین حد پایینی	افزایش تقاضا (٪)
۷	۰/۳	۳۹۶۲	۳۲	۰/۲	۳۹۵۸	۳۹۵۰	۰
۷	۰/۴	۳۹۷۵	۶۰	۱/۴	۴۰۱۷	۳۹۶۱	۱۰
۷	۰/۶	۴۰۲۳	۴۳	۰/۸	۴۰۳۰	۳۹۹۹	۲۰
۷	۰/۴	۴۱۱۷	۶۲	۱/۳	۴۱۵۳	۴۰۱۰	۳۰
۷	۰/۹	۴۳۰۲	۱۲۰	-	جواب صحیح به دست نیامد	۴۲۶۴	۴۰
۷	۰/۴	۴۴۲۵	۵۵	۰/۵	۴۴۲۹	۴۴۰۶	۵۰
۷	۰/۹	۴۶۱۷	۱۲۰	۲/۶	۴۶۹۴	۴۵۷۶	۶۰
۷	۰/۷	۴۷۸۶	۳۲	۰/۷	۴۷۸۴	۴۷۵۰	۷۰
۷	۰/۴	۴۹۴۷	۴۱	۰/۸	۴۹۶۸	۴۹۲۹	۸۰
۷	۰/۵	۵۳۱۵	۳۷	۰/۷	۵۳۲۵	۵۲۸۹	۱۰۰

GAMS با سقف زمانی ۳/۵ ساعت اجرا شد. در این دو حالت، پس از اتمام کل مدت ۳/۵ ساعت تنها ۰/۱ کاهش در حداکثر خطای نسبی ایجاد شد. علت ثابت بودن زمان الگوریتم SA برای همه‌ی حالات، ثابت بودن پارامترهای آن است. برای یافتن جواب اولیه در الگوریتم SA، ابتدا یک هواپیمای مجازی با هزینه‌ی بی‌نهایت و ظرفیت صفر به کل شبکه تخصیص می‌یابد. آنگاه با اجرای الگوریتم، ناوگان حقیقی به‌طور خودکار، جایگزین هواپیمای مجازی می‌شود. زمان انجام این بخش در حالات مختلف مسئله معمولاً کمتر از ۱۰ ثانیه است.

برای آزمون کارایی الگوریتم SA در حل مسئله‌ی بزرگ‌تر، برنامه‌ی پرواز روزهای دوشنبه ایران‌ایرتور به برنامه ایران‌ایر اضافه شد. اطلاعات برنامه‌ی این شرکت از دفترچه‌ی زمان‌بندی تابستان سال ۲۰۰۰ هما استخراج شد. در برنامه‌ی روزهای دوشنبه‌ی این شرکت، ۳۴ پرواز بین ۹ شهر کشور انجام می‌شود که ۲۲ زوج مبدأ ـ مقصد را تشکیل می‌دهند. تقریباً کلیه‌ی پروازهای این شرکت با یک‌نوع هواپیما انجام می‌شود و هواپیماهای این شرکت باید شب را در شهر مشهد بگذرانند.

ترکیب دو برنامه‌ی پرواز، شبکه جدیدی را با ۱۱۴ کمان پرواز، ۷۲ کمان زمینی و ۸۸ گره همفزون شده پدید می‌آورد. برای عملیات روزانه‌ی این شبکه، حداقل ۱۶ فروند هواپیما مورد نیاز است، لذا همین تعداد هواپیما در ۷ نوع مختلف، به‌عنوان ناوگان موجود منظور می‌شود. در این شبکه دو شهر تهران و مشهد دارای کمان شبانه‌اند. ۶ نوع هواپیمای اول، شب را در تهران و نوع هفتم در مشهد مستقر می‌شود. مسئله‌ی تخصیص هواپیما برای شبکه‌ی جدید دارای ۹۱۴ محدودیت، ۷۹۸ متغیر دوتایی، ۶۷۴ متغیر حقیقی و ۵۳۵۳ عضو غیر

صفر در ماتریس ضرایب است. نتایج حل این مسئله با نرم‌افزار GAMS و الگوریتم SA در جدول ۲ قابل ملاحظه است. شرط توقف نرم‌افزار GAMS، حداکثر خطای نسبی ۲٪ یا زمان ۲ ساعت گذاشته شده و پارامترهای الگوریتم SA نیز مانند قبل انتخاب شده‌اند با این تفاوت که تعداد تکرار در هر دما برابر ۳۰۰۰۰ انتخاب شده است. به این ترتیب چون ابعاد مسئله‌ی جدید تقریباً ۱/۵ برابر شده، تعداد کل نقاط جستجو نیز به ۱/۵ برابر افزایش می‌یابد. شایان ذکر است که زمان یافتن جواب اولیه در حدود ۸۰ ثانیه بوده است. جزئیات اطلاعات مربوط به مسئله حل شده و نتایج کامل آنها در دسترس است.[۱۴]

نتیجه گیری

در این نوشتار یکی از مسائل مطرح در برنامه‌ریزی پرواز به‌نام تخصیص هواپیما به پرواز مد نظر قرار گرفته و روش حلی با استفاده از روش جستجوی ابتکاری Simulated Annealing برای آن طراحی شده است. از آنجاکه طبق جستجوهای مؤلفین، در مطالعات پیشین اغلب از روش‌های حل دقیق[۶]، مانند شاخه و کرانه، برای حل این مسئله استفاده شده است، رویکرد این مقاله از جمله رویکردهای نو به مسئله به‌شمار می‌آید. برای آزمون میزان کارایی روش پیشنهاد شده در این مقاله، تعدادی مسئله‌ی نمونه با استفاده از برنامه‌ی پرواز شرکت ایران‌ایر و ایران‌ایرتور مورد حل و بررسی قرار گرفته است.

جواب‌های به دست آمده از حل کلیه‌ی مسائل نمونه با الگوریتم SA، از نظر سرعت و دقت بسیار مطلوب‌است. در مجموع، حل ۱۷ مسئله‌ی نمونه نشانگر آن است که سرعت الگوریتم SA به‌طور متوسط ۷ برابر، و دقت آن ۲ برابر دقت نرم‌افزار GAMS است. این امر در حالی است که در مقاله‌ی هین، که روش شاخه و کرانه‌ی اصلاح شده را برای حل مسئله مورد استفاده قرار داده است، الگوریتم تدوین شده دو برابر الگوریتم عمومی شاخه وکرانه کارایی پیدا کرده است. بدین ترتیب می‌توان انتظار داشت که استفاده از قابلیت الگوریتم‌های ابتکاری مانند SA امکان حل همزمان زیرمسائل برنامه‌ریزی پرواز را فراهم سازد. البته شایان ذکر است که ابعاد مسئله‌ی حل شده در این مطالعه کوچک‌تر از ابعاد مسئله‌ی حل شده در مطالعه‌ی هین است و اثبات قابلیت آن نیازمند حل مسئله‌ی متنوع‌تر و واقعی‌تر است.

پانوشت

1. heuristic search method
2. simulated annealing
3. time expanded (spanned)
4. hub and spoke
5. spill cost
6. exact

منابع

1. Etschmaier M. and Mathaisel D., Airline Scheduling: An Overview, *Transportation Science*, **19**, pp 127-138 (1985).
2. Gopalan R., and Talluri K.T., Mathematical Models in Airline Schedule Planning: A Survey, *Annals of Operations Research*, **76**, pp 155-185 (1998).

۳. زیرک تقی‌پور، غلامرضا. «تجزیه و تحلیل محدودیت‌های برنامه‌ریزی پرواز شرکت‌های هوایی و ارائه‌ی راه‌حل‌های مناسب در کاهش آن»، پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد مدیریت صنایع، دانشگاه صنعتی امیرکبیر.

4. Abara Jeph, Applying Integer Linear Programming to the Fleet Assignment Problem, *Interfaces*, **19**, pp 20-38 (1989).
5. Subramanian R., Scheff R.P., Quilinan J.D., Wiper D.S. and Marsten R.E., Coldstart: Fleet Assignment at Delta Airlines, *Interfaces*, **24**, pp 104-120 (1994).
6. Hane C.A., Barnhart C., Johnson E.L., Marsten R.E., Nemhauser G.L., and Sigismondi G., The Fleet Assignment Problem: Solving a Large-Scale Integer Problem, *Mathematical Programming*, **70**, pp 211-232 (1995).
7. Clarke L.W., Hane C.A., Johnson E.L. and Nemhauser G.L. Maintenance and Crew Consideration in Fleet Assignment, *Transportation Science*, **30**, pp 249-260 (1996).
8. GU Z., Johnson E.L., Nemhauser G.L. and Wang Y., Some Properties of the Fleet Assignment Problem, *Operations Research Letter*, **15**, pp 59-71 (1994).
9. Klincewicz J.G. and Rosenwein M.B., The Airline Exception Scheduling Problem, *Transportation Science*, **29**, pp 4-16 (1995).
10. Rexing B., Barnhart C., Kniker T., Jarrah A. and Krishnamurthy N., Airline Fleet Assignment with Time Windows, *Transportation Science*, **34**, pp 1-20 (2000).
11. Gillen D. and Levinson D., Full Cost of Airline Travel in the California Corridor, *Transportation Research Record*, **1662**, pp 1-9 (1999).
12. Van Laarhoven P.J.M. and Aarts E.H.L., Simulated Annealing: Theory and Application, 3rd Edition, Kluwer Academic Publishers, (1989).

۱۳. ذکایی آشتیانی، هدایت و حجازی، بهرنگ. «کاربرد روش گرم و سردکردن شبیه‌سازی شده در حل مسئله‌ی مکان‌یابی پایانه‌های شبکه اتوبوسرانی»، استقلال، سال ۲۰، شماره ۲ (۱۳۸۰).

۱۴. سید وکیلی، سید علیرضا. «حل مسئله‌ی تخصیص هواپیما به پرواز با روش SA»، پایان‌نامه کارشناسی ارشد برنامه‌ریزی حمل و نقل، دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف (۱۳۷۹).