پایداری دینامیکی ورق‌های ترک‌دار در لبه

مهیار جاویدروزی (استادیار)
دانشکده‌ی معماری و شهرسازی، دانشگاه شهید بهشتی
ابوالحسن وفائی (استاد)
همایون اسمعیل پوراستکانچی (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

در نوشتار حاضر به بررسی رفتار ارتعاشی، کمانش و پایداری دینامیکی ورق‌های مستطیلی، با تکیه‌گاه ساده در چهار لبه و دارای ترک لبه‌یی در یک سمت، زمانی که تحت اثر بار محوری فشاری (واقع در صفحه‌ی ورق) در دو لبه‌ی مقابل قرار دارند، می‌پردازیم. با استخراج بسامدهای ارتعاش آزاد و مدهای ارتعاشی متناظر به صورت تحلیلی، و جایگذاری آنها در معادله‌ی انتگرال- دیفرانسیلی مسئله، ماتریس فشرده‌یی خواهیم داشت که پس از یک بار تعیین درایه‌های آن، می‌توان مقادیر بار بحرانی کمانش و نواحی ناپایداری دینامیکی را برای انواع حالات بارگذاری، تعیین کرد. به این منظور تعدادی ورق ترک‌دار با ابعاد هندسی مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. مقایسه‌ی نتایج حاصل از این روش با نتایج حاصل از روش اجزاء محدود نشان می‌دهد که هر دو روش به مقادیر یکسانی منتهی می‌شوند.

مقدمه

ورق‌ها یکی از اجزاء تشکیل‌دهنده‌ی اغلب سازه‌های مورد استفاده در بسیاری از زمینه‌های علوم مهندسی نظیر عمران، مکانیک و هوافضا هستند. گوشه‌های نوک‌تیز بازشوها و جوش‌ها معمولاً برای پیدایش و گسترش ترک‌ها، به ویژه در سازه‌ی در معرض بار دینامیکی، بسیار مستعدند. بررسی رفتار ورق‌های ترک‌دار تا کنون موضوع بسیاری از مطالعات بوده است. این بررسی‌ها می‌تواند از دو دیدگاه بارگذاری استاتیکی و دینامیکی مورد توجه قرار گیرد. در تحلیل استاتیکی تغییر مکان‌های خارج از صفحه، ناشی از پدیده‌ی کمانش یا پس از کمانش مورد بررسی قرار می‌گیرد.[۱-۴] در تحلیل دینامیکی مطالعه‌ی مواردی که در آنها ارتعاشات خمشی در غیاب یا با حضور تنش‌های اولیه‌ی صفحه‌یی در نظر گرفته می‌شود مد نظر است.[۴-۱۰]

علی‌رغم اهمیت کاربردی ورق‌های ترک‌دار، منابع علمی ـ فنی منتشره در زمینه‌ی پایداری دینامیکی آنها بسیار محدود است.[۱۱-۱۳] ناپایداری دینامیکی، سازه بر اساس ارتعاشات عرضی حاصل از بارگذاری تناوبی در داخل صفحه رخ می‌دهد. این ناپایداری ممکن است در ترکیبی از سه پارامتر بسامدهای طبیعی ارتعاش جانبی، بسامد بارگذاری و دامنه‌ی آن منجر به وقوع پدیده‌ی تشدید شود که در اصطلاح فنی «تشدید پارامتری» نامیده می‌شود. گستره‌یی از مقادیر پارامترهای فوق که باعث ناپایداری حرکت می‌شوند ناحیه‌ی ناپایداری را تشکیل می‌دهند. در این خصوص بررسی‌های جامع‌تری صورت گرفته که نتایج آنها در منابع مختلف در دسترس است.[۱۴و۱۵]

به منظور بررسی رفتار ناپایداری پارامتری یک سازه می‌توان از دو روش تحلیلی[۱۴] یا عددی[۱۶و۱۷] استفاده کرد که در این میان روش تحلیلی از دیدگاه نظری از اهمیت قابل توجهی برخوردار است.

در تحقیق حاضر، با استفاده از روش معادلات انتگرال ـ دیفرانسیلی پایداری دینامیکی ورق‌های ترک‌دار در لبه بررسی می‌شود و اثر پارامترهای مختلف نظیر ضریب بار استاتیکی، بسامد و دامنه‌ی بار دینامیکی، طول ترک و هندسه‌ی ورق مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

روابط حاکم

تغییر شکل ورق $w(x,y,t)$ تحت اثر بار پارامتری $N_x(t)=N_s+N_t\cos\theta t$ (که در حالت کششی مثبت فرض می‌شود) از حل معادله‌ی دیفرانسیل زیر به‌دست می‌آید:

$$\nabla^4 w\,(x,y,t)=\frac{1}{D}\left(N_x(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right), \qquad (1)$$

که در آن D سختی خمشی بوده و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \qquad (2)$$

که در آن h ضخامت، E مدول کشسانی، v ضریب پواسن مصالح ورق و μ جرم واحد سطح آن است. با تعریف تابع تأثیر تغییر شکل $K(x,y,\xi,\eta)$، تغییرمکان نقطه‌ی x و y ورق تحت اثر بار واحد در نقطه‌ی ξ و η به دست می‌آید. رابطه‌ی ۱ به صورت معادله‌ی انتگرال - دیفرانسیلی زیر خواهد بود:

$$w(x,y,t)+\mu\iint k(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial^2 w(\xi,\eta,t)}{\partial t^2}\,d\xi d\eta - N_x(t)\iint k(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial^2 w(\xi,\eta,t)}{\partial \xi^2}\,d\xi d\eta=0 \qquad (۳)$$

جواب معادله‌ی ۳ را می‌توان به‌صورت سری به‌دست آورد.[۱۴]

$$w(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\,\varphi_k(x,y), \qquad (۴)$$

که در آن $\varphi_k(x,y)$ توابع ویژه ارتعاش آزاد نرمال شده است:

$$\mu\iint \varphi_i(x,y)\varphi_k(x,y)dxdy=\delta_{ik} \qquad (۵)$$

(δ_{ik} تابع دلتای دیراک است) و $f_k(t)$ توابع زمانی هستند که به عنوان مجهول باید تعیین و محاسبه شوند. با جایگذاری رابطه‌ی ۴ در رابطه‌ی ۳ و در نظر گرفتن این که مسئله‌ی مقادیر ویژه‌ی ارتعاش آزاد از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\iint k(x,y,\xi,\eta)\,\varphi_i(\xi,\eta)d\xi d\eta=\frac{\varphi_i(x,y)}{\omega_i^2}, \qquad (۶)$$

و با استفاده از بسط زیر:

$$N_x(t)\iint k(x,y,\xi,\eta)\frac{\partial^2\varphi_k(\xi,\eta)}{\partial\xi^2}d\xi d\eta=\sum_{i=1}^{\infty} a_{ik}(t)\;\varphi_i(x,y), \qquad (۷)$$

به دستگاهی از معادلات دیفرانسیل از ضرایب سری رابطه‌ی ۴ می‌رسیم:

$$f_i''+\omega_i^2\left[f_i-\sum_{k=1}^{\infty}F_{ik}(t)f_k\right]=0, \qquad i=1,2,\ldots \qquad (۸)$$

توابع $F_{ik}(t)$ با استفاده از رابطه‌ی زیر تعریف می‌شوند:

$$F_{ik}(t)=\frac{1}{\omega_i^2}\iint \varphi_i\left(N_x(t)\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x^2}\right)dxdy, \qquad (۹)$$

در رابطه‌ی ۸، f'' نشانه‌ی مشتق زمانی است. این رابطه را می‌توان به شکل ماتریس زیر نیز بیان کرد:

$$C\frac{d^2\mathbf{f}}{dt^2}+\left[\mathbf{I}-\mathbf{F}(t)\right]\mathbf{f}=0 \qquad (۱۰)$$

که در آن

$$C\begin{bmatrix} 1/\omega_1^2 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1/\omega_2^2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1/\omega_3^2 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad (۱۱)$$

$$F(t)\begin{bmatrix} F_{11}(t) & F_{12}(t) & F_{13}(t) & \ldots \\ F_{21}(t) & F_{22}(t) & F_{23}(t) & \ldots \\ F_{31}(t) & F_{32}(t) & F_{33}(t) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}, \qquad (۱۲)$$

و f ماتریس متشکل از توابع زمانی $f_k(t)$ است که در رابطه‌ی ۴ و ۹ معرفی شد.

ورق دارای ترک در لبه

در حالت ورق مستطیل شکل همراه با ترک در لبه تحت اثر فشار یکنواخت در دولبه و دارای تکیه‌گاه‌های ساده، توابع ارتعاش آزاد به شکل زیر خواهد بود:[۴]

$$w_i(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty} Y_{im}(y)\sin(mx), \qquad (۱۳)$$

که در آن

$$Y_{im}(y)=\frac{1}{D}\left[A_{im}\sinh(r_{1i}\,y)+B_{im}\cosh(r_{1i}\,y)+C_{im}\sinh(r_{2i}\,y)+D_{im}\cosh(r_{2i}\,y)\right], \qquad (۱۴)$$

و

$$r_{1i}=\sqrt{k\omega_i+m^2},\quad r_{2i}=\sqrt{k\omega_i-m^2},\quad k=\sqrt{\frac{\mu}{D}}. \qquad (۱۵)$$

ضریب‌های A_{im}، B_{im}، C_{im}، D_{im} با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌شوند. توابع ویژه‌ی نرمال با استفاده از رابطه‌ی ۵ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\varphi_i(x,y)=\frac{w_i(x,y)}{\sqrt{\iiint w_i^2(x,y)dxdy}} \qquad (۱۶)$$

با انجام عملیات انتگرال‌گیری و سپس ساده‌سازی، رابطه‌ی ۱۶ به‌صورت رابطه‌ی ۱۷ بازنویسی می‌شود:

$$\varphi_i\,(x,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi\mu}}\,\frac{w_i(x,y)}{\sqrt{\sum_{m=1}^{\infty}\int_{0}^{b}Y_{im}^{2}(y)dy}}\,, \qquad (17)$$

با جایگذاری رابطه‌ی ۱۷ در رابطه‌ی ۹، $F_{ik}(t)$ طبق رابطه‌ی ۱۸ محاسبه می‌شود (فرض می‌شود که $N_x(t)$ فشاری است):

$$F_{ik}(t) = N_x(t)\alpha_{ik},$$

$$\alpha_{ik}=\frac{1}{\mu\omega_1^2}\;\frac{\sum_{m=1}^{\infty} m^2\int_{0}^{2}Y_{im}(y)Y_{km}(y)dy}{\sqrt{\left[\sum_{p=1}^{\infty}Y_{ip}^{2}(\xi)d\xi\right]\left[\sum_{q=1}^{\infty}Y_{iq}^{2}(\xi)d\xi\right]}}. \qquad (18)$$

در تقریب اول، مرزهای نواحی اصلی ناپایداری به‌صورت رابطه‌ی ۱۹ به‌دست می‌آید:

$$\left|\mathbf{I}-\lambda\,\mathbf{A}-\frac{1}{4}\theta^2\mathbf{C}\right| = 0, \qquad (19)$$

که در آن

$$\lambda = N_s \pm \frac{1}{2}N_t, \qquad (20)$$

اکنون به بررسی برخی ویژگی‌های رابطه‌ی ۹ می‌پردازیم. چنانچه θ و N_t مساوی صفر قرار داده شوند، رابطه‌ی ۱۹ به رابطه‌ی ۲۱ تبدیل می‌شود:

$$\left|\mathbf{I}-N_s^{*}\,\mathbf{A}\right| = 0, \qquad (21)$$

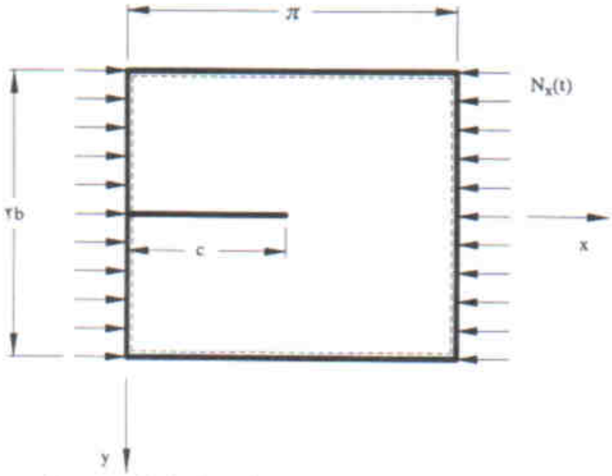
که در آن N_s^{*} مقادیر مدهای بار کمانش بحرانی خواهد بود. خاصیت دیگر رابطه‌ی ۹ زمانی پدیدار می‌شود که N_t مساوی صفر قرار گیرد.

$$\left|\mathbf{I}-N_s\,\mathbf{A}-\frac{1}{4}\theta^2\mathbf{C}\right| = 0 \qquad (22)$$

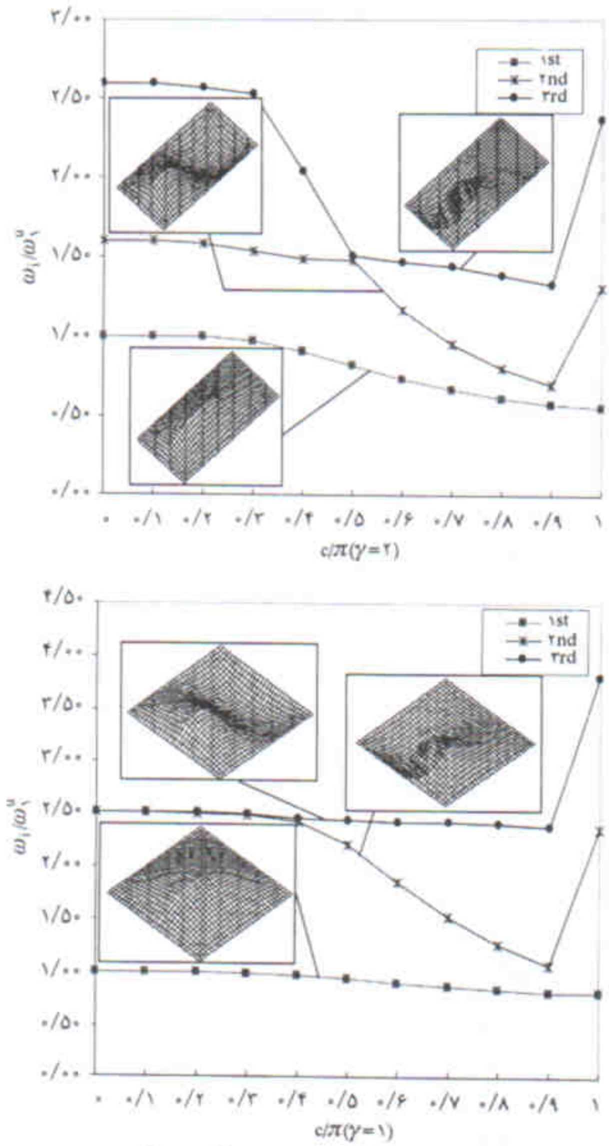
و در نتیجه جواب‌های رابطه‌ی ۲۲ بسامدهای طبیعی ورق خواهد بود، زمانی که تحت بار محوری فشاری $\left[\,|N_s| < \left|N_s^{*}\right|\,\right]$ یا کششی $(N_s<0)$ قرار می‌گیرد. بالاخره زمانی که λ برابر با صفر باشد جواب‌های رابطه‌ی ۱۹ بسامدهای ارتعاش آزاد ورق ω خواهد بود.

محاسبات

هندسه کلی ورق ترک‌دار در شکل ۱ نشان داده شده است. در این شکل مقیاس مختصات و ابعاد ورق به‌وسیله‌ی ضریب $\bar{\alpha}/\pi$ ($\bar{\alpha}$ همان طول واقعی ورق است) تغییر یافته است. مختصات و ابعاد واقعی (متغیرهای باردار) با استفاده از $\bar{x}=\bar{\alpha}x/\pi$ ، $\bar{y}=\bar{\alpha}y/\pi$، $\bar{b}=\bar{\alpha}b/\pi$ و $\bar{c}=\bar{\alpha}c/\pi$ به‌دست می‌آیند. $\bar{c}$ طول واقعی



شکل ۱. ورق مستطیل با ترک لبه‌یی تحت اثر فشار یکنواخت در دو لبه.



شکل ۲. اثر اندازه‌ی ترک بر بسامدهای طبیعی مقیاس شده.

ترک و c طول ترک پس از تغییر مقیاس است. پنج بسامد اول ارتعاش آزاد و اشکال مدی متناظر با آنها برای ورق با نسبت ابعاد $\gamma=2b/\pi$ و طول ترک‌های c/π مختلف محاسبه شد. تفصیل جزییات روش محاسبه در دسترس است.[۴] شکل ۲ اثر اندازه‌ی ترک را بر سه مد اول بسامدهای طبیعی که نسبت به بسامد اصلی ارتعاش آزاد ورق ترک‌نخورده‌ی ω_u مقیاس شده، نشان می‌دهد.

جدول ۱. اثر تعداد سطر و ستون‌ها بر دقت جواب‌ها در کمانش استاتیکی مقیاس شده ($N^*_{us,1}$ N^*_s).

$\gamma=۲$

	n=۱	n=۳			n=۵			هدف		
c/π	#۱ مود	#۱ مود	#۲ مود	#۳ مود	#۱ مود	#۲ مود	#۳ مود	#۱ مود	#۲ مود	#۳ مود
۰	۱/۵۶۲	۱/۰۰۰	۱/۱۷۵	۱/۵۶۲	۱/۰۰۰	۱/۱۷۵	۱/۵۶۲	۱/۰۰۰	۱/۱۷۴	۱/۵۶۲
۰/۱	۱/۵۶۰	۰/۹۹۸	۱/۱۷۲	۱/۵۶۱	۰/۹۹۸	۱/۱۷۲	۱/۵۵۸			
۰/۲	۱/۵۳۵	۰/۹۶۸	۱/۱۴۶	۱/۵۴۲	۰/۹۶۸	۱/۱۴۶	۱/۵۴۲	۰/۹۶۷	۱/۱۴۴	۱/۵۱۳
۰/۳	۱/۴۱۱	۰/۸۷۱	۱/۱۲۷	۱/۴۹۵	۰/۸۷۱	۱/۱۲۷	۱/۴۹۵	۰/۸۷۰	۱/۱۲۵	۱/۴۷۶
۰/۴	۱/۱۵۷	۰/۷۷۷	۱/۲۵۳	۱/۳۹۰	۰/۷۶۴	۱/۱۲۵	۱/۱۹۱	۰/۷۶۵	۱/۱۰۹	۱/۱۲۳
۰/۵	۰/۹۱۶	۰/۶۸۹	۰/۹۴۸	۱/۲۷۹	۰/۶۸۵	۰/۸۹۴	۱/۰۹۹			
۰/۶	۰/۷۵۳	۰/۶۳۰	۰/۷۹۳	۱/۱۱۷	۰/۶۲۹	۰/۷۴۷	۱/۰۰۰	۰/۶۳۰	۰/۷۴۴	۰/۹۹۶
۰/۷	۰/۶۴۲	۰/۵۸۷	۰/۷۰۲	۰/۹۲۵	۰/۵۸۶	۰/۶۶۶	۰/۸۷۰			
۰/۸	۰/۵۶۲	۰/۵۴۷	۰/۶۴۲	۰/۷۷۴	۰/۵۴۶	۰/۶۱۳	۰/۷۶۳	۰/۵۴۶	۰/۶۰۹	۰/۷۶۲
۰/۹	۰/۵۰۸	۰/۵۰۶	۰/۶۰۱	۰/۶۹۳	۰/۵۰۶	۰/۵۷۵	۰/۶۹۲			
۱	۰/۴۸۵	۰/۴۸۵	۰/۶۶۸	۰/۹۷۴	۰/۴۸۵	۰/۶۶۸	۰/۹۷۴	۰/۴۸۶	۰/۶۶۹	۰/۹۷۴

$\gamma=۱$

	n=۱	n=۳			n=۵			هدف		
c/π	#۱ مود	#۱ مود	#۲ مود	#۳ مود	#۱ مود	#۲ مود	#۳ مود	#۱ مود	#۲ مود	#۳ مود
۰	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۵۶۳	۶/۲۴۸	۱/۰۰۰	۱/۵۶۳	۲/۹۶۳	۱/۰۰۰	۱/۵۶۲	۲/۷۷۵
۰/۱	۱/۰۰۰	۱/۰۰۰	۱/۵۶۳	۶/۲۴۸	۱/۰۰۰	۱/۵۶۳	۴/۰۰۱			
۰/۲	۰/۹۹۶	۰/۹۹۶	۱/۵۵۴	۶/۲۴۱	۰/۹۹۶	۱/۵۵۴	۳/۹۸۲	۰/۹۹۶	۱/۵۵۳	۲/۷۵۶
۰/۳	۰/۹۸۱	۰/۹۸۰	۱/۵۲۹	۶/۱۳۴	۰/۹۸۰	۱/۵۲۹	۳/۷۵۷			
۰/۴	۰/۹۴۵	۰/۹۴۳	۱/۵۰۲	۵/۲۹۷	۰/۹۴۳	۱/۵۰۲	۲/۹۰۲	۰/۹۴۳	۱/۵۰۱	۲/۶۷۰
۰/۵	۰/۸۸۹	۰/۸۸۷	۱/۴۹۱	۳/۱۹۵	۰/۸۸۷	۱/۴۹۰	۲/۰۷۱			
۰/۶	۰/۸۲۵	۰/۸۲۱	۱/۴۹۱	۱/۹۷۳	۰/۸۲۱	۱/۴۹۰	۱/۶۰۴	۰/۸۲۱	۱/۴۸۷	۱/۵۷۴
۰/۷	۰/۷۶۳	۰/۷۶۱	۱/۴۷۲	۱/۴۸۰	۰/۷۶۱	۱/۳۱۵	۱/۴۷۹			
۰/۸	۰/۷۱۴	۰/۷۱۲	۱/۱۹۶	۱/۴۵۰	۰/۷۱۲	۱/۱۱۹	۱/۴۵۰	۰/۷۱۲	۱/۱۱۱	۱/۴۴۷
۰/۹	۰/۶۷۹	۰/۶۷۹	۱/۰۰۵	۱/۴۱۷	۰/۶۷۹	۰/۹۶۹	۱/۴۱۷			
۱	۰/۶۶۸	۰/۶۶۸	۱/۰۰۵	۱/۴۵۲	۰/۶۶۸	۱/۴۰۲	۲/۶۳۷	۰/۶۶۸	۱/۴۰۱	۲/۶۳۲

برای محاسبه‌ی ضرایب ماتریس A در رابطه‌ی ۱۹ از انتگرال عددی قاعده‌ی سیمپسون استفاده می‌شود. به‌این منظور یک برنامه‌ی رایانه‌یی نوشته شد و مقدار دقت و خطای عددی نیز کنترل شد. واضح است که به‌ازای پنج مد ارتعاش آزاد، ماتریس مربع $F(t)$ حداکثر می‌تواند از رتبه‌ی پنج باشد؛ بنابراین برای هر حالت خاص هندسی ورق تنها کافی است ۲۵ مقدار عددی ذخیره شود. این مقدار ذخیره‌ی اطلاعات در مقایسه با روش اجزاء محدود بسیار ناچیز و مقرون به صرفه است.

به‌منظور اطمینان از دقت نتایج، ابتدا نتایج تحلیل کمانش استاتیکی حاصل از روش پیشنهادی در این مطالعه، با حل عددی رابطه‌ی ۲۱، و با نتایج روش اجزاء محدود مقایسه می‌شود. در تمامی حالات، به منظور کنترل همگرایی جواب، اثر تعداد توابع ارتعاش آزاد بر جواب کمانش استاتیکی مورد ارزیابی قرار گرفت (جدول ۱). در این جدول $N^*_{us,1}$ بار کمانش بحرانی ورق بدون ترک است. n در این جدول بیانگر تعداد توابع ارتعاش آزاد به کار رفته در محاسبه‌ی مقادیر بار کمانش است (به‌عنوان مثال در $n=1$ تنها یک مد ارتعاش آزاد لحاظ شده است). در ادامه سه مقدار ویژه‌ی اول از حل معادله‌ی کمانش استاتیکی به دست آمد (در حالت $n=1$ تنها یک مقدار قابل استخراج است) و با نتایج تحقیقات به‌دست آمده‌ی قبلی با عنوان مقادیر هدف، مقایسه شد.

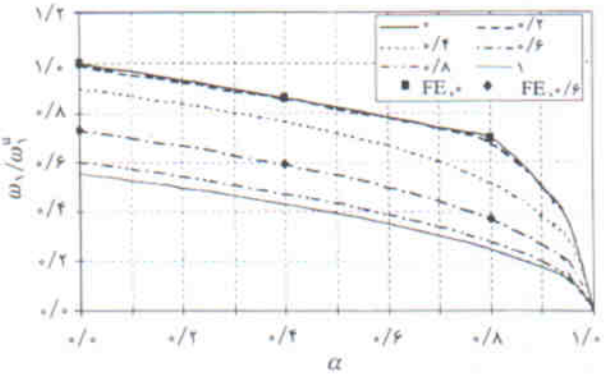
لازم به توضیح است که انجام فرایند بالا، در مطالعات پایداری دینامیکی که در ادامه خواهد آمد، ضروری به نظر می‌رسد. در حقیقت برای هر مثال از ورق‌های مورد بررسی قرار گرفته در این تحقیق، گام اول تعیین تعداد توابع ارتعاش آزاد پایه‌یی است که به نتایج با دقت مورد نیاز منتهی می‌شود.

نتایج بررسی پایداری دینامیکی

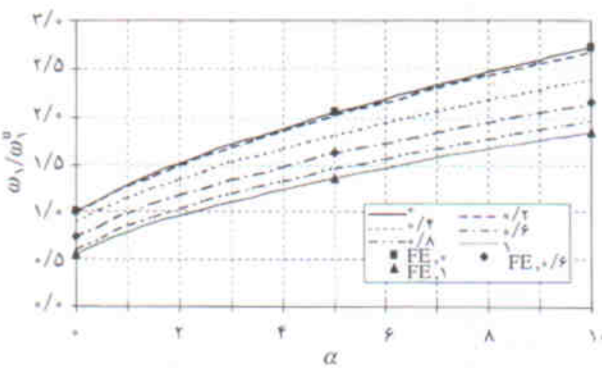
بررسی یک ورق ترک‌دار در لبه و تکیه‌گاه ساده تحت بار محوری درون صفحه‌یی در دو لبه‌ی مقابل با یکدیگر و موازی با راستای ترک مورد نظر است. اثر نسبت ابعاد ورق γ، طول ترک c/π، ماهیت و بسامد بارگذاری بر روی ارتعاش، کمانش و پایداری دینامیکی ورق مطالعه می‌شود و نتایج حاصل از تقریب اول در ادامه مورد بحث قرار می‌گیرد.

رفتار ارتعاشی

شکل ۳ اثر بار محوری N_s بر بسامد اصلی ارتعاش ω_1، برای ورق با طول ترک متفاوت، رابطه‌ی ۲۲، و مقایسه‌ی آن را با نتایج حاصل از



شکل ۳. تغییرات بسامد اصلی ورق ترک‌دار نسبت به تغییرات بار محوری فشاری $\gamma=2$.



شکل ۴. تغییرات بسامد اصلی ورق ترک‌دار نسبت به تغییرات بار محوری کششی $\gamma=2$.

روش اجزاء محدود نشان می‌دهد. در این شکل برای سهولت تفسیر نتایج مقادیر N_s و ω_1 به‌ترتیب به‌وسیله‌ی بار کمانش بحرانی $N^*_{s,1}$ و بسامد ارتعاش طبیعی ω_1^u ورق بدون ترک مقیاس شده‌اند. مشاهده می‌شود که با افزایش مقدار بار فشاری، بسامد کاهش یافته و سرانجام با رسیدن مقدار بار با مقدار بار کمانش بحرانی صفر می‌شود.

در شکل ۴ اثر بار محوری کششی بر بسامد اصلی ارتعاش آزاد در ورق با طول ترک‌های مختلف نشان داده شده است. مجدداً نتایج حاصل از این تحقیق و روش اجزاء محدود مورد مقایسه قرار گرفته است.

مقایسه‌ی روش موجود و روش اجزاء محدود نشان می‌دهد که نتایج هر دو روش به مقادیری مشابه منجر می‌شود. با این حال نباید از نظر دور داشت که در روش موجود سرعت رسیدن به جواب بسیار بالاتر از روش اجزاء محدود است ضمن اینکه در روش حاضر میزان فضای لازم برای ذخیره‌ی اطلاعات مورد نیاز برای تحلیل بسیار کم‌تر از روش اجزاء محدود است.

رفتار کمانش استاتیکی

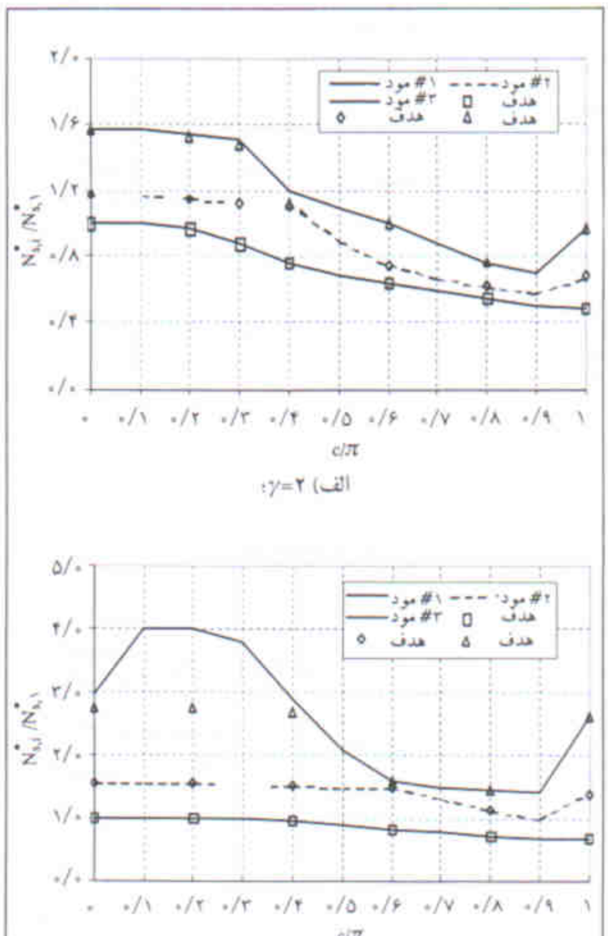
شکل ۵ اثر c/π و γ را بر سه مقدار اول بار کمانش استاتیکی ورق، زمانی که تحت اثر بار محوری فشاری در لبه‌ها قرار دارد، نشان می‌دهد. در این شکل منحنی‌ها نشانگر نتایج به‌دست آمده از حل معادله‌ی ۲۱ و نقاط هدف نتایج حاصل از تحلیل اجزاء محدودند. چنان‌که مشاهده می‌شود، به غیر از بار کمانش سوم، هنگامی که $\gamma=۱/۰$ و $c/\pi<۰/۵$، هر دو روش به مقادیر یکسانی منتهی می‌شوند. دلیل عمده‌ی این اختلاف نتایج را می‌توان در این نکته یافت که به‌منظور ارضاء شرایط صحت رابطه‌ی ۴، توابع شکل $\varphi_k(x,y)$ باید شرایط تعامد را ارضاء کنند. مع‌الوصف با دقت در شکل ۲، مشاهده‌می‌شود که در ورق‌های مورد اشاره، مدهای دوم و سوم بسامدهای یکسان دارند. به‌تعبیر دیگر، شرایط تعامد مد دوم و سوم برقرار نبوده و به همین دلیل دو روش به نتایج یکسان منتهی نمی‌شود.

پایداری دینامیکی

در این بخش پایداری دینامیکی ورق‌های ترک‌دار لبه‌یی تحت اثر بار محوری فشاری متناوب مورد بررسی قرار می‌گیرد. ضریب بار استاتیکی (α) و ضریب بار دینامیکی (β) درصدهای بار کمانش استاتیکی، $N^*_{S,1}$، هستند. شکل ۶ اثر تغییرات طول ترک c/π، بر ناحیه‌ی اول ناپایداری را، هنگامی که نمونه‌ها تحت اثر بار ثابت استاتیکی به میزان $\alpha=۰/۶$ قرار دارند، برای ورق با ابعاد مختلف نشان می‌دهد.

همچنین در شکل ۷ سه ناحیه‌ی اول ناپایداری در ورق‌ها، با طول ترک‌های برابر با $c/\pi=۰/۶$ و با ابعاد مختلف، هنگامی که ضریب بار استاتیکی (α) برابر با ۰/۴ و ۰/۶ است نمایش داده شده است. اثر ضریب بار استاتیکی (α) بر ناحیه‌ی اول ناپایداری در شکل ۸ برای ورق با ابعاد مختلف نشان داده شده است.

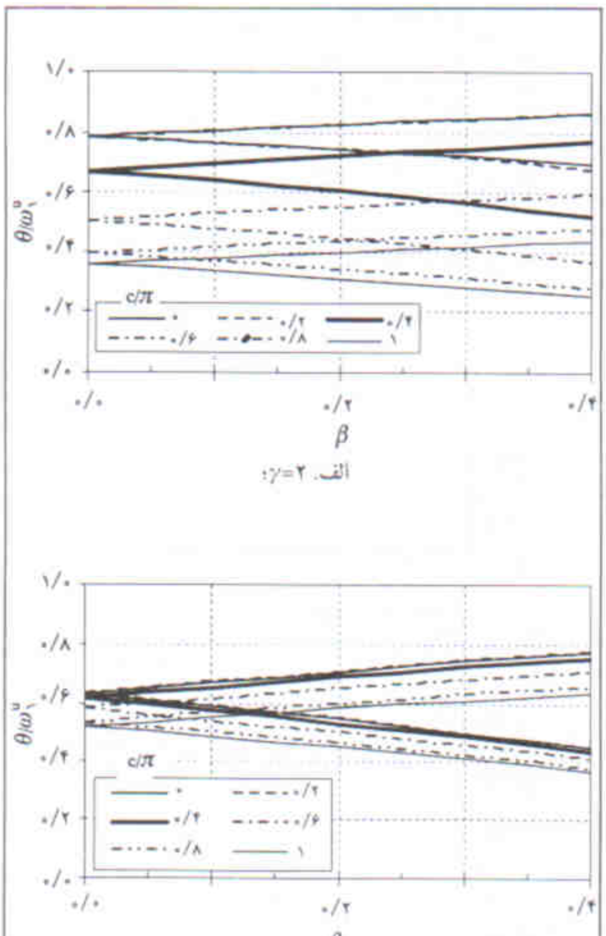
ملاحظه می‌شود که با افزایش α بسامد مرکزی ناحیه‌ی اول



الف) ۲=γ؛

ب) ۱=γ؛

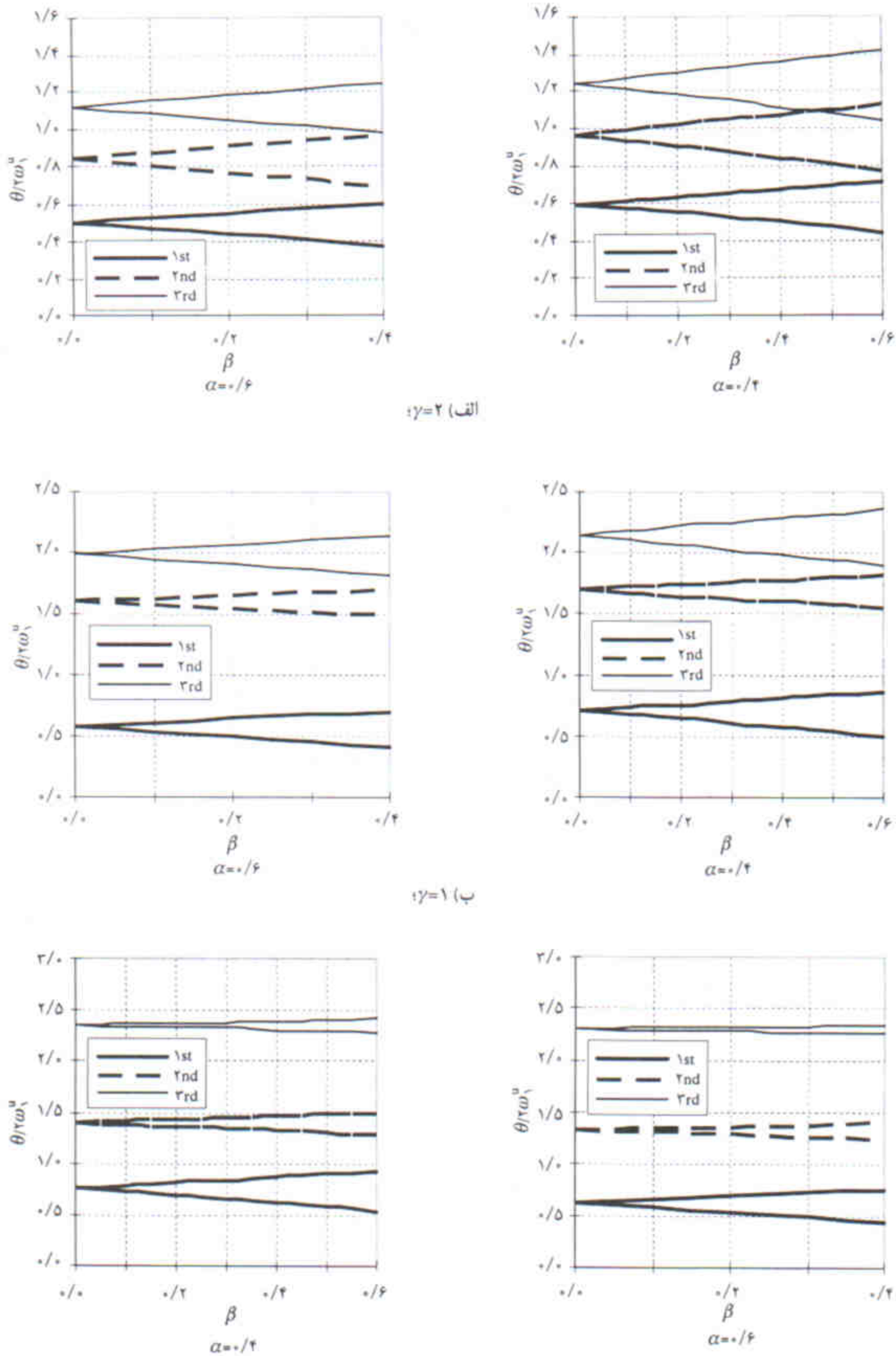
شکل ۵. اثر تغییر طول ترک بر بار کمانش بدون بعد.



الف. ۲=γ؛

ب. ۱=γ؛

شکل ۶. اثر اندازه‌ی ترک برناحیه‌ی اصلی ناپایداری، $\alpha=۰/۶$.



الف) $\gamma=۲$؛

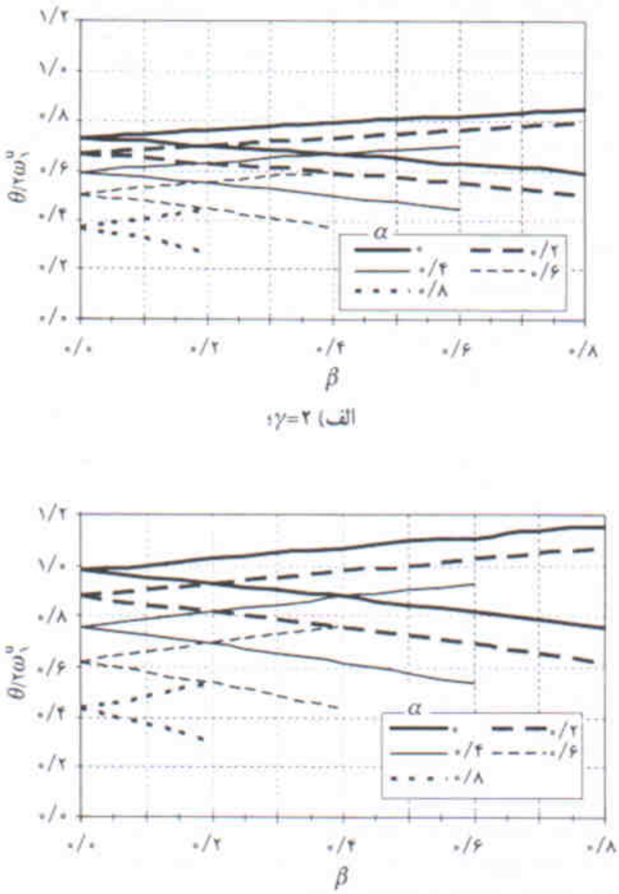
ب) $\gamma=۱$؛

ج) $\gamma=۰/۵$؛

شکل ۷. سه ناحیه‌ی اول ناپایداری، $c/\pi=۰/۶$.

جدول ۲. ناحیه‌ی اصلی ناپایداری در ورق با طول ترک متفاوت.

$\gamma=۲$					
		$c/\pi=۰/۲$		$c/\pi=۰/۸$	
α	β	U	L	U	L
۰/۴	۰	۰/۸۵۹	۰/۸۵۹	۰/۴۷۴	۰/۴۷۴
	۰/۲	۰/۸۹۵	۰/۸۲۱	۰/۴۳۵	۰/۵۱۰
	۰/۴	۰/۹۲۸	۰/۷۸۲	۰/۳۸۹	۰/۵۴۵
	۰/۶	۰/۹۶۱	۰/۷۴۰	۰/۳۳۹	۰/۵۷۷
	۰/۸	۰/۹۹۳	۰/۶۷۹	۰/۲۷۸	۰/۶۰۸
۰/۶	۰	۰/۷۸۲	۰/۷۸۲	۰/۳۸۹	۰/۳۸۹
	۰/۲	۰/۸۲۱	۰/۷۴۰	۰/۴۳۵	۰/۳۳۹
	۰/۴	۰/۸۵۹	۰/۶۷۹	۰/۴۷۴	۰/۲۷۸
	۰/۶	۰/۸۹۵	۰/۴۹۷	۰/۵۱۰	۰/۱۹۸
	۰/۸	۰/۹۲۸	۰/۰۱۳	۰/۵۴۵	۰/۰۰۷
$\gamma=۱$					
		$c/\pi=۰/۲$		$c/\pi=۰/۸$	
α	β	U	L	U	L
۰/۴	۰	۰/۷۷۴	۰/۷۷۴	۰/۶۵۴	۰/۶۵۴
	۰/۲	۰/۷۰۶	۰/۸۳۷	۰/۵۹۶	۰/۷۰۶
	۰/۴	۰/۶۳۳	۰/۸۹۴	۰/۵۳۳	۰/۷۵۸
	۰/۶	۰/۵۴۹	۰/۹۴۷	۰/۴۶۴	۰/۸۰۰
	۰/۸	۰/۴۴۷	۰/۹۹۹	۰/۳۷۹	۰/۸۴۷
۰/۶	۰	۰/۶۳۳	۰/۶۳۳	۰/۵۳۳	۰/۵۳۳
	۰/۲	۰/۷۰۶	۰/۵۴۹	۰/۵۹۶	۰/۴۶۴
	۰/۴	۰/۷۷۴	۰/۴۴۷	۰/۶۵۴	۰/۳۷۹
	۰/۶	۰/۸۳۷	۰/۳۱۶	۰/۷۰۶	۰/۲۶۸
	۰/۸	۰/۸۹۴		۰/۷۵۸	۰/۰۱۸
$\gamma=۰/۵$					
		$c/\pi=۰/۲$		$c/\pi=۰/۸$	
α	β	U	L	U	L
۰/۴	۰	۰/۷۹۰	۰/۷۹۰	۰/۷۴۲	۰/۷۴۲
	۰/۲	۰/۷۲۹	۰/۸۴۴	۰/۶۷۷	۰/۸۰۱
	۰/۴	۰/۶۶۱	۰/۹۰۳	۰/۶۰۶	۰/۸۵۳
	۰/۶	۰/۵۸۷	۰/۹۵۳	۰/۵۲۵	۰/۹۱۱
	۰/۸	۰/۵۰۱	۱/۰۰۰	۰/۴۲۹	۰/۹۵۳
۰/۶	۰	۰/۶۳۲	۰/۶۳۲	۰/۶۰۶	۰/۶۰۶
	۰/۲	۰/۷۰۷	۰/۵۴۸	۰/۶۷۷	۰/۵۲۵
	۰/۴	۰/۷۷۴	۰/۴۴۷	۰/۷۴۲	۰/۴۲۹
	۰/۶	۰/۸۳۶	۰/۳۱۷	۰/۸۰۱	۰/۳۰۴
	۰/۸	۰/۸۹۵	۰/۰۱۹	۰/۸۵۳	۰/۰۲۹



الف) $\gamma=۲$؛

ب) $\gamma=۰/۵$؛

شکل ۸. اثر ضریب بار استاتیکی بر ناحیه‌ی اصلی ناپایداری $c/\pi=۰/۶$.

ناپایداری کاهش می‌یابد و محدوده‌ی ناپایداری نیز وسیع‌تر می‌شود. نهایتاً مرزهای بالایی (U) و پایینی (L) ناحیه‌ی اصلی ناپایداری در جدول ۲ برای ضرایب بار استاتیکی $\alpha=۰/۴$ و $\alpha=۰/۶$ در ورق با ابعاد مختلف و به ازاء طول ترک‌های $c/\pi=۰/۲$، $c/\pi=۰/۶$ و $c/\pi=۰/۸$ ارائه شده است.

نتیجه گیری

در این نوشتار با استفاده از روش معادلات انتگرالی، رفتار استاتیکی و دینامیکی ورق‌های ترک‌دار در لبه‌ی تحت اثر بار محوری فشاری متناوب در دو لبه‌ی مقابل مورد بررسی قرار گرفت. نتایج به‌دست آمده از این مطالعه به‌طور خلاصه به‌شرح زیر است:

الف) مزایای حل به‌روش معادلات انتگرالی نسبت به روش اجزاء محدود عبارت است از: دقت بالای نتایج، سرعت بالای دست‌یابی به نتایج، و نیز حجم نسبتاً کم مورد نیاز برای ذخیره‌ی اطلاعات تحلیل.

ب) از آنجا که روش ارائه شده در این مطالعات ماهیت تحلیلی دارد، تفسیر نتایج حاصل از تحلیل آسان‌تر است و نیز اطمینان به صحت عملکرد مدل، در مقایسه با روش اجزاء محدود بیشتر است.

ج) نتایج تحلیل پایداری دینامیکی در ورق‌های ترک‌دار، (مورد بررسی در این تحقیق) تحت بار تناوبی فشاری در لبه‌های متقابل نشان می‌دهد که با افزایش بخش استاتیکی بارگذاری، عرض ناحیه‌ی ناپایداری افزایش می‌یابد و بسامد نقطه‌ی مرکزی ناحیه‌ی ناپایداری کاهش می‌یابد و در نتیجه ورق‌ها در این حالت نسبت به ناپایداری حساس‌ترند.

د) در ورق‌های ترک‌دارِ مورد بررسی در این مطالعات، ملاحظه می‌شود هنگامی که نسبت طول به عرض کمتر از واحد است ($\gamma<1$)، اثر اندازه‌ی ترک بر رفتار دینامیکی و کمانش کم‌اهمیت‌تر از زمانی است که نسبت طول به عرض بیشتر یا مساوی واحد ($\gamma<1$) باشد.

منابع

1. Anifantis, N.K., Actis, R.C. and Diamarogonas, A.D., "Vibration of cracked annular plates", *Engineering Fracture Mehanics*, **49**, pp 371-379 (1994).
2. Lee, H.P. and Lim, S.P., "Vibration of cracked rectangular plates including transverse shear deformations and rotary inertia", *Computers and Structures*, **49**, pp 715-718 (1993).
3. Qiang, G.L., Gu, S.N. and Jiang, J.S., "A finite element model of cracked plates and application to vibration problems", *Computers and Structures*, **39**, pp 483-487 (1991).
4. Stahl, B. and Keer, M., "Vibration and stability of cracked rectangular plates", *International Journal of Solids and Structures*, **8**, pp 69-92 (1972).
5. Dyshel, M.S., "Stress - intensity coefficient taking account of lacal buckling of plates with cracks", *Soviet Applied Mechanics*, **26**, pp 87-90 [English ranlation of prikladnaya Mekhanika] (1990).
6. Gilbert, A., Sibillot, P., Sornette, D., Vanneste, C., Maugis, D. and Muttin, F., "Buckling instability and pattern around holes of cracks in thin plates under a tensile load", *European Journal of Mechanics, A/Solids*, **11**, pp 65-89 (1992).
7. Quirk, A. and Bevitt, E., "Crack stability in centre cracked plates subjected to uniformly-distributed loadings", Fracture Mechanics Verifications by Large-Scale Testing IAEA Spec. Meet Large Scale Test, Publ. by MEP, England: Bery St. Edmunds, pp. 87-103 (1991).
8. Roy, Y.A., Shastry, B.P. and Rao G.V., "Stability of square plates with through transverse cracks", *Computers and Structures*, **36**, pp 387-388 (1990).
9. Riks, E., Rankin, C.C. and Bargon, F.A., "Buckling behavior of a central crack in a plate under tension", *Engineering Fracture Mechanics*, **43**, pp 529-548 (1992).
10. Shaw, D. and Huang, Y.H., "Buckling behavior of a central cracked thin plate under tension", *Engineering Fracture Mechanics*, **35**, pp 1019-1027 (1990).
11. Vafai, A., Javidruzi, M. and Estekanchi, H.E., "Crack influences on the vibration, buckling and parametric instability of plates", Proceedings of 2001 ASME Internationaal Mechanical Engineering Congress and Exposition, NY (Nov.11-16, 2001).
12. Vafai, A., Javidruzi, M. and Estekanchi, H.E., "Parametric instability of edge cracked plates", *Int. J. Thin- Walled Struct.*, **40**, pp 29-44 (2002).
13. Vafai, A., Javidruzi, M. and Estekanchi, H.E., "Vibration, buckling and dynamic stability of centrally cracked plates", (Submitted).
14. Bolotin, V.V., The Dynamic Stability of Elastic Systems, San Francisco, Holden-Day (1964).
15. Kratzig, W.B. and Niemann, H.J., Dynamic of Civil Engineering Structures, Netherlands, A.A. Balkema Publishers (1996).
16. Hutt, J.M. and Salam, A.E., "Dynamic stability of plates by finite element method", *Journal of Engineering Mechanics Division* ASCE97, pp 879-899 (1971).
17. Prabhakara, D.L. and Datta P.K., "Vibration, buckling and parametric instability behavior of plates with centrally located cutouts subjected to in-plane edge loading (tension or compression)", *Thin-Walled Structures*, **27**, pp 287-310 (1997).