

وضعیت خرابی در خاک‌های ماسه‌یی تحت تنش‌های محصورکننده‌ی کم

محمد ملکی (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا
علی حقایق (دانشجوی دکتری)
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم تحقیقات

یکی از الزامات اساسی در بررسی رفتار خاک‌های ماسه‌یی وضعیت خرابی آن‌هاست. مشاهدات تجربی نشان می‌دهند که وضعیت خرابی در خاک‌های ماسه‌یی بستگی به عوامل مختلفی چون تنش محصورکننده، چگالی و مسیر تنش دنبال شده دارد. بیشتر کارهای انجام شده در این زمینه در تنش‌های محصورکننده‌ی متوسط تا زیاد (غالباً بیش از حدود 100 kPa) انجام شده است. ضمن آنکه فرمول‌نویسی غالب مدل‌های رفتاری نیز براساس این نتایج بنا شده است. اما نتایج تجربی در تنش‌های محصورکننده‌ی کم در حد معدودی در ادبیات وجود دارد. لذا مطالعه‌ی حاضر به بررسی تجربی و تئوری وضعیت خرابی در خاک‌های ماسه‌یی در تنش‌های محصورکننده‌ی کم می‌پردازد. لذا ضمن گردآوری نتایج تجربی مهم، یک مجموعه آزمایش سه محوری زهکشی شده تحت تنش‌های محصورکننده‌ی کم (10 kPa تا 20 kPa) روی ماسه‌ی بابل‌سرا انجام شده است و در نهایت تعدادی از مدل‌های رفتاری مشهور چون ونگ، CJS، لد و نوا اعتباربخشی شده است. نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهد که اولاً، وضعیت خرابی در خاک‌های ماسه‌یی بستگی غیرخطی به تنش‌های محصورکننده داشته است و در تنش‌های محصورکننده‌ی کم، شدت این وابستگی بیشتر می‌شود. ثانیاً برای مدل‌کردن وضعیت خرابی در خاک‌های ماسه‌یی، لازم است در تعیین معادله‌ی سطح خرابی مدل رفتاری، اثر تنش‌های محصورکننده‌ی کم لحاظ شود.

Maleki_mmm@yahoo.com
AliHaqayeq@yahoo.com

واژگان کلیدی: تنش محصورکننده‌ی کم، مدل رفتاری، ماسه، وضعیت گسیختگی.

۱. مقدمه

مقاومت برشی در خاک‌های ماسه‌یی در محاسبات معمول در مهندسی ژئوتکنیک با توجه به معیار کولمب، که با زاویه‌ی اصطکاک بیشینه مشخص می‌شود، انجام می‌گیرد. فرض مهم در این معیار این است که یک رابطه‌ی خطی بین مقاومت بیشینه و تنش محصورکننده وجود دارد. نتایج تجربی زیادی در ادبیات وجود دارد که نشان می‌دهند وضعیت خرابی در خاک‌های ماسه‌یی بستگی غیرخطی به تنش محصورکننده دارد و بر همین اساس در معادله‌ی سطح خرابی در بسیاری از مدل‌های رفتاری ارائه شده برای خاک‌های ماسه‌یی، این اثر غیرخطی لحاظ شده است. غالب نتایج تجربی موجود در ادبیات حاصل از انجام آزمایش‌های سه محوری تحت تنش‌های محصورکننده‌ی زیاد (غالباً بیش از حدود 100 kPa) است اما مطالعه و نتایج کمتری در خصوص بررسی وضعیت خرابی خاک‌های ماسه‌یی تحت تنش‌های محصورکننده‌ی کم موجود است. با توجه به آنکه در بسیاری از مسائل مهندسی ژئوتکنیک، خرابی در تنش‌های محصورکننده‌ی کم اتفاق می‌افتد؛ مطالعات تجربی

همان‌طور که ملاحظه می‌شود در تمامی نمونه‌ها با کاهش تنش محصورکننده، زاویه‌ی اصطکاک داخلی بیشینه به صورت غیرخطی افزایش می‌یابد که در تنش‌های کمتر از حدود 100 کیلوپاسکال سرعت افزایش زاویه‌ی اصطکاک بیشتر است. این نتیجه بیان می‌کند که با افزایش تنش محصورکننده علی‌رغم افزایش چگالی

تاریخ: دریافت ۱۳/۱۱/۱۳۸۶، دوری ۱۷/۴/۱۳۸۷، پذیرش ۲۹/۹/۱۳۸۷.

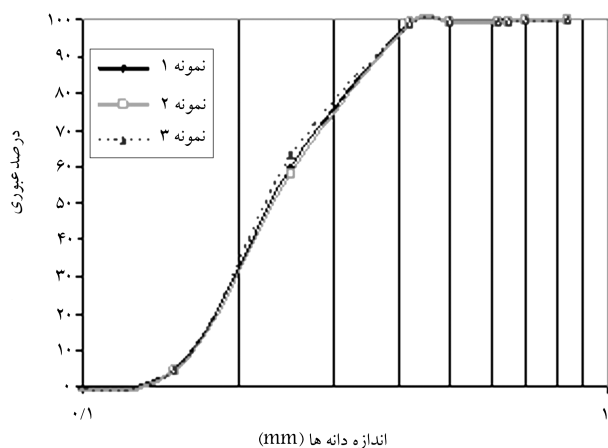
حجمی حاصله زیاد نیست. [5] در نتیجه، در اعتباربخشی مدل‌های رفتاری تحت تنش‌های جانبی کم اثر چگالی ثابت در نظر گرفته شده است، به عبارت دیگر فرض شده است که تغییرات حجمی تأثیری در وضعیت خرابی نداشته باشد. [6] در تحقیق حاضر با توجه به اهمیت موضوع و با هدف بررسی عمومیت آن، ابتدا تعدادی آزمایش سه محوری زهکشی‌شده بر روی ماسه‌ی بابلسر در چگالی‌های مختلف تحت تنش‌های محصورکننده‌ی ۱۲/۵، ۲۵، ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ کیلوپاسکال انجام شد. سپس با استفاده از نتایج گردآوری‌شده و نتایج حاصل از آزمایش‌های انجام‌شده در این تحقیق، تعدادی از مدل‌های رفتاری مشهور که بستگی سطح خرابی آن‌ها به تنش محصورکننده‌ی غیرخطی است، اعتباربخشی شدند. این مدل‌ها عبارتند از مدل ونگ، C.J.S، لد و نوآ که در هر یک از آن‌ها تأثیر تنش محصورکننده به شکلی متفاوت از دیگری اعمال شده است.

۲. نتایج تجربی در این تحقیق

ماسه‌ی مورد نظر از سواحل دریای خزر (شهرستان بابلسر)، تهیه شده است. شکل ۲ نشان‌دهنده‌ی تغییرات کم منحنی دانه‌بندی حاصل از آزمایش دانه‌بندی روی سه نمونه‌ی تصادفی از این خاک است. ماسه‌ی مورد نظر ماسه‌ی بد دانه‌بندی شده است.

بررسی‌ها نشان‌دهنده‌ی آن است که درصد عبوری این ماسه از الک ۲۰۰ بسیار ناچیز و عاری از رس و لای است. در جدول ۱، برخی از مشخصات فیزیکی ماسه‌ی بابلسر مثل چگالی دانه‌های جامد ماسه و نسبت تخلخل کمینه و بیشینه‌ی به‌دست‌آمده در آزمایشگاه ارائه شده است. ماسه‌ی مورد استفاده به‌علت برخورداری از ترکیبات کربناتی دارای چگالی ذرات جامد نسبتاً زیادی است.

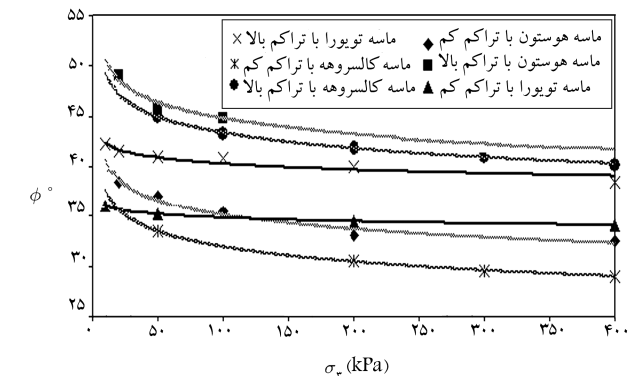
پس از تعیین مشخصات ماسه‌ی مورد نظر، با استفاده از دستگاه سه محوری دانشگاه بوعلی‌سینا نسبت به انجام یک مجموعه آزمایش زهکشی‌شده در فشار اقدام شد. این دستگاه تمام اتوماتیک است و امکان انجام آزمایش روی نمونه‌های به قطر ۷ سانتی‌متر و ارتفاع ۱۴ سانتی‌متر در شرایط مختلف بارگذاری وجود دارد.



شکل ۲. منحنی دانه‌بندی ماسه‌ی بابلسر.

جدول ۱. مشخصات فیزیکی ماسه‌ی بابلسر.

$\gamma_{d_{min}}$ (g/cm ³)	e_{max}	$\gamma_{d_{max}}$ (g/cm ³)	e_{min}	G_s
۱٫۵۱	۰٫۸	۱٫۸۱	۰٫۵	۲٫۷۲



شکل ۱. تغییرات زاویه‌ی اصطکاک داخلی در برابر تنش محصورکننده در ماسه‌های مختلف.

ناشی از این تنش، زاویه‌ی اصطکاک کاهش پیدا می‌کند، این مورد با بررسی رفتار خاک در مقیاس دانه‌های ماسه قابل بررسی است. در نقاط اتکاء دانه‌ها، افزایش تنش محصورکننده منجر به آسیب دیدگی و یا احتمالاً خردشدگی گوشه‌ها به‌خصوص گوشه‌های تیز می‌شود. از طرف دیگر تاریخچه‌ی تنش - تغییرشکل یا مسیر تنش تجربه‌شده‌ی خاک در گذشته، که منجر به یک ناهمسانی اولیه می‌شود، متأثر از اعمال تنش محصورکننده‌ی فعلی است که این می‌تواند منجر به حذف ناهمسانی ایجادشده نیز شود. در بسیاری از نهشته‌های طبیعی که به‌صورت لایه‌های متوالی افقی ایجاد شده‌اند، ناهمسانی اولیه حاصله به‌گونه‌ی است که سختی و مقاومت پیشینه‌ی ناشی از آن مربوط به جهت قائم بیش از مقادیر مربوط به سایر جهات است. در ساخت نمونه‌های آزمایش سه محوری که با اعمال تراکم به لایه‌های متوالی افقی صورت می‌گیرد نیز این ناهمسانی اولیه حاصل می‌شود. با افزایش تنش محصورکننده، اثر این ناهمسانی کم‌رنگ‌تر و یا به کلی از بین می‌رود. به‌عبارت دیگر نسبت $\frac{\sigma'_1}{\sigma'_3}$ در مرحله‌ی خرابی کاهش می‌یابد. در چارچوب مدل‌سازی رفتاری خاک‌های ماسه‌ی، سطح خرابی اهمیت ویژه‌ی دارد. در مدل‌های ارتجاعی خمیری کامل، سطح تسلیم و خرابی بر هم منطبق هستند. در واقع سطح خرابی علاوه بر بیان وضعیت مرز دامنه‌ی ارتجاعی است و هم جریان خمیری شدن به محض رسیدن وضعیت تنش به این سطح شروع می‌شود. در مدل‌های ارتجاعی خمیری با سخت‌شوندگی، سطح خرابی محدوده‌ی نهایی حرکت تسلیم را تعیین می‌کند. اصولاً وضعیت خرابی در خاک‌های ماسه‌ی بستگی به چگالی، تنش محصورکننده و مسیر تنش دارد. بدین ترتیب یک سطح خرابی مناسب، سطحی است که عوامل فوق‌الذکر را در نظر بگیرد. همان‌گونه که در پاراگراف قبل بیان شد، وضعیت خرابی در خاک‌های ماسه‌ی بستگی غیرخطی به تنش محصورکننده دارد. به‌عبارت دیگر طی مسیر سه محوری تقارن محوری، نسبت $\frac{\sigma'_1}{\sigma'_3}$ در مرحله‌ی خرابی بستگی غیرخطی به σ'_3 دارد. در مدل‌های ارتجاعی خمیری کامل مشهور چون مورکولمب و دراگر - پراگر و در بسیاری از مدل‌های با سخت‌شوندگی، نسبت $\frac{\sigma'_1}{\sigma'_3}$ در مرحله‌ی خرابی ثابت است. در تعداد دیگری از مدل‌های ارتجاعی خمیری، این اثر غیرخطی لحاظ شده است. در هر صورت پیش‌بینی مناسب رفتار خاک‌ها به‌منزله‌ی مصالح مهندسی مستلزم در نظر گرفتن چنین وابستگی است. در تنش‌های محصورکننده‌ی کم براساس نتایج تجربی تحت مسیرهای سه محوری در خاک‌های ماسه‌ی سست تمایل به حالت اتساعی مشاهده می‌شود و نمونه تغییرشکل حجمی زیادی از خود نشان نمی‌دهد. در ماسه‌های متراکم تحت تغییرشکل‌های زیاد، رفتار اتساعی موجب کرنش‌های حجمی زیادی می‌شود، گرچه در حالت خرابی (نقطه‌ی یک) کرنش

فقط اطمینان از عدم تولید فشار آب حفره‌ی اضافی کافی است. زیرا تأثیر میزان نرخ کرنش اعمال شده در رفتار تنش - کرنش خاک ماسه‌ی (برخلاف خاک‌های رسی) در بارگذاری‌های پیوسته قابل صرف نظر است. نکته‌ی مهم دیگر این است که سرعت بارگذاری به قدری کم لحاظ شود که تغییر در سرعت بارگذاری اثر مهمی در مسیر تنش نداشته باشد. همچنین تعداد متناهی آزمایش در دو چگالی فوق و تحت تنش‌های محصورکننده‌ی مختلف انجام شد. در اینجا به اختصار فقط نمودار تغییرات تنش انحرافی - کرنش محوری برای ماسه‌ی سست تحت تنش‌های محدودکننده‌ی متفاوت (۲۵، ۵۰، ۱۰۰ و ۲۰۰ کیلوپاسکال) در شکل ۳ ارائه شده است و برای سایر موارد به ارائه‌ی نقاط مربوط به وضعیت خرابی در آزمایش‌ها اکتفا شده است و برای انجام آزمایش مقدار پس فشار (فشار معکوس) به میزان ۱۰۰ کیلوپاسکال برای نمونه‌ها لحاظ شده است. در شکل ۴ تغییرات نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ در برابر σ_3 برای ماسه‌ی بابلسر در دو چگالی مختلف یعنی در نمونه با چگالی نسبی ۰/۹۰ متناظر با $e = ۰/۵۳$ و نمونه با چگالی نسبی ۰/۱۳/۳ متناظر با $e = ۰/۷۶$ نشان داده شده است.

با توجه به نتایج خروجی از آزمایش سه محوری و با استفاده از معیار کولمب و عدد تصحیح در مورد غشاء ضخم‌تر، بزرگ‌تر است.^[۱] از آنجا که تصحیح غشاء به صورت اتوماتیک با دستگاه اعمال نمی‌شود، لذا در این مطالعه تصحیح با روش توصیه‌شده‌ی دستگاه سازنده انجام و برای تصحیح غشاء از تئوری کشسانی استفاده شده است. این روش ارائه‌شده این موضوع را می‌رساند که اگر غشاء مشابه ستون کشسانی بدون کمانش عمل کند، افزایش مقاومت ناشی از غشاء لاستیکی تقریباً معادل بار متحمل توسط غشاء لاستیکی است.^[۷] اصلاح به سادگی با محاسبه‌ی نسبت بار متحمل توسط غشاء به سطح نمونه‌ی حاکی محاسبه می‌شود. از رابطه‌ی ۱ برای محاسبه‌ی مقدار تصحیح غشاء استفاده شده است:

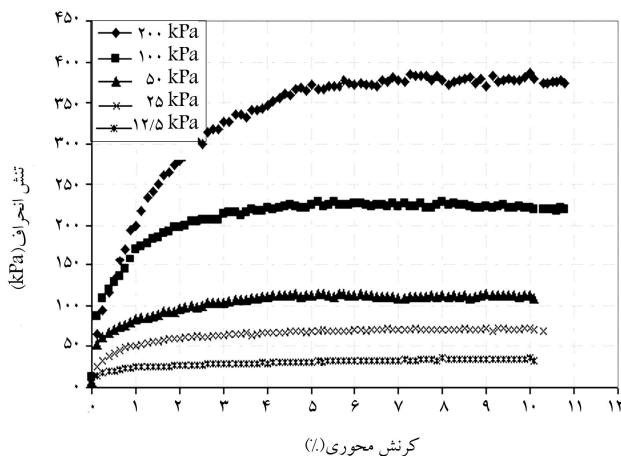
تصحیح مربوط به وزن کلاهدک به هنگام تنظیم اولیه‌ی دستگاه انجام می‌گیرد و تغییر سطح مقطع نمونه ناشی از بارگذاری انحرافی به صورت خودکار لحاظ شده و نتایج آزمایش در سیستم کامپیوتر دستگاه قابل مشاهده و ذخیره است. برای رفع آثار صفحات انتهایی، دولایه‌ی غشاء بریده‌شده به شکل دایره به قطر ۷ سانتی‌متر در بالا و دو لایه‌ی غشاء در پایین نمونه قرار داده شده است و برای رفع اصطکاک در بین غشاءهای مربوط از سیلیکون گریس استفاده شده است. در خصوص تأثیر غشاء بر نتایج آزمایش سه محوری مطالعات مختلفی صورت گرفته است. که به عنوان نمونه می‌توان به کار دانکن و سید اشاره کرد. دانکن و سید در سال ۱۹۶۷ توانستند اثر غشاء در کرنش‌های محوری و حجمی را محاسبه کنند. آنها اصلاحات را برای تنش‌های محوری و شعاعی براساس تئوری پوسته‌ها و با فرض غشاء لاستیکی کشسان خطی همسان و با نسبت پواسون ۰/۵ و با لحاظ تغییر شکل استوانه‌ی یکپوخت و بدون کمانش انجام داده‌اند.^[۷] البته $ASTM D ۴۶۷۶$ ، کرنش ناشی از غشاء را در فاز تحکیم ناچیز می‌داند و فقط اثر غشاء را در فرایند برش محسوس می‌داند.^[۸] برخی پژوهشگران بر این باورند که در محدوده‌ی تنش‌های کمتر از ۲۰۰ کیلوپاسکال، تأثیر ضخامت غشاء بر زاویه‌ی اصطکاک داخلی ماسه محسوس تر است و عدد تصحیح در مورد غشاء ضخم‌تر، بزرگ‌تر است.^[۱] از آنجا که تصحیح غشاء به صورت اتوماتیک با دستگاه اعمال نمی‌شود، لذا در این مطالعه تصحیح با روش توصیه‌شده‌ی دستگاه سازنده انجام و برای تصحیح غشاء از تئوری کشسانی استفاده شده است. این روش ارائه‌شده این موضوع را می‌رساند که اگر غشاء مشابه ستون کشسانی بدون کمانش عمل کند، افزایش مقاومت ناشی از غشاء لاستیکی تقریباً معادل بار متحمل توسط غشاء لاستیکی است.^[۷] اصلاح به سادگی با محاسبه‌ی نسبت بار متحمل توسط غشاء به سطح نمونه‌ی حاکی محاسبه می‌شود. از رابطه‌ی ۱ برای محاسبه‌ی مقدار تصحیح غشاء استفاده شده است:

$$\Delta(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{4M\varepsilon(1 - \varepsilon)}{D_S} \quad (1)$$

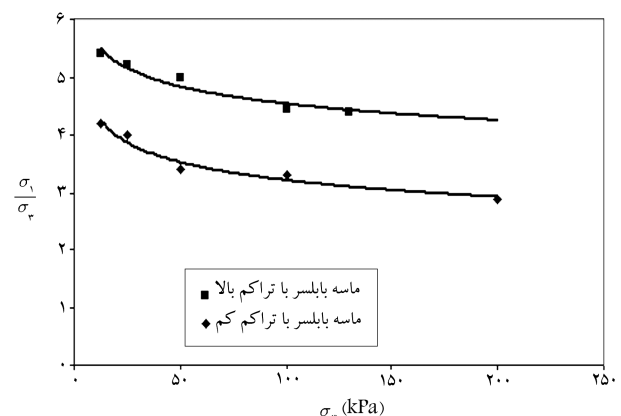
در رابطه‌ی ۱، $\Delta(\sigma_1 - \sigma_3)$ مقدار اصلاح ناشی از غشاء لاستیکی است که در هر سطح کرنش از تنش انحرافی اندازه‌گیری شده برای نمونه کم می‌شود؛ ε کرنش محوری نمونه؛ D_S قطر اولیه‌ی نمونه؛ M مدول کشسانی است که واحد آن نیرو بر طول است و مقدار آن از حاصل تقسیم نیروی کششی در واحد عرض غشاء بر کرنش محوری نمونه به دست می‌آید که برای محاسبه‌ی آن، طولی معادل ۲۰ میلی‌متر از غشاء را دور استوانه‌ی نازک می‌کشیم و نیروی کششی در واحد کرنش را برای آن تحت کشش محاسبه می‌کنیم؛ t ضخامت غشاء مورد استفاده است که برابر ۰/۳ میلی‌متر اندازه‌گیری شده است؛ E مدول یانگ غشاء است که از حاصل تقسیم M (مدول کشسانی) بر ضخامت غشاء به دست می‌آید و معادل ۱۴۰۰ کیلوپاسکال است. در نتیجه مقدار اصلاح ناشی از غشاء لاستیکی در هر سطح کرنش از رابطه‌ی ۲ به دست می‌آید:

$$\Delta(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{4E.t.\varepsilon(1 - \varepsilon)}{D_S} = \frac{4 \times 1,4 \times 0,3 \times \varepsilon(1 - \varepsilon)}{70} = 0,24\varepsilon(1 - \varepsilon) \quad (2)$$

برای ساخت نمونه‌های سست (تراکم ۰/۱۳/۳) و متراکم (تراکم ۰/۹۰)، از روش کوبش مرطوب استفاده شده است. ماسه در ۵ لایه در قالب ریخته شده و در نمونه‌ی سست هر لایه با ۵ ضربه و در نمونه‌ی متراکم هر لایه با ۲۵ ضربه‌ی کوبه متراکم شده است. آزمایش‌ها به صورت کرنش کنترل انجام و برای عملیات زهکشی، نرخ کرنش ۰/۱۵٪ در دقیقه اعمال شده است. قابل ذکر است در انتخاب نرخ کرنش



شکل ۳. نمودار تغییرات تنش انحرافی در برابر کرنش محوری برای ماسه‌ی سست بابلسر ($e = ۰/۷۶$).



شکل ۴. تغییرات نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ در برابر σ_3 برای ماسه‌ی بابلسر در دو نمونه با چگالی نسبی ۰/۱۳/۳ و ۰/۹۰.

از مفاهیم مختلف و نیز در تعداد جنبه‌ی رفتاری در نظر گرفته شده دارد. در تعداد خیلی زیادی از این مدل‌ها نسبت $\frac{\sigma'_1}{\sigma'_3}$ در مرحله‌ی خرابی ثابت است و هیچ‌گونه وابستگی به σ'_3 وجود ندارد. مثلاً می‌توان به مدل‌های مورکولمب، دراکر پراگر، قابوسی و کیم، ورمیر و... اشاره کرد. نتایج تجربی نشان می‌دهند که این مدل‌ها قابلیت بیان وضعیت خرابی خاک‌های ماسه‌یی در تنش‌های محصورکننده‌ی کم را ندارند. در تعدادی از مدل‌های پیشرفته مثل مدل‌های ونگ، CJS، لد و نوا، این وابستگی غیرخطی است، لذا اعتبار بخشی آن‌ها برای حالت تنش‌های محصورکننده‌ی کم در این نوشتار مدنظر قرار گرفته است. در زیر معادله‌ی سطح خرابی این مدل‌ها ارائه می‌شود.

۱.۳. سطح خرابی در مدل ونگ

پژوهشگران مدلی را ارائه کردند که سطح خرابی آن تابعی غیرخطی از تنش‌های محصورکننده است، معادله‌ی سطح خرابی این مدل به صورت رابطه‌ی ۳ است: [۱۰]

$$q = \left[M + \beta \left(\sqrt{\frac{P'_C}{P'}} - 1 \right) \right] P' \quad (3)$$

که در آن، q تنش انحرافی؛ P' تنش متوسط ($P' = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3}{3}$)؛ و P'_C با توجه به چگالی و مشخصات ماسه از رابطه‌ی ۴ محاسبه می‌شود:

$$P'_C = P_a \left(\frac{e_0 - e}{\lambda_s} \right)^{1/\xi} \quad (4)$$

در رابطه‌ی ۴، e ، λ_s و ξ ثابت‌های مربوط به وضعیت بحرانی برای ماسه هستند؛ و e نسبت تخلخل جاری ماسه‌ی موردنظر است.

در این نوشتار با توجه به آنکه کرنش حجمی در مرحله‌ی خرابی برای ماسه‌های سست و متراکم تحت تنش‌های محصورکننده کم است، [۵] لذا سطح خرابی مستقل از چگالی لحاظ شد. بدین ترتیب کافی است فقط پارامترهای P'_C ، β و M تعیین شود. برای سادگی در مقایسه‌ی مدل‌ها با یکدیگر و اینکه تأثیر تنش محصورکننده مدنظر است، پارامتر P'_C به منزله‌ی پارامتری ثابت در نظر گرفته می‌شود.

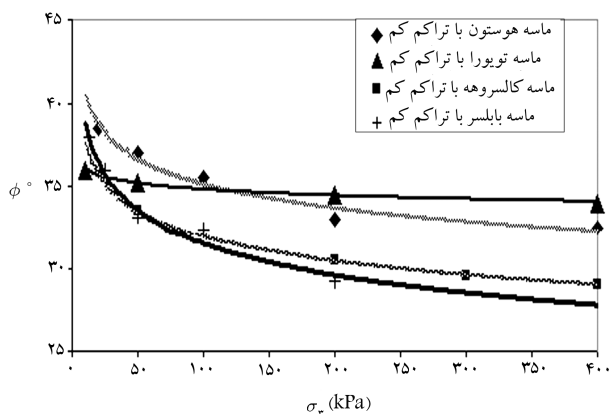
۱.۱.۳. تعیین پارامترهای سطح خرابی مدل ونگ

پارامترهای موجود عبارتند از M ، β و P'_C که برای هر یک از ماسه‌های تویورا، هوستون و بابلرس به شرح ذیل تعیین می‌شوند. M ، شیب خط حالت بحرانی در پلان $q' - p'$ است که رابطه‌ی آن با $\sin \phi_{cr}$ مطابق رابطه‌ی ۵ است:

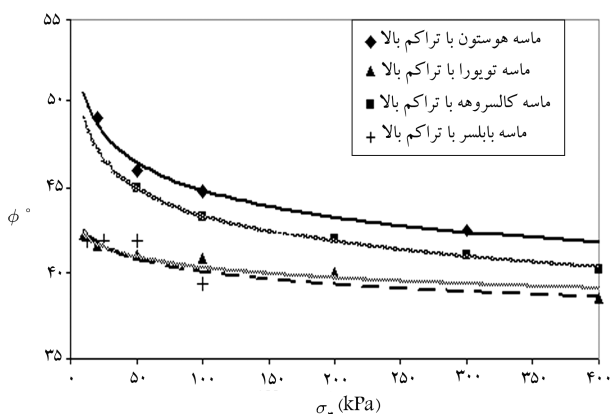
$$M = \frac{6 \sin \phi_{cr}}{3 - \sin \phi_{cr}} \quad (5)$$

مقدار M در ماسه‌ی تویورا برابر ۱٫۳، [۱۰] در ماسه‌ی هوستون برابر ۱٫۲۵، [۱۱] و در ماسه‌ی بابلرس با توجه به نتایج به دست آمده ۱٫۲ در نظر گرفته می‌شود.

پارامتر β ، کنترل‌کننده‌ی تأثیر تنش متوسط در معادله‌ی سطح خرابی است و پارامتری مستقل از چگالی و ثابت است که براساس نتایج آزمایش سه محوری برای ماسه به دست می‌آید. [۵] با توجه به این که به ازاء $\sigma'_3 = 600 \text{ kpa}$ در مرحله‌ی خرابی، مقدار P' معادل P'_C خواهد بود، پس برای هر سه ماسه با استفاده از مقدار شیب خط حالت بحرانی مربوط و رابطه‌ی ۵ مقدار زاویه‌ی اصطکاک داخلی بحرانی هر ماسه به دست می‌آید، با استفاده از رابطه‌ی $\frac{\sigma'_1}{\sigma'_3} = \frac{1 + \sin \phi_{cr}}{1 - \sin \phi_{cr}}$ محاسبه می‌شود و با $\frac{\sigma'_1}{\sigma'_3} = 600 \text{ kpa}$ مقدار σ'_1 متناظر محاسبه می‌شود و با مقادیر به دست آمده، مقدار $P' = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3}{3}$ محاسبه می‌شود. P' به دست آمده



شکل ۵. تغییرات زاویه‌ی اصطکاک داخلی بیشینه بر حسب σ_p در ماسه‌های سست.



شکل ۶. تغییرات زاویه‌ی اصطکاک داخلی بیشینه بر حسب σ_p در ماسه‌های با تراکم بالا (وضعیت متراکم).

از اتصال نقاط متناظر با تنش‌های محصورکننده‌ی مختلف، منحنی تغییرات زاویه‌ی اصطکاک داخلی در برابر تنش محدودکننده برای ماسه‌ی بابلرس در کنار منحنی مربوط به ماسه‌ی هوستون، تویورا و کارلسروهه در اشکال ۵ و ۶ رسم شده است. شکل ۵ مربوط به نتایج ماسه‌های با تراکم کم و شکل ۶، مربوط به نتایج ماسه‌های با تراکم بالا است. همان‌طور که در اشکال ۵ و ۶ مشاهده شد، با افزایش تنش محدودکننده، زاویه‌ی اصطکاک داخلی به صورت غیرخطی کاهش می‌یابد که این تغییرات در ماسه‌ی بابلرس نزدیکی بیشتری به ماسه‌ی تویورا دارد، که عامل آن نزدیکی منحنی دانه‌بندی دو ماسه است. [۹]

۳. تنوع در معادله‌های سطوح گسیختگی ماسه‌ها

یکی از المان‌های اساسی در مدل‌های رفتاری خاک‌ها معادله‌ی سطح خرابی است. سطح خرابی در مدل‌های رفتاری کلاسیک غالباً با توجه به نتایج آزمایش سه محوری تقارن محوری و در محدوده‌ی تنش‌های محصورکننده‌ی ۱۰۰ کیلو پاسکال و بیشتر از آن ارائه شده‌اند. این نتایج نشان داده‌اند که وضعیت سطح خرابی بستگی به تنش محصورکننده، چگالی و مسیر تنش دارد و این وابستگی‌ها عموماً به صورت غیرخطی هستند. امروزه پژوهشگران مدل‌های رفتاری متنوع و گوناگونی برای بیان رفتار تنش - تغییر شکل ماسه‌ها ارائه کرده‌اند. تفاوت در این مدل‌ها، در نوع فرمول نویسی و استفاده

جدول ۳. مقادیر m و η در مدل لد برای سه نوع ماسه‌ی مختلف.

η	m	نوع ماسه
۶۵	۰٫۳۵۷	ماسه‌ی متراکم بابلسر
۳۹	۰٫۴۵۷	ماسه‌ی سست بابلسر
۴۶	۰٫۱	ماسه‌ی متراکم توپورا
۲۸	۰٫۱۲	ماسه‌ی سست توپورا
۹۲	۰٫۲۵۶	ماسه‌ی متراکم هوستون
۴۴	۰٫۳۵۲	ماسه‌ی سست هوستون

در رابطه‌ی ۷، S_{II} نامتغیر دوم تانسور تنش انحرافی است که از رابطه‌ی ۸ به دست می‌آید:

$$S_{II} = \sqrt{S_{ij}S_{ij}} \quad (۸)$$

در رابطه‌ی ۸، $S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$ است. در معادله‌ی سطح خرابی مقدار R_r از رابطه‌ی ۹ محاسبه می‌شود:

$$R_r = R_{cr} + \mu \ln \left(\frac{P_{cr}}{P} \right) \quad (۹)$$

در رابطه‌ی ۹، R_{cr} یک پارامتر مدل و بیان کننده‌ی شعاع متوسط سطح حالت بحرانی و μ نیز یک پارامتر مدل است و P_{cr} نیز از رابطه‌ی ۱۰ به دست می‌آید:

$$P_{cr} = P_{cro} \exp(c \cdot \varepsilon_p^p) \quad (۱۰)$$

در رابطه‌ی ۱۰، P_{cro} فشار بحرانی اولیه؛ $\frac{1}{e}$ شیب خط حالت بحرانی در پلان $(Ln P_{cr} - \varepsilon_p)$ است. $h(\theta_s)$ در رابطه‌ی ۱۱ متغیری است که شکل سطح خرابی را تابعی از زاویه‌ی لود بیان می‌کند و به صورت رابطه‌ی ۱۱ ارائه شده است:

$$h(\theta_s) = (1 - \gamma \cos 3\theta_s)^{\frac{1}{2}} \quad (۱۱)$$

در رابطه‌ی ۱۱، θ_s زاویه‌ی لود و γ پارامتر مدل است. برای تنش‌های محصورکننده‌ی کم ($P \leq P_m$)، مقدار R_r از معادله‌ی ۱۲ تعیین می‌شود:

$$R_r = R_{cr} + \mu \ln \left(\frac{P_f}{P_m} \right) \frac{\ln \left(\frac{P_{cr}}{P} \right)}{\ln \left(\frac{P_f}{P} \right)} \quad (۱۲)$$

در این نوشتار با توجه به آنکه کرنش حجمی در مرحله‌ی خرابی برای ماسه‌های سست و متراکم تحت تنش‌های محصورکننده کم است، [۶۵] لذا می‌توان سطح خرابی را مستقل از چگالی در نظر گرفت. پارامترهای p_m و p_f از رابطه‌های ۱۳ و ۱۴ محاسبه می‌شوند:

$$p_m = p_a \ln \left(\frac{p_{cr} + p_a}{p_a} \right) \quad (۱۳)$$

$$p_f = 5p_{cr} \quad (۱۴)$$

همان P'_C است حال برای نقطه‌ی دیگر مثل $\sigma'_1, \sigma'_3 = 200 \text{ kpa}$ متناظر محاسبه می‌شود و q, P' متناظر با آن را به همراه P'_C به دست آمده از نقطه‌ی قبلی در رابطه‌ی ۳ می‌گذاریم تا پارامتر β برای هر ماسه حاصل شود، ضریب β برای ماسه‌ی توپورا معادل 0.7 ، برای ماسه‌ی بابلسر 0.8 و برای ماسه‌ی هوستون 0.5 لحاظ شده است. [۱۱] تغییرات ضریب P'_C در جدول ۲ آمده است. در نهایت می‌توان برای تنش‌های محصورکننده‌ی مختلف مدل را اعتباربخشی کرد، به طوری که مقادیر P' و q متناظر با هر تنش محصورکننده در هر نوع ماسه قابل محاسبه است.

۲.۳. سطح خرابی در مدل لد

برای نشان دادن تأثیر تنش میانی (σ_2)، در رفتار خاک و براساس نتایج آزمایش سه محوری واقعی، یک معیار گسیختگی ارائه شده است. [۱۲] سطح خرابی در این مدل به گونه‌ی است که وابستگی غیرخطی رفتار ماسه را به تغییرات تنش در وضعیت خرابی نشان می‌دهد. سطح خرابی این مدل عبارت است از:

$$F = \left(\frac{I_1^2}{I_3} - 27 \right) \cdot \left(\frac{I_1}{P_a} \right)^m = \eta \quad (۶)$$

در رابطه‌ی ۶، $I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ ، $I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ است که σ_1 و σ_2 و σ_3 سه تنش اصلی هستند؛ m و η پارامترهای ثابت مدل هستند که با توجه به چگالی تغییر می‌کنند.

در این نوشتار با توجه به آنکه کرنش حجمی در مرحله‌ی خرابی برای ماسه‌های سست و متراکم تحت تنش‌های محصورکننده کم است. [۶۵] لذا سطح خرابی مستقل از چگالی لحاظ شده و پارامترهای مدل به صورت ثابت قابل محاسبه هستند.

۱.۲.۳. نحوه‌ی تعیین پارامترهای سطح خرابی

مقادیر پارامترهای m و η با استفاده از مقادیر تنش انحرافی متناظر با تنش میانگین مؤثر در دو نقطه از نتایج تجربی به دست می‌آید که در این تحقیق از تنش میانگین 100 و 200 کیلو پاسکال برای تعیین پارامترها استفاده شده است. مقدار پارامتر m و η در ماسه‌های مختلف در جدول ۳ ارائه شده است.

۳.۳. سطح خرابی در مدل CJS

مدل CJS یک مدل ارتجاعی - خمیری است که برای مصالح دانه‌ی بی‌ارانه، [۱۳] و سپس توسعه داده شده است. [۱۱] معادله‌ی سطح خرابی در این مدل از رابطه‌ی ۷ به دست می‌آید:

$$f^r = S_{II} \cdot h(\theta_s) - R_r \cdot I_1 = 0 \quad (۷)$$

جدول ۲. مقادیر P'_C در مدل ونگ برای سه نوع ماسه‌ی مختلف.

P'_C (kpa)	نوع ماسه
۱۵۲۱۴	ماسه‌ی متراکم بابلسر
۶۶۶	ماسه‌ی سست بابلسر
۱۴۸۱۸	ماسه‌ی متراکم توپورا
۱۰۶۴	ماسه‌ی سست توپورا
۶۸۰۷۵	ماسه‌ی متراکم هوستون
۱۰۲۸	ماسه‌ی سست هوستون

جدول ۵. مقادیر m و P_u در مدل نوا در سه نوع ماسه‌ی مختلف.

P_u	m	نوع ماسه
۲۲۰۳	۰٫۱۷۵	ماسه‌ی متراکم بابلسر
۲۷۹	۰٫۲۱۷	ماسه‌ی سست بابلسر
۳۱۹۵۸۶	۰٫۰۵۱	ماسه‌ی متراکم توپورا
۲۳۷۱	۰٫۰۵۲	ماسه‌ی سست توپورا
۵۶۹۸۲۱	۰٫۰۵۵	ماسه‌ی متراکم هوستون
۱۵۶۲	۰٫۰۴۷	ماسه‌ی سست هوستون

در رابطه‌ی ۱۹، مقدار پارامتر P_c از رابطه‌ی ۲۰ به دست می‌آید:

$$P_c = P_{c^*} \exp\left(\frac{\varepsilon_v^p + D\varepsilon_d^p}{l - B_s}\right) \quad (20)$$

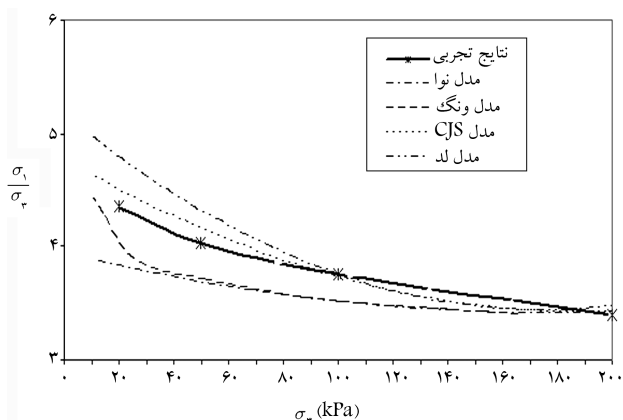
در این نوشتار با توجه به آنکه کرنش حجمی در مرحله خرابی برای ماسه‌های سست و متراکم تحت تنش‌های محصورکننده کم است،^[۲۳] لذا می‌توان سطح خرابی را مستقل از دانسیته لحاظ نمود.

در این تحقیق برای تعیین پارامترهای اصلی مدل یعنی P_u و m در ماسه‌ها از مشخصات دو آزمایش سه محوری در تنش جانبی ۱۰۰ و ۲۰۰ کیلوپاسکال استفاده شده است. مقدار پارامترهای m و P_u در جدول ۵ برای ماسه‌های مختلف ارائه شده است.

۴. اعتبار بخشی مدل‌های رفتاری

با توجه به مقادیر پارامترهای حاصله در قسمت ۳، مدل‌های فوق برای مقادیر تنش محصورکننده کمتر از $\sigma'_p = 200 \text{ kPa}$ اعتبار بخشی شدند. بدین ترتیب به ازاء یک مقدار مشخص σ'_p ، با استفاده از معادله‌ی سطح خرابی میزان σ'_1 نظیر آن به دست آمده است. نتایج حاصله در مختصات $\frac{\sigma'_1}{\sigma'_p}$ بر حسب σ'_p در حالت متراکم و سست به‌طور مجزا ترسیم شده است. در شکل ۷ نتایج اعتبار بخشی مدل‌ها برای ماسه‌ی سست هوستون ارائه شده است.

مشاهده می‌شود که تا $\sigma'_p = 50 \text{ kPa}$ مدل CJS انطباق مناسبی با منحنی تجربی دارند و در تنش محصورکننده‌ی کمتر، این دو مدل به‌خصوص مدل لد مقاومت بیشتری را بیش از نتایج تجربی ارائه می‌دهند. مدل‌های ونگ و نوا در مجموع وضعیت



شکل ۷. تغییرات نسبت $\frac{\sigma'_1}{\sigma'_p}$ در برابر σ'_p برای ماسه‌ی هوستون با تراکم کم.

در رابطه‌های ۱۳ و ۱۴، $m = 5$ در نظر گرفته شده است. P_a فشار مرجع معادل $P_a = 100 \text{ kPa}$ است. در شرایط سه محوری تقارن محوری می‌توان نوشت:

$$\sigma'_1 = \sigma'_p$$

$$P = \frac{\sigma'_1 + 2\sigma'_p}{3}$$

$$S_{II} = \sqrt{\frac{2}{3}} |\sigma'_1 - \sigma'_p| = \sqrt{\frac{2}{3}} |q|$$

$$\theta_s = 0 \Rightarrow h(\theta_s) = (1 - \gamma)^{\frac{1}{2}} \quad (15)$$

پارامترهای R_{cr} و γ در شرایط سه محوری مرتبط با ϕ_{cr} هستند:^[۱۱]

$$R_{cr} = 2 \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\sin \phi_{cr}}{3 - \sin \phi_{cr}} (1 - \gamma)^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

$$\left(\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{3 - \sin \phi_{cr}}{3 + \sin \phi_{cr}} \quad (17)$$

با توجه به اینکه عملکرد مدل در مسیر سه محوری در فشار بررسی می‌شود، می‌توان مقدار یکسانی برای γ در همه‌ی ماسه‌های مورد نظر لحاظ کرد. این مقدار معادل ۰٫۸ در نظر گرفته شده است. پارامتر c برای ماسه‌ی هوستون برابر ۲۵^[۱۱]، همچنین پارامتر μ برای ماسه‌ی هوستون معادل ۰٫۵۴، برای ماسه‌ی توپورا ۰٫۱۸ و برای ماسه‌ی بابلسر ۰٫۴۶ اعمال شد.^[۱۱] با استفاده از مقادیر M و از رابطه‌ی ۴ مقادیر ϕ_{cr} برای هر یک از ماسه‌ها معلوم می‌شود. حال با استفاده از رابطه‌ی ۱۶، مقدار R_{cr} ماسه‌ها که مستقل از چگالی است حاصل می‌شود، با استفاده از رابطه‌ی ۷ برای تنش محصورکننده‌ی 200 kPa ، مقادیر P_{cro} مربوط به هر یک از ماسه‌ها در حالت متراکم و سست معلوم خواهد شد. برای این کار، R_r از رابطه‌ی ۹ محاسبه و با توجه به معلوم بودن سایر پارامترها، P_{cro} تعیین می‌شود. در جدول ۴ مقادیر پارامترهای R_r و P_{cr} به دست آمده برای سه ماسه‌ی مورد نظر ارائه شده است.

۴.۳. مدل نوا

این مدل رابطه‌ی سطح تسلیم را به شکل رابطه‌ی ۱۸ بیان می‌کند:^[۱۲]

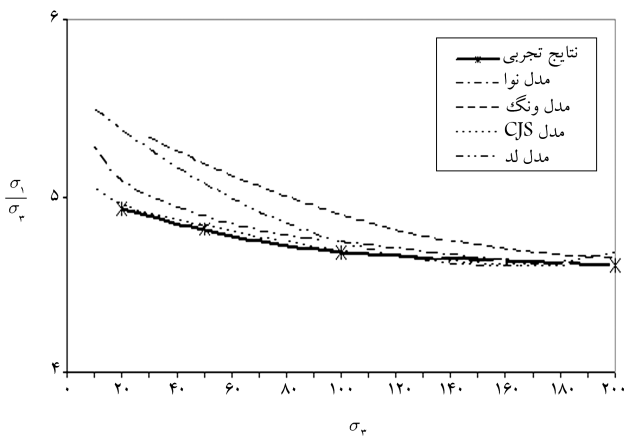
$$F = \frac{q}{p} - M + m \ln\left(\frac{p}{p_u}\right) = 0 \quad (18)$$

سایر پارامترهای مربوط به سطح خرابی این مدل را می‌توان از رابطه‌ی ۱۹ به دست آورد:^[۱۲] در رابطه‌ی ۱۸ مقدار پارامتر P_u برابر است با:

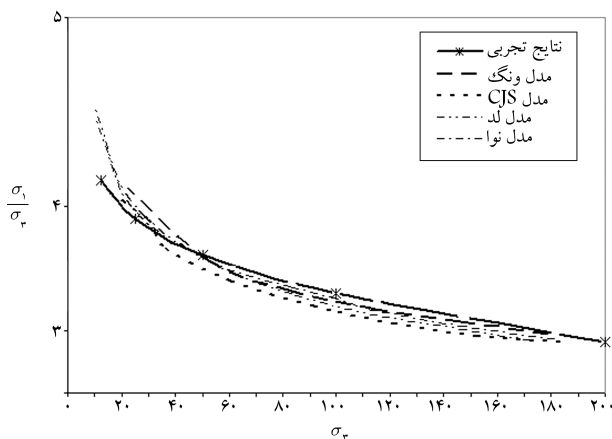
$$P_u = \frac{P_c}{\sqrt{1 + \mu}} \exp\left(\frac{-M}{2m}\right) \quad (19)$$

جدول ۴. مقادیر پارامترهای R_{cr} و P_{cr} در مدل CJS برای سه نوع ماسه‌ی مختلف.

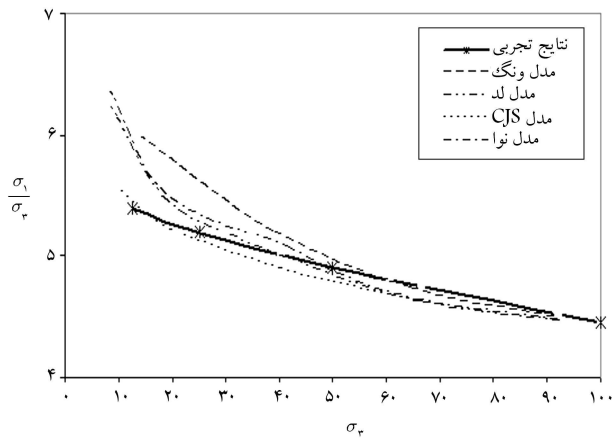
P_{cr} (kPa)	R_{cr}	نوع ماسه
۳۰۰۰	۰٫۲۲۴	ماسه‌ی متراکم بابلسر
۴۰۰	۰٫۲۲۴	ماسه‌ی سست بابلسر
۱۰۰۰۰	۰٫۲۸۵	ماسه‌ی متراکم توپورا
۲۵۰	۰٫۲۸۵	ماسه‌ی سست توپورا
۳۰۰۰	۰٫۲۷۲	ماسه‌ی متراکم هوستون
۲۵۰	۰٫۲۷۲	ماسه‌ی سست هوستون



شکل ۱۰. تغییرات نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ در برابر σ_3 برای ماسه‌ی تویورا با تراکم بالا.



شکل ۱۱. تغییرات نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ در برابر σ_3 برای ماسه‌ی بابلسر با تراکم کم.

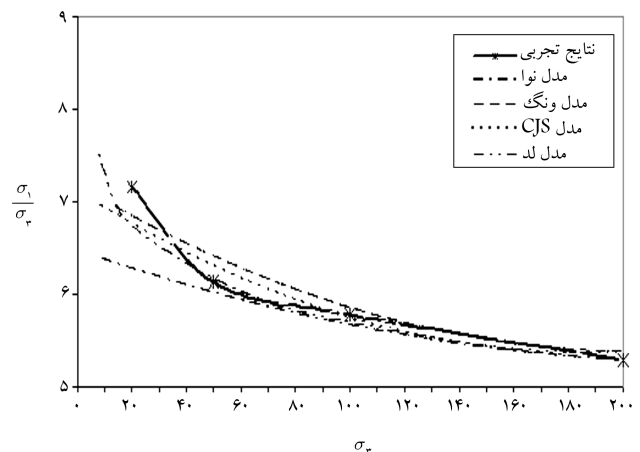


شکل ۱۲. تغییرات نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ در برابر σ_3 برای ماسه‌ی بابلسر با تراکم بالا.

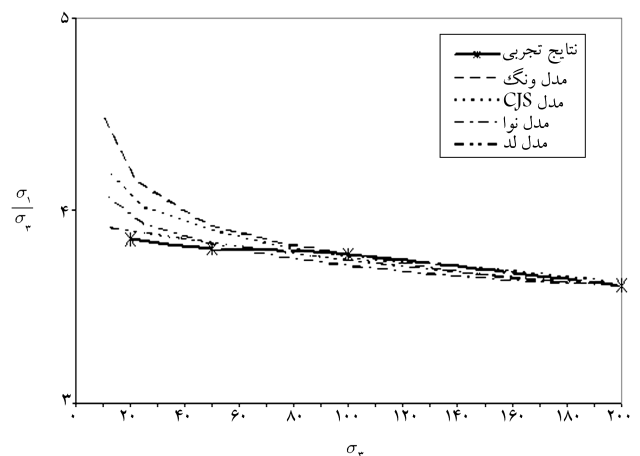
لد و نوا در مقایسه با نتایج تجربی حاصل از آزمایش سه محوری زهکشی شده بر ماسه‌ی بابلسر را نشان می‌دهند. با توجه به اینکه در تنش‌های محصورکننده‌ی کم، حتی خاک‌های ماسه‌یی سست رفتار اتساعی از خود نشان می‌دهند لذا تغییرات حجم کنترل‌کننده فشار بحرانی P_c' (در مدل‌های ونگ و CJS) و P_{te}' در مدل نوا، تا مرحله‌ی گسیختگی تغییرات زیادی ندارند و لذا در مجموعه‌ی اعتبار بخشی‌ها، این فشارها به صورت ثابت در نظر گرفته می‌شوند.

خرابی $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ را کمتر بیان می‌کنند. البته در σ_3' های کم مدل CJS بیشترین نزدیکی را با نتایج تجربی دارد. شکل ۸ تغییرات نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ در برابر σ_3' برای حالت متراکم به دست آمده از نتایج چهار مدل غیرخطی ونگ، CJS، لد و نوا در مقایسه با نتایج تجربی حاصل از آزمایش سه محوری زهکشی شده روی ماسه‌ی هوستون را نشان می‌دهند. انطباق خوب نتایج تجربی با مدل‌های ارائه شده قابل توجه است. نکته‌ی حائز اهمیت در بررسی اشکال این است که در محدوده‌ی تنش‌های محصورکننده بیشتر از $\sigma_3' = 50$ kpa انطباق مدل‌های عددی با نتایج آزمایشگاهی بسیار بیشتر از میزان این انطباق در محدوده‌ی تنش‌های محصورکننده‌ی کمتر از $\sigma_3' = 50$ kpa است. این نکته، لزوم بررسی رفتار ماسه در محدوده‌ی تنش‌های کم را بیشتر توجیه می‌کند. شکل‌های ۹ و ۱۰ تغییرات نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ در برابر σ_3' برای حالات با تراکم کم و تراکم بالا به دست آمده از نتایج چهار مدل غیرخطی ونگ، CJS، لد و نوا در مقایسه با نتایج تجربی حاصل از آزمایش سه محوری زهکشی شده بر ماسه‌ی تویورا را نشان می‌دهند.

تا $\sigma_3' = 50$ kpa سه مدل CJS، لد، و نوا پیش‌بینی خوبی ارائه داده‌اند ولی برای σ_3' در محدوده‌ی ۲۰ تا ۵۰ کیلو پاسکال، مدل CJS بهترین انطباق را با روند منحنی تجربی طی می‌کند. مدل ونگ در کل مقاومت بیشینه را بیش از نتایج تجربی پیش‌بینی می‌کند. همین‌طور شکل‌های ۱۱ و ۱۲ تغییرات نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ در برابر σ_3' برای حالت سست و متراکم به دست آمده از نتایج چهار مدل غیر خطی ونگ، CJS،



شکل ۸. تغییرات نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ در برابر σ_3 برای ماسه‌ی هوستون با تراکم بالا.



شکل ۹. تغییرات نسبت $\frac{\sigma_1}{\sigma_3}$ در برابر σ_3 برای ماسه‌ی تویورا با تراکم کم.

۵. نتیجه‌گیری

در بسیاری از سازه‌ها در مهندسی ژئوتکنیک میدان تنش - تغییرشکل ایجاد شده در محدوده‌ی تنش‌های محصورکننده‌ی کم ایجاد می‌شود که از آن جمله می‌توان به شیب‌ها، پی‌های سطحی کوچک، نواحی سطحی در خاک‌ریزها و غیره اشاره کرد. بنابراین بررسی رفتار مصالح زمین تحت این محدوده از تنش محصورکننده دارای اهمیت خواهد بود. در این خصوص مطالعه‌ی خاک‌های ماسه‌یی که رفتار آن‌ها به شدت وابسته به تنش‌های محصورکننده است، اهمیت بیشتری دارد. لذا پژوهش حاضر به این موضوع اختصاص یافت که پس از جمع‌آوری نتایج تجربی موجود در ادبیات و انجام یک مجموعه آزمایش‌های سه محوری و نهایتاً اعتباربخشی تعدادی از مدل‌های رفتاری مشهور نتایج زیر حاصل شد:

۱. نتایج آزمایش سه محوری زهکشی شده نشان می‌دهند که با افزایش مقدار تنش محصورکننده، مقدار زاویه‌ی اصطکاک داخلی بیشینه‌ی ماسه کاهش می‌یابد.

این کاهش در محدوده‌ی تنش‌های محصورکننده‌ی کم شدت بیشتری دارد.

۲. در تنش‌های محصورکننده‌ی کم براساس نتایج تجربی موجود در ادبیات، تحت مسیرهای سه محوری در خاک‌های ماسه‌یی سست تمایل به حالت اتساعی در تغییرشکل‌های بزرگ مشاهده می‌شود و وابستگی شدیدتری به میزان تنش محصورکننده وجود دارد.

۳. وابستگی وضعیت خرابی به تنش محصورکننده غیرخطی است و هر چه مقدار تنش محصورکننده کمتر می‌شود شدت غیرخطی بودن افزایش می‌یابد.

۴. مدل‌های رفتاری که سطح خرابی در آن‌ها تابع خطی از تنش محصورکننده است (مانند مدل مورکولمب، ورمیر و...) امکان بیان وضعیت خرابی خاک وجود نخواهد داشت.

۵. عملکرد مدل‌های رفتاری که در آن‌ها اثر غیرخطی وابستگی به تنش محصورکننده لحاظ شده است، بستگی به نوع مفاهیم به‌کاررفته در فرمول نویسی مدل داشته‌اند و به همین دلیل در بیان وضعیت خرابی نتایج متفاوت و نسبتاً پراکنده‌یی ارائه می‌دهند.

منابع

1. Tatsuoka, F.; Sakamoto, M.; Kawamura, T. and Fukushima, S. "Strength and deformation characteristics of sand in plane strain compression at extremely low pressures", *Soils and Foundations*, **26**(1), pp. 65-84 (1986).
2. Fukushima, S. and Tatsuoka, F. "Strength and deformation characteristics of saturated sand at extremely low pressures", *Soils and Foundations*, **24**(4), pp. 30-48 (1984).
3. Kolymbas, D. and Wu, W. "Recent results of triaxial tests with granular materials", *Soils-Forschung and Praxis*, 88, University of Karlsruhe, pp. 99-117 (1988).
4. Al Mahmoud, M. "Etude en laboratoire du comportement des sables sous faibles contraintes.", *PhD dissertation*, univ. of Lille, Lille France (1997).
5. Ishihara, K. "Liquefaction and flow failure during earthquakes", *Geotechnique*, **43**(3), pp. 351-415 (1993).
6. Mohkam, M. "Contribution a l'etude experimentale et theorique du comportement des sables sous chargements cycliques, These de doctorat", *Ins. Natio. Poly. de Grenoble* (1983).
7. Henkel, D.J. and Gilbert, G.D. "The effect of the rubber membrane on the measured triaxial compression

strength of clay samples", *Geotechnique*, **3**(1), pp. 20-29 (1952).

8. ASTM D-4676 "Standard classification for rubber compounding materials antidegradants" (1994).
9. Sahaphol, T. and Miura, S. "Shear moduli of volcanic soils", *J. Soil Dynamics and Earthquake Eng.* (2004).
10. Wang, Z.L.; Dafalias, Y.F.; Li, X.S. and Makadisi, F.I. "State pressure index for modeling of sand behavior", *J. Geotech and Geoenviron Eng.*, **128**(6), pp. 511-519 (2002).
11. Maleki, M.; Dubujet, D. and Cambou, B. "Modelisation hierarchise'e du comportement des sols", *Revue Francaise de Genie Civil*, **4**(7-8), pp. 895-928 (2000).
12. Lade, P.V. "Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces", *Journal of Geotechnical Engineering*, **108**(9), pp. 997-1013 (1977).
13. Cambou, B. and Jafari, K. "A constitutive model for granular materials based on two plasticity mechanisms, constitutive equations for granular non-cohesive soils", *Sada & Bianchini, Balkema, Rotterdam*, pp. 149-167 (1989).
14. Nova, R. "A model of soil behavior in plastic and hysteretic ranges", *International Workshop on Constitutive Behavior of Soils*, Grenoble, pp. 289-309 (1982).