

# تحلیل اجزاء محدود رشد ترک دینامیکی با استفاده از روش مش بندی مجدد در نمونه‌ی DCB تحت بارگذاری‌های جابه‌جایی ثابت و نیرو ثابت

امیررضا شاهانی (استاد)

محمد رضا امینی فسخودی (دانشجوی دکتری)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

در این نوشتار رشد ترک دینامیکی به روش اجزاء محدود و با تکنیک شبکه‌بندی مجدد<sup>۱</sup> در مود یک شکست بررسی شده و مورد تحلیل قرار گرفته است. تحلیل در حالت کشسانی خطی و در یک نمونه تیر یک سرگیردار دوگانه<sup>۲</sup> (DCB) تحت شرایط بارگذاری جابه‌جایی ثابت و نیرو ثابت به‌طور جداگانه انجام شده است. رشد ترک به صورت مرحله به مرحله و طی فرایندی کاملاً خودکار صورت می‌گیرد به این شکل که در هر گام زمانی، سرعت رشد ترک و موقعیت نوک ترک با استفاده از معیار چقرمگی شکست دینامیکی تعیین می‌شود و نهایتاً هندسه‌ی جدید مدل به دلیل پیش روی ترک به دست می‌آید. شبکه‌بندی هندسه‌ی جدید براساس موقعیت نوک ترک در هر لحظه و بر پایه‌ی استفاده از المان‌های منفرد در نوک ترک انجام می‌شود. به علاوه، به دلیل وجود اثرات اینرسی به واسطه‌ی دینامیکی بودن تحلیل، انتقال اطلاعات از شبکه‌ی قبلی به شبکه‌ی فعلی ضروری است. به‌طور کلی تحلیل مسئله و به دست آوردن پارامترهایی همانند ضریب شدت تنش نوک ترک با استفاده از کد استاندارد ANSYS V7<sup>۳</sup> صورت گرفته است. چون این نرم‌افزار فاقد امکانات لازم برای تحلیل رشد ترک – به‌ویژه رشد ترک دینامیکی – است، مراحل گوناگون و طولانی شبیه‌سازی مسئله از طریق کدنویسی APDL در محیط نرم‌افزار انجام شده است و نهایتاً نتایج حاصله با نتایج موجود در منابع مختلف مقایسه شده است.

واژگان کلیدی: تیر یک سرگیردار دوگانه، رشد ترک دینامیکی، روش اجزاء محدود، شبکه‌بندی مجدد.

shahani@kntu.ac.ir  
mdr\_amin@yahoo.com

## ۱. مقدمه

رشد ترک دینامیکی از پدیده‌های مخرب و ناخواسته‌ای است که پیش‌بینی آن به‌ویژه در مواد ترد به‌منظور جلوگیری از شکست سریع مواد حائز اهمیت است. در زمینه‌ی تحلیل نظری رشد ترک دینامیکی در نمونه‌های تیر یک سرگیردار دوگانه (DCB) پکارهایی انجام شده است که در آنها با استفاده از فرضیات تیر اولر – برنولی و نیز از طریق معادله‌ی موازنه‌ی انرژی، معادله‌ی مربوط به موقعیت و سرعت رشد ترک به دست آمده است.<sup>[۱]</sup> به دلیل استفاده از فرضیه‌ی تیر اولر – برنولی در تحلیل کائین، اثر ضخامت و همچنین اثر تغییر شکل برشی در محاسبات وارد نشده است. به همین دلیل در تحقیقاتی که نگارندگان در سال ۲۰۰۴ به‌منظور برطرف کردن خطای مذکور انجام دادند رشد ترک دینامیکی در نمونه‌های DCB با فرض تیر تیموشینکو، و نیز با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل برشی و ضخامت در معادلات مربوطه بررسی شده است و نهایتاً به دلیل پیچیدگی در معادلات دیفرانسیل نهایی، با نادیده گرفتن عبارات اینرسی و با فرض تحلیل شبه استاتیکی، سرعت رشد ترک با استفاده از معادله‌ی موازنه‌ی انرژی به دست آمده است.<sup>[۲]</sup> به علاوه در سال ۱۹۷۹، محققین دیگر رشد

اختلاف محدود حل شده‌اند. روش‌های مختلف تحلیل اجزاء محدود در میان روش‌های موجود در مکانیک شکست، یکی از قوی‌ترین ابزارها برای تحلیل رشد ترک دینامیکی است، اما به نوبه‌ی خود محدودیت‌هایی نیز دارد. مدل‌سازی رشد ترک در روش اجزاء محدود<sup>۳</sup> (FEM) دارای دوایده‌ی متفاوت است: ۱. روش المان‌های ساکن (یا ثابت)؛ ۲. روش المان‌های متحرک که البته در روش اجزاء مرزی<sup>۴</sup> (BEM) نیز کاربرد دارد. روش آزادسازی گره‌ها<sup>۵</sup> از جمله روش‌های مربوط به المان‌های ساکن (ایده‌ی نخست) است که تحقیقات مختلفی در خصوص آن انجام شده است.<sup>[۶]</sup> لازم به ذکر است که این روش محدود به مسائلی می‌شود که از لحاظ بارگذاری و هندسی

متقارن باشند یا به عبارت دیگر فقط برای تحلیل رشد ترک در مود یک خالص شکست مورد استفاده قرار می‌گیرد. این بدان معناست که مسیر رشد ترک باید بر مرز المان منطبق باشد تا ترک فقط از میان گره‌ها عبور کند و از درون المان‌ها نگذرد. به منظور دقیق‌تر کردن مدل‌سازی رشد ترک، چند نوع از روش‌های المان‌های متحرک (ایده‌ی دوم) گسترش یافت که در آن شبکه‌بندی المان‌ها همراه با نوک ترک حرکت می‌کند که خود به دو مقوله‌ی شبکه‌ی کاملاً متحرک<sup>۶</sup> و شبکه‌ی متحرک محلی<sup>۷</sup> تقسیم می‌شود.

در خصوص ایده‌ی نخست، در سال ۱۹۸۷ یک روش اجزاء محدود برای حرکت کل مجموعه‌ی شبکه‌بندی همراه با نوک ترک ارائه شد که نقص آن کاربرد در مورد اجسام نامحدود بود.<sup>[۷]</sup> در خصوص ایده‌ی دوم نیز بررسی‌هایی صورت گرفته است.<sup>[۹،۸]</sup> در این روش، تمام المان‌های منفرد متحرک به‌کار رفته در نوک ترک به‌طور غیر پیوسته حرکت می‌کنند حتی اگر رشد ترک پیوسته باشد.<sup>[۱۰]</sup> در سال ۱۹۸۰، روش مذکور در اجسام محدود با هر شکل دلخواه به‌منظور تحلیل دینامیکی رشد سریع ترک به کار گرفته شد.<sup>[۱۱]</sup> همچنین در سال ۲۰۰۱ با استفاده از مقوله‌ی شبکه‌های متحرک محلی پدیده‌ی رشد ترک دینامیکی و پیش‌بینی مسیر شکست در مکانیک شکست ضربه‌ای مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت.<sup>[۱۲]</sup> و به این ترتیب با استفاده از یک راهبرد جدید در شبکه‌بندی، تقیسه‌ی تحلیل فقط در مود یک شکست در روش المان‌های متحرک برطرف شد.

از دیگر روش‌های مربوط به ایده‌ی المان‌های متحرک، روش توصیف اولری - لاگرانژی<sup>۸</sup> (ELD) در تحلیل رشد ترک دینامیکی است. این روش در سال ۱۹۸۸ برای تحلیل رشد ترک الاستودینامیکی به کار گرفته شد.<sup>[۱۳]</sup> و نیز در سال ۱۹۹۵، در خصوص تحلیل رشد ترک دینامیکی در مواد ترد، معادله‌ی موازنه‌ی انرژی به‌عنوان معیار شکست دینامیکی و برای تحلیل مسئله براساس روش توصیف اولری - لاگرانژی (ELD) کاربرد یافت. اگرچه روش المان‌های متحرک براساس ELD می‌تواند حرکت پیوسته و مستقیم نوک ترک را توسط تغییر پیوسته‌ی نگاشت ناحیه‌ای مدل کند و بسیاری از مشکلات دیگر روش‌ها -- نظیر آزادسازی گره‌ها -- در این روش برطرف می‌شود، نقص این روش این است که ماتریس ضرایب عمومی نهایی یا ماتریس‌های اسمبلی نهایی مربوط به معادلات اجزاء محدود مسئله، به‌صورت ماتریس‌های نامتقارن ظاهر می‌شوند که حل این معادلات بر زمان لازم برای تحلیل مسئله می‌افزاید.<sup>[۱۴]</sup>

یکی از روش‌های توانا در تحلیل رشد ترک دینامیکی، الگوریتم «شبکه‌بندی مجدد» است که می‌توان آن را یکی دیگر از شاخه‌های روش المان‌های متحرک دانست. «شبکه‌بندی مجدد» توانایی زیادی در مدل‌سازی رشد ترک در مواد کشسانی و کشسانی - خمیری دارد؛ علاوه بر این، محدود به مود خاصی در شکست نیست و از قابلیت تحلیل رشد ترک در مودهای ترکیبی شکست نیز برخوردار است و به همین دلیل برای حل مسائلی که از لحاظ بارگذاری یا هندسه تقارن ندارند می‌توان از این روش بهره برد. شبکه‌بندی مجدد از قابلیت مدل‌سازی رشد ترک در کامپوزیت‌ها نیز برخوردار است.<sup>[۱۵]</sup> به‌طور کلی تاکنون دو راهبرد کلی و پایه‌ای برای این روش پیشنهاد شده است:

۱. اولین دیدگاه ارائه‌شده در این رابطه، شبکه‌بندی مجدد کل مدل است که در سال ۱۹۸۵ در خصوص رشد ترک مطرح شد.<sup>[۱۶]</sup> مزیت این روش این است که به‌طور کلی در تمام فرایندهای رشد ترک یا به عبارتی در هر لحظه، المان‌های مناسب از نظر هندسه و توپولوژی مدل را پر می‌کنند. به همین دلیل تکنیک انتقال اطلاعات باید در هر گام زمانی برای کل مدل صورت گیرد، که این به‌نوبه‌ی خود نسبت به

ایده دوم که در ادامه شرح داده می‌شود بر مدت‌زمان لازم برای تحلیل مسئله می‌افزاید.

۲. دومین دیدگاه در این زمینه «شبکه‌بندی مجدد محلی» است که به‌موجب آن، فقط ناحیه‌ای محدود و معین در اطراف نوک ترک دستخوش شبکه‌بندی مجدد می‌شود. در نتیجه مزیت آن نسبت به دیدگاه اول این است که تکنیک انتقال اطلاعات فقط برای این ناحیه صورت می‌گیرد و این حجم محاسبات را کم‌تر می‌کند.

در سال ۱۹۸۸، در زمینه‌ی مکانیک شکست کشسانی خطی<sup>۹</sup> (LEFM)، از ایده‌ی دوم برای بررسی رشد ترک دینامیکی در حالت مود ترکیبی شکست در نمونه‌های صفحه‌ای استفاده شد.<sup>[۱۷]</sup> در این کار سرعت و جهت رشد ترک در هر گام زمانی به دست آورده شد. همچنین، در سال ۱۹۹۶ الگوریتمی تحت عنوان شبیه‌سازی نیمه‌خودکار رشد ترک در مواد کشسانی به‌منظور پیش‌بینی مسیر رشد ترک مطرح شد که بسیار شبیه به کار انجام‌شده‌ی قبلی در سال ۱۹۸۸ است.<sup>[۱۸]</sup> به‌علاوه در زمینه‌ی رشد ترک در حالت مود ترکیبی شکست در مواد کشسانی - خمیری با استفاده از روش شبکه‌بندی مجدد محلی می‌توان به بررسی انجام‌شده در سال ۱۹۹۶، که عنوان کد<sup>۱۰</sup> EPIC به آن اختصاص یافت، اشاره کرد.<sup>[۱۹]</sup>

در این تحقیق رشد ترک دینامیکی در یک نمونه DCB براساس تکنیک شبکه‌بندی مجدد کلی و با استفاده از کد استاندارد اجزاء محدود<sup>۷</sup> Ansys ۷٫۰ مورد بررسی قرار گرفته است. تحلیل مسئله‌ی کشسانی، به‌دلیل ضخامت نازک این نمونه‌ها، در حالت دوبعدی تنش صفحه‌ای انجام شده است.<sup>[۲۰]</sup> ضمناً مسئله در هر دو حالت مختلف بارگذاری از نوع جابه‌جایی ثابت و نیرو ثابت تحلیل شده است. در حالت بارگذاری جابه‌جایی ثابت، نهایتاً رشد ترک متوقف می‌شود و در حالت نیرو ثابت، رشد ترک تا گسیختگی کامل مدل ادامه می‌یابد. معیار استفاده‌شده در این تحلیل، معیار چقرمگی شکست دینامیکی است که در هر مرحله از رشد مشخص می‌کند که آیا رشد ناپایدار ترک ادامه می‌یابد یا پدیده‌ی توقف اتفاق می‌افتد؛ و این که اگر رشد ناپایدار اتفاق می‌افتد، مقدار سرعت آن چقدر است. لازم به ذکر است که استفاده از روش شبکه‌بندی مجدد در تحلیل رشد ترک نسبت به سایر روش‌های ذکر شده از مزایایی برخوردار است:

۱. استفاده‌ی مداوم و پیوسته از المان‌های منفرد در نوک ترک در تمام طول فرایند تحلیل رشد ترک و گسیختگی مدل، برخلاف روش‌هایی مانند آزادسازی گره‌ها.

۲. ایجاد المان‌های جدید و بهینه از نظر توپولوژی و هندسه مطابق با هندسه‌ی مدل در هر لحظه.

۳. تحلیل مسئله و دنبال‌کردن رشد ترک از دیدگاه لاگرانژی یا مادی.

۴. ریزکردن المان‌ها در ناحیه‌ای معین در اطراف نوک ترک در هر مرحله از رشد و مطابق با هندسه‌ی مدل در هر گام زمانی، که باعث می‌شود در کل از تعداد المان کم‌تری برای مدل‌سازی استفاده شود. این امر، به‌نوبه‌ی خود، با توجه به دینامیکی‌بودن تحلیل رشد ترک ناپایدار، زمان تحلیل مسئله را نسبت به بعضی از روش‌ها -- مانند آزادسازی گره‌ها و الگوریتم و اماندگی المان‌ها -- به‌شدت کاهش می‌دهد.

در نهایت، مقایسه‌ی نتایج به دست آمده از این روش با نتایج منابع موجود در این زمینه بیان‌گر تطابق خوبی است که در ادامه مورد بحث و ارزیابی قرار گرفته است.

## ۲. معیار رشد ترک دینامیکی

در طی فرایند رشد ترک دینامیکی، چقرمگی شکست یک ماده دیگر مقدار ثابتی نیست و تابعی از سرعت رشد ترک است و لذا «چقرمگی شکست دینامیکی» نام می‌گیرد. چقرمگی شکست دینامیکی که آن را با  $K_{ID}$  نمایش می‌دهند نیز از مشخصات ماده است و تمام اثرات اینرسی و خمیرسانی ماده درون آن لحاظ شده است.<sup>[۲۱]</sup> در شکل ۱ نمودار چقرمگی شکست دینامیکی بسیار (پلیمر) Araldite-B— ماده‌ی ترد و شکننده‌ی مورد استفاده در این تحقیق — آورده شده است. با توجه به این نمودار که در سال ۱۹۸۵ ارائه شد<sup>[۲۲]</sup> ملاحظه می‌شود که با افزایش سرعت رشد ترک، مقاومت در برابر شکست بسیار مذکور نیز زیاد می‌شود. در ادامه، ضریب شدت تنش دینامیکی و نیز معیار چقرمگی شکست دینامیکی تشریح و بررسی می‌شود.

### ۱.۲. ضریب شدت تنش دینامیکی

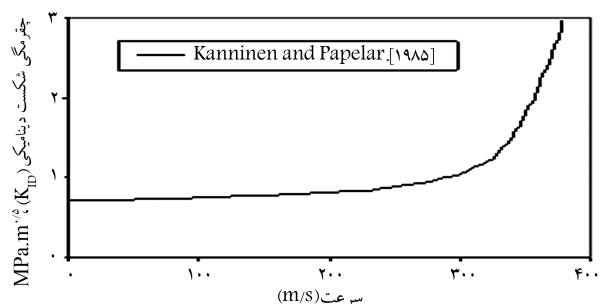
یکی از پارامترهای مهم در طراحی قطعات از دیدگاه مکانیک شکست، ضریب شدت تنش<sup>[۱]</sup> است که برای یک ترک ساکن تحت بارگذاری استاتیکی، فقط تابعی از هندسه‌ی مسئله، جنس ماده و بار اعمالی است. این پارامتر برای رشد ترک دینامیکی «ضریب شدت تنش دینامیکی» نام گرفته و در این حالت علاوه بر طول ترک، جنس ماده و بار اعمالی، تابع زمان و سرعت رشد ترک نیز هست و در وضعیت مود یک خالص شکست چنین بیان می‌شود:<sup>[۲۳] [۲۴]</sup>

$$K(t, \dot{a}) = k_I(\dot{a}) \times K^*(t, a) \quad (۱)$$

که در آن:

$$k_I(\dot{a}) = \frac{1 - \dot{a}/C_R}{1 - \gamma \Delta \dot{a}/C_R} \quad (۲)$$

به طوری که  $k_I$  تابعی از سرعت رشد ترک، و  $K^*$  ضریب شدت تنش معادل استاتیکی است که به طول ترک و بار اعمالی در هر لحظه بستگی دارد. تابع  $k_I$  برای تمام رشد ترک‌های الاستودینامیک از خود رفتار یکسانی بروز می‌دهد که دارای شکل نزولی است، به طوری که مقدار آن بین ۰ و ۱ تغییر می‌کند. تابع  $k_I(\dot{a})$  با افزایش سرعت به طور یکنواخت کاهش می‌یابد؛ به عبارت دیگر به ازای سرعت صفر، مقدار آن بیشینه (یا واحد) و به ازای سرعت موج ریلی<sup>[۲۲]</sup>  $(C_R)$  مقدار آن صفر است.<sup>[۲۳]</sup> به این ترتیب ضریب شدت تنش دینامیکی همواره کوچک‌تر یا مساوی ضریب شدت تنش معادل استاتیکی است.



شکل ۱. چقرمگی شکست دینامیکی نمونه‌های DCB از بسیار اپوکسی رزین<sup>[۲۲]</sup>.

## ۲.۲. معیار چقرمگی شکست دینامیکی

با توجه به نکات یادشده، برای رشد ترک ناپایدار می‌توان معیار چقرمگی شکست دینامیکی را به صورت معادله‌ی ۳ بیان کرد که به نوعی بیانگر معادله‌ی رشد ترک نیز هست:

$$K(t, \dot{a}) = K_{ID}(\dot{a}) \quad \dot{a} > 0 \quad (۳)$$

که در آن  $K(t, \dot{a})$  همان ضریب شدت تنش دینامیکی، و  $K_{ID}$  چقرمگی شکست دینامیکی است که تابعی از سرعت رشد ترک است و از طریق کارهای آزمایشگاهی به دست می‌آید. به طور کلی تاکنون تمام داده‌های به دست آمده برای کمیت چقرمگی شکست دینامیکی از لحاظ کیفی، رفتاری مطابق نمودار شکل ۱ دارند و منحنی‌های مربوطه نیز می‌توانند توسط رابطه‌ی تجربی ۴ بیان شوند:<sup>[۲۲]</sup>

$$K_{ID} = \frac{K_{IA}}{1 - \left(\frac{\dot{a}}{V_i}\right)^m} \quad (۴)$$

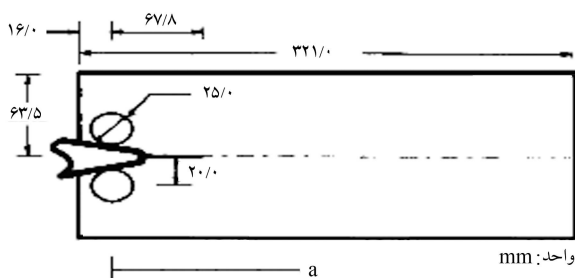
که در آن  $K_{IA}$ ،  $V_i$ ،  $m$  ثابت‌های ماده هستند که به دما وابسته‌اند. البته این ثابت‌ها دارای توجیه فیزیکی روشنی هستند:  $V_i$  به سرعت حد ترک مربوط می‌شود،  $K_{IA}$  نیز مربوط به محدوده‌ی سرعت کم رشد ترک است که تقریباً دارای مقدار ثابتی است (و در شکل ۱ نیز واضح است)، و  $m$  که ضریب شکلی بدون بعد است.

معادله‌ی ۳ در هر لحظه علاوه بر این که مشخص می‌سازد که رشد ترک ادامه می‌یابد یا خیر، سرعت رشد و مقدار رشد ترک را نیز معلوم می‌سازد. لازم به ذکر است که نتایج آزمایشگاهی قابل دسترس برای رشد ترک دینامیکی در فلزات بسیار محدود است.<sup>[۲۵]</sup>

## ۳. الگوریتم تحلیل اجزاء محدود مسئله

در این تحقیق به منظور اعمال روش شبکه‌بندی مجدد و نیز الگوریتم انتقال اطلاعات از شبکه‌ی قبلی به شبکه‌ی فعلی، از توانایی‌های نرم‌افزار ANSYS و برنامه‌نویسی در محیط آن استفاده شده است. در ضمن از ایده‌ی شبکه‌بندی مجدد کلی در شبیه‌سازی رشد ترک استفاده شده است. بدین معنا که در هر گام زمانی تمام المان‌های مدل پاک می‌شود و مدل به طور کلی از نظر توپولوژی المانی بهینه می‌شود. بنابراین بعد از مدل‌سازی نمونه‌ی DCB در حالت دوبعدی با طول ترک اولیه و شبکه‌بندی اولیه، اعمال قیود و بارگذاری لازم که از نوع جابه‌جایی ثابت یا نیرو ثابت است، مسئله در حالت دینامیکی تحلیل می‌شود و پارامترهای لازم (از جمله ضریب شدت تنش در نوک ترک) محاسبه و سپس با استفاده از معیار چقرمگی شکست دینامیکی، سرعت و موقعیت جدید نوک ترک تعیین می‌شود. بعد از این مرحله المان‌های مدل پاک شده و براساس موقعیت جدید نوک ترک و استفاده از المان‌های Plane2 با قابلیت ناکرانداری<sup>[۲۳]</sup> در نوک ترک، مدل دوباره شبکه‌بندی می‌شود و نوبت به انتقال اطلاعات ذخیره شده از شبکه‌ی قبلی به شبکه‌ی جدید می‌رسد. المان‌های با قابلیت ایجاد ناکرانداری در نوک ترک ابتدا در سال ۱۹۷۷ ابداع و استفاده شد.<sup>[۲۶]</sup> با استفاده از این نوع المان در نوک ترک، می‌توان ناکرانداری لازم برای میدان‌های تنش و کرنش را در حالت کشسانی<sup>[۲۷]</sup>  $r^{-0.5}$  و در حالت خمیری کامل<sup>[۲۸]</sup>  $r^{-1}$  (r فاصله‌ی شعاعی از نوک ترک است) در مکانیک شکست به دست آورد.

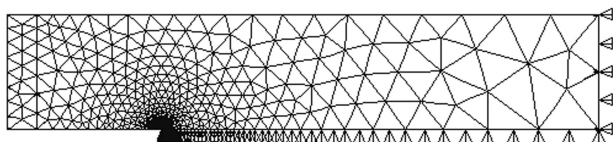
علت انتقال اطلاعات، وجود اثرات اینرسی در تحلیل دینامیکی رشد ترک ناپایدار و تغییر شبکه‌بندی مدل در هر مرحله از رشد ترک است. این کار در تحلیل‌های



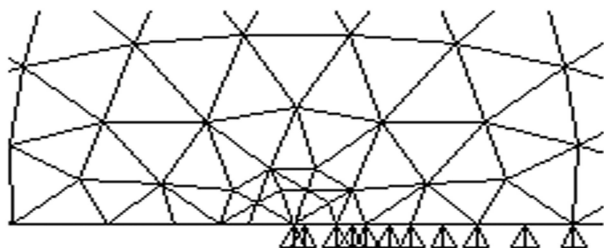
شکل ۳. نمونه‌ی تیر یک سر گیردار دوگانه (DCB) برای تحلیل رشد ترک دینامیکی.

جدول ۱. خواص مکانیکی ماده‌ی اپوکسی رزین.

خواص مکانیکی اپوکسی رزین (Araldite-B)	
مدول الاستیسیته استاتیکی و دینامیکی (E) $3380 \times 10^6 \text{ MN/m}^2$	$3660 \times 10^6 \text{ MN/m}^2$
ضریب پواسون استاتیکی و دینامیکی ( $\nu$ )	$0.33$ و $0.39$
چگالی ( $\rho$ )	$1172 \text{ Kg/m}^3$
سرعت موج ریلی ( $C_R$ )	$9797 \text{ m/s}$
سرعت موج طولی $C_0 = \sqrt{E/\rho}$	$1767 \text{ m/s}$



شکل ۴. شماتیکی از شبکه بندی و شرایط مرزی اولیه‌ی مدل.



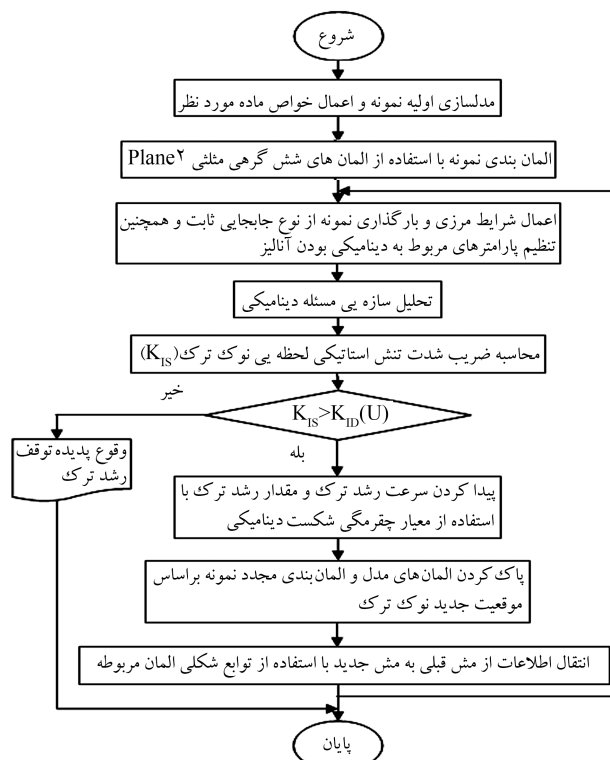
شکل ۵. طرز قرارگرفتن المان‌های منفرد در اطراف نوک ترک.

مناسب در نوک ترک برخورد دارند، صورت گرفته است. به دلیل تقارن در نمونه‌ی DCB فقط نیمه‌ی بالایی نمونه مدل شده است و شماتیکی از شبکه بندی مدل به ازای طول ترک اولیه  $67.8 \text{ mm}$  در شکل ۴ نشان داده شده است. شکل ۵ نیز المان‌های منفرد و طریقه‌ی قرارگرفتن آنها در اطراف نوک ترک را نشان می‌دهد.

## ۵. ارزیابی نتایج

### ۱.۵. تحلیل مسئله تحت بارگذاری جابه‌جایی ثابت

مقایسه‌ی نتایج به دست آمده از حالت بارگذاری جابه‌جایی ثابت با نتایج حاصله از کارهای آزمایشگاهی انجام شده در سال‌های ۱۹۷۷، ۱۹۷۹، ۱۹۸۲، و ۱۹۹۵<sup>[۲۷،۲۰، ۱۴، ۴]</sup> بیانگر تطابق بسیار خوب آنها است. در برخی از کارهای پیشین



شکل ۲. فلوچارت تحلیل رشد ترک دینامیکی.

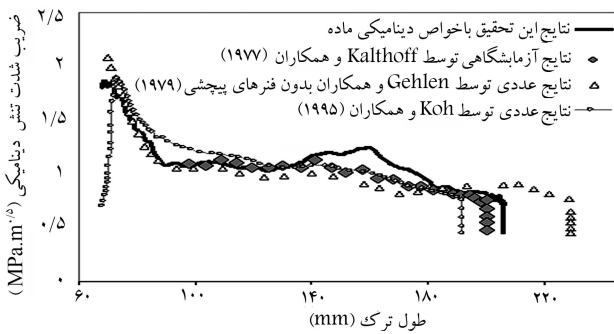
دینامیکی توأم با گسیختگی یا پارگی در دو مرحله انجام می‌شود. اولین مرحله زمانی است که ترک رشد نمی‌کند ولی به واسطه‌ی دینامیکی بودن فرآیند، متغیرهای مسئله وابسته به زمان هستند که این همان آنالیزهای دینامیکی استاندارد در روش اجزاء محدود است.

دومین مرحله زمانی است که ترک رشد می‌کند. در این مرحله، مسئله نسبت به زمان ثابت می‌شود و المان‌های مدل پاک می‌شوند و مدل براساس موقعیت جدید نوک ترک شبکه بندی می‌شود. سپس اطلاعات نظیر جابه‌جایی، با استفاده از Shape function مربوط به المان‌های به کاررفته منتقل می‌شود. فلوچارت مراحل مختلف مربوط به الگوریتم رشد ترک دینامیکی در این تحقیق در شکل ۲ آمده است.

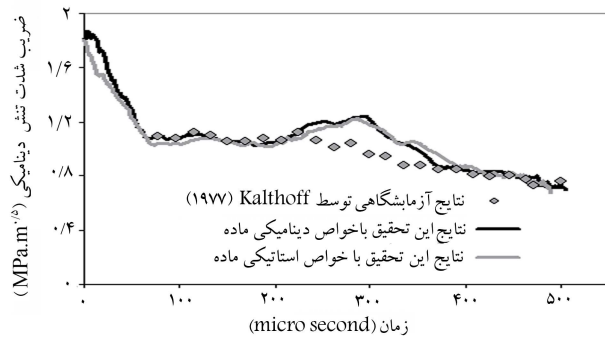
## ۴. مدل‌سازی اجزاء محدود و تحلیل مسئله

یکی از نمونه‌های آزمایشی که در آزمایشات مکانیک شکست کاربرد گسترده‌ای دارد، تیر یک سر گیردار دوگانه (DCB) است که هم برای کارهای آزمایشگاهی و هم کارهای نظری بسیار مناسب است. ابعاد نمونه‌ی استفاده شده در این تحقیق در شکل ۳ آورده شده است و مطابق نمونه‌ی استفاده شده در آزمایش‌های انجام شده در سال ۱۹۷۷ است.<sup>[۲۷]</sup> خواص مکانیکی بسیار اپوکسی رزین در شرایط استاتیکی و دینامیکی متفاوت است که البته چندان اختلاف زیادی نیست.<sup>[۲۷]</sup> در این تحقیق از هر دوی خواص در تحلیل استفاده شده است تا تفاوت موجود مورد ارزیابی قرار گیرد. در جدول ۱ خواص ماده‌ی مربوطه ارائه شده است؛ ضمن این که سرعت موج ریلی و  $C_0$  در جدول براساس خواص دینامیکی ماده به دست آمده‌اند.

تحلیل در حالت تنش صفحه‌ای با ضخامت  $1 \text{ mm}$  و با استفاده از المان‌های دوبعدی مثلثی شش‌گره‌ی Plane2 موجود در نرم‌افزار که از قابلیت ایجاد ناکرانداری



شکل ۷. تغییرات ضریب شدت تنش دینامیکی برحسب طول ترک تحت بارگذاری جابه‌جایی ثابت.



شکل ۸. تغییرات ضریب شدت تنش دینامیکی براساس خواص دینامیکی و استاتیکی بسیار در بارگذاری جابه‌جایی ثابت.

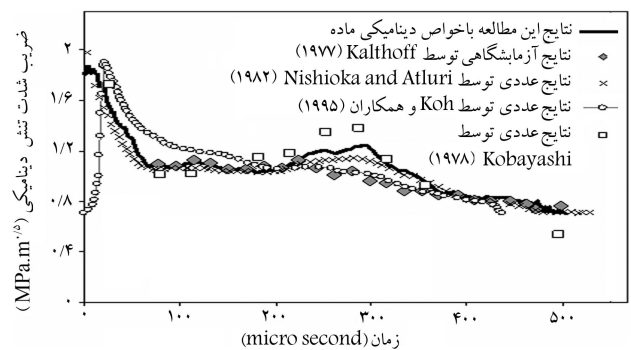
است که در آن کار اخیر با نتایج نظری (البته معادلات نهایی با استفاده از روش اختلاف محدود حل شده‌اند) به دست آمده توسط Gehlen و همکارانش و همچنین نتایج به دست آمده توسط Koh و همکارانش مقایسه شده است. با توجه به نمودار می‌توان مشاهده کرد که از لحاظ طول توقف ترک نیز نتایج حاصله از این تحقیق در مقایسه با دیگر نتایج موجود، به نتایج حاصل از کار آزمایشگاهی مربوطه نزدیک‌تر است. زیرا با توجه به شکل، رشد ترک در کار عددی Koh و همکارانش در طولی حدود ۱۹۱ میلی‌متر متوقف شده است که تقریباً ۱۵ میلی‌متر با کار تجربی اختلاف دارد؛ به عبارت دیگر رشد ترک در طولی کم‌تر از مقدار واقعی متوقف شده است. در مورد کار نظری موجود، طول توقف ترک ۲۳۰ میلی‌متر است که حدود ۲۴ میلی‌متر بیشتر از طول توقف ترک حاصله از کار تجربی است. همچنین با توجه به شکل، مقدار بیشینه ضریب شدت تنش دینامیکی در مورد این تحقیق حدود  $2.1 \text{ MPa.m}^{0.5}$  و در مورد کار تحلیلی Gehlen این مقدار  $1.8 \text{ MPa.m}^{0.5}$  است که در هر دو مورد، این مقادیر مربوط به ابتدای فرایند رشد ترک است. نکته دیگر این که، مقدار بیشینه ضریب شدت تنش دینامیکی  $1.89 \text{ MPa.m}^{0.5}$  در کار Koh مربوط به ابتدای فرایند نیست؛ علت آن است که رشد ترک از مقدار چقرمگی شکست دینامیکی مربوط به سرعت صفر که حدود  $0.7 \text{ MPa.m}^{0.5}$  است شروع می‌شود.

شکل ۸ تغییرات ضریب شدت تنش دینامیکی به دست آمده به‌ازای خواص مکانیکی استاتیکی و خواص دینامیکی بسیار را نشان می‌دهد. با توجه به شکل درمی‌یابیم که اختلاف قابل ملاحظه‌ای بین دو منحنی مربوطه وجود ندارد و الگوی رفتاری هر دو منحنی تقریباً مشابه‌اند، اگرچه نتایج ناشی از تحلیل با خواص دینامیکی نسبتاً از دقت بالاتری برخوردار است و با نتایج تجربی بیشتر مطابقت دارد.

برای تحلیل عددی از خواص استاتیکی بسیار استفاده شده و از شبکه‌های متحرک محلی نیز در شبیه‌سازی رشد ترک بهره برده‌اند. در کار نظری Gehlen و همکارانش [۴] و همین‌طور تحلیل عددی Koh و همکارانش [۱۲] از خواص دینامیکی ماده‌ی مربوطه استفاده شده است. به‌علاوه معیار استفاده شده در تحلیل همه‌ی آنها معادله‌ی موازنه‌ی انرژی نمونه است. ضمناً بلانتینگ نوک ترک به‌گونه‌ای است که ضریب شدت تنش بحرانی در نوک ترک برای آستانه‌ی رشد ترک،  $K_{Qc} = 2.32 \text{ MP.m}^{0.5}$  است.

شکل ۶ تغییرات ضریب شدت تنش دینامیکی نوک ترک را برحسب زمان نشان می‌دهد. در این شکل همچنین نتایج عددی به دست آمده توسط کوپایاشی در مورد ضریب شدت تنش دینامیکی نشان داده شده است. [۲۸] با توجه به شکل، به‌طور کلی الگوی رفتاری منحنی ضریب شدت تنش دینامیکی در سه تحلیل عددی انجام شده، در مدت زمان فرایند تا لحظه‌ی توقف تقریباً یکسان است به‌طوری که در زمان صفر از یک مقدار بیشینه شروع می‌شود و تا زمان ۷۰ میکروثانیه مقدار آن دائماً کاهش می‌یابد. بعد از این تا زمان ۲۳۰ میکروثانیه رفتار منحنی ضریب شدت تنش دینامیکی به دست آمده از تحقیق حاضر، نسبت به سایر تحلیل‌ها تا حد زیادی با کار آزمایشگاهی یکسان است. همچنین در محدوده‌ی زمانی ۲۳۰ تا ۳۷۵ میکروثانیه رفتار ضریب شدت تنش دینامیکی در سه تحلیل عددی دارای الگوی مشابهی هستند و در این فاصله به یک مقدار بیشینه‌ی نسبی در حدود زمان ۳۰۰ میکروثانیه می‌رسند و دوباره کاهش می‌یابند. سپس از زمان ۳۷۵ میکروثانیه تا لحظه‌ی توقف ترک، نتایج ناشی از شبکه‌بندی مجدد تقریباً با نتایج آزمایشگاهی پیشین مطابقت دارد. نکته‌ی قابل توجه دیگری که در نمودار شکل ۶ مشخص است این است که زمان به دست آمده در لحظه‌ی توقف رشد ترک هم در کارهای تجربی و هم در کارهای عددی شبکه‌بندی مجدد، نزدیک به هم و حدود ۵۰۴ میکروثانیه است. در نهایت، ترک در ضریب شدت تنشی کوچک‌تر از چقرمگی شکست دینامیکی مربوط به سرعت صفر متوقف می‌شود. همچنین الگوی رفتاری منحنی به دست آمده توسط Koh و همکارانش با سایر تحلیل‌های عددی انجام شده متفاوت است به‌طوری که از یک مقدار کمینه که مربوط به چقرمگی شکست دینامیکی در سرعت صفر است شروع می‌شود و پس از مدت زمان کوتاهی -- بعد از رسیدن به مقدار بیشینه -- نهایتاً رشد ترک در ضریب شدت تنش دینامیکی معادل چقرمگی شکست دینامیکی در سرعت صفر، متوقف می‌شود. در ضمن بیشترین مقدار ضریب شدت تنش دینامیکی در تحلیل مذکور در حدود بیشینه‌ی به دست آمده از این مطالعه است و مدت زمان فرایند حدود ۷۰ میکروثانیه کم‌تر از زمان مشابه حاصل از نتایج آزمایشگاهی و نتایج تحقیق حاضر است.

شکل ۷ مربوط به ضریب شدت تنش دینامیکی برحسب طول ترک در نمونه



شکل ۶. تغییرات ضریب شدت تنش دینامیکی برحسب زمان تحت بارگذاری جابه‌جایی ثابت.

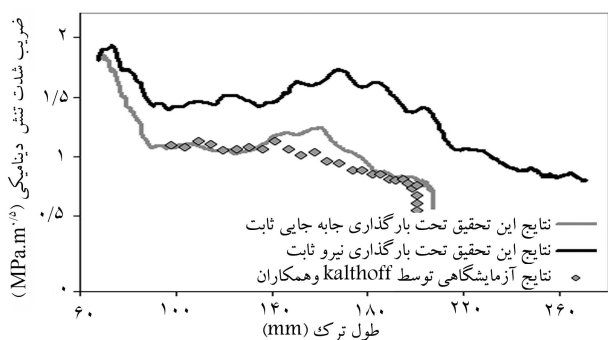
## ۲.۵. تحلیل مسئله تحت بارگذاری نیرو ثابت

در این بخش، مسئله‌ی رشد ترک دینامیکی در همان نمونه‌ی قبلی در حالت بارگذاری نیرو ثابت بررسی شده است. برای رشد ترک دینامیکی در نمونه‌های DCB در حالت بارگذاری نیرو ثابت مرجعی برای مقایسه‌ی نتایج به دست آمده در این تحقیق وجود ندارد و بنابراین اعتبار نتایج حاصله براساس اعتبار همان نتایج موجود حالت بارگذاری جابه‌جایی ثابت است که در نمودارهای این قسمت نیز آمده است. در حالت نیرو ثابت پدیده‌ی توقف در رشد ترک اتفاق نمی‌افتد و اگرچه با افزایش طول ترک، سرعت رشد ترک کم می‌شود ولی رشد ترک تا گسیختگی کامل مدل ادامه می‌یابد. شکل ۱۱ ضریب شدت تنش دینامیکی نوک ترک را در دو حالت مختلف بارگذاری جابه‌جایی و نیرو ثابت در نمونه‌ی مذکور نشان می‌دهد که برحسب طول ترک بیان شده است. با توجه به نمودار، در حالت نیرو ثابت پدیده‌ی توقف اتفاق نمی‌افتد و اگرچه ضریب شدت تنش دینامیکی از طول ترک حدود ۱۷۰ میلی‌متر (بیشینه‌ی نسبی) به بعد کم می‌شود ولی این مقدار به کم‌تر از چقرمگی شکست دینامیکی در سرعت صفر نمی‌رسد و ترک همواره به رشد خود ادامه می‌دهد. لازم به ذکر است که در مورد منحنی مربوط به حالت نیرو ثابت، در الگوریتم مسئله‌ی اجازه‌ی پیش‌روی ترک تا طول ۲۷۰ میلی‌متر داده شده است. به عبارتی این طول ترک مربوط به توقف ترک نیست.

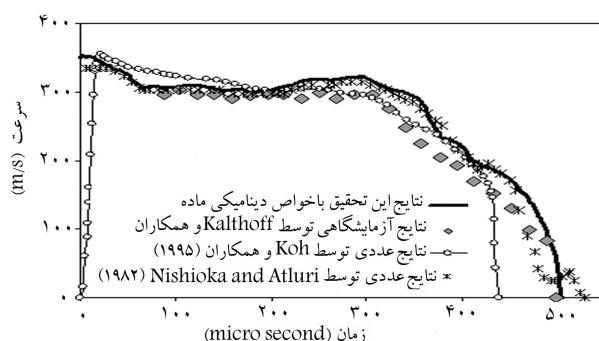
شکل ۱۲ نیز نمودار رشد ترک را به صورت کمیت بدون بعد  $(a+e)/l$  برحسب زمان در دو حالت بارگذاری جابه‌جایی و نیرو ثابت نشان می‌دهد که در آن،  $a$  طول ترک در هر لحظه،  $e$  فاصله‌ی محل بارگذاری نمونه از لبه‌ی آزاد تیر و  $l$  طول نمونه‌ی DCB است. لازم به ذکر است که عدد ۱ روی محور عمودی مربوط به گسیختگی

در شکل ۹ سرعت رشد ترک برحسب زمان نشان داده شده که در آن رفتار منحنی سرعت به دست آمده از این تحقیق مشابه رفتار ضریب شدت تنش دینامیکی حاصله است. به‌طور کلی، یکی از نتایج این تحقیق پیش‌بینی زمان توقف ترک است. ضمناً باید توجه داشت که سرعت رشد ترک در کار آزمایشگاهی Kalthoff و همکارانش با استفاده از منحنی مربوط به رشد ترک نسبت به زمان برآورد شده است و دلیل یکنواخت بودن سرعت رشد تا یک زمان خاص، ثابت بودن شیب منحنی طول ترک برحسب زمان است.

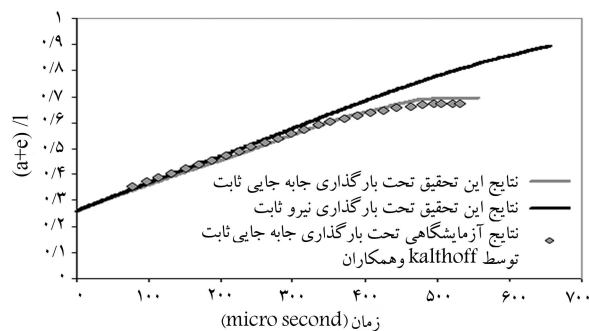
همچنین در شکل ۱۰ نمودار انرژی‌های جنبشی و کرنشی نمونه در طول فرایند نشان داده شده است که بیانگر مطابقت خوب نتایج به دست آمده از این مطالعه (تکنیک شبکه‌بندی مجدد) با نتایج حاصل از تحقیقات انجام شده بر پایه‌ی روش المان‌های متحرک است. با توجه به فیزیک مسئله در حالت بارگذاری جابه‌جایی ثابت که منجر به پدیده‌ی توقف رشد ترک می‌شود، مقدار انرژی جنبشی در ابتدای فرایند صفر است و به مرور همراه با رشد ترک و تأثیرات اینرسی ناشی از ماهیت دینامیکی فرایند، مقدار آن تا زمان ۱۴۰ میکروثانیه افزایش می‌یابد و بعد از آن دوباره شروع به کم شدن می‌کند و تا لحظه‌ی توقف ترک، مقدار انرژی جنبشی به سمت صفر میل می‌کند. در ضمن مقدار انرژی کرنشی در ابتدای فرایند بیشینه است. بعد از آن با رشد ترک مقدار انرژی کرنشی (تا زمانی که انرژی جنبشی به بیشترین مقدار می‌رسد) با نرخ بالایی کاهش می‌یابد ولی پس از آن با نرخ کم‌تری به کاهش خود ادامه داده و نهایتاً در زمان توقف، به مقدار کمینه‌ی ۳٪ می‌رسد ولی مقدار آن صفر نمی‌شود، زیرا با این که سرعت رشد ترک صفر است و ترک متوقف می‌شود دهانه‌ی ترک بسته نمی‌شود و در لحظه‌ی توقف هم چون بار اعمالی بر مدل وجود دارد تنش و کرنش‌های ناشی از آن در جسم باقی می‌ماند. کاهش هر دو انرژی به سمت صفر به دلیل رهاش (آزاد شدن) انرژی در اثر رشد ترک است.



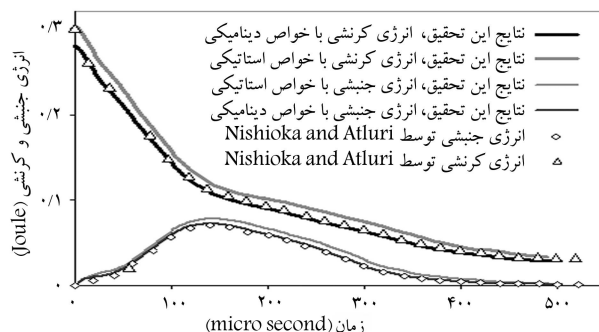
شکل ۱۱. تغییرات ضریب شدت تنش دینامیکی نوک ترک برحسب طول ترک در بارگذاری‌های جابه‌جایی ثابت و نیرو ثابت.



شکل ۹. نمودار سرعت رشد ترک برحسب زمان تحت بارگذاری جابه‌جایی ثابت.



شکل ۱۲. نمودار تغییرات طول گسترش ترک برحسب زمان در بارگذاری‌های جابه‌جایی ثابت و نیرو ثابت.



شکل ۱۰. نمودار تغییرات انرژی جنبشی و کرنشی نمونه در بارگذاری جابه‌جایی ثابت.

مقدار انرژی کرنشی نمونه در لحظه‌ی شروع رشد ترک -- چه در حالت جابه‌جایی ثابت و چه در حالت نیرو ثابت -- یکسان است، و این بدین معناست که انرژی کرنشی مورد نیاز برای شروع رشد ترک متناسب با بلائتینگ نوک ترک است و ارتباطی به نحوه و نوع بارگذاری ندارد. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که انرژی جنبشی نمونه در لحظه‌ی شروع رشد ترک در دو وضعیت متفاوت بارگذاری، برخلاف انرژی کرنشی، یکسان نیست. علت آن است که در حالت بارگذاری جابه‌جایی ثابت از شرایط بارگذاری گوه‌ای در تحلیل مسئله استفاده شده است، به این ترتیب که قبل از تحلیل دینامیکی ابتدا یک تحلیل استاتیکی به منظور تعیین مقدار بحرانی جابه‌جایی نقطه اثر نیرو، ضریب شدت تنش نوک ترک را به مقدار  $K_Q$  که متناسب با آستانه‌ی شروع رشد ترک است، می‌رساند. پس از این مقدار جابه‌جایی به وجود آمده در محل پین‌ها ثابت نگه داشته می‌شود و رشد ترک دینامیکی از شرایط اولیه‌ی استاتیکی نمونه آغاز می‌شود [۱۰] و به همین دلیل انرژی جنبشی نمونه در ابتدای فرایند صفر است. در صورتی که در حالت بارگذاری نیرو ثابت، بارگذاری اولیه دینامیکی و از نوع پله‌ای است؛ بدین ترتیب که تحلیل به‌طور کلی دینامیکی و با نیروی ثابت و مشخص انجام می‌شود. البته مقدار نیروی اعمالی به محل پین‌ها طی یک تحلیل استاتیکی و جداگانه به‌گونه‌ای تعیین می‌شود که ضریب شدت تنش نوک ترک را به اندازه‌ی بحرانی برای شروع رشد ( $K_Q$ ) برساند. در نتیجه به دلیل دینامیکی بودن تحلیل و وجود اثرات اینرسی، مقدار انرژی جنبشی نمونه در لحظه‌ی شروع رشد ترک، صفر نیست و دارای اندازه‌ی معینی است که نتایج به دست آمده در شکل مربوطه نیز مؤید همین موضوع است. در حالت نیرو ثابت، رشد ترک در نمونه از شرایط اولیه‌ی دینامیکی شروع می‌شود؛ به عبارت دیگر گره‌ها در این لحظه علاوه بر جابه‌جایی دارای سرعت نیز هستند.

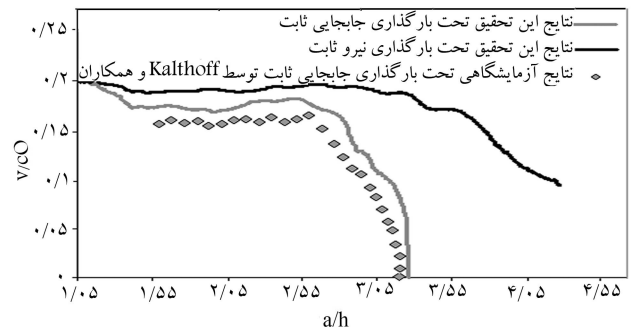
## ۶. نتیجه‌گیری

در این پژوهش پدیده‌ی رشد ترک دینامیکی با استفاده از روش اجزاء محدود و تکنیک شبکه‌بندی مجدد در نمونه‌ی DCB از بسپار اپوکسی رزین، و در دو حالت بارگذاری جابه‌جایی ثابت و نیرو ثابت بررسی شده است. چقرمگی شروع شکست در نمونه با توجه به بلائتینگ موجود در نوک ترک برابر با  $۲,۳۲ MPa.m^{3/2}$  است. در این رابطه نمودارهای سرعت رشد، طول ترک و ضریب شدت تنش دینامیکی نوک ترک برحسب زمان و طول ترک به دست آمده است. همان‌طور که از فیزیک مسئله انتظار می‌رود، و نتایج حاصله نیز مؤید این مطلب است، در وضعیت بارگذاری جابه‌جایی ثابت متناسب با بلائتینگ نوک ترک رشد ترک در طول معینی متوقف می‌شود و سرعت رشد ترک به صفر می‌رسد؛ در حالی که در وضعیت بارگذاری نیرو ثابت رشد ترک متوقف نمی‌شود و تا گسیختگی کامل نمونه ادامه می‌یابد. به علاوه لازم به ذکر است که در لحظه‌ی توقف ضریب شدت تنش دینامیکی در نوک ترک کوچک‌تر از چقرمگی شکست دینامیکی در سرعت صفر است. ضمناً به‌طور کلی نمودارهای ضریب شدت تنش دینامیکی و سرعت رشد ترک روندی نزولی را طی می‌کنند که از یک مقدار بیشینه‌ی معین -- چه در حالت بارگذاری جابه‌جایی ثابت و چه در حالت بارگذاری نیرو ثابت -- شروع می‌شود که این مقدار بیشینه ارتباطی به نوع بارگذاری ندارد و وابسته به ضریب شدت تنش بحرانی نوک ترک است. این مقدار بیشینه در مورد سرعت رشد ترک به‌گونه‌ای است که همواره کمیت  $\dot{a}/C$  کم‌تر از  $۰/۲$  است. معیار استفاده شده در این تحقیق، معیار چقرمگی شکست دینامیکی است. طبق این معیار، با افزایش ضریب شدت تنش در نوک ترک سرعت رشد ترک زیاد، و با کاهش آن سرعت رشد نیز کم می‌شود. ضمناً در تحلیل مسئله در حالت

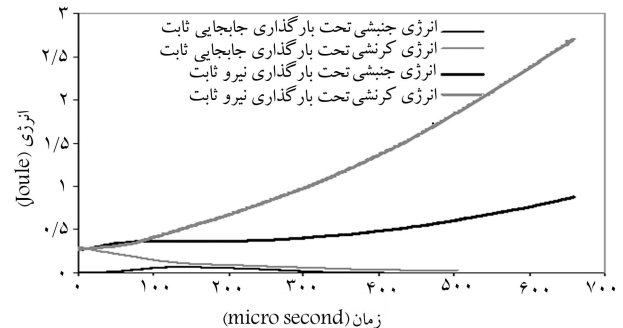
کامل نمونه است. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که با گذشت زمان شیب منحنی رشد ترک در حالت نیرو ثابت کم می‌شود ولی به صفر نمی‌رسد و رشد ترک متوقف نمی‌شود، اما در حالت جابه‌جایی ثابت، شیب منحنی نهایتاً به صفر می‌رسد و بنابراین در طول معینی وابسته به بلائتینگ نوک ترک، رشد ترک متوقف می‌شود. همچنین در شکل نتایج مطالعات آزمایشگاهی موجود در حالت جابه‌جایی ثابت آمده است که مطابقت بسیار خوبی با نتایج به دست آمده از این مطالعه دارد. به همین دلیل نتایج به دست آمده در حالت نیرو ثابت معتبرند.

شکل ۱۳، نمودار تغییرات سرعت رشد ترک را در دو حالت مختلف بارگذاری جابه‌جایی و نیرو ثابت برای نمونه‌ی مربوطه به صورت کمیت بی‌بعد ( $\dot{a}/C_0$ ) برحسب کمیت بدون بعد ( $a/h$ ) نشان می‌دهد که در آنها  $C$  نماینده‌ی سرعت موج طولی [۱۴] و  $h$  نماینده‌ی ارتفاع نمونه است. با توجه به شکل، مقدار بیشینه‌ی کمیت  $\dot{a}/C_0$  بیانگر سرعت رشد ترک است، در هر دو وضعیت بارگذاری مربوط به شروع فرایند و حدود  $۰/۲$  است. بعد از این در حالت جابه‌جایی ثابت سرعت رشد ترک دائماً کم می‌شود و نهایتاً به صفر یا وضعیت توقف می‌رسد، ولی در حالت نیرو ثابت اگر چه سرعت رشد ترک سیر نزولی دارد، به صفر نمی‌رسد و در حدود  $a/h \geq ۴$  مقدار  $\dot{a}/C_0$  به حدود  $۰/۹$  می‌رسد که از نظر کیفی با نتایج نظری به دست آمده توسط نگارندگان (در سال ۲۰۰۴) در این زمینه مطابقت دارد.

شکل ۱۴ به‌طور کلی انرژی‌های کرنشی و جنبشی نمونه را طی فرایند رشد ترک دینامیکی در بارگذاری‌های جابه‌جایی ثابت و نیرو ثابت نشان می‌دهد. با توجه به شکل انرژی کرنشی نمونه در حالت بارگذاری جابه‌جایی ثابت همواره تا لحظه‌ی توقف رشد ترک کاهش می‌یابد در حالی که در حالت بارگذاری نیرو ثابت، به دلیل افزایش کرنش‌های گره‌ی طی فرایند، مقدار انرژی کرنشی دائماً افزایش می‌یابد. ضمناً



شکل ۱۳. تغییرات سرعت رشد ترک برحسب کمیت بدون بعد ( $a/h$ ) در بارگذاری‌های جابه‌جایی ثابت و نیرو ثابت.



شکل ۱۴. نمودار تغییرات انرژی برحسب زمان در بارگذاری‌های جابه‌جایی ثابت و نیرو ثابت.



جابه‌جایی ثابت نتایج به دست آمده از این تحقیق مطابقت بسیار خوبی (به‌خصوص در طول توقف ترک و زمان فرایند) با نتایج آزمایشگاهی موجود و همچنین کارهای دیگر دارد می‌توان چنین نتیجه گرفت که نتایج حاصله در وضعیت بارگذاری نیرو ثابت نیز معتبر است.

جابه‌جایی ثابت از خواص دینامیکی و نیز خواص استاتیکی ماده استفاده شده است و نشان داده شده است که نتایج براساس خواص دینامیکی ماده نسبتاً بهتر است. در انتها باید به این نکته اشاره کرد که اگرچه در حالت نیرو ثابت مرجعی در این زمینه برای مقایسه و اعتباربخشیدن به نتایج به دست آمده وجود ندارد، چون در حالت

## پانویس

1. remeshing
2. Double Cantilever Beam (DCB)
3. Finite element method (FEM)
4. Boundary Element Method (BEM)
5. node release technique
6. moving entire mesh
7. moving local mesh
8. eulerian- lagrangian description
9. linear elastic fracture mechanics
10. Elasto-Plastic finite element code Incorporation Crack propagation
11. stress intensity factor
12. cityplace raleigh wave speed
13. singularity
14. Bar Wave Speed

## منابع

1. Kanninen, M.F. "A dynamic analysis of unstable crack propagation and arrest in the DCB test specimen", *International Journal of Fracture*, **10**(3), pp. 415-430 (1974).
2. Malluck, J.F. and King, W.W. "Simulation of fast fracture in the DCB specimen using kanninen's model", *International Journal of Fracture*, **13**(5), pp. 655-665 (1977).
3. Shahani, A.R. and Forghani, M. "Static and dynamic fracture mechanics analysis of a DCB specimen considering shear deformation effects", *International Journal of Solids and Structures*, **41**, pp. 3793-3807 (2004).
4. Gehlen, P.C.; Popelar, C.H.; and Kanninen, M.F. "Modeling of dynamic crack propagation, I: validation of one dimensional analysis", *International Journal of Fracture*, **15**(3), pp. 281-294 (1979).
5. Keegstra, P.N.R.; Head, J.L.; and Turner, C.E. "Numerical methods in fracture mechanics, A.R. luxmoore and D.R.J Owen", University College, Swensea, pp. 634-647 (1978).
6. Yagawa, G.; Sakai, Y.; and Ando, Y. "Fast fracture and crack arrest", G.T. Hann and M.F. Kanninen, *ASTM STP*, **62**, pp. 109-122 (1977).
7. Oustland, S. and Gudmondson, P. "The application of moving finite elements for the study of crack propagation in linear elastic solids." *Computers and Structures*, **25**(5), pp. 765-774 (1987).

8. Aberson, J.; Anderson, J.M.; and King, W.W. "Fast fracture and crack arrest", *ASTM*, STP. 627, pp. 123-134 (1977).
9. Aoki, S.; Kishimoto, K.; Kondo, H.; and Sakata, M. "Elastodynamic analysis of crack by finit element method using singular element." , *International Journal of Fracture*, **14**(1), pp. 59-68 (1978).
10. Nishioka, T.; and Atluri, S.N. "Computational methods in the mechanics of fracture", Elsevier Science Publishers, pp. 335-383 (1986).
11. Nishioka, T.; and Atluri, S.N. "Numerical modeling of dynamic crack propagation in finite bodies by moving singular elements- Part I", *Journal of Applied Mechanics*, **47**(3), pp. 570-576 (1980a).
12. Nishioka, T.; Tokudome, H.; and Kinoshita, M. "Dynamic fracture e-path prediction in impact fracture phenomena using moving finite element method based on delaunay automatic mesh generation", *International Journal of Solids and Structures*, **38**, pp. 5273-5301 (2001).
13. Koh, H.M.; Lee, H.S.; and Haber, R.B. "Dynamic crack propagation analysis using Eulerian-Lagrangian kinematics descriptions", *Computational Mechanics*, **3**, pp. 141-155, (1988).
14. Koh, H.M.; Lee, H.S.; and Jeong, U.Y. "An Incremental Formulation of the Moving-Grid Finite Element Method for the Prediction of Dynamic Crack Propagation", *Nuclear Engineering and Design*, **158**, pp. 295-309, (1995).
15. Bouchard, P.O.; Bay, F.; Chastel, Y.; and Toven, I. "Crack Propagation Modeling Using an Advanced Remeshing Technique", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg*, **189**, pp. 723-742, (2000).
16. Shiphard, M.S.; Yehia, N.A.B.; Burd, G.S.; and Weidner, T.J. "Automatic Crack Propagation Tracking", *Composites Structures*, **20**, pp. 211-223, (1985).
17. Swenson, D.V.; and Ingraffea, A.R. "Modeling Mixed-Mode Dynamic Crack Propagation using Finite Elements: Theory and Applications", *Computational Mechanics*, **3**, pp. 381-397, (1988).
18. Bittencourt, T.N.; Wawrzynek, P.A.; Ingraffea, A.R. and Sousa, J.L. "Quasi-Automatic Simulation For 2D LEFM Problems", *Engineering Fracture Mechanics*, **55**(2), pp. 321-334, (1996).
19. Lim, I.L.; Johnston, I.W.; and Choi, S.K. "A Finite Element Code For Fracture Propagation Analysis Within Elasto-Plastic Continuum", *Engineering Fracture Mechanics*, **53**(2), pp. 193-211, (1996).
20. Nishioka, T.; and Atluri, S.N. "Numerical Analysis of Dynamic Crack Propagation: Generation and Prediction Studies", *Engineering Fracture Mechanics*, **16**(3), pp. 303-332, (1982).



21. Zehnder, A.T.; and Rosakis, A.J. "Dynamic Fracture Initiation and Propagation in 4340 Steel Under Impact Loading", *International Journal of Fracture*, **43**, pp. 271-285, (1990).
22. Kanninen, M.F. and Papelar, C.H. "advanced fracture mechanics", Oxford University Press, New York, pp. 192-226, (1985).
23. Freund, L.B. "Crack Propagation in an Elastic Solid Subjected to General Loading-I, Constant Rate of Extension", *Journal of Mechanics and Physics in Solids*, **20**, pp. 129-140, (1972a).
24. Nishioka, T. "Computational Dynamic Fracture Mechanics", *International Journal of Fracture*, **86**, pp. 127-159, (1997).
25. Brickstad, B. and Nilson, F. "Numerical Evaluation by FEM of Crack Propagation Experiments", *International Journal of Fracture*, **16**(1), pp. 71-84, (1980).
26. Barsoum, R.S. "Triangular Quarter-Point Elements as Elastic and Perfectly-Plastic Crack Tip Elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **11**, pp. 58-98, (1977).
27. Kalthoff, J.F.; Beinert, ; and Winkler, S. "Measurements of dynamic stress intensity factors for fast running and arresting cracks in DCB specimens", in Hahn, G.T. and Kanninen, M.F. (Eds.), *Fast Fracture and Crack Arrest*, ASTM STP 627, pp. 161-176, (1977).
28. Kobayashi, A.S. "Dynamic fracture analysis by dynamic finite element method generation and propagation analysis, Nonlinear and Dynamic Fracture Mechanics", Perone, N. and Atluri, S.N. (Eds.), *ASME, AMD*, **35**, pp. 19-37, (1979).

