

# تحلیل غیرخطی هندسی المان‌های مستوی ابرکشسان ۴ گره‌یی با روش لاگرانژ

حامد ارزانی\* (استادیار)

الهام خوش باورراد (دانشجوی دکتری)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

مهندسی عمران شریف، (بهار ۱۳۹۸)  
دوری ۲ - ۳۵، شماره ۱/۱، ص. ۱۲-۳

در نوشتار حاضر، فرمول‌بندی عددی کاملی برای تحلیل غیرخطی سازه‌های مستوی با مصالح ابرکشسان ارائه و مسائل المان محدود با استفاده از فرمول‌بندی لاگرانژ کامل تحلیل شده است. فرمول‌بندی ارائه شده برای کرنش‌های بزرگ و مواد غیرخطی ابرکشسان قابل استفاده است. همچنین فرمول‌بندی مذکور برای تحلیل مدل‌های المان محدود چهارضلعی توسعه داده شده است که نسبت به المان‌های ۴ گره‌یی ایزوپارامتریک کمتر به مش‌بندی اعوجاجی حساس است و فاقد مشکل قفل‌شدگی برشی ایجاد شده از طریق مش‌بندی نامنظم هندسی است. به منظور گسترش مزایای روش مختصات ناحیه‌ی چهارضلعی (Q4HY) در کاربردهای غیرخطی، از فرمول‌بندی لاگرانژی کامل المان (Q4HY) استفاده شده است. دو مثال عددی ارائه شده و تأثیر المان Q4HY در سادگی، کارایی و رفتار مناسب روش، برای تحلیل‌های غیرخطی مصالح ابرکشسان به طور قابل ملاحظه‌ی مشهود است.

واژگان کلیدی: تحلیل غیرخطی سازه، غیرخطی هندسی، المان مستوی ۴ گره‌یی، لاگرانژ کامل، ابرکشسان.

h.arzani@sru.ac.ir  
ekhoshbavarrad@gmail.com

## ۱. معرفی

از این جداسازی را نشان‌دادن رفتار غیرخطی در حرکت جسم صلب معرفی کرده‌اند.<sup>[۳]</sup>

در سال ۲۰۰۸،<sup>[۴]</sup> نیز یک المان ۴ گره‌یی مستوی برای آنالیز مسائل خطی صفحه‌یی به طور موفقیت‌آمیزی گسترش داده شد و با استفاده از روش مختصات ناحیه‌ی چهارضلعی (Q4CM) فرمول‌بندی شد. در تحلیل المان‌های اجزاء محدود دوبعدی، المان چهارضلعی ایزوپارامتریک به طور کلی نسبت به سایر المان‌ها ترجیح داده می‌شوند؛ اما نقطه ضعف آن‌ها، حساسیت نسبت به مش‌بندی اعوجاجی است که این امر بیشتر در المان‌های شانسی<sup>۵</sup> قابل رؤیت است. المان‌های شانسی ۴ گره‌یی ایزوپارامتریک مقرون به صرفه هستند و برای مش‌بندی نامنظم توصیه می‌شوند. با این حال وقتی در مش‌بندی اعوجاجی باشد، دچار قفل‌شدگی می‌شود و ممکن است منجر به نتایج غلط شود. در مسائل غیرخطی، اثر مش‌بندی اعوجاجی بسیار بدتر است و باعث پایین آمدن دقت و کارآمدی المان‌های ایزوپارامتریک می‌شوند. معمولاً در تحلیل غیرخطی المان‌های اجزاء محدود، تغییرشکل‌های بزرگ و مش‌بندی نامنظم (اعوجاجی) به وجود می‌آید. با توجه به اینکه اگر المان‌ها نامنظم (اعوجاجی) باشند، المان‌های ایزوپارامتریک دقت پایینی خواهند داشت.

مواد ابرکشسان مانند لاستیک، یکی از مؤثرترین مواد برای کاربردهای مهندسی هستند. لاستیک‌ها به طور گسترده‌یی در صنعت لاستیک‌سازی، یاطاقان‌های پل‌ها، سیستم‌های جداسازی کف‌ها و ... استفاده می‌شوند. در بسیاری از عملکردهای کاربردی از مقاومت فشاری بالا و تغییرشکل‌های بزرگ مواد مذکور استفاده می‌شود.

تحلیل غیرخطی، اهمیت بسیار زیادی در مسائل مهندسی دارد، زیرا تحلیل خطی قادر به انعکاس رفتار واقعی سازه در بارگذاری کامل یا فروپاشی نیست. در مسائل غیرمهندسی غیرخطی هندسی با اعمال بار، تغییرات سختی سازه مشاهده می‌شود. بنابراین، بافتار اولیه و تغییرشکل یافته‌ی سازه، کاملاً متفاوت است و اصل برهم نهی نمی‌تواند در نظر گرفته شود. معادله‌ی تعادل باید با توجه به بافتار تغییرشکل یافته بازنویسی شود و یک حل کلی، شامل: معادلات تعادل خطی و اعمال یک الگوریتم اصلاحی تکراری با یک معیار هم‌گرایی مناسب است.<sup>[۱]</sup>

در سال ۱۹۹۶،<sup>[۲]</sup> سه روش سینماتیکی برای بررسی مسائل غیرخطی هندسی ارائه شده است که به ترتیب شامل روش اویلرین<sup>۱</sup>، روش لاگرانژی<sup>۲</sup> و روش هم‌چرخشی<sup>۳</sup> بوده است. در روش اویلرین، حرکت در سیستم مختصات است و معمولاً برای مسائل مکانیک سیالات استفاده می‌شود.

در روش لاگرانژی، سینماتیک تغییرشکل از نظر سیستم مختصات در فضا ثابت است و شامل سه پیکربندی: پیکربندی اولیه‌ی  $C_0$  در زمان  $t_0 = 0$ ، پیکربندی جاری یا میانی  $C_1$  در زمان  $t_1 = t + \Delta t$  و یک پیکربندی نهایی  $C_2$  در زمان  $t_2 = t$  است. سرانجام روش هم‌چرخشی، که به دو قسمت حرکت جسم صلب و تغییرشکل یافته تقسیم می‌شود. برخی پژوهشگران (۲۰۰۱)، هدف

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۵/۷/۲۶، اصلاحیه ۱۳۹۶/۲/۱۸، پذیرش ۱۳۹۶/۳/۶

DOI:10.24200/J30.2018.1593.1886

مثال‌ها در برنامه‌ی المان محدود آباکوس<sup>۸</sup> مدل‌سازی و به بررسی و مقایسه‌ی نتایج آن‌ها پرداخته شده است. حل مثال‌های با رفتار لاستیک مانند، نشان‌دهنده‌ی توانایی فرمول‌بندی پیشنهادی برای استفاده در تحلیل سازه‌های با کرنش‌های بزرگ است.

## ۲. فرمول‌بندی اساسی المان ۴ گره‌یی

مطابق شکل ۱، در ابتدا ۴ پارامتر بی‌بعد  $g_1, g_2, g_3, g_4$  برای توصیف شکل یک چهارضلعی به صورت روابط ۱ بیان می‌شوند.<sup>[۴]</sup>

$$g_1 = \frac{A'}{A}, g_2 = \frac{A''}{A}, g_3 = 1 - g_1, g_4 = 1 - g_2 \quad (1)$$

که در آن،  $A$  مساحت چهارضلعی است و  $A'$  و  $A''$  به ترتیب مساحت مثلث‌های  $\Delta ۱۲۳$  و  $\Delta ۱۲۴$  هستند. مختصات چهارضلعی  $(L_1, L_2, L_3, L_4)$  با نقطه‌ی اختیاری  $p$  در داخل المان به صورت رابطه‌ی ۲ تعریف می‌شود:

$$L_i = \frac{A_i}{A} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

که در آن  $A_i (i = 1, 2, 3, 4)$  مساحت هر یک از ۴ مثلث به وجود آمده توسط نقطه‌ی درونی  $p$  بوده و محیط هر ۴ المان  $(۱۲, ۲۳, ۳۴, ۴۱)$  به ترتیب در شکل ۲ نشان داده شده است.

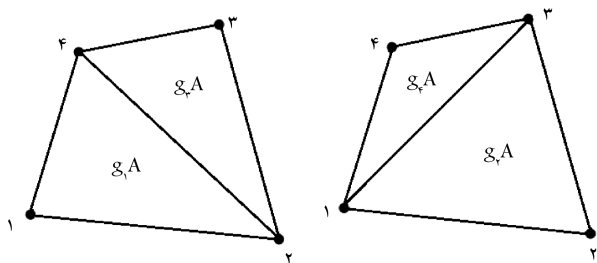
مقادیر  $(L_1, L_2, L_3, L_4)$  می‌توانند به صورت مختصات کارترین (رابطه‌ی ۳) نشان داده شوند:

$$L_i = \frac{1}{4A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (3)$$

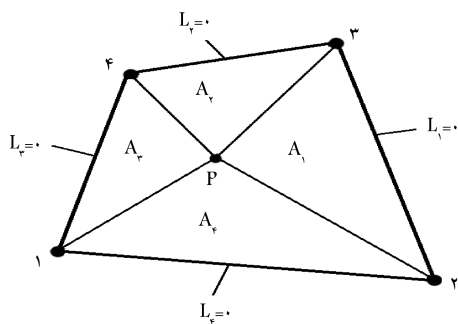
که در آن،  $a_i, b_i, c_i$  از روابط ۴ و ۵ به دست می‌آیند:

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad b_i = y_i - y_k, \quad c_i = y_k - y_i \quad (4)$$

$$(i = 1, 2, 3, 4; j = 2, 3, 4, 1; k = 3, 4, 1, 2) \quad (5)$$



شکل ۱. تعریف ۴ پارامتر  $g_1, g_2, g_3, g_4$ .



شکل ۲. تعریف منطقه‌ی ۴ ضلعی.

تئوری استفاده از مواد ابرکشسان،<sup>۶</sup> در برخی پژوهش‌ها،<sup>[۵]</sup> مطرح شده است که فرمول‌بندی‌های ارائه‌شده‌ی بسیار پیچیده هستند. ساده‌سازی معادلات مذکور در برخی مطالعات،<sup>[۷]</sup> و با به‌کارگیری معادلات سازگاری مشاهده می‌شود.<sup>[۹]</sup> همچنین تئوری شل را که شامل اندازه‌گیری کرنش غیراستاندارد و کار مزدوج تعدیل یافته و تنش مؤثر است را ارائه کرده‌اند.<sup>[۸]</sup> نیز روشی را بر پایه‌ی تانسور تنش پاولا کیرشلف و تانسور کرنش گرین لاگرانژ فرمول‌بندی کرده است.

در روش مذکور که اثر کش آمدگی عرضی در بردار جابه‌جایی کلی در نظر گرفته شده است، المان‌های شل اجزاء محدود با انتگرال‌گیری در ضخامت برای در نظر گرفتن رفتار غیرخطی مواد ابرکشسان توسعه داده شده‌اند. همچنین در سال ۲۰۰۰،<sup>[۱۰]</sup> تاریخچه‌ی مختصری از روش‌های اجزاء محدود غیرخطی بر شمرده شده است که راهنمای بهتری نسبت به سایر مراجع موجود در این زمینه است. در سال ۲۰۰۰، نیز فرمول‌بندی دیگری پیشنهاد شده است<sup>[۱۱]</sup> که در آن از یک ماتریس سختی تحلیلی برای مدل کردن خواص ابرکشسانی مواد استفاده شده است. همچنین در سال ۲۰۰۳،<sup>[۱۲]</sup> یک المان پوسته‌یی نازک چهارضلعی جدید بر اساس مختصات ناحیه‌ی چهارضلعی معرفی و با تئوری چرخشی ترکیب و باعث شد که فرمول‌بندی کرنش برای تحلیل مسائل تنش و کرنش مسطح ساده و تسریع شود.

برخی پژوهشگران (۲۰۰۴)، نیز دو المان غشایی چهارضلعی ۴ گره‌یی که با AGQ6-II و AGQ6-I نشان داده می‌شود، را توسعه داده و به‌جای استفاده از سیستم مختصات ایزوپارامتریک سنتی از سیستم مختصات ناحیه‌ی چهارضلعی برای ایجاد فرمول‌بندی المان‌های جدید استفاده کرده‌اند.<sup>[۱۳]</sup>

در مطالعه‌ی در سال ۱۹۹۹،<sup>[۱۴]</sup> روش مختصات ناحیه‌ی چهارضلعی معرفی و QACM-I نام‌گذاری شد که روشی جدید و مؤثر برای توسعه‌ی مدل‌های قوی المان محدود چهارضلعی است. در ادامه‌ی مطالعات مذکور،<sup>[۱۵]</sup> یک گروه جدید از روش‌هایی بر اساس سیستم مختصات ناحیه‌ی چهارضلعی پیشنهاد شد که QACM-II نامیده شد. سیستم مختصات جدید (QACM-II) نه فقط شکل ساده‌تری داشتند، بلکه مهم‌ترین مزیت‌های روش (QACM-I) را نیز حفظ کرده‌اند.

همچنین برخی پژوهشگران (۲۰۱۴)،<sup>[۱۶]</sup> المان‌های مثلثی جدیدی که SST۱۰ نامیده می‌شوند را فرمول‌بندی کردند که می‌توانستند در مش‌بندی نامنظم و هندسه‌های پیچیده با رفتار خطی و غیرخطی هندسی استفاده شوند. در ادامه‌ی مطالعات در همان سال،<sup>[۱۷]</sup> از یک المان پوسته‌یی ۴ گره‌یی نیز برای تحلیل غیرخطی هندسی پوسته‌های نازک و نسبتاً ضخیم چندلایه استفاده شده است.

صرف‌نظر از پیچیدگی، درک مفاهیم این‌گونه معادلات دیفرانسیل غیرخطی یکی از معایب اصلی آن است. بررسی کرنش‌های بزرگ توسط پژوهشگران بسیاری بررسی شده است.<sup>[۱۸]</sup> به بررسی مواد غیرقابل تراکم (لاستیک مانند) پرداختند تا ضخامت المان‌های تغییرشکل یافته در حالت کرنش مسطح را تعیین کنند. مطالعات آن‌ها فقط به مواد غیرقابل تراکم محدود شده است. به طور کلی، روابط مسائل با کرنش‌های بزرگ در حالت مستوی بسیار پیچیده است و اغلب در دسترس نیستند. بنابراین با توجه به سوابق اشاره‌شده، علاقه‌ی نویسندگان نوشتار حاضر به بررسی المان‌های مستوی با تغییرشکل‌های بزرگ و بررسی رفتار مواد ابرکشسان مانند لاستیک، چرم و ... جلب شده است.

در نوشتار حاضر، فرمول‌بندی المان‌های مستوی غیرخطی با رفتار ابرکشسان برای سازه‌های با کرنش‌های بزرگ ارائه و از فرمول‌بندی لاگرانژ کامل برای تحلیل استفاده شده است. همچنین روابط مواد ابرکشسان مطرح شده است. برنامه به زبان متلب<sup>۷</sup> برای تحلیل غیرخطی مسائل ابرکشسان نوشته شده است و دو مثال با فرمول‌بندی پیشنهادی حل و با نتایج دیگر مطالعات مقایسه شده است. همچنین

بنابراین میدان جابه‌جایی المان می‌تواند به صورت مجموع  $\{\lambda\}^e$  و  $\{q\}^e$  نوشته شود (رابطه‌ی ۱۱):

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u^0 \\ v^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u^\lambda \\ v^\lambda \end{Bmatrix} = [N_q]\{q\}^e + [N_\lambda]\{\lambda\}^e \quad (11)$$

که در  $u^0$  و  $v^0$  میدان جابه‌جایی اساسی (ضروری) مرتبط با  $\{q\}^e$ ،  $u^\lambda$  و  $v^\lambda$  میدان جابه‌جایی داخلی اضافه‌شده‌ی مرتبط با  $\{\lambda\}^e$ ،  $[N_q]$  ماتریس تابع شکل و  $[N_\lambda]$  پارامترهای داخلی ماتریس تابع شکل (رابطه‌ی ۱۲) هستند:

$$[N_q] = \begin{bmatrix} N_1^0 & 0 & N_2^0 & 0 & N_3^0 & 0 & N_4^0 & 0 \\ 0 & N_1^0 & 0 & N_2^0 & 0 & N_3^0 & 0 & N_4^0 \end{bmatrix}$$

$$[N_\lambda] = \begin{bmatrix} N_{\lambda 1}^0 & 0 & N_{\lambda 2}^0 & 0 \\ 0 & N_{\lambda 1}^0 & 0 & N_{\lambda 2}^0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

که در آن،  $N_i^0$  از روابط ۱۳ به دست می‌آید:

$$N_i^0 = -\frac{1}{4}g_k + L_i + L_j + \xi_i \eta_i g_k \bar{P}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4; j = 2, 3, 4, 1; k = 3, 4, 1, 2) \quad (13)$$

$\bar{P}$  در رابطه‌ی اخیر از رابطه‌ی ۱۴ به دست می‌آید و همچنین  $N_{\lambda 1}$  و  $N_{\lambda 2}$  از رابطه‌ی ۱۵ به دست می‌آیند:

$$N_{\lambda 1} = L_1 L_2, \quad N_{\lambda 2} = L_2 L_3 \quad (15)$$

بردار کرنش المان می‌تواند به صورت رابطه‌ی ۱۶ محاسبه شود:

$$\{\varepsilon\}^e = [B_q]\{q\}^e + [B_\lambda]\{\lambda\}^e \quad (16)$$

که در آن،  $\{\varepsilon\}^e$  و  $[B_q]$  از روابط ۱۷ و ۱۸ محاسبه می‌شوند:

$$\{\varepsilon\}^e = [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T \quad (17)$$

$$[B_q] = [[B_{q1}] \ [B_{q2}] \ [B_{q3}] \ [B_{q4}]] \quad (18)$$

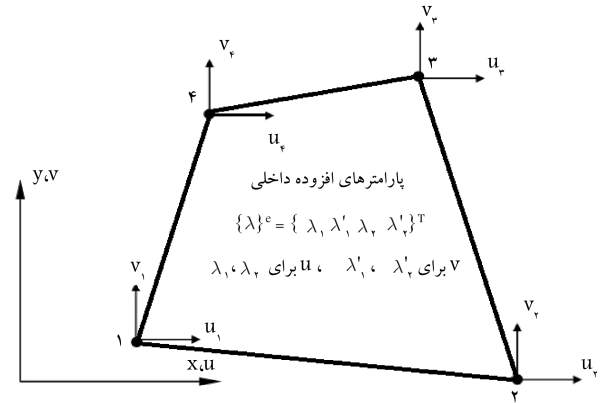
و  $[B_{qi}]$  از رابطه‌ی ۱۹ به دست می‌آید:

$$[B_{qi}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (19)$$

که در آن،  $\frac{\partial N_i}{\partial y}$  و  $\frac{\partial N_i}{\partial x}$  از رابطه‌ی ۲۰ به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{b_i}{4A} + \frac{b_j}{4A} + \frac{\xi_i \eta_i g_k}{4A(1+g_1 g_r + g_r g_t)} \bar{P}_x \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{c_i}{4A} + \frac{c_j}{4A} + \frac{\xi_i \eta_i g_k}{4A(1+g_1 g_r + g_r g_t)} \bar{P}_y \end{cases}$$

$$(i = 1, 2, 3, 4; j = 2, 3, 4, 1; k = 1, 2, 3, 4) \quad (20)$$



شکل ۳. بردار جابه‌جایی در گره‌ها.

$(x_i, y_i)$  مختصات کارتزین در ۴ گوشه‌ی المان هستند. همان‌طور که مشهود است، معادله‌ی ۳، همیشه یک معادله خطی است. بنابراین با انتقال از مشتقات مرتبه‌ی اول (رابطه‌ی ۶):

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial L_1} \\ \frac{\partial}{\partial L_2} \\ \frac{\partial}{\partial L_3} \\ \frac{\partial}{\partial L_4} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

می‌توان نشان داد که  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) باید روابط ۷ را ارضاء کند:

$$\begin{cases} L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1, \\ g_1 g_2 L_1 - g_1 g_3 L_2 + g_2 g_3 L_3 - g_2 g_4 L_4 = 0 \end{cases} \quad (7)$$

که فقط دوتای  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) مستقل هستند و  $L_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) می‌تواند به صورت مختصات ایزوپارامتریک در مجموعه روابط ۸ بیان شود:

$$\begin{cases} L_1 = \frac{1}{4}(1 - \xi)[g_2(1 - \eta) + g_3(1 + \eta)] \\ L_2 = \frac{1}{4}(1 - \eta)[g_1(1 - \xi) + g_3(1 + \xi)] \\ L_3 = \frac{1}{4}(1 + \xi)[g_1(1 - \eta) + g_2(1 + \eta)] \\ L_4 = \frac{1}{4}(1 + \eta)[g_1(1 - \xi) + g_2(1 + \xi)] \end{cases} \quad (8)$$

المان ۴ گره‌یی نشان داده‌شده در شکل ۳ را در نظر بگیرید. بردار جابه‌جایی گره‌یی المان  $\{q\}^e$  به صورت رابطه‌ی ۹ است:

$$\{q\}^e = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]^T \quad (9)$$

به علاوه، میدان جابه‌جایی  $u$  شامل دو پارامتر داخلی  $\lambda_1$  و  $\lambda_2$ ،  $v$  نیز شامل دو پارامتر داخلی  $\lambda_3$  و  $\lambda_4$  است. پارامترهای بردار  $\{\lambda\}^e$  به صورت رابطه‌ی ۱۰ هستند:

$$\{\lambda\}^e = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \lambda_3 \ \lambda_4]^T \quad (10)$$

$$\bar{P} = \frac{2(L_2 - L_1)(L_3 - L_2) - (g_2 - g_3)(L_2 - L_1) - (g_1 - g_2)(L_3 - L_1) - \frac{1}{4}(g_2 g_3 - g_1 g_2)}{1 + g_1 g_2 + g_2 g_3} \quad (14)$$

که در آن‌ها،  $\bar{P}_x$  و  $\bar{P}_y$  از روابط ۲۱ به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \bar{P}_x = \sum_{i'=1}^r b_{i'} \xi_{i'} \eta_{i'} [\mathfrak{z}(L_{j'} - L_{m'}) + (g_{j'} - g_{k'})] \\ \bar{P}_y = \sum_{i'=1}^r c_{i'} \xi_{i'} \eta_{i'} [\mathfrak{z}(L_{j'} - L_{m'}) + (g_{j'} - g_{k'})] \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{pmatrix} i' = 1, 2, 3, 4; j' = 2, 3, 4, 5 \\ k' = 1, 2, 3, 4; m' = 4, 1, 2, 3 \end{pmatrix} \quad (22)$$

و  $[B_\lambda]$  در رابطه‌ی ۱۶، از رابطه‌ی ۲۲ و  $[B_{\lambda i}]$  از رابطه‌ی ۲۳ به دست می‌آیند:

$$[B_\lambda] = [[B_{\lambda 1}] [B_{\lambda 2}]] \quad (23)$$

$$[B_{\lambda i}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{\lambda i}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_{\lambda i}}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{\lambda i}}{\partial x} & \frac{\partial N_{\lambda i}}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2)$$

که در آن،  $\frac{\partial N_{\lambda i}}{\partial y}$  و  $\frac{\partial N_{\lambda i}}{\partial x}$  از رابطه‌ی ۲۴ به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\lambda i}}{\partial x} &= \frac{b_i}{2A} L_k + \frac{b_k}{2A} L_i \\ \frac{\partial N_{\lambda i}}{\partial y} &= \frac{c_i}{2A} L_k + \frac{c_k}{2A} L_i \quad (i = 1, 2; k = 3, 4) \end{aligned} \quad (24)$$

ماتریس سختی المان می‌تواند به صورت رابطه‌ی ۲۵ بیان شود:

$$[K]^e = [K_{qq}] - [K_{qq}]^T [K_{\lambda\lambda}]^{-1} [K_{\lambda q}] \quad (25)$$

که در آن،  $[K_{\lambda\lambda}]$ ،  $[K_{\lambda q}]$  و  $[K_{qq}]$  از روابط ۲۶ به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} [K_{qq}] &= \iint [B_q]^T [D] [B_q] t dA \\ [K_{\lambda\lambda}] &= \iint [B_\lambda]^T [D] [B_\lambda] t dA \\ [K_{\lambda q}] &= \iint [B_\lambda]^T [D] [B_q] t dA \end{aligned} \quad (26)$$

که در آن‌ها،  $t$  ضخامت،  $[D]$  ماتریس کشسانی،  $E$  و  $\mu$  به ترتیب مدول یانگ و نسبت پواسون هستند. برای مسائل کرنش مسطح مقدار  $E$  و  $\mu$  با جایگزینی در روابط مربوطه ماتریس  $[D]$  را تشکیل می‌دهند.

### ۳. فرمول بندی لاگرانژ

با توجه به نحوه انتخاب بافتار مرجع و روش توصیف سینماتیکی، دو روش فرمول بندی برای تحلیل غیرخطی هندسی وجود دارد: ۱. لاگرانژ کامل (TL)<sup>۹</sup> و ۲. لاگرانژ بهنگام (UL)<sup>۱۰</sup>. در فرمول بندی لاگرانژ کامل، سیستم مرجع، بافتار تغییرشکل نیافته‌ی اصلی المان ( $C_0$ ) است. تمام متغیرهای سینماتیکی و استاتیکی در بافتار جاری ( $C_t$ ) به بافتار مرجع باز می‌گردند. در فرمول بندی لاگرانژ به هنگام، آخرین بافتار محاسبه شده‌ی المان ( $C_{t-1}$ ) از المان تغییرشکل یافته به عنوان المان مرجع استفاده می‌شود و تمامی متغیرهای سینماتیکی و استاتیکی در بافتار جاری المان  $C_t$  به این بافتار مرجع باز می‌گردند. استفاده از فرمول بندی لاگرانژ، اولین بار در سال ۱۹۱۱، ۲۰<sup>۱۱</sup> ارائه شد. در پژوهش حاضر نیز از فرمول بندی لاگرانژ و المان ۴ گره‌یی غیرخطی هندسی استفاده شده است. یکی از اصلی‌ترین اهداف تحلیل سازه، ردیابی مسیر تعادل و انتقال بار است که معمولاً به صورت نمودار بار-جابجایی

نشان داده می‌شود. در تحلیل خطی سازه، بار وارده می‌تواند فقط در یک گام به سازه اعمال شود. با این حال، در تحلیل غیرخطی سازه، بار اعمالی بر سازه به چند مرحله نمودی تقسیم و در هرگام بار نمودی به صورت بی در پی به سازه اعمال می‌شود. در نتیجه، روند حل نمودی در تحلیل غیرخطی سازه می‌تواند در دو گروه جای گیرد: ۱. روش نمودی خالص و ۲. روش نمودی تکراری. نمودی تکراری روشی مؤثرتر و بدون خطاهای تجمعی است که در پژوهش حاضر نیز از روش مذکور استفاده شده است. جابه‌جایی  $u^0$  و  $v^0$  با جابه‌جایی  $u^\lambda$  و  $v^\lambda$  تکمیل می‌شود (رابطه‌ی ۲۷):

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u^0 \\ v^0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} u^\lambda \\ v^\lambda \end{Bmatrix} = [N_q] \{q\}^e + [N_\lambda] \{\lambda\}^e \quad (27)$$

معادله‌ی اخیر همان معادله‌ی ۱۱ است که در آن از فرمول بندی  $TL$  برای المان استفاده شده است. در محاسبه‌ی کرنش از کرنش کامل گرین به صورت رابطه‌ی ۲۸ می‌شود:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i} u_{m,j}) \quad (28)$$

کرنش گرین به صورت شاخص تانسور نوشته شده است. اندیس  $i$  و  $j$  و  $m$  از ۱ تا ۲ متغیر هستند (بنابراین  $u_1, u_2$  نشان دهنده‌ی  $u, v$  هستند). در حقیقت، قسمت خطی کرنش گرین لاگرانژ، یک نقش غالب در محاسبات ایفا می‌کند. در پژوهشی در سال ۱۹۹۳<sup>۱۱</sup>، ناسازگاری جابه‌جایی را از ترم‌های جابه‌جایی درجه‌ی دوم به صورت رابطه‌ی ۲۹ حذف کرده است:

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i} u_{m,j}) + \frac{1}{2} (u_{i,j}^\lambda + u_{j,i}^\lambda) \\ &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i} u_{m,j}) \end{aligned} \quad (29)$$

بر اساس مفروضات ذکر شده، کرنش گرین لاگرانژ می‌تواند به شکل ماتریسی (رابطه‌ی ۳۰) بیان شود:

$$\{E\}^e = [B_q] \{q\}^e + [B_\lambda] \{\lambda\}^e + \frac{1}{2} [A] [G] \{q\}^e \quad (30)$$

که در آن،  $[B_q]$  و  $[B_\lambda]$  در معادله‌های ۱۸ و ۲۱ داده شده و  $[G]$  از رابطه‌ی ۳۱ و  $[A]$  از رابطه‌ی ۳۳ به دست می‌آیند:

$$[G] = [[G_1] [G_2] [G_3] [G_4]] \quad (31)$$

و در آن  $[G_i]$  از رابطه‌ی ۳۲ به دست می‌آید:

$$[G_i] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial X} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial X} \\ \frac{\partial N_i}{\partial Y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial Y} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (32)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial X} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} & \frac{\partial v}{\partial Y} & \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial X} \end{bmatrix} \quad (33)$$

که در آن،  $\left[ \frac{\partial u}{\partial X} \quad \frac{\partial v}{\partial X} \quad \frac{\partial u}{\partial Y} \quad \frac{\partial v}{\partial Y} \right]^T$  از رابطه‌ی ۳۴ به دست می‌آید:

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial X} \quad \frac{\partial v}{\partial X} \quad \frac{\partial u}{\partial Y} \quad \frac{\partial v}{\partial Y} \right]^T = [G] \{q\}^e \quad (34)$$

که در آن،  $[K_{mat}]^e$  ماتریس سختی مماسی مادی و  $[K_{geo}]^e$  ماتریس سختی مماسی هندسی هستند که از روابط ۴۶ و ۴۷ به دست می‌آیند:

$$[K_{mat}]^e = \iint_A [B^\Delta]^T [C] [B^\Delta] t dA \quad (46)$$

$$[K_{geo}]^e = \iint_A [G]^T [M] [G] t dA - \sum_{i=1}^r \beta_i [H_i] \quad (47)$$

که در آن،  $[H_i]$  از رابطه‌ی ۴۸ به دست می‌آید:

$$[H_i] = \iint_A [G]^T \begin{bmatrix} l_{1i} [I] & l_{2i} [I] \\ l_{r1} [I] & l_{r2} [I] \end{bmatrix} [G] t dA \quad (i = 1, 2) \quad (48)$$

که در آن،  $\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \\ l_{r1} & l_{r2} \end{bmatrix}$  از رابطه‌ی ۴۹ به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \\ l_{r1} & l_{r2} \end{bmatrix} = [c] [B_\lambda], \quad [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (49)$$

همچنین،  $\{M\}$  از رابطه‌ی ۵۰ و  $[\beta_1 \beta_2]^T$  از رابطه‌ی ۵۱ به دست می‌آیند:

$$\{M\} = \begin{bmatrix} S_x [I] & S_{xy} [I] \\ S_{xy} [I] & S_y [I] \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$[\beta_1 \beta_2]^T = [R]^{-1} \iint_A [B_\lambda]^T \{S\}^e t dA \quad (51)$$

بدین ترتیب فرمول‌بندی لاگرانژ کامل با المان  $Q4Hy^{11}$  پژوهش حاضر قابل مدل‌سازی می‌شود. همانند روش متداول در اجزاء محدود استاندارد با استفاده از معادله‌ی ۸، تمام ماتریس‌های لازم می‌توانند با استفاده از روش انتگرال‌گیری عددی گاوس محاسبه شوند.

#### ۴. مواد ابرکشسان

مدل‌های مناسب برای بررسی کرنش‌های بزرگ بر پایه‌ی تابع چگالی انرژی کرنشی بیان و با عنوان مواد ابرکشسان شناخته می‌شوند. در روش مذکور، تنش‌ها با دیفرانسیل‌گیری از تابع چگالی انرژی کرنشی محاسبه می‌شوند. برای استفاده از روش‌های مذکور نیاز به یک سری مشتق‌گیری‌های پیچیده است، که به دلیل طولانی بودن از ارائه‌ی آن‌ها صرف‌نظر شده است. در نوشتار حاضر، فقط خلاصه‌ی بی‌روابط اساسی در بخش کنونی ارائه شده و توضیحات کامل‌تر در مرجع [۲۰] موجود است. در مرجع مذکور، مدل هوک جدیدی برای تغییرشکل‌های بزرگ گسترش داده شده است که برای مدل‌سازی مواد غیرقابل تراکم از تابع انرژی کرنشی به شکل رابطه‌ی ۵۲ استفاده می‌کند:

$$\psi = \frac{1}{\nu} \lambda (\ln(\det F))^2 - \mu \ln(\det F) + \frac{1}{\nu} \mu (Tr(c) - 3) \quad (52)$$

که در آن،  $F$  از رابطه‌ی ۵۳ به دست می‌آید:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial x}{\partial \tau'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial \tau'} \\ \frac{\partial z}{\partial x'} & \frac{\partial z}{\partial y'} & \frac{\partial z}{\partial \tau'} \end{bmatrix}; c = F^T F \quad (53)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، به دلیل استفاده از فرمول‌بندی لاگرانژ کامل  $(TL)$ ، تمام نتایج با توجه به بافتار اولیه‌ی  $(X, Y)$  است. ضمن اینکه در تحلیل خطی تفاوتی بین  $\partial/\partial X$  (یا  $\partial/\partial Y$ ) و  $\partial/\partial x$  (یا  $\partial/\partial y$ ) وجود ندارد.  $\partial N_i^e/\partial X$  و  $\partial N_i^e/\partial Y$  همانند رابطه‌ی ۲۰ هستند و همچنین رابطه‌ی بین مختصات ناحیه‌ی ۴ ضلعی  $L_i$  و  $(X, Y)$  می‌تواند با جایگزین کردن  $(x, y)$  در معادله‌ی ۳ به دست آید. با متراکم کردن پارامترهای داخلی بردار  $\{\lambda\}^e$  با استفاده از شرایط مرزی می‌توان رابطه‌ی ۳۵ را نوشت:

$$\frac{\partial U^e}{\partial \{\lambda\}^e} = \{0\} \quad (35)$$

که در آن،  $U^e$  انرژی کرنشی المان است. در کاربردهای کشسان خطی ۲ بعدی،  $U^e$  به صورت رابطه‌ی ۳۶ بیان می‌شود:

$$U^e = \frac{1}{\nu} \iint_A \{E\}^e [C] \{E\}^e t dA \quad (36)$$

که در آن،  $[C]$  ماتریس کشسانی است. با جای‌گذاری معادله‌های ۳۰ و ۳۶ در معادله‌ی ۳۵ می‌توان معادله‌ی ۳۷ را نوشت:

$$\{\lambda\}^e = -[R]^{-1} ([G_1] + \frac{1}{\nu} [G_2]) \{q\}^e \quad (37)$$

که در آن،  $[R]$ ،  $[G_1]$  و  $[G_2]$  از رابطه‌ی ۳۸ به دست می‌آیند:

$$[R] = \iint_A [B_\lambda]^T [C] [B_\lambda] t dA$$

$$[G_1] = \iint_A [B_\lambda]^T [C] [B_q] t dA$$

$$[G_2] = \iint_A [B_\lambda]^T [C] [A] [G] t dA \quad (38)$$

بنابراین، بردار کرنش گرین می‌تواند به صورت متراکم (رابطه‌ی ۳۹) نوشته شود:

$$\{E\}^e = ([B_q] - [B_\lambda][R]^{-1}[G_1]) \{q\}^e + \frac{1}{\nu} ([A][G] - [B_\lambda][R]^{-1}[G_2]) \{q\}^e \quad (39)$$

با تعریف روابط نموی، رابطه‌ی ۴۰ را خواهیم داشت:

$$\{dE\}^e = [B^\Delta] \{dq\}^e \quad (40)$$

ماتریس  $[B^\Delta]$  می‌تواند مطابق رابطه‌ی ۴۱ ارزیابی شود:

$$[B^\Delta] = ([B_q] - [B_\lambda][R]^{-1}[G_1] + [A][G] - [B_\lambda][R]^{-1}[G_2]) \quad (41)$$

بردار تنش پاولا کیرشهف (درجه‌ی دوم)  $\{S\}^e$  به صورت رابطه‌ی ۴۲ و ۴۳ محاسبه می‌شود:

$$\{S\}^e = [C] \{E\}^e \quad (42)$$

$$\{S\}^e = [S_x \ S_y \ S_{xy}]^T \quad (43)$$

بنابراین بردار نیروی گرینی  $\{f^{int}\}$  و ماتریس سختی مماسی  $[KT]^e$  به صورت رابطه‌های ۴۴ و ۴۵ نوشته می‌شوند:

$$\{f^{int}\} = \iint_A [B^\Delta]^T \{S\}^e t dA \quad (44)$$

$$[KT]^e = [K_{mat}]^e + [K_{geo}]^e \quad (45)$$

مؤلفه‌های ماتریس  $C$ ، از روابط ۶۵ به دست می‌آیند:

$$C_{11} = C_{1111} = (-2 \ln(\det(F_p^\gamma))\lambda + \lambda + 2\mu)(c_{11}^{-1})^2 \quad (65)$$

$$C_{12} = C_{1122} = C_{2211} = (2\mu - 2 \ln(\det(F_p^\gamma))\lambda)(c_{12}^{-1})^2 + \lambda c_{11}^{-1} c_{22}^{-1}$$

$$C_{22} = \frac{1}{\nu} (C_{1122} + C_{2211}) = C_{1212}$$

$$= (2 \ln(\det(F_p^\gamma))\lambda + \lambda + 2\mu)c_{12}^{-1} c_{11}^{-1}$$

$$C'_{22} = C_{2222} = (-2 \ln(\det(F_p^\gamma))\lambda + \lambda + 2\mu)(c_{22}^{-1})^2$$

$$C'_{22} = \frac{1}{\nu} (C_{2222} + C_{2222}) = C_{1222}$$

$$= (2 \ln(\det(F_p^\gamma))\lambda + \lambda + 2\mu)c_{12}^{-1} c_{22}^{-1}$$

$$C'_{22} = \frac{1}{\nu} (C_{1222} + C_{1222}) = C_{1222} = (-\ln(\det(F_p^\gamma))\lambda + \lambda$$

$$+ \mu)(c_{12}^{-1})^2 - \ln(\det(F_p^\gamma))\lambda c_{11}^{-1} c_{22}^{-1}$$

لازم به ذکر است که گرادین تغییرشکل، حجم بافتار اولیه را به بافتار تغییرشکل یافته مرتبط می‌کند (رابطه ۶۶):

$$V = V^0 \det F \Rightarrow hA = h^0 A^0 \det F_p^\gamma \quad (66)$$

به منظور صحت‌یابی و کنترل پاسخ‌های نهایی روش پیشنهادی، نتایج بررسی مثال‌های عددی حل‌شده در سایر مراجع در حوزه‌ی میدان جابه‌جایی در بخش پنجم ارائه شده است.

## ۵. آزمون وصله

آزمون وصله<sup>۱۲</sup> نوعی آزمون برای بررسی مقبولیت یک المان پیشنهادی در روش اجزاء محدود است. در واقع، جهت حصول اطمینان از نتایج فرمول‌بندی‌های اجزاء محدود، نیاز به آزمون وصله است. آزمون وصله موارد گوناگونی دارد، که همگی بر هم‌گرایی المان تکیه دارند: الف) سازگاری و ب) تکامل.

آزمون وصله به دو روش «جابه‌جایی صلب» و «کرنش ثابت»، هم‌گرایی در المان‌ها را کنترل می‌کند. در آزمون وصله، جابه‌جایی صلب فرض می‌شود که در تمامی گره‌های خارجی (مرزهای وصله) یک جابه‌جایی ثابت وجود داشته باشد، سپس مدل اجزاء محدود پیشنهادی روی وصله‌ی موردنظر حل و جابه‌جایی گره یا گره‌های میانی نیز محاسبه می‌شود. پاسخ مثبت برای آزمون وصله در صورتی است که جابه‌جایی گره‌های میانی با جابه‌جایی اختصاص داده‌شده به مرزها یکی شود، در غیر این صورت پاسخ آزمون منفی است. در آزمون جابه‌جایی کرنش ثابت فرض می‌شود که برای تمامی گره‌ها یک مقدار جابه‌جایی خطی لحاظ شود. سپس با محاسبات اجزاء محدود برای وصله، مقدار جابه‌جایی در گره‌های وسط و متعاقباً کرنش محاسبه می‌شود. این کرنش ثابت باید با کرنش ناشی از حل مدل عددی برابر باشد و در غیر این صورت پاسخ آزمون منفی است. در بخش کنونی، به بررسی آزمون وصله مطابق با مرجع<sup>[۱۱]</sup> پرداخته شده است. یک مسئله‌ی تنش مسطح همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، با خصوصیات فیزیکی  $E = 1000$  و  $\nu = 0.3$  بررسی شده است.

در مرجع<sup>[۱۱]</sup>، تمامی گره‌های پیرامونی مقید هستند و حل دقیق مسئله مطابق با  $u = 0/0.02x$  و  $v = -0.0006y$  است. همچنین تنش اعمال‌شده برابر

که در رابطه ۵۲،  $F$  نشان‌دهنده‌ی گرادین تغییرشکل،  $\lambda$  و  $\mu$  پارامترهای خواص فیزیکی ماده هستند که با عنوان ضرایب لامه شناخته می‌شوند. رابطه‌ی آن‌ها با مدول یانگ  $E$  و نسبت پواسون  $\nu$  به صورت روابط ۵۴ و ۵۵ هستند:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (54)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (55)$$

گرادین تغییرشکل به صورت رابطه ۵۶ تغییر می‌کند:

$$F = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x^0} & \frac{\partial x}{\partial y^0} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial x^0} & \frac{\partial y}{\partial y^0} & 0 \\ 0 & 0 & F_{22} \end{bmatrix}; \det F = F_{22} \det F_p \quad (56)$$

ابتدا باید  $F_{22}$  را با توجه به  $\sigma_{zz} = 0$  محاسبه کرد. با توجه به روابط موجود برای حالت سه بعدی،  $\sigma_{zz}$  می‌تواند به صورت رابطه ۵۷ تعیین شود:

$$\hat{\sigma} = \frac{\lambda}{\det F} \ln(\det F)I + \frac{\mu}{\det F} (FF^\gamma - I) \\ \sigma_{zz} = \frac{\lambda}{F_{22} \det F_p} \ln(F_{22} \det F_p) + \frac{\mu}{F_{22} \det F} (F_{22}^\gamma - I) \quad (57)$$

بنابراین، برای حالت  $\sigma_{zz} = 0$ ، رابطه ۵۸ را داریم:

$$\frac{\lambda}{F_{22} \det F_p} \ln(F_{22} + \ln(\det F_p)) = \frac{\lambda}{F_{22} \det F_p} (F_{22}^\gamma - I) \quad (58)$$

سیس مقدار درمیان  $F$  از گرادین تغییرشکل صفحه‌ی مطابق رابطه ۵۹ محاسبه می‌شود:

$$\det F = F_{22} \det F_p \Rightarrow \ln(\det F) \\ = \ln F_{22} + \ln(\det F_p) = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \ln(\det F_p) + \ln(\det F_p) \quad (59)$$

بنابراین،  $\ln(\det F)$  از رابطه ۶۰ به دست می‌آید:

$$\ln(\det F) = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \ln(\det F_p) = \ln(\det F_p^\gamma) \Rightarrow \det F \\ = \det F_p^\gamma \quad (60)$$

که در آن،  $\gamma$  از رابطه ۶۱ محاسبه می‌شود:

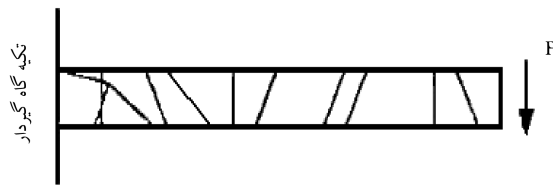
$$\gamma = \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \quad (61)$$

روابط تشکیل‌دهنده‌ی تنش صفحه‌ی می‌توانند به صورت روابط ۶۲ الی ۶۵ محاسبه شوند:

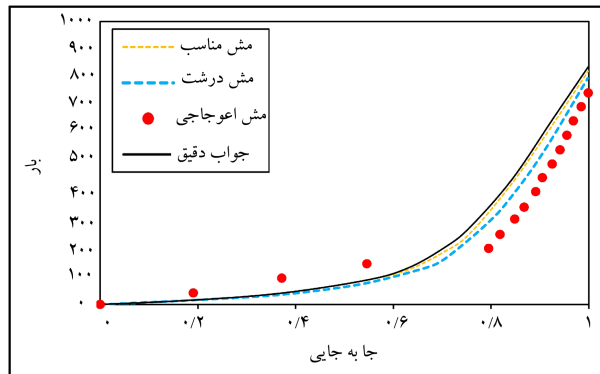
$$S_p = \lambda(\ln(\det F_p^\gamma)c_p^{-1} + \mu(I - c_p^{-1})) \quad (62)$$

$$\sigma_p = \frac{\lambda}{\det F_p^\gamma} \ln(\det F_p^\gamma)I + \frac{\mu}{\det F_p^\gamma} (b_p - I) \quad (63)$$

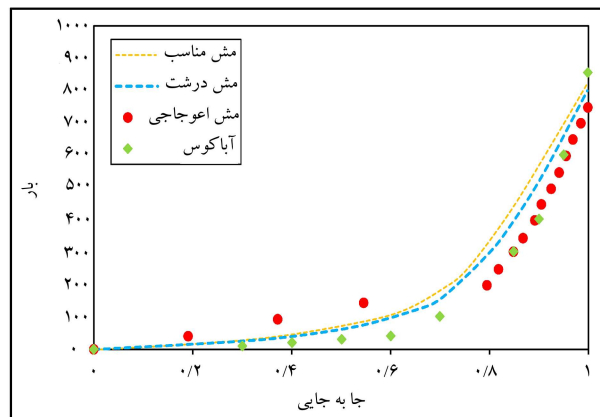
$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (64)$$



شکل ۵. المان تیر طره با بار انتهای. [۲۱]



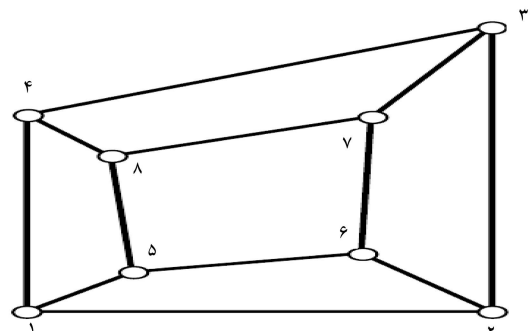
شکل ۶. مقایسه‌ی نتایج مش بندی درشت، اعوجاجی، و مناسب (ریز) با جواب دقیق مسئله.



شکل ۷. مقایسه‌ی نتایج مدل پیشنهادی با مش بندی‌های متفاوت در برنامه‌ی متلب و مدل ساخته شده در آباکوس.

اول با ۴۰ المان و ۱۲۶ درجه آزادی) و در نهایت، آخرین نوع گسسته‌سازی شبکه با استفاده از المان‌های اعوجاجی (شامل ۱۰ المان و ۴۴ درجه آزادی) ارائه شده در شکل ۵ و مرجع [۲۱] و جواب دقیق مسئله‌ی گرفته شده از مرجع [۱۰]، تشکیل شده است.

برای مقایسه‌ی بهتر و دقیق‌تر روش پیشنهادی، مسئله‌ی کنونی با نرم‌افزار اجزاء محدود آباکوس نیز تحلیل شده است، در مدل‌سازی آباکوس از المان shell استفاده و برای مش بندی در ماژول Mesh، Approximate global size برابر ۰٫۲ و اعمال شده است. در قسمت Element Shape، المان Tri و Technique آن Free ایجاد و بار انتهای متمرکز و سایر مشخصات مطابق اطلاعات مسئله اعمال شده است. با تحلیل مسئله توسط برنامه‌ی آباکوس و استخراج نتایج تحلیل در شکل ۷، مقایسه‌ی بین نتایج حاصل از تحلیل آباکوس و نتایج حاصل از تحلیل توسط کدنویسی در محیط متلب با ۳ المان (درشت، ریز و اعوجاجی) نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است، روش پیشنهادی، تطابق خوبی با نتایج



شکل ۴. مسئله‌ی تنش مسطح برای ارزیابی آزمون وصله. [۱۱]

جدول ۱. حل آزمون وصله.

گره	جاب‌جایی محاسبه شده در جهت	
	x	y
۱	۰٫۰	۰٫۰
۲	۰٫۰۰۰۴۰	۰٫۰
۳	۰٫۰۰۰۴۱	-۰٫۰۰۰۱۸۶
۴	۰٫۰	-۰٫۰۰۰۱۲۰
۵	۰٫۰۰۰۰۸	-۰٫۰۰۰۰۲۴
۶	۰٫۰۰۰۲۹	-۰٫۰۰۰۰۳۷
۷	۰٫۰۰۰۳۱	-۰٫۰۰۰۱۲۱
۸	۰٫۰۰۰۰۶	-۰٫۰۰۰۰۹۵

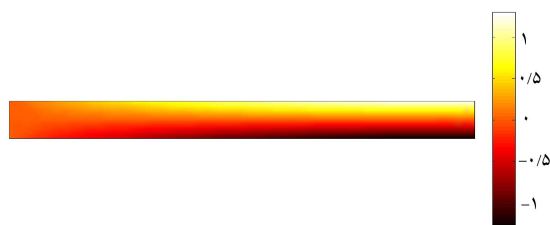
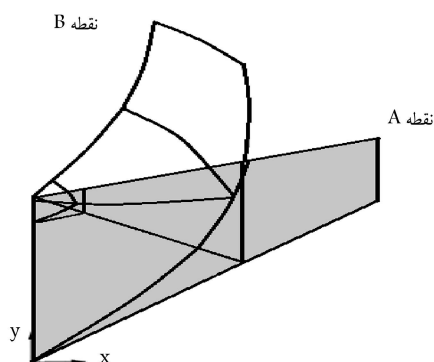
$\sigma_x = 2$  است. جاب‌جایی‌های نقاط و گره‌های داخلی از طریق روش پیشنهادی تعیین و نتایج در جدول ۱ ارائه داده شده است. نتایج حاکی از آن است که جاب‌جایی به دست آمده از روش پیشنهادی با مقادیر به دست آمده از تابع دقیق، جواب یکسان دارد و روش پیشنهادی آزمون وصله را با موفقیت گذرانده است.

## ۱.۱.۵. مثال‌های عددی

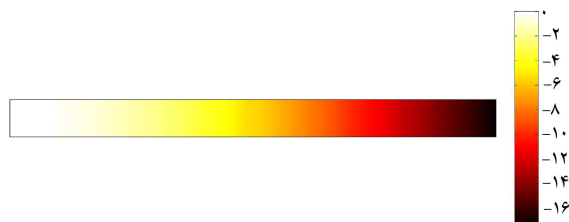
در بخش حاضر، با ارائه‌ی مثال‌های عددی بر نحوه‌ی عملکرد المان ۴ گرهِی Q4HY برای مسائل غیرخطی هندسی با مواد ابرکشسان تأکید شده است. برای این منظور، رفتار المان‌های مذکور در محیط متلب برنامه‌نویسی و نتایج حاصل با نتایج ارائه شده توسط مراجع دیگر صحت‌سنجی شده است. همچنین مثال‌های مذکور در نرم‌افزار آباکوس مدل‌سازی و نتایج آن به جهت مقایسه ارائه شده است.

### ۱.۱.۵.۱. مثال ۱. خمش در تیر دوبعدی: مش بندی انحرافی

مسئله‌ی مورد بحث به عنوان مسئله‌ی استاندارد، قبلاً در پژوهشی در سال ۱۹۸۵ بررسی شده، [۹] و انتخاب آن به منظور صحت‌یابی عملکرد برنامه و روش پیشنهادی است. یک تیر طره با بار انتهای متمرکز با سه نوع مش بندی مختلف با برنامه‌ی نوشته شده در محیط متلب بررسی شده است. شرایط مرزی و نیرویی مثال ۱ در شکل ۵ ارائه شده است. خصوصیات فیزیکی مصالح در این مسئله به این صورت است:  $E = 10^7$  و  $\nu = 0.3$  تیر مذکور به طول  $L = 17$  و عرض و ضخامت  $w = h = 0.1$  است. نتایج مربوط به تغییر مکان قائم راستای بالای تیر طره در شکل ۶، مشاهده می‌شود که در آن اولین مش بندی با روش پیشنهادی شامل المان‌های مستطیلی شکل به صورت درشت (شامل ۱۰ المان و ۴۴ درجه آزادی)، دومین مش بندی با روش پیشنهادی به وسیله‌ی المان‌های مناسب (ریزتر از حالت

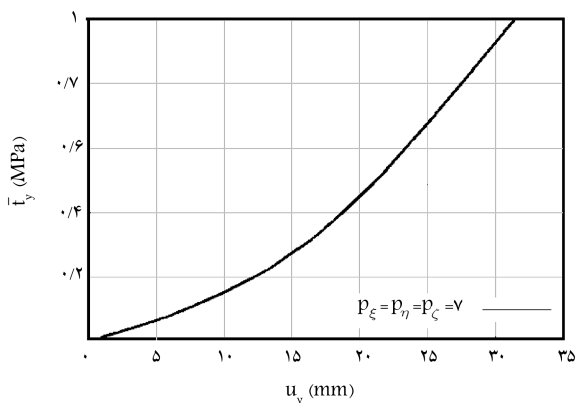


شکل ۸. توزیع میدان جابه‌جایی در کل حوزه در راستای افقی.

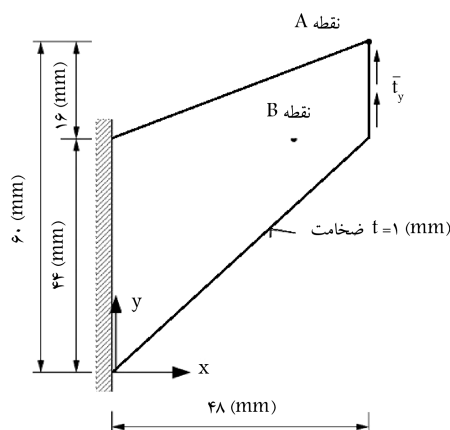


شکل ۹. توزیع میدان جابه‌جایی در کل حوزه در راستای قائم.

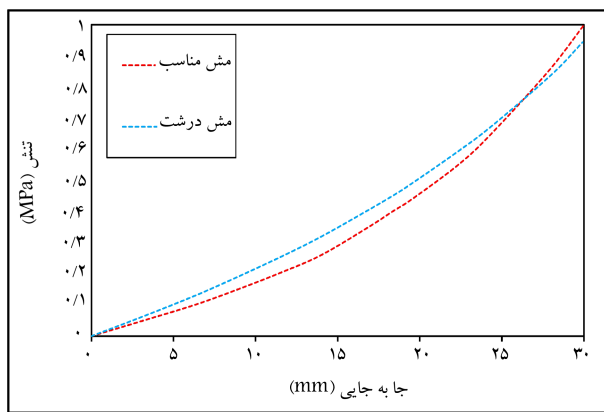
شکل ۱۱. پیکربندی اولیه و تغییرشکل یافته [۲۲].



شکل ۱۲. جابه‌جایی قائم در نقطه‌ی انتهایی تیر با استفاده از المان‌های مرتبه بالا [۲۲].



شکل ۱۰. پوسته‌ی کوک [۲۲].



شکل ۱۳. نتایج حاصل از تحلیل با دو نوع مش بندی مختلف.

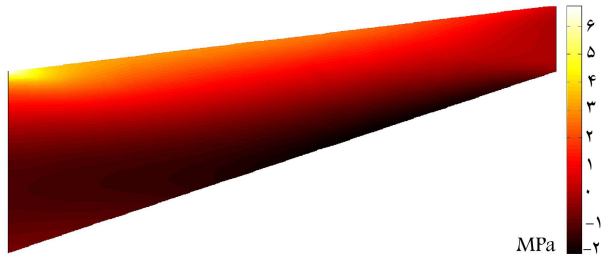
از روش پیشنهادی مشاهده می‌شود. مش بندی اول با نام مش درشت با  $20^\circ$  درجه آزادی و مش بندی دوم با نام مش مناسب (ریزتر از نوع اول) با  $66^\circ$  درجه آزادی است. در مثال حاضر، به دلیل پیچیده‌تر بودن حوزه‌ی مسئله، تأثیر اندازه‌ی المان در نتایج نهایی بیشتر مشهود است. در شکل ۱۴، به منظور نمایش کارایی روش پیشنهادی، مقایسه‌ی بین نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی با حل دقیق صورت پذیرفته است. نتیجه‌ی حاصل از مش درشت با روش پیشنهادی برای مثال کنونی به دلیل پیچیده بودن حوزه‌ی مسئله نسبت به مثال اول، دقت کمتری دارد، با این حال در محدوده‌ی قابل قبولی است. همچنین در مورد مش بندی

مرجع و خروجی آباکوس دارد و می‌تواند دقت مناسبی را در تحلیل به دست آورد. شکل‌های ۸ و ۹، مربوط به توزیع میدان جابه‌جایی در کل حوزه در راستای افقی و قائم با استفاده از روش پیشنهادی و مش مناسب است.

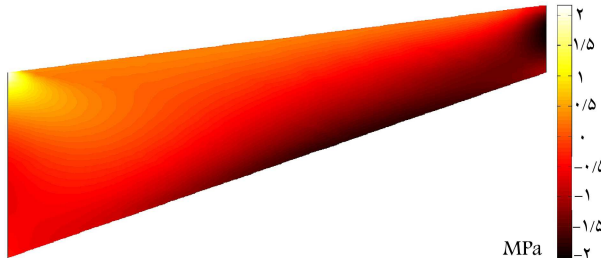
#### ۲.۱.۵. مثال ۲. پوسته‌ی کوک: مش بندی اعوجاجی

در مثال ۲، پوسته‌ی کوک<sup>۱۳</sup> با فرض شرایط کرنش صفحه‌ی تحلیل و با معرفی یک لایه المان به ضخامت  $0.5^\circ$  در جهت محور  $z$  از تقارن در جهت ضخامت استفاده شده است. شرایط مرزی و نیرویی مثال حاضر در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود. بار سطحی خارجی  $t = t_y e_y$  تا مقدار  $t_y^{max} = 17^\circ$  افزایش یافته و شکل تغییر یافته‌ی آن، تحت بارگذاری معرفی شده در شکل ۱۱ نشان داده شده است.<sup>[۲۲]</sup> در حل مثال مذکور، تنش برشی  $\mu = 80.194 N/mm^2$  و ثابت لامه  $\Lambda = 400.889.806 N/mm^2$  در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل از تحلیل مدل دوستر و همکاران،<sup>[۲۲]</sup> که برای حل مسئله‌ی کوک، از نوع خاصی از المان‌های مرتبه‌ی بالای ویژه و تغییرشکل‌های بزرگ استفاده کرده‌اند، به عنوان جواب دقیق برای حل مسئله‌ی مذکور در نظر گرفته شده است. در شکل ۱۲، جواب دقیق مربوط به جابه‌جایی قائم نقطه‌ی انتهایی تیر ارائه شده در مرجع،<sup>[۲۳]</sup> تحت شرایط مذکور و در شکل ۱۳، نتایج مربوط به دو نوع مش بندی با استفاده





شکل ۱۶. توزیع تنش در کل حوزه در راستای افقی.

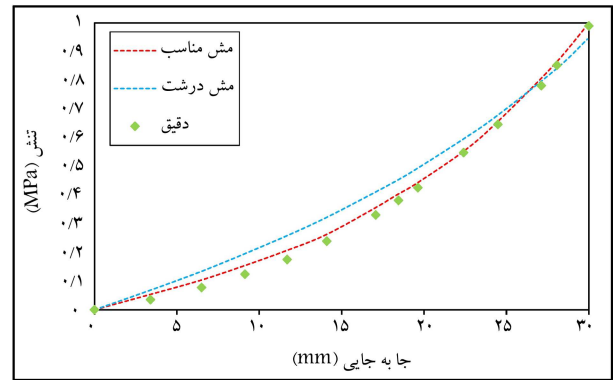


شکل ۱۷. توزیع تنش در کل حوزه در راستای قائم.

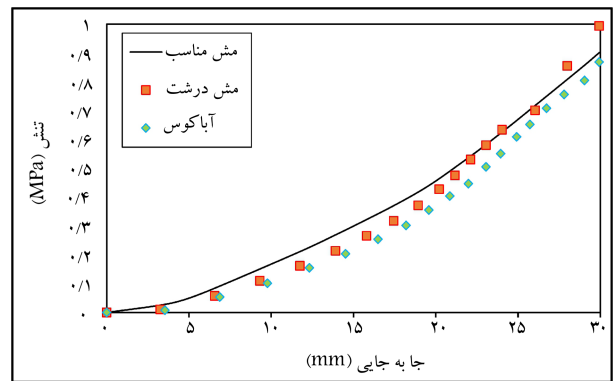
است و دقت مطلوبی را در حل اینگونه مسائل از خود نشان می‌دهد. همچنین در شکل‌های ۱۶ و ۱۷، نتایج مربوط به توزیع جابه‌جایی در کل حوزه در دو راستای افقی و قائم ارائه شده است.

## ۶. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر، فرمول‌بندی لاگرانژ کامل با المان‌های چهارضلعی ۴ گرهی برای تحلیل غیرخطی هندسی مسائل ابرکشسانی استفاده شده است. فرایند مدل عددی پیشنهادی در محیط برنامه‌نویسی متلب کدنویسی و کارایی و دقت جواب‌ها در دو مثال عددی بررسی شده است. نتایج حل مثال‌های عددی نشان می‌دهد که المان ۴ گرهی نسبت به سایر المان‌ها کمتر به اعوجاج در مش‌بندی در تحلیل غیرخطی حساس است و برای المان‌های با شکل اریب، با دقت خوبی عمل می‌کند؛ در حالی که پاسخ‌های محاسبه‌شده به‌وسیله المان‌های ۴ گرهی ایزوپارامتریک ممکن است غیرقابل استفاده باشند. تأثیر المان‌های ۴ گرهی در توسعه‌ی سادگی، کارآمدی و معتبر بودن در تحلیل غیرخطی هندسی به‌طور قابل توجهی محسوس است. علاوه بر این در مدل‌سازی مذکور از فرمول‌بندی لاگرانژ کامل با یک فرمول‌بندی ویژه و کاربرد روش‌های انتگرال‌گیری گاوس چهار نقطه‌یی برای ماتریس‌های سختی استفاده شده است. نتایج خروجی مثال‌های ارائه‌شده، حکایت از توانمندی و پتانسیل بالای روش مذکور برای حل مسائل ابرکشسانی دارد.



شکل ۱۴. مقایسه‌ی نتایج با مش‌بندی مختلف و مراجع دیگر. [۲۲]



شکل ۱۵. مقایسه‌ی نتایج مش‌بندی برنامه‌ی متلب با مدل ساخته‌شده در آباکوس.

مناسب، حتی با پیچیده شدن حوزه‌ی مسئله، پیوستگی موجود در نتایج، و هم‌گرایی کلی پاسخ‌ها، دقت بالایی دارد و نیز درجه آزادی متعارفی در آن استفاده شده است.

با مقایسه‌ی نتایج مراجع و فرمول‌بندی پیشنهادی در شکل ۱۴ می‌توان به دقت روش ارائه‌شده پی برد. روش پیشنهادی بدون نیاز به بالاتر بردن درجه‌های تابع، توانسته است دقت مطلوبی را برای حل مسئله تأمین کند. در نتیجه، روش پیشنهادی کاهش حجم محاسباتی را نسبت به بالاتر بردن درجه‌ی تابع برای شبیه‌سازی رفتار پوسته‌ی کوک همانند مدل دوسترو و همکاران، [۲۲] از خود نشان می‌دهد.

همچنین مدل‌سازی مسئله با نرم‌افزار اجزاء محدود آباکوس انجام و نتایج حاصل از تحلیل مسئله ارائه شده است. در شکل ۱۵، مقایسه‌ی بین نتایج حاصل از روش عددی و آباکوس نشان داده شده است. نتایج ارائه‌شده بیانگر این موضوع است که روش پیشنهادی به انحراف در مش‌بندی حساس است و برای حل اینگونه مسائل نیاز به بالاتر بردن درجه‌ی تابع نیست که این خود باعث کاهش حجم محاسبات

## پانویس‌ها

1. Eulerian

2. Lagrangian
3. Corotational
4. quadrilateral area coordinate method
5. serendipity

6. hyperelastic
7. Matlab
8. Abaqus
9. total lagrangian
10. update lagrangian
11. quadrilatera 4 node hyperelastic
12. patch test
13. cook's membrane

### (References) منابع

1. Greco, M., Menin, A. and Ferreiram, F.B. "Comparison between two geometrical nonlinear methods for truss analyses", *Structural Engineering and Mechanics*, **41**(6), pp. 735-750 (2012).
2. Bathe, K.J., *Finite Element Procedures*, Prentice, Hall Inc., New Jersey (1996).
3. Malkus, D.S. and Michael, E.P., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, Robert. D. Cook, 3rd Edition, New York (2001).
4. Du, Y. and Cen, S. "Geometrically nonlinear analysis with a 4-node membrane element formulated by the quadrilateral area coordinate method", *Finite Elements in Analysis and Design*, **44**(8), pp. 427-438 (2008).
5. Leonard, J.W., *Tension structures: Behavior and Analysis*, McGraw-Hill, New York (1988).
6. Otto, F., *Tensile structures: Design, Structure, and Calculation of Buildings of Cables, Nets, and Membranes*, MIT Press, Cambridge (1967).
7. Timoshenko, S. and Woinowsky, K.S., *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, 2ed Edition, New York (1959).
8. Borst, R.D., Crisfield, M.A., Remmers, J.J.C. and et al. *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Wiley Series In Computational Mechanics, 2ed Edition (2012).
9. Simo, J.C. and Ortiz, M. "A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyperelastic constitutive equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **49**(2), pp. 221-245 (1985).
10. Belytschko, T., Liu, W.K. and Moran, B. "Nonlinear finite elements for continua and structures", Wiley, Chichester (2000).
11. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., *The Finite Element Method*, 5th Edition (2000).
12. Zhu, Y.Q., Lin, Z.Q. and Zhang, W.G. "A quadrilateral thin shell element based on area co-ordinate for explicit dynamic analysis", *Commun. Numer. Meth. Eng.*, **19**(3), pp. 169-178 (2003).
13. Chen, X.M., Cen, S., Long, Y.Q. and et al "Membrane elements insensitive to distortion using the quadrilateral area coordinate method", *Comput. Struct.*, **82**, pp. 35-54 (2004).
14. Long, Z.F., Li, J.X., Cen, S. and et al. "Some basic formulae for area coordinates used in quadrilateral elements", *Commun. Numer. Meth. Eng.*, **15**(12), pp. 841-852 (1999).
15. Chen, X.M., Cen, S., Fu, X.R. and et al. "A new quadrilateral area coordinate method (QACM-II) or developing quadrilateral finite element models", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **73**(13), pp. 1911-1941 (2008).
16. Rezaiee-Pajand, M. and Yaghoobi, M. "An efficient formulation for linear and geometric non-linear membrane elements", Civil Engineering Department, Ferdowsi University of Mashhad, Iran (2014).
17. Zhen, W. and Qin, S. "Corotational nonlinear analyses of laminated shell structures using a 4-node quadrilateral flat shell element with drilling stiffness", *Acta Mechanica Sinica*, **30**(3), pp. 418-429 (2014).
18. Limkatanyu, S., Prachasaree, W., Kaewkulchai, G. and Kwon, M. "Total lagrangian formulation of 2D bar element using vectorial kinematical description uchar-timkatanyu", *KSCE Journal of Civil Engineering*, **17**(6), pp. 1348-1358 (2011).
19. Wu, C.C. and Jiaom, Z.P. "Geometrically nonlinear analyses for 2-D problems based on the incompatible finite elements with internal parameters", *Acta Mechanica Sinica*, **25**, pp. (1993).
20. Gerhard, A.H., *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*, Wiley, 1st Edition (2000).
21. Betsch, P., Gruttmann, E. and Stein, E. "A 4-node finite shell element for the implementation of general hyperelastic 3D-elasticity at finite strains", *Comput. Methods. Appl. Mech. Engig.*, **130**(1-2), pp. 57-79 (1996).
22. Deuster, A., Hartmann, S. and Rank, E. "P-FEM applied to finite isotropic hyperelastic bodies", *Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg.*, **192**(47-48), pp. 5147-5166 (2010).
23. Gil Perez, M. Kang. and et al. "Nonlinear analysis and design of membrane fabric structures: Modeling procedure and case studies", *ASCE2, Journal of Structural Engineering*, **142**(11), pp.28-35 (2016).