مهندسی عمران شریف، (تابستان ۱۳۹۸)
دوره‌ی ۲ - ۳۵، شماره‌ی ۲/۲، ص. ۱۷-۲۸

Original Article

تحلیل مدل ریاضی انتشار ترک هیدرولیکی در محیط کشسان: رژیم سختی ـ گرانروی

علی عسگری * **(استادیار)**
دانشکده‌ی فنی و مهندسی، دانشگاه مازندران، بابلسر

علی اکبر گلشنی (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

a.asgari@umz.ac.ir
golshani@modares.ac.ir

در نوشتار حاضر، یک روش شبه تحلیلی توسعه‌یافته برای حل مسئله‌ی رشد ترک هیدرولیکی در یک محیط کشسان و در حالت کرنش صفحه‌یی ارائه شده است. محیط نفوذناپذیر و چقرمگی آن نسبتاً زیاد فرض شده و همچنین جریان سیال غیرقابل تراکم و آرام در نظر گرفته شده است. ترک در همه‌ی زمان‌ها کاملاً از سیال پر شده و انتشار ترک در چارچوب مکانیک شکست خطی (LEFM) است، به عبارت دیگر، ترک به صورت شبه استاتیکی رشد می‌کند. مهم‌ترین فراسنج‌های مؤثر در مسئله‌ی حاضر عبارت‌اند از: گرانروی سیال، چقرمگی محیط، میزان دبی ورودی، مدول کشسانی، تنش محصورکننده و مقدار زمان تزریق. در پژوهش‌های اخیر، مسئله‌ی شکست هیدرولیکی با استفاده از روش‌های مختلف تحلیلی و شبه تحلیلی بررسی شد. در بسیاری موارد، نتایج پژوهش‌های انجام شده برای مقادیر کوچک از گرانروی سیال در مقابل سختی قابل قبول است، در صورتی که در پژوهش حاضر، با توسعه دادن روش اغتشاش، به کمک برخی از تبدیلات اویلری، نتایج برای مقادیر بزرگ‌تری از گرانروی نیز همگراست. نتایج این پژوهش با مدل‌سازی عددی موجود مقایسه و بررسی شده است.

واژگان کلیدی: شکست هیدرولیکی، رژیم سختی ـ گرانروی ، روش اغتشاش توسعه یافته، تبدیلات اویلری.

۱. مقدمه

الگوسازی و تحلیل مسائل، شامل رشد و انتشار ترک‌های هیدرولیکی به دلیل اندرکنش غیرخطی از درجه‌ی بالا بین سیال و محیط (مانند سنگ یا خاک)، وجود تکینه بودن معادلات تنش در نوک ترک و همچنین شرایط مرزی پیش‌رونده بسیار پیچیده است. بررسی با روش‌های تحلیلی و یا شبه تحلیلی بر روی یک ترک با هندسه‌ی ساده (ترک‌های دوبعدی KGD، [۱] شعاعی[۲] و PKN [۳] در یک سنگ همگن با تنش برجای یکنواخت به طبیعت مدل‌سازی ریاضی مسئله برمی‌گردد،[۱] و ممکن است برای دستیابی به چنین حل‌هایی، نیاز به فرض کردن رشد ترک هیدرولیکی در یک رژیم خاص باشد. برای اطلاعات بیشتر در مورد انواع هندسه‌ی ترک‌ها به رساله‌ی عسگری (۲۰۱۶)،[۲] مراجعه شود. رژیم‌ها براساس مکانیزم هدررفت انرژی نام‌گذاری می‌شوند که مهم‌ترین آن‌ها در شکست هیدرولیکی عبارت‌اند از: ۱. رژیم سختی که بیشترین هدررفت انرژی تولید شده ناشی از تزریق سیال، مربوط به بزرگی پارامتر سختی محیط و سیستم است؛ و ۲. رژیم گرانروی، که غالب انرژی ورودی، ناشی از اصطکاک بین سیال و سطوح ترک به جهت حرکت سیال لزج هدر می‌رود. در میان الگوهای تحلیلی یا نیمه تحلیلی، ذکر کارهای اولیه‌ی انجام شده در برخی پژوهش‌ها،[۳-۸] اهمیت خاصی دارد. و در برخی از آن‌ها یـکی از الگوهای ساده‌ی ترک به همراه فرضیات بسیار ساده‌کننده‌یی در مورد متغیرهای مسئله بالاخص بازشدگی ترک و فشار سیال استفاده شده است. به‌طور مثال، در سال ۱۹۸۵،[۹] یک راه‌حل خودمتشابه[۴] برای بررسی گسترش ترک KGD در یک محیط کشسان نفوذناپذیر با سختی محدود[۵] ارائه شد و با تعیین معادلات همبسته همچون معادله‌ی جریان سیال ویسکوز تراکم‌ناپذیر در ترک با استفاده از نگره‌ی روان‌سازی، معادله‌ی کشسانی در حالت کرنش مسطح برای الگوسازی بازشدگی ترک تحت توزیع فشار مشخص، رابطه‌ی رشد ترک با استفاده از حد ریشه‌ی دوم در رأس[۶] برای بازشدگی ترک و همچنین معیار رشد ترک با استفاده از عامل شدت تنش[۷] ($K_{IC} = K_I$) مسئله تحلیل شد.

در سال ۱۹۸۸،[۱۰] نیز راه حل مربوط به ترک در حالت تنش مسطح توسعه داده شد که شکل ساده‌تری از معادله‌ی پیوستگی در ناحیه‌ی رأس ترک بود. معادلات به روش متغیر متشابه[۸] با مختصات مکانی مقیاس و با طول ترک واقعی تحلیل شدند. همچنین در دهانه‌ی ترک[۹] با فشار فرضی ثابت، سختی محیط به دو صورت

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۶/۱/۲۳، اصلاحیه ۱۳۹۶/۵/۲۲، پذیرش ۱۳۹۶/۶/۷.
DOI:10.24200/J30.2018.1991.2094

در نظر گرفته شد: حالت اول) در حل آن با فرض سختی صفر[۱۰]، رأس ترک با شکل نوک‌تیز و همچنین فاصله‌یی بین جلوی سیال و نوک ترک (پس‌افتادگی سیال) پیش‌بینی شد، حالت دوم) با فرض محدود سختی محیط، هیچ فاصله‌یی بین جلوی سیال و نوک ترک در نظر گرفته نشد. با توجه به حل حالت دوم، شکل نوک ترک گرد و فشار سیال در نوک محدود شد که ناسازگار با معادله‌ی روان‌سازی است.

به دنبال روش اشاره شده‌ی اخیر،[۹] در سال ۱۹۹۶،[۱۱] راه حل خودمتشابه دیگری برای حالت مجانبی سختی صفر معرفی شد که براساس روشی با نام حل نوک مجانبی[۱۱] (SCR)[۱۲] بود. در روش مذکور رفتار مجانبی بازشدگی و فشار در نزدیکی رأس ترک تشریح شده است. اگرچه روش عددی اخیر،[۹] برای حل مسئله در یک رژیم مابین سختی و گرانروی ارائه و بعدها در پژوهش دیگری (۲۰۰۱)،[۱۳] بازبینی شد، ولی بسیاری از پژوهشگران برای ساده‌تر شدن تحلیل مسئله، آن را به صورت یکی از رژیم‌های سختی (هدررفت انرژی ناشی از چقرمگی یا سختی بالای سنگ)،[۱] یا گرانروی (هدررفت انرژی ناشی از گرانروی بالای سیال)،[۱۵و۱۴،۹] در نظر گرفتند.

همچنین در سال ۲۰۰۲،[۱۶] راه حل خودمتشابه دیگری برای مسئله‌ی گسترش ترک سکه‌یی‌شکل در محیط کشسان نفوذناپذیر با سختی صفر و سیال نیوتنی استفاده شد که براساس روش خودمتشابه اخیر،[۹] بود، با این مفهوم که در راه حل موردنظر، فشار و بازشدگی به صورت یک سری از چندجمله‌یی ژاکوبی بیان می‌شود که ضرایب سری‌های ذکر شده با هم فرق می‌کنند. البته راه‌حل مذکور با راه حل‌های اخیر[۹و۱۱] فرق می‌کرد و هم‌گرایی عددی روش اشاره شده به طرز چشم‌گیری افزایش پیدا کرد (برای جزئیات بیشتر به مراجع[۱۶و۱۷] مراجعه شود). به‌طور خلاصه، برای حل در مقیاس گرانروی، یک روش نیمه تحلیلی در سال ۱۹۸۵،[۹] ارائه شد و بعدها برای ترک KGD[۱۳و۱۵] و همچنین برای ترک شعاعی،[۱۶] توسعه داده شد. برخی از بررسی‌های اخیر فقط برای محدوده‌ی $1 \leq \mathcal{K} = \frac{\mu' Q_0 E'^3}{K'^4}$ (رژیم گرانروی)[۱۲] اعتبار دارد که در آن μ' گرانروی مؤثر، K' چقرمگی مؤثر، Q_0 دبی ورودی و E' مدول کشسانی محیط است.

همچنین در سال ۲۰۰۰،[۱۸] یک راه حل صریح دیگر برای انتشار ترک هیدرولیکی دوبعدی در رژیم سختی ارائه شد که در آن راه حل بازشدگی ترک با استفاده از حد ریشه‌ی دوم و فشار در نوک از تابع تکینگی لگاریتمی[۱۳] به‌صورت همبسته با دیگر معادلات حاکم تعیین و فرض شد که در تحلیل مذکور، انرژی اتلافی ناشی از جریان سیال گرانروی در داخل ترک در مقایسه با انرژی اتلافی ناشی از سختی سنگ ناچیز است. به نظر می‌رسد که اعتبار راه حل اخیر در محدوده‌ی حل یعنی محدوده‌ی $\mathcal{K} \geq 4$ (رژیم سختی)[۱۴] است. اگرچه در ادامه‌ی راه حل مذکور، یک راه حل اصلاحی برای حل در رژیم سختی ـ گرانروی (یعنی در محدوده‌ی $1 \leq \mathcal{K} \leq 4$)[۱۵] ارائه شده است،[۱] ولی همچنان حل در محدوده‌ی مذکور، اعتبار کافی ندارد.

در نوشتار حاضر، با توسعه‌ی روش اغتشاش به کمک برخی از تبدیلات اویلری، اعتبار حل در محدوده‌ی $1 \leq \mathcal{K} \leq 4$ را نیز تضمین می‌کند. برای اعتبارسنجی در پژوهش حاضر، از راه حل عددی آداچی (۲۰۰۱)،[۱۳] استفاده شده است.

جدول ۱، خلاصه‌یی از سیر تحول و برخی از کارهای تحلیلی و نیمه تحلیلی بر روی ترک‌های دوبعدی KGD، شعاعی و PKN در حوزه‌ی مذکور از پژوهش را نشان می‌دهد. پژوهش‌های اشاره شده، پایه و معیاری را برای شبیه‌سازی عددی فراهم می‌سازند.

هر چند کارهای زیادی در محدوده‌ی مقیاس گرانروی با سختی کوچک در ترک‌های دو بعدی KGD و شعاعی انجام شده است،[۱۶،۱۹] اما همچنان چگونگی رشد ترک PKN در رژیم گرانروی با سختی کم و چگونگی رشد نوک ترک (PKN) در رژیم سختی مجهول باقی مانده است. اخیراً کارهای اندکی در زمینه‌ی ذکر شده با درنظرگرفتن سختی جانبی انجام شده است،[۲۰-۲۳] ولی هنوز ابهاماتی در چگونگی رشد ترک PKN در نوک آن وجود دارد.

۲. فرمول بندی ریاضی

۱.۲. تعریف مسئله

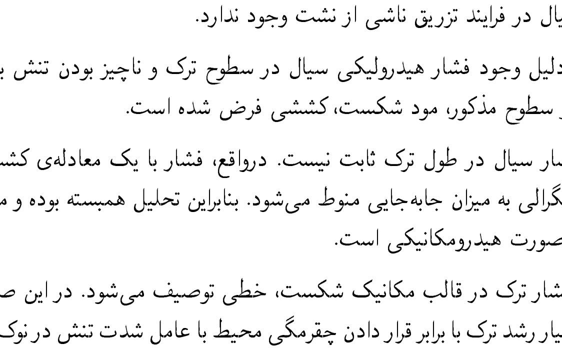
مطابق با شکل ۱، ترک هیدرولیکی KGD به طول $2\ell(t)$ در یک محیط سنگی شکننده با مدول یانگ E، ضریب پواسون v و چقرمگی K_{IC} در نظر گرفته شده است.

به‌دلیل تقارن ترک مذکور، نیمی از مدل در تحلیل منظور می‌شود. همچنین سیال با گرانروی μ و با دبی $Q(t)$ تزریق می‌شود که تزریق آن باعث فشار داخلی $P_f(x,t)$ در سطوح ترک می‌شود. با توجه به اینکه محیط تحت تنش محدودکننده‌ی σ_0 قرار دارد، در نتیجه فشار خالص در داخل ترک برابر با $P(x,t) = P_f(x,t) - \sigma_0$ است. تئوری مکانیک شکست کشسان خطی (LEFM)[۱۶] برای تعیین بازشدگی ترک $w(x,t)$، فشار خالص $P(x,t)$ و رشد ترک $\ell(t)$ بر حسب زمان t و مختصات محلی x استفاده می‌شود.

۲.۲. فرضیات مسئله

فرضیات اصلی برای الگوی در نظر گرفته شده در پژوهش حاضر، به این صورت خلاصه شده است:

- ترک در تمام لحظات کاملاً از سیال پر شده است و هیچ‌گونه پس‌افتادگی[۱۷] بین سیال و نوک ترک وجود ندارد.
- محیط به‌صورت کشسان، همگن و همچنین نفوذناپذیر فرض شده است و اتلاف سیال در فرایند تزریق ناشی از نشت وجود ندارد.
- به‌دلیل وجود فشار هیدرولیکی سیال در سطوح ترک و ناچیز بودن تنش برشی در سطوح مذکور، مود شکست، کششی فرض شده است.
- فشار سیال در طول ترک ثابت نیست. درواقع، فشار با یک معادله‌ی کشسانی انتگرالی به میزان جابه‌جایی منوط می‌شود. بنابراین تحلیل همبسته بوده و مسئله به‌صورت هیدرومکانیکی است.
- انتشار ترک در قالب مکانیک شکست، خطی توصیف می‌شود. در این صورت معیار رشد ترک با برابر قرار دادن چقرمگی محیط با عامل شدت تنش در نوک ترک



شکل ۱. مدل شکست هیدرولیکی در حالت کرنش صفحه‌یی (ترک KGD).

جدول ۱. برخی از پژوهش‌های مهم انجام شده در مورد انتشار ترک هیدرولیکی در یک محیط نفوذناپذیر با تزریق سیال نیوتنی و با نرخ ثابت برای انواع ترک‌ها.

نوع مقیاس و رژیم	ترک دو بعدی KGD	ترک شعاعی Radial	ترک PKN
گرانروی با سختی صفر	آداچی (۲۰۰۱)[۱۳] آداچی و دتورنی (۲۰۰۲)[۲۷]	دتورنی و همکاران (۲۰۰۷)[۱۶] ساوتسکی و دتورنی (۲۰۰۲)[۲۶]	نوردگرن (۱۹۷۲)[۷] کوالیشن و همکاران (۲۰۱۰)[۲۴] کمپ (۱۹۹۰)[۲۵]
گرانروی با سختی کوچک	گاراگاش و دتورنی (۲۰۰۵)[۱۹]	بانگر و همکاران (۲۰۰۷)[۲۸و۲۹]	-
سختی با گرانروی صفر	گاراگاش (۲۰۰۶)[۳۱و۳۲]	ساوتسکی و دتورنی (۲۰۰۲)[۱۶،۳۰] اَبه و همکاران (۱۹۷۶)[۳۰]	آداچی و همکاران (۲۰۱۰)[۲۰،۲۲و۲۳] دونتسو و پیرس (۲۰۱۵)[۲۲و۲۳]
سختی با گرانروی کوچک	گاراگاش (۲۰۰۶)[۱و۳۲]	ساوتسکی (۲۰۰۲)[۱۶] ساوتسکی و دتورنی (۲۰۰۲)[۱۶و۳۳]	-
سختی با گرانروی و ماند کوچک	عسگری (۲۰۱۶)[۲] عسگری و همکاران (۲۰۱۶)[۳۴]	-	-
حد وسط گرانروی ـ سختی	در نوشتار حاضر با استفاده از روش شبه تحلیلی توسعه‌یافته و مقایسه با روش عددی: آداچی (۲۰۰۱)[۱۳]، آداچی و دتورنی (۲۰۰۲)[۲۷]	ساوتسکی (۲۰۰۰)[۳۳]	-

مشخص می‌شود. در فرض LEFM از تغییرشکل‌های غیرکشسان در ناحیه‌ی مستعد جلوی ترک[۱۸] صرف‌نظر می‌شود، چرا که در محیط شکننده، ناحیه‌ی مذکور بسیار کوچک است. لازم به ذکر است که درنظر گرفتن پس‌افتادگی سیال و ناحیه‌ی مستعد جلوی ترک، عملکرد مشابهی دارند. به‌طور کلی معمولاً آثار ناحیه‌ی ذکر شده در رشد ترک به‌دلیل کوچک بودن ابعاد آن در مقایسه با مقادیر گسترش ترک و بزرگی تنش برجا در نظر گرفته نمی‌شود و یا آثار آن به صورت سختی مؤثر اعمال می‌شود.[۳۵]

- فرض می‌شود که نسبت بازشدگی ترک به طول ترک بسیار کوچک است، در نتیجه می‌توان جریان سیال را یک بعدی در نظر گرفت. همچنین با توجه به عدد رینولدز کم و یا بسیار بزرگ، جریان سیال آرام فرض می‌شود.
- هیچ‌گونه تغییر حالتی در سیال رخ نمی‌دهد و سیال همواره نیوتنی و تراکم‌ناپذیر فرض شده است.
- به‌دلیل کوچک بودن شعاع چاه نسبت به طول ترک از آثار آن صرف‌نظر می‌شود.
- رشد ترک در جهت تنش بیشینه و امتداد چاه، موازی با تنش کمینه است.
- فرضیات اضافی و خاص دیگر در روند حل هر یک از مسائل اشاره خواهد شد.

۳.۲. معادلات حاکم

در مسئله‌ی حاضر از ۳ معادله‌ی اصلی دیفرانسیلی ـ انتگرالی همبسته و غیرخطی در کنار شرایط اولیه و مرزی استفاده و سپس ۳ مجهول از آن محاسبه شده است. معادلات: ۱. معادله‌ی کشسانی ، ۲. معادله‌ی حرکت یا بقای اندازه‌ی حرکت، ۳. معادله‌ی پیوستگی یا بقای جرم. مجهولات: ۱. طول ترک که تابعی از زمان است، ۲. بازشدگی ترک و ۳. فشار روی سطوح ترک که توابعی از موقعیت مکانی و زمان است. البته فراسنج سرعت و دبی سیال در طول ترک نیز به عنوان مجهول‌های ثانویه قابل تعیین است.

۱.۳.۲. معادله‌ی کشسانی

معادله‌ی کشسانی، بازشدگی ترک را با فشار خالص سیال داخل ترک با یک رابطه‌ی انتگرالی مربوط می‌سازد. رابطه‌ی انتگرالی به شکل رابطه‌ی ۱ و به صورت یک معادله‌ی انتگرالی تکینه است. فرض رابطه‌ی مذکور این است که ترک به شکل شبه استاتیکی رشد می‌کند.[۳۶]

$$w(x,t)=\frac{4}{\pi E'}\int_0^l G\left(\frac{x}{\ell},\frac{x'}{\ell}\right)P(x',t)dx',$$
$$G\left(\xi,\xi'\right)=\ln\left|\frac{\sqrt{1-\xi^2}+\sqrt{1-\xi'^2}}{\sqrt{1-\xi^2}-\sqrt{1-\xi'^2}}\right| \qquad (1)$$

۲.۳.۲. پیوستگی و بقای جرم

جریان سیال در ترک با قانون بقای جرم و اندازه‌ی حرکت مدل می‌شود. در این حالت حجم سیال ورودی یا تزریقی ($V(t)$) برابر است با حجم بازشده‌ی ترک (رابطه‌ی ۲):

$$\frac{\partial q}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial t}=0 \qquad q=\int_{-w/2}^{w/2} v_x dy=vw$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_x^\ell w dx=wv, \qquad \int_0^\ell w dx=\frac{1}{2}V(t)$$
$$V(t)=\int_0^t Q dt=Q_0 t=2\int_0^\ell w dx \qquad (2)$$

که در آن‌ها، q نرخ جریان سیال یا فلاکس عبوری، $v(x,t)$ سرعت متوسط سیال در طول ترک است و سرعت سیال در نوک ترک $v(x=\ell,\,t)$ برابر با سرعت رشد در نوک ترک $d\ell/dt$ است؛ در صورتی که مقدار پس‌افتادگی سیال صفر باشد.

۳.۳.۲. معادله‌ی حرکت سیال

با فرضیات اشاره شده، معادله‌ی ناویر ـ استوکس برای جریان یک بعدی آرام و سیال غیرقابل تراکم به صورت رابطه‌ی ۳ در می‌آید:[۳۷و۳۸]

$$\frac{\partial v_x}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial v_x^2}{\partial x}=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial P_f}{\partial x}+\frac{12\mu v_x}{w^2}\right) \qquad (3)$$

با صرف‌نظر کردن از ترم سمت چپ معادله‌ی روان‌سازی[۱۹] رابطه‌ی ۳ به معادله‌ی پویزنی[۲۰] به صورت رابطه‌ی ۴ در می‌آید:[۳۹]

$$v=-\frac{w^2}{\mu'}\frac{\partial P}{\partial x}, or \qquad q=-\frac{w^3}{\mu'}\frac{\partial P}{\partial x} \qquad (4)$$

۴.۳.۲. شرایط مرزی، اولیه و معیار انتشار ترک

نرخ جریان سیال یا فلاکس عبوری q و بازشدگی ترک w در نوک ترک $x = \pm\ell$ در تمام لحظات برابر صفر است. با استفاده از شرط $q = 0$، در نوک ترک داریم: $w^3 \frac{\partial p}{\partial x} = 0, x = \pm\ell$ شرایط مذکور در صورتی اعتبار دارد که پس‌افتادگی سیال نسبت به نوک ترک وجود نداشته باشد.

در محل تزریق $x = 0$ نرخ جریان سیال یک ناپیوستگی وجود دارد که می‌توان مسئله را به‌صورت متقارن فرض کرد، یعنی: $\lim\limits_{x \to 0} q(x,t) = \frac{Q_0}{2}$ که در آن، Q_0، دبی سیال، با نرخ ثابت تزریق می‌شود. از آنجایی که $w > 0$ است، در نتیجه گرادیان و تغییرات فشار نسبت به طول در محل تزریق به صورت $\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=0^+} = \left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{x=0^-} < 0$ بیان می‌شود. شرایط اولیه‌ی مسئله به این صورت است: $\ell = 0,\ w = 0,\ P = 0,\ \rightarrow\ t = 0$ مطابق با مکانیک شکست کشسان خطی برای مود شکست اول، بازشدگی ترک در رأس با عبارت حدی ریشه‌ی دوم بیان می‌شود (رابطه‌ی ۵):[۴۰]

$$w = \frac{K'}{E'}\sqrt{\ell - x} + O\left[(\ell - x)^{3/2}\right], x \to \pm\ell \tag{5}$$

که در آن، E'، μ' و K' به این صورت هستند:

$$E' = \frac{E}{1 - \upsilon^2}, \mu' = 12\mu, K' = 4\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} K_I$$

شرط اضافی دیگری برای معیار رشد ترک نیاز است. با فرض اینکه ترک به شکل شبه استاتیکی گسترش می‌یابد، این شرط به صورت $F = K_I - K_{IC}$ بیان می‌شود که در آن K_{IC} چقرمگی محیط است. اگر مقدار F مساوی صفر باشد، ترک در حالت تعادل حدی رشد خواهد کرد (ملاک در پژوهش حاضر) و اگر F بزرگ‌تر از صفر باشد، ترک به صورت دینامیکی رشد خواهد کرد و درنهایت اگر مقدار F کوچک‌تر از صفر باشد، در این صورت ترک رشد نمی‌کند و پایدار است.

۳. مقیاس‌سازی

یک مقیاس‌سازی مناسب برای حل یک مسئله باید دو ویژگی داشته باشد: اولاً، باید درک فیزیکی از مسئله‌ی انتشار ترک را فراهم سازد و ثانیاً متغیرهای مسئله را کاملاً بی‌بعد سازد. به‌طور کلی، تحلیل ابعادی منجر به فشرده‌سازی، کاهش پیچیدگی و کاستن تعداد متغیرهای مؤثر یک دسته معادلات دیفرانسیل و انتگرالی حاکم در یک پدیده‌ی معین فیزیکی می‌شود. اگر پدیده‌یی به n_1 متغیر بُعددار بستگی داشته باشد، تحلیل ابعادی تعداد متغیرها را به n_2 متغیر بی‌بعد کاهش می‌دهد، که این کاهش به پیچیدگی مسئله بستگی دارد. به‌طورکلی هدف از بی‌بعد کردن یا مقیاس‌گذاری، کاهش متغیرها و گروه‌بندی آن‌ها به صورت بی‌بعد است.

مقیاس‌سازی در پژوهش حاضر بر پایه‌ی پژوهش‌های اولیه‌ی دتورنی،[۴۱] است: برای ساده‌سازی حل دسته‌ی معادلات ۱ الی ۵، برخی متغیرها به صورت روابط ۶ تغییر داده می‌شوند که سبب بی‌بعد و مقیاس شدن متغیرها می‌شود که نتیجتاً حل مسئله ساده‌تر می‌شود:[۴۳-۴۱،۳۷،۳۲،۹]

$$\begin{aligned}
&w(x,t) = \varepsilon(t)\, L(t)\, \Omega(\xi,t)\,, \ell(t) = L(t)\,\gamma(t)\,,\\
&P(x,t) = \varepsilon(t)\, E'\Pi(\xi,t)\,, \varepsilon(t) = L^{-2}(t)\, V(t)\,,\\
&v(x,t) = t^{-1} L(t)\, \vartheta(\xi,t)\,, \bar{\vartheta}(\xi,t) = \vartheta(\xi,t)/\gamma(t)\\
&\bar{\Omega}(\xi,t) = \Omega(\xi,t)/\gamma(t)
\end{aligned} \tag{6}$$

که در آن $\gamma(t)$، $\Pi(\xi,t)$، $\Omega(\xi,t)$، $\xi = x/\ell(t) \in [0, 1]$ به ترتیب مختصات مکانی، بازشدگی ترک، فشار خالص و نیم طول مقیاس شده‌ی ترک است. لازم به ذکر است که «علامت بار» نشانه‌ی مقیاس‌سازی مجدد آن کمیت است. با به‌کارگیری تغییر متغیرهای رابطه‌ی ۶، معادلات ۱ الی ۵ به این صورت درمی‌آیند:

- معادله‌ی بقای جرم (رابطه‌ی ۷):

$$\begin{aligned}
&\frac{t\dot{V}}{V}\int_{\xi}^{1}\bar{\Omega}d\xi + \frac{t\dot{L}}{L}\xi\bar{\Omega}\\
&\quad + t\int_{\xi}^{1}\left[\dot{\bar{\Omega}} + \frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\left(\bar{\Omega} - \xi\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\xi}\right)\right]\mathrm{d}\xi = \bar{\Omega}\bar{\vartheta}\\
&\quad \int_{0}^{1}\bar{\Omega}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\gamma^2}
\end{aligned} \tag{7}$$

- معادله‌ی مومنتم (رابطه‌ی ۸):

$$-\frac{\partial\Pi}{\partial\xi} = \mathrm{G}_{\mu}\frac{\bar{\vartheta}}{\bar{\Omega}^2} \tag{8}$$

- معادله‌ی کشسانی و معیار انتشار ترک (رابطه‌ی ۹):

$$\begin{aligned}
&\bar{\Omega}(\xi,t) = L^{-1}\{\Pi\}(\xi,t)\\
&\quad \frac{4}{\pi}\int_{\xi}^{1} G(\xi,\xi')\ \Pi(\xi',t)\, d\xi',\\
&\lim_{\xi\to 1}(1-\xi)^{-1/2}\,\bar{\Omega} = G_k\gamma^{-1/2}
\end{aligned} \tag{9}$$

که در معادلات ۸ و ۹، G_k و G_{μ} به‌صورت رابطه‌ی ۱۰ بیان می‌شوند:

$$G_k = \frac{K'}{E'}\frac{L^{3/2}}{V}, \quad G_{\mu} = \frac{\mu'}{E'}\frac{L^6}{tV^3} \tag{10}$$

پارامترهای مذکور بی‌بعد هستند و به آن پارامترهای مقیاس‌شده می‌گویند (برای توضیحات بیشتر در مورد پارامترها و روابط بین آن‌ها می‌توان به مرجع[۲] رجوع کرد). همان‌طورکه در قبل اشاره شد، انرژی ورودی ناشی از تزریق سیال به واسطه‌ی رشد ترک به دو صورت اتلاف می‌شود: ۱. از طریق گرانروی سیال، ۲. از طریق چقرمگی محیط. اگر انرژی بیشتری به واسطه‌ی بالا بودن گرانروی سیال نسبت به مقدار سختی محیط اتلاف شود، در این صورت رژیم گرانروی حاکم است و G_u برابر ۱ در نظرگرفته می‌شود و فراسنج‌های باقیمانده[۲۱] نیز با فرض ذکر شده تعیین می‌شوند (به جدول ۲ مراجعه شود). اگر بیشتر انرژی ورودی ناشی از بزرگی سختی محیط اتلاف شود، آنگاه رژیم سختی حاکم است که در این صورت G_k برابر ۱ است. با حذف یکی از کمیت‌ها در معادلات بی‌بعد شده، می‌توان مسئله را به صورت خاص بررسی کرد.

درنهایت، $t\dot{L}/L$ و $t\dot{\gamma}/\gamma$ در معادلات ۷ را می‌توان با اپراتور زمان مطابق با به‌کارگیری رابطه‌ی ۱۱ جایگزین کرد:

$$t\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{t\dot{G}_k}{G_k}\right) G_k\frac{\partial}{\partial G_k} + \left(\frac{t\dot{G}_{\mu}}{G_{\mu}}\right) G_{\mu}\frac{\partial}{\partial G_{\mu}} \tag{11}$$

که در آن، علامت نقطه در بالای فراسنج‌های مقیاسی به منظور مشتق آن نسبت به زمان t است. دو نوع مقیاس اشاره شده‌ی اخیر، شکل‌های خاصی از بیان یک دسته و یک نوع معادلات یکسان هستند. در واقع مقیاسی برای حل مسئله به کار

جدول ۲. فراسنج کوچک و طول مقیاس‌شده برای ۲ رژیم سختی و گرانروی و مقادیر فراسنج‌های تغییریافته.

نوع مقیاس و رژیم	فراسنج کوچک (ε)	طول مقیاس شده (L)	کمیت: سختی (G_k)	کمیت: گرانروی (G_μ)
سختی، (k)	$\left(\frac{K'^4}{E'^4 Q_0 t}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{E' Q_0 t}{K'}\right)^{\frac{2}{3}}$	۱	$\mathcal{K}=\frac{\mu' Q_0 E'^3}{K'^4}$
گرانروی (M)	$\left(\frac{\mu'}{E' t}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{E' Q_0^3 t^4}{\mu'}\right)^{\frac{1}{6}}$	$\mathcal{M}=\left(\frac{K'^4}{E'^3 \mu' Q_0}\right)^{\frac{1}{4}}$	۱

گرفته می‌شود که اثر فراسنج مربوط به آن مقیاس غالب باشد. مقیاس کردن چیزی جزء پیوند بین فراسنج‌های اساسی مسئله نیست، بنابراین دور از انتظار نیست که فراسنج‌های بی‌بعد و مقیاس شده مطابق با رابطه‌ی ۱۲ در رژیم‌های مختلف با هم ارتباط داشته باشند.

$$\mathcal{K}=\mathcal{M}^{-\frac{1}{4}} \tag{12}$$

همچنین می‌توان ارتباطی بین مقیاس‌های مختلف طولی و فراسنج‌های کوچک در دو رژیم یافت (روابط ۱۳):

$$\frac{L_M}{L_k}=\mathcal{K}^{\frac{2}{3}}=\mathcal{M}^{-\frac{1}{6}}, \qquad \frac{\varepsilon_M}{\varepsilon_k}=\mathcal{K}^{\frac{4}{3}}=\mathcal{M}^{-\frac{1}{3}} \tag{13}$$

۴. ایده و روش حل

در پژوهش حاضر، از روش اغتشاش (PM)[22][44] برای یافتن جواب تقریبی انتشار صفحه‌یی ترک هیدرولیکی استفاده می‌شود. روش اغتشاش موقعی برای حل معادلات غیرخطی به کار می‌رود که یک فراسنج کوچک در معادلات وجود داشته باشد. با توجه به وجود دو فراسنج بی‌بعد G_k و G_μ در معادلات غیرخطی، روش اغتشاش به کمک مثلث خیام ـ پاسکال،[34] مطابق با معادله‌ی ۱۴ توسعه داده شد:

$$f(\xi,G_i)=\left\{\bar{\Omega}(\xi,G_i),\Pi(\xi,G_i),\gamma(G_i)\right\},\ i=k,\mu,\rho$$

$$f(\xi,G_i)=f_0(\xi)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{i_1\geq i_2\geq\ldots\geq i_n\\ i_{1,2,\ldots,n}=1,2,3,\,or\ k,\mu,\rho}}\left(G_{i_1}G_{i_2}\ldots G_{i_n}f^{(i_1 i_2\ldots i_n)}(\xi)\right) \tag{14}$$

۵. حل در مقیاس سختی با نرخ تزریق ثابت

در بخش حاضر، به حل مسئله‌ی ترک هیدرولیکی در دو حالت اشاره شده با شرط کرنش صفحه‌یی (KGD) و شعاعی در مقیاس سختی و با گرانروی کوچک $\mathcal{M}\ll 1$ پرداخته شده است. حل در رژیم سختی از دو منظر، اهمیت کاربردی دارد: ۱) استخراج گرما از مخازن زمین گرمایی توسط تزریق سیال با گرانروی کم انجام می‌شود،[1] که ارتباط تحلیل این الگو با کاربرد شکست هیدرولیکی را در رژیم سختی تضمین می‌کند. ۲) در مقیاس‌های آزمایشگاهی، اغلب، رژیم سختی حاکم است و معمولاً اثر گرانروی ناچیز است، حتی اگر در آزمایش از یک سیال با گرانروی زیاد استفاده شود. در مقیاس ذکر شده، $G_k=1$ است و متعاقباً حل در مقیاس سختی، با استفاده از روش اغتشاش به پارامتر گرانروی $G_\mu=\mathcal{M}$ بستگی دارد. بنابراین رابطه‌ی ۱۴ در حل مقیاس سختی به‌صورت رابطه‌ی ۱۵ کاهش می‌یابد:

$$f(\xi)=\sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{M}^m f_m(\xi),$$

$$f(\xi)=\left\{\bar{\Omega}(\xi),\Pi(\xi),\gamma\right\} \tag{15}$$

برای راحتی کار، مجهولات و یا همان دسته جواب‌های مقیاس شده به‌صورت f نمایش داده می‌شوند. با به‌کارگیری معادله‌ی ۱۱، معا دلات ۷ الی ۹ در مقیاس سختی به صورت معادلات ۱۶ الی ۱۸ به‌دست می‌آیند:

$$\int_{\xi}^{1}\bar{\Omega}\mathrm{d}\xi+\frac{2}{3}\xi\bar{\Omega}=\bar{\Omega}\bar{\vartheta}\int_{0}^{1}\bar{\Omega}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\gamma^2}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}=-\mathcal{M}\frac{\bar{\vartheta}}{\bar{\Omega}^2}. \tag{17}$$

$$\bar{\Omega}\left(\xi,t\right)=L^{-1}\left\{\Pi\right\}\left(\xi,t\right),$$

$$\lim_{\xi\to 1}\left(1-\xi\right)^{-1/2}\bar{\Omega}=\gamma^{-1/2}. \tag{18}$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی ۱۵ در معادلات ۱۶ الی ۱۸ و مرتب کردن آن‌ها براساس ضرایب ۱، $\mathcal{M}$، $\mathcal{M}^2$، $\mathcal{M}^3$ و ... در مقیاس سختی ($G_k=1$)، روابط ۱۹ الی ۲۲ را خواهیم داشت:

ــ ترم صفر $f_0(\xi)$:

$$1:\int_{\xi}^{1}\bar{\Omega}_0\mathrm{d}\xi+\frac{2}{3}\xi\bar{\Omega}_0=\bar{\Omega}_0\bar{\vartheta}_0,$$

$$\gamma_0^{-2}=2\int_{0}^{1}\bar{\Omega}_0\mathrm{d}\xi\frac{\partial\Pi_0}{\partial\xi}=0,$$

$$\bar{\Omega}_0\left(\xi\right)=\mathrm{L}^{-1}\left\{\Pi_0\right\}\left(\xi\right),$$

$$\lim_{\xi\to 1}\left(1-\xi\right)^{-1/2}\bar{\Omega}_0=\gamma_0^{-1/2} \tag{19}$$

ــ ترم اول $f_1(\xi)$:

$$\mathcal{M}:\int_{\xi}^{1}\bar{\Omega}_1\mathrm{d}\xi+\frac{2}{3}\xi\bar{\Omega}_1$$

$$=\bar{\Omega}_1\bar{\vartheta}_0+\bar{\Omega}_0\bar{\vartheta}_1,$$

$$\gamma_1=-\gamma_0^3\int_{0}^{1}\bar{\Omega}_1\,\mathrm{d}\xi,$$

$$\frac{\partial\Pi_1}{\partial\xi}=-\frac{\bar{\vartheta}_0}{\bar{\Omega}_0^2},$$

$$\bar{\Omega}_1(\xi)=L^{-1}\{\Pi_1\}(\xi),$$

$$\lim_{\xi\to 1}(1-\xi)^{-1/2}\bar{\Omega}_1=-\frac{1}{2}\gamma_1\gamma_0^{-3/2}. \tag{20}$$

ـــ ترم دوم $f_2(\xi)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^2 &: \int_{\xi}^{1} \bar{\Omega}_2 \mathrm{d}\xi + \frac{2}{3}\xi\bar{\Omega}_2 \\
&= \bar{\Omega}_2\bar{\vartheta}_0 + \bar{\Omega}_1\bar{\vartheta}_1 + \bar{\Omega}_0\bar{\vartheta}_2 \\
\gamma_2 &= \frac{3\gamma_1^2}{2\gamma_0} - \gamma_0^3 \int_0^1 \bar{\Omega}_1 d\xi, \\
\frac{\partial \Pi_2}{\partial \xi} &= \frac{-\bar{\vartheta}_1\bar{\Omega}_0 + 2\bar{\vartheta}_0\bar{\Omega}_1}{\bar{\Omega}_0^3} \\
\bar{\Omega}_2(\xi) &= \mathrm{L}^{-1}\{\Pi_2\}(\xi), \\
\lim_{\xi\to 1}(1-\xi)^{-1/2}\bar{\Omega}_2 &= \frac{1}{8}\left(3\gamma_1^2 - 4\gamma_0\gamma_2\right)\gamma_0^{-5/2}.
\end{aligned} \tag{21}$$

ـــ ترم سوم $(f_3)(\xi)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}^3 &: \int_{\xi}^{1} \bar{\Omega}_3 \mathrm{d}\xi + \frac{2}{3}\xi\bar{\Omega}_3 \\
&= \bar{\Omega}_3\bar{\vartheta}_0 + \bar{\Omega}_2\bar{\vartheta}_1 + \bar{\Omega}_1\bar{\vartheta}_2 + \bar{\Omega}_0\bar{\vartheta}_3, \\
\gamma_3 &= -\frac{2\gamma_1^3}{\gamma_0^2} + \frac{3\gamma_1\gamma_2}{\gamma_0} - \gamma_0^3 \int_0^1 \bar{\Omega}_2 \mathrm{d}\xi, \\
\frac{\partial \Pi_3}{\partial \xi} &= \frac{-\bar{\vartheta}_2\bar{\Omega}_0^2 + 2\bar{\vartheta}_1\bar{\Omega}_0\bar{\Omega}_1}{\bar{\Omega}_0^4} \\
&\quad + \frac{-3\bar{\vartheta}_0\bar{\Omega}_1^2 + 2\bar{\vartheta}_0\bar{\Omega}_0\bar{\Omega}_2}{\bar{\Omega}_0^4} \\
\bar{\Omega}_3(\xi) &= \mathrm{L}^{-1}\{\Pi_3\},(\xi), \\
\lim_{\xi\to 1}(1-\xi)^{-1/2}\bar{\Omega}_3 & \\
&= \frac{1}{16}\left(-5\gamma_1^3 + 12\gamma_0\gamma_1\gamma_2 - 8\gamma_0^2\gamma_3\right)\gamma_0^{-\frac{7}{2}}
\end{aligned} \tag{22}$$

دسته‌ی معادلات انتگرالی ـ دیفرانسیلی اخیر به‌صورت متوالی از رابطه‌های ۱۹ الی ۲۲ حل می‌شوند. برای مختصرسازی در بخش حاضر از آوردن جزئیات و روند حل صرف‌نظر شده است:

$$\begin{aligned}
\bar{\Omega}_0 &= \frac{1}{2}\pi^{1/3}\sqrt{1-\xi^2}, \\
\Pi_0 &= \frac{\pi^{1/3}}{8}, \gamma_0 = \frac{2}{\pi^{2/3}}, \\
\bar{\vartheta}_0 &= \frac{1}{6}\xi + \frac{1}{2}\frac{\cos^{-1}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}. \\
\Pi_1 &= \frac{8}{3\pi^{\frac{2}{3}}}\left(\frac{1}{24} + \ln\left(4\sqrt{1-\xi^2}\right)\right. \\
&\quad \left. - \frac{3}{4}\frac{\xi\cos^{-1}\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right), \\
\bar{\Omega}_1 &= \frac{8}{3\pi^{2/3}}\left(2\pi - 4\xi\sin^{-1}\xi\right) \\
&\quad - \frac{8}{3\pi^{2/3}}\left(\frac{5}{6} - \ln 2\right)\sqrt{1-\xi^2}
\end{aligned} \tag{23}$$

$$-\frac{4}{\pi^{2/3}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-\xi^2}^{\,1+\sqrt{1-\xi^2}}}{1-\sqrt{1-\xi^2}^{\,1-\sqrt{\xi^2}}}\right),$$

$$\gamma_1 = -\frac{32\left(1+6\ln 2\right)}{9\pi^{5/3}} \tag{24}$$

ترم‌های $f_0(\xi)$ و $f_1(\xi)$ به ترتیب ترم‌های مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌ی اول هستند که در مرجع[1] به تفسیر در مورد حل آن‌ها بحث و بررسی شده است. برای تعیین ضرایب ترم‌های بالاتر از بسط ۱۵، مثلاً برای مقادیر $m \geq 2$، محاسبه‌ی ترم‌های ذکر شده به‌دلیل برخورد با انتگرال‌های تکینه، به روش تحلیلی بسیار پیچیده و غیرممکن به نظر می‌رسد؛ بنابراین در پژوهش حاضر، انتگرال‌های مذکور به روش عددی محاسبه و سپس برای تعیین تابع حاصل از انتگرال، از روش درون‌یابی[23] استفاده شده است. در نهایت، با تعیین ترم‌های ذکر شده، میزان بازشدگی، طول رشد و فشار بر روی ترک تعیین شده است. به‌طور مثال بازشدگی مقیاس‌شده از رابطه‌ی ۲۵ تعیین می‌شود:

$$\Omega(\xi) = \sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{M}^m\,\bar{\Omega}_m(\xi) \times \sum_{m=0}^{\infty}\mathcal{M}^m\gamma_m \tag{25}$$

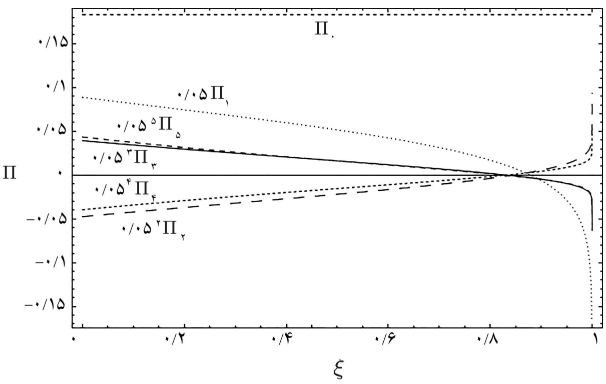
۶. بحث و نتایج

مقادیر فشار خالص سیال در نقطه‌ی محل تزریق ترک $\Pi_{0[m]}$، برحسب ترم‌های مختلفی از مقادیر m در جدول ۳ ارائه شده است. اگرچه جدول ۳، یک افزایش در مقادیر فشار، با افزایش درجه‌ی m را در محل تزریق نشان می‌دهد، ولی به دلیل فرض کوچک ماندن فراسنج گرانروی، توان مرتبه‌ی m آن‌ها بسیار کوچک است و آثار ترم‌های بالاتر به تناسب کاهش می‌یابد. شکل ۲، ترم‌های مرتبه‌ی صفر و مرتبه‌های اول تا سوم فشار خالص سیال داخل ترک (Π)، را در طول پروفایل ترک نشان می‌دهد.

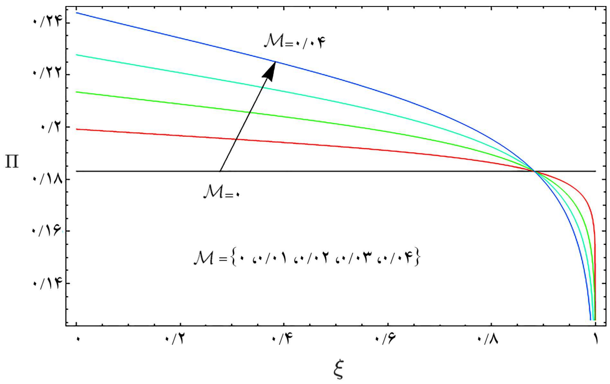
جدول ۳. ضرایب محاسبه شده از ترم $O(\mathcal{M}^m)$، $m \rightarrow \{0, 1, \ldots, 5\}$ در معادله‌ی ۱۵ از فشار خالص مقیاس شده در محل تزریق سیال $\Pi_{0[m]}$.

m	$\Pi_0[m]_\downarrow$	m	$\Pi_0[m]_\downarrow$
۰*	۰٫۱۸۳۰۷۴	۳	۳۱۴٫۹۴۵۷۶۳
۱	۱٫۷۷۵۲۱۹	۴	-۶۳۱۱٫۳۵۱۴
۲	-۱۸٫۹۴۰۴۰۰	۵	۱۳۹۴۰۶٫۹۸۰

* این مقدار در مرجع[1] محاسبه شده است.



شکل ۲. ترم‌های مرتبه‌ی صفر و بدون ماند مرتبه‌های اول تا پنجم فشار خالص سیال داخل ترک (Π).



شکل ۳. فشار خالص سیال داخل ترک (Π)، بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج گرانروی $\mathcal{M}$.

جدول ۴. ضرایب محاسبه شده از ترم $O(\mathcal{M}^m)$، $m \to \{۰, ۱, ..., ۴\}$ در معادله‌ی ۱۵ از بازشدگی مقیاس شده در محل تزریق سیال $\bar{\Omega}_{۰[m]}$.

m	$\bar{\Omega}_۰[m]$	m	$\bar{\Omega}_۰[m]$
۰*	۰٫۷۳۲۲۹۶	۳	۷۷۸٫۶۲۱۲۹۹
۱	۵٫۰۵۱۷۵۱	۴	-۱۵۲۲۶٫۹۸۰
۲	-۴۸٫۷۲۱۸۰۲	۵	۳۳۰۸۶۷٫۷۰۴

* این مقدار در مرجع[۱] محاسبه شده است.

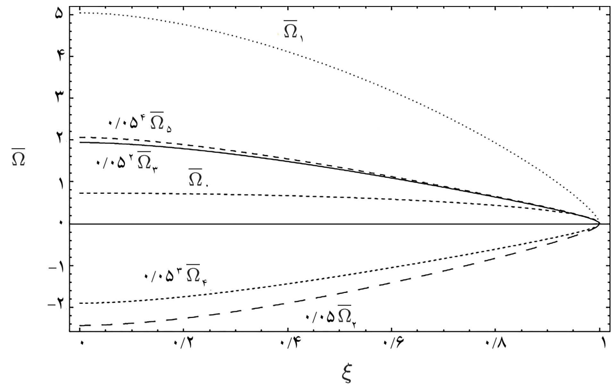
محاسبه‌ی ضرایب ترم‌های بالاتر به‌دلیل پیچیدگی دسته‌ی معادلات و برخورد با انتگرال‌های تکینه به روش تحلیلی غیرممکن است؛ بنابراین، در پژوهش حاضر آن‌ها به روش عددی محاسبه شده‌اند. لازم به ذکر است که در روش اغتشاش برای تعیین ترم‌های بالاتر، نیاز به داشتن تابعی از ترم‌های پایین‌تر جواب‌هاست. لذا، برای تعیین تابع حاصل از حل عددی انتگرال، با استفاده از روش درون‌یابی، تابع مراتب پایین تر با درجه‌یی از تقریب تعیین شده است.

شکل ۳، فشار خالص مقیاس شده‌ی سیال بر روی سطوح ترک (Π)، از حل مرتبه‌ی سه با فراسنج گرانروی مختلف $\mathcal{M} = \{۰, ۰٫۰۱, ۰٫۰۲, ۰٫۰۳, ۰٫۰۴\}$ را نشان می‌دهد. با توجه به شکل مذکور با افزایش فراسنج گرانروی ($\mathcal{M}$)، میزان فشار خالص در محل تزریق افزایش یافته و در نوک آن سیر نزولی داشته است. این اثر مطابق با قاعده‌ی برنولی قابل توجیه است.[۳۲]

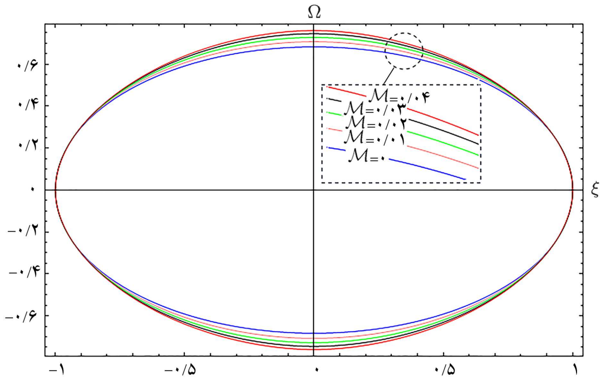
به‌طور مشابه، مقادیر بازشدگی مقیاس شده در نقطه‌ی محل تزریق ترک $\bar{\Omega}(۰)$، برحسب ترم‌های مختلفی از مقادیر m در جدول ۴ ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، فرایند مشابهی همانند ترم‌های فشار، در مقادیر بازشدگی مقیاس شده در نقطه‌ی محل تزریق ترک وجود دارد. یعنی با افزایش درجه‌ی m، مقادیر بازشدگی ذکر شده $\bar{\Omega}(۰)$، افزایش می‌یابد، ولی درنهایت آثار ترم‌های بالاتر به دلیل کوچک فرض کردن فراسنج $\mathcal{M}$ کاهش می‌یابد.

شکل ۴، ترم‌های مرتبه‌ی صفر، مرتبه‌های اول تا پنجم بازشدگی مقیاس شده‌ی مجدد ترک ($\bar{\omega}$) را نشان می‌دهد. در تمام ترم‌های مذکور، شرط مرزی در نوک ترک (میزان بازشدگی در آن نقطه برابر با صفر است) ارضاء شده است.

محاسبه‌ی ضرایب ترم‌های ذکر شده با حل پیوسته‌ی معادلات حاکم در حالت مقیاس شده از روش اغتشاش تعیین شده است که در ادامه، به چگونگی اثربخشی آن‌ها در میزان بازشدگی از لحاظ کیفی و کمی پرداخته شده است. شکل ۵ نشان می‌دهد که به‌طورکلی افزایش گرانروی سیال موجب افزایش بازشدگی و کاهش میزان رشد شده است.



شکل ۴. ترم‌های مرتبه‌ی صفر و بدون ماند مرتبه‌های اول تا پنجم بازشدگی مقیاس شده‌ی مجدد ($\bar{\Omega}$).



شکل ۵. بازشدگی ترک ($\Omega = \gamma\bar{\Omega}$)، بر حسب مقادیر مختلفی از فراسنج گرانروی ($\mathcal{M}$).

۷. تبدیلات اویلری و اعتبارسنجی

همان‌طور که اشاره شد، برای به کارگیری روش اغتشاش، بسط ضریب طول نیم ترک، فشار و بازشدگی در حالت مقیاس شده به صورت رابطه‌ی ۲۶ است:

$$f(\xi) = \sum_{m=۰}^{\infty} \mathcal{M}^m f_m, f(\xi) = \{\bar{\Omega}(\xi), \Pi(\xi), \gamma\} \quad (۲۶)$$

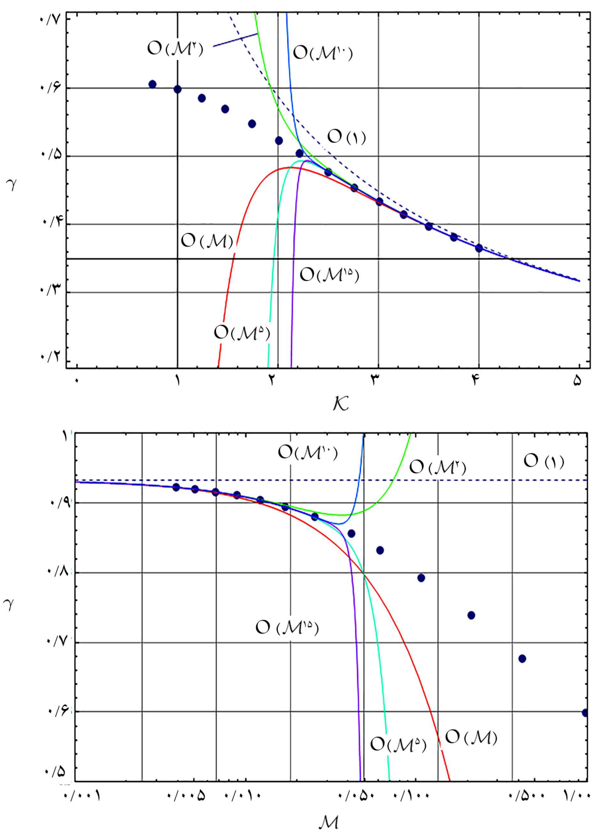
برای تعیین جملات بیشتری از بسط مذکور، باید ضرایب ترم‌های بالاتر تعیین شود که محاسبه‌ی آن‌ها به‌دلیل برخورد با انتگرال‌های تکینه به روش تحلیلی بسیار پیچیده است. بنابراین در بخش حاضر، انتگرال‌های تکینه به روش عددی محاسبه و سپس برای تعیین تابع حاصل از انتگرال، از روش درون‌یابی استفاده شده است که نتایج آن در جدول ۵ خلاصه شده و در آن $\bar{\Omega}_{۰[m]}$ و $\Pi_{۰[m]}$ به ترتیب میزان بازشدگی و فشار سیال در حالت مقیاس شده در محل تزریق هستند.

شکل ۶، مقایسه‌یی بین ضریب طول محاسبه شده با روش اشاره شده‌ی اخیر و روش عددی در مرتبه‌ی صفر، یک و بالاتر را نشان می‌دهد. همان‌طورکه مشاهده می‌شود، شعاع هم‌گرایی با مقایسه‌ی روش عددی در مرتبه‌ی اول حدوداً ۰٫۰۱ و در مراتب بالاتر $O(\mathcal{M}^{۱۵})$برابر با ۰٫۰۳ است.

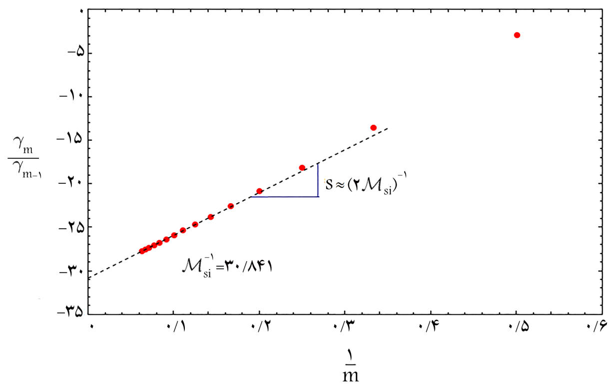
با افزایش ترم‌ها، نه فقط تأثیر چشمگیری در شعاع هم‌گرایی ایجاد نشد، بلکه درنظر گرفتن آن، مسئله را پیچیده‌تر و زمان محاسبات را طولانی‌تر خواهد کرد. بنابراین، برای افزایش شعاع هم‌گرایی سری و کاهش زمان محاسبات از یک روش استاندارد[۲۴]،[۴۵] استفاده می‌شود که تأثیر به سزایی درکاهش اختلاف بین روش‌های

جدول ۵. مقادیر عددی ضرایب طول نیم ترک (γ_m)، فشار خالص $\Pi_{\circ[m]}$ و میزان بازشدگی ($\bar{\Omega}_{\circ[m]}$) مقیاس شده در محل تزریق سیال از مرتبه‌ی $O(\mathcal{M}^m)$ در معادله‌ی ۲۶.

	$\gamma_m \times ۰/۰۵^m$	$\Pi_{\circ[m]} \times ۰/۰۵^m$	$\bar{\Omega}_{\circ[m]} \times ۰/۰۵^m$
$m = ۰$	+۰/۹۳۲۳۸۸۲	+۰/۱۸۳۰۷۴	+۰/۷۳۲۲۹۵۹
$m = ۱$	-۰/۱۳۶۰۹۷۵	+۰/۰۸۸۷۶۰۹	+۰/۲۵۲۵۸۷۵
$m = ۲$	+۰/۰۹۲۵۰۱۱	-۰/۰۴۷۳۵۱۰	-۰/۱۲۱۸۰۴۵
$m = ۳$	-۰/۰۸۳۹۹۷۳	+۰/۰۳۹۳۶۸۲	+۰/۰۹۷۳۲۷۷
$m = ۴$	+۰/۰۸۷۵۲۴۴	-۰/۰۳۹۴۴۵۹	+۰/۰۹۵۱۶۸۶
$m = ۵$	-۰/۰۹۸۸۰۰۵	+۰/۰۴۳۵۶۴۷	+۰/۱۰۳۳۹۶۲
$m = ۶$	+۰/۱۱۷۵۳۹۷	-۰/۰۵۱۱۱۶۴	-۰/۱۱۹۸۹۶۶
$m = ۷$	-۰/۱۴۵۱۱۸۷	+۰/۰۶۲۵۱۴۸	+۰/۱۴۵۳۳۳۹
$m = ۸$	+۰/۱۸۴۱۸۷۶	-۰/۰۷۸۷۹۹۸	-۰/۱۸۱۹۲۵۸
$m = ۹$	-۰/۲۳۸۸۲۵۸	+۰/۱۰۱۶۴۰۸	+۰/۲۳۳۳۵۶۷
$m = ۱۰$	+۰/۳۱۴۹۹۲۳	-۰/۱۳۳۵۰۳۸	-۰/۳۰۵۱۱۷۱
$m = ۱۱$	-۰/۴۲۱۲۶۲۶	+۰/۱۷۷۹۴۹۱	+۰/۴۰۵۱۵۳۵
$m = ۱۲$	+۰/۵۶۹۹۳۰۶	-۰/۲۴۰۰۸۴۸	-۰/۵۴۴۸۷۲۱
$m = ۱۳$	-۰/۷۷۸۶۲۲۸	+۰/۳۲۷۲۳۴	+۰/۷۴۰۶۲۰۳
$m = ۱۴$	۱/۰۷۲۶۴۷۵	-۰/۴۴۹۹۰۷۴	-۱/۰۱۵۸۴۸۱
$m = ۱۵$	-۱/۴۸۸۴۱۵۳	+۰/۶۲۳۲۱۸۴	+۱/۴۰۴۲۵۳۹



شکل ۶. مقایسه‌ی ضریب طول مقیاس شده از حل گرانروی کوچک و ماند صفر با تقریب‌های مختلف و نتایج عددی[۱۳] (در شکل به‌صورت نقاط دایره‌یی توپر مشاهده می‌شود).



شکل ۷. نمودار Domb-Sykes برای اصلاح سری طول ترک مقیاس شده با گرانروی کوچک (رابطه‌ی ۴-۱ الف).

اغتشاش و عددی،[۱۳] در مقادیر بزرگ‌تری از فراسنج گرانروی دارد. این اختلاف ناشی از شرایط تکینه‌ی نوک ترک است. برای حذف تکینگی و برای به کارگیری روش اصلاح از تبدیل اویلر[۲۵] استفاده می‌شود. همچنین تبدیل اویلر باعث افزایش هم‌گرایی می‌شود (رابطه‌ی ۲۷):

$$\delta(\mathcal{M}) = \frac{\mathcal{M}}{(1 + \mathcal{M}/\mathcal{M}_{si})^{\alpha}}, \alpha \approx \frac{1}{2}, \mathcal{M}_{si} = ۰/۰۳۲۴ \qquad (۲۷)$$

مقادیر α و $\mathcal{M}_{si}$ از رسم نمودار Domb-Sykes بر حسب $\gamma : 1/m, m = 1, 2, ..., 15$ مطابق با شکل ۷ تعیین شده است. مقدار عرض از مبدأ برابر با $\mathcal{M}_{si}^{-1}$ و مقدار $\alpha = S\mathcal{M}_{si} - 1$ است که S در آن شیب خط رگرسیون است. با معکوس کردن رابطه‌ی ۲۷، $\mathcal{M}(\delta)$ و سپس جای‌گذاری آن در رابطه‌ی ۲۶، رابطه‌ی ۲۸

جدول ۶. مقادیر عددی ضرایب طول نیم ترک $\gamma_{\delta[m]}$ مقیاس شده‌ی اصلاح شده از مرتبه‌ی $O(\delta^m)$.

	$\gamma_{\delta[m]}$		$\gamma_{\delta[m]}$
$m=۰$	+۰,۹۳۲۳۸۸۲	$m=۸$	+۱۲,۳۹۶۳۱۳۶
$m=۱$	-۰,۴۹۰۱۳۴۱	$m=۹$	-۷۸,۷۵۶۵۰۷۰
$m=۲$	-۰,۱۶۱۲۶۳۸	$m=۱۰$	-۶۹,۶۸۳۴۶۴۱
$m=۳$	+۰,۸۴۹۶۵۴۸	$m=۱۱$	+۴۵۱,۸۷۹۷۲۹
$m=۴$	+۰,۵۴۰۳۷۳۵	$m=۱۲$	+۴۱۳,۷۵۸۷۱۴۴
$m=۵$	-۳,۱۲۶۹۹۱۹۳	$m=۱۳$	-۲۷۲۴,۲۶۷۳۳۸۹
$m=۶$	-۲,۴۰۰۸۲۵۴	$m=۱۴$	-۲۵۶۸,۰۸۲۴۱۰۴
$m=۷$	۱۴,۷۶۶۴۶۳۴	$m=۱۵$	+۱۶۹۲۳,۸۴۱۱۹۶۸

به‌دست می‌آید:

$$f(\xi)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta\left(\mathcal{M}\right)^{m} f_m, f(\xi)=\left\{\bar{\Omega}(\xi),\Pi(\xi),\gamma\right\} \qquad (۲۸)$$

در جدول ۶، به‌طور مثال مقادیر عددی ضرایب طول نیم‌ترک اصلاح شده $\gamma_{\delta[m]}$، ارائه شده است. مسلماً همان‌طور که مشاهده می‌شود، تبدیل $O(\varepsilon_l^5)$ دقت بسیار بالایی برای رنج‌های بزرگ‌تر از گرانروی هم‌گرا دارد و به روش عددی آداچی نزدیک‌تر است. همچنین در شکل ۸، مقایسه‌یی بین نیمه طول ترک در سه حالت عددی، بسط بر حسب $\mathcal{M}$ و δ بسط (اصلاح شده) در مرتبه‌های مختلف انجام شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تبدیل اویلر به‌طور چشم‌گیری باعث افزایش هم‌گرایی تا شعاع ۰٫۲ شده است.

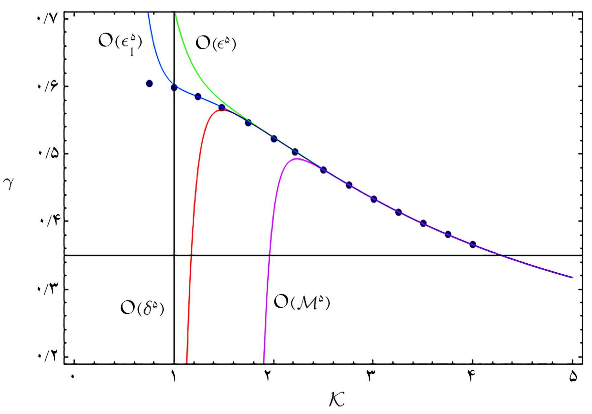
در پژوهش حاضر، برای افزایش هم‌گرایی مجدداً از دو تبدیل دیگر استفاده شده است (روابط ۲۹):

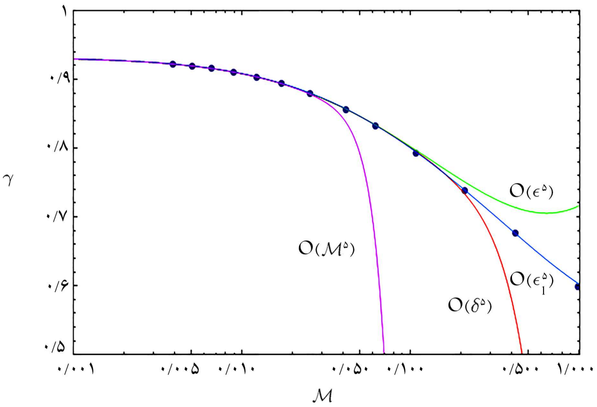
$$\varepsilon\left(\delta\right)=\frac{\delta}{\left(1+\delta/\delta_{si})^{\beta}\right)},\qquad \beta=1,\ \delta_{si}=1$$
$$\varepsilon_l\left(\delta\right)=\ln\frac{\delta_{lsi}+\delta}{\delta_{lsi}},\qquad \delta_{lsi}=\frac{1}{6} \qquad (۲۹)$$

همچنین ضرایب β، δ_{si} و δ_{lsi} مطابق روش مشابه قبل تعیین می‌شود.

همان‌طورکه در شکل ۸ مشاهده می‌شود، اعمال تبدیل‌های اخیر باعث هم‌گراشدن تا شعاع نزدیک ۱ است و تطابق بسیار نزدیکی با روش عددی (نقاط توپر در شکل ۸) دارد. این لازم به ذکر است که در شکل ۸، خط $O(\mathcal{M}^5)$ مربوط به مطالعات پژوهشی گاراگاش است و بقیه‌ی خطوط مربوط به پژوهش حاضر است. بنابراین راه‌حل پیشنهادی قادر است که رشد ترک را هم در محدوده‌ی میانی رژیم سختی ـ گرانروی پیش‌بینی کند.

کد برنامه‌ی مذکور در محیط Mathematica توسط دمیتری گاراگاش نوشته شده و در پژوهش حاضر بازنویسی و گسترش داده شده است. لازم به ذکر است که مقایسه و کنترل بازشدگی و فشار خالص مقیاس شده در حالت تبدیل اویلری با روش عددی آداچی،[۱۳] نیز تطابق بسیار خوبی نسبت به یکدیگر دارند که در پژوهش حاضر به دلیل مختصرسازی از ارائه‌ی آن‌ها خودداری شده است.





شکل ۸. مقایسه‌ی طول مقیاس‌شده از حل گرانروی کوچک و ماند صفر با اعمال تبدیل‌های مختلف از روابط ۲۸ و ۲۹ در تقریب مرتبه‌ی پنجم و نتایج عددی مرجع[۱۳] (در شکل به‌صورت نقاط دایره‌یی توپر نمایش داده شده است).

۸. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، روش تحلیلی اغتشاش گسترش‌یافته برای تعیین میزان انتشار، بازشدگی و فشار سیال داخلی ترک در سنگ‌های شکننده در حالت کرنش صفحه‌یی ارائه شده است. مجهولات به‌طور مقیاس شده و با روابط معکوس مقیاس به این‌صورت تعیین شده‌اند:

$$\ell(t)=\left(\frac{E'Q_{\circ}t}{K'}\right)^{2/3}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\varepsilon_l\left(\mathcal{M}\right)\right\}^m\gamma_m,$$
$$w\left(x,t\right)=\left(\frac{K'^2Q_{\circ}t}{E'^2}\right)^{1/3}\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\varepsilon_l\left(\mathcal{M}\right)\right\}^m\gamma_m$$
$$\times\sum_{\mathrm{m}=0}^{\infty}\left\{\varepsilon_l\left(\mathcal{M}\right)\right\}^{\mathrm{m}}\bar{\Omega}_m\left(\frac{x}{\eta(t)}\right),$$
$$P\left(x,t\right)=\left(\frac{K'^4}{E'Q_{\circ}t}\right)^{1/3}\sum_{\mathrm{m}=0}^{\infty}\left\{\varepsilon_l(\mathcal{M})\right\}^{\mathrm{m}}\Pi_{\mathrm{m}}\left(\frac{x}{\ell(t)}\right),$$
$$\varepsilon_l\left(\mathcal{M}\right)=\ln\left(1+6\frac{\mathcal{M}}{\sqrt{1+\mathcal{M}/0{,}0324}}\right),$$
$$\mathcal{M}=\left(\frac{K'^4}{E'^3\mu'Q_{\circ}}\right)^{1/4}$$

بررسی‌های انجام شده برای محدوده‌ی $1\leq\mathcal{K}\leq 4$ اعتبار دارد. به‌طورکلی افزایش گرانروی سیال موجب افزایش بازشدگی و کاهش میزان رشد و همچنین باعث

افزایش میزان فشار خالص در محل تزریق می‌شود و در نوک آن سیر نزولی دارد. در پایان با مقایسه‌ی نتایج پژوهش حاضر با پژوهش آداچی (۲۰۰۱)،[۱۳] می‌توان دریافت که نوشتار حاضر، اعتبار کافی دارد.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از راهنمایی‌های ارزنده‌ی پروفسور دمیتری گاراگاش (Dmitry I. Garagash) از دانشگاه Dalhousie کانادا در دوره‌ی فرصت مطالعاتی برای واضح‌تر شدن روند پژوهش حاضر سپاسگزارند.

فهرست علائم

x: مختصات طولی معمولا در جهت رشد ترک؛

s: فراسنج کمکی هم‌بعد با فراسنج x؛

ξ: موقعیت مکانی بی‌بعد شده؛

ξ': فراسنج کمکی مکانی بی‌بعد شده (شکل بی‌بعد شده فراسنج s)؛

ℓ: طول ترک؛

E: مدول یانگ یا کشسانی محیط؛

E': مدول یانگ موثر؛

υ: ضریب پواسون؛

K_{Ic}: چقرمگی؛

μ: گرانروی یا لزجت دینامیکی سیال؛

ρ: جرم مخصوص سیال؛

Q_0: نرخ حجمی تزریق؛

t: زمان؛

V: حجم سیال تزریقی؛

σ_0: کمینه تنش برجا؛

$\sigma_{\max}$: بیشینه تنش برجا؛

w: بازشدگی ترک؛

p: فشار خالص سیال بر سطوح ترک؛

p_f: فشار سیال بر سطوح ترک؛

$G(x,s)$: تابع کرنل در معادله‌ی کشسانی؛

v_x: سرعت سیال در جهت x؛

q: نرخ جریان سیال؛

K_I: شدت تنش در مود اول در نوک ترک؛

μ': گرانروی دینامیکی موثر سیال؛

K': چقرمگی موثر محیط (سنگ)؛

ε: فراسنج کوچک؛

γ: ضریب طول مقیاس شده و بدون بعد؛

L: مقیاس طول؛

Ω: بازشدگی بی‌بعد شده ترک؛

$\bar{\Omega}$: بازشدگی مقیاس شده مجدد؛

Π: فشار بی‌بعد شده در سطوح ترک؛

G_μ: فراسنج بی‌بعد شده‌ی گرانروی؛

G_k: فراسنج بی‌بعد شده‌ی سختی؛

$\mathcal{M}_k$: فراسنج گرانروی در مقیاس سختی؛

$\mathcal{K}_m$: فراسنج سختی در مقیاس گرانروی؛

L_m: طول بی بعد ترک در مقیاس گرانروی؛

L_k: طول بی بعد ترک در مقیاس سختی؛

ϑ: سرعت سیال بی‌بعد شده؛

$\bar{\vartheta}$: سرعت سیال مقیاس شده مجدد.

پانوشت‌ها

1. Khristianovic and Zheltov; Geertsma and de Klerk (KGD or KZGD)
2. penny shape or radial
3. perkins and kern; nordgern (PKN)
4. self-similar solution
5. finite toughness
6. square-root tip asymptote
7. stress intensity factor
8. similarity variable
9. crack inlet
10. zero toughness
11. tip asymptote
12. M-vertex solution
13. logarithmic singularity
14. K-vertex solution
15. MK-edge solution
16. Linear elastic fracture mechanics (LEFM)
17. lag
18. process zone
19. lubrication approximation
20. poiseuille equation
21. evolution parameters
22. perturbation method
23. interpolation
24. domb-sykes
25. Euler transformation

منابع (References)

1. Garagash, D.I. “Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture during injection and shut-in: Asymptotics of large toughness”, *Engineering Fracture Mechanics*, **73**(4), pp. 456-481 (2006)
2. Asgari, A. “Hydraulic fracture propagation in brittle rock: Based on hydro-mechanical model”, PhD Thesis, Tarbait Modares University, Tehran (2016).

3. Khristianovic, S. and Zheltov, Y. "Formation of vertical fractures by means of highly viscous fluids", In Proc. 4th World Petroleum Congress, Rome (1955).
4. Barenblatt, G.I. "The formation of equilibrium cracks during brittle fracture, General ideas and hypotheses, Axially-symmetric cracks", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **23**(3), pp. 622-636 (1959).
5. Perkins, T. and Kern, L. "Widths of hydraulic fractures", *Journal of Petroleum Technology*, **13**(09), pp. 937-949 (1961).
6. Geertsma, J. and De Klerk, F. "A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures", *Journal of Petroleum Technology*, **21**(12), pp. 1571-1581 (1969).
7. Nordgren, R. "Propagation of a vertical hydraulic fracture", *Society of Petroleum Engineers Journal*, **12**(04), pp. 306-314 (1972).
8. Geertsma, J. and Haafkens, R. "A comparison of the theories for predicting width and extent of vertical hydraulically induced fractures", *Journal of Energy Resources Technology*, **101**(1), pp. 8-19 (1979).
9. Spence, D. and Sharp, P. "Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow", *Proceedings of the Royal Society of London, A. Mathematical and Physical Sciences*, **400**(1819), pp. 289-313 (1985).
10. Nilson, R. "Similarity solutions for wedge-shaped hydraulic fractures driven into a permeable medium by a constant inlet pressure", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **12**(5), pp. 477-495 (1988).
11. Carbonell, R.S. "Self-similar solution of a fluid-driven fracture in a zero toughness elastic solid", Proc .Roy. Soc., London (1996).
12. Desroches, J., Detournay, E., Lenoach, B. and et al. "The crack tip region in hydraulic fracturing", *In Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, The Royal Society*, **447**(1929), pp. 39-48 (1994).
13. Adachi, J.I. "Fluid-driven fracture in permeable rock", PhD Thesis, University of Minnesota (2001).
14. Nilson, R. "Gas-driven fracture propagation", *J. Appl. Mech., (United States)*, **48**(4), pp. 757-762 (1981).
15. Garagash, D. and Detournay, E. "Viscosity-dominated regime of a fluid-driven fracture in an elastic medium", in IUTAM Symposium on Analytical and Computational Fracture Mechanics of Non-Homogeneous Materials, Springer (2002).
16. Savitski, A. and Detournay, E. "Propagation of a penny-shaped fluid-driven fracture in an impermeable rock: Asymptotic solutions", *International Journal of Solids and Structures*, **39**(26), pp. 6311-6337 (2002).
17. Savitski, A. and E. Detournay. "Similarity solution of a penny-shaped fluid-driven fracture in a zero-toughness linear elastic solid", *Comptes Rendus de l'Acadamie des Sciences-Series IIB-Mechanics*, **329**(4), pp. 255-262 (2001).
18. Garagash, D. "Hydraulic fracture propagation in elastic rock with large toughness", in 4th North American Rock Mechanics Symposium, American Rock Mechanics Association (2000).
19. Garagash, D.I. and Detournay, E. "Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture: Small toughness solution", *Journal of Applied Mechanics*, **72**(6), pp. 916 (2005).
20. Adachi, J.I., Detournay, E. and Peirce, A.P. "Analysis of the classical pseudo-3D model for hydraulic fracture with equilibrium height growth across stress barriers", *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, **47**(4), pp. 625-639 (2010).
21. Adachi, J.I. and Peirce, A.P. "Asymptotic analysis of an elasticity equation for a finger-like hydraulic fracture", *Journal of Elasticity*, **90**(1), pp. 43-69 (2008).
22. Dontsov, E. and Peirce, A. "Proppant transport in hydraulic fracturing: Crack tip screen-out in KGD and P3D models", *International Journal of Solids and Structures*, **63**, pp. 206-218 (2015).
23. Dontsov, E. and Peirce, A. "An enhanced pseudo-3D model for hydraulic fracturing accounting for viscous height growth, non-local elasticity, and lateral toughness", *Engineering Fracture Mechanics*, **142**, pp. 116-139 (2015).
24. Kemp, L.F. "Study of Nordgren's equation of hydraulic fracturing", *SPE Production Engineering*, **5**(03), pp. 311-314 (1990).
25. Kovalyshen, Y. and Detournay, E. "A reexamination of the classical PKN model of hydraulic fracture", *Transport in Porous Media*, **81**(2), pp. 317-339 (2010).
26. Detournay, E., Peirce, A. and Bunger, A. "Viscosity-dominated hydraulic fractures", In 1st Canada-US Rock Mechanics Symposium, American Rock Mechanics Association (2007).
27. Adachi, J. and Detournay, E. "Self similar solution of a plane strain fracture driven by a power law fluid", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **26**(6), pp. 579-604 (2002)
28. Bunger, A., Detournay, E.M., Garagash, D.I. and et al."Numerical simulation of hydraulic fracturing in the viscosity dominated", *In SPE Hydraulic Fracturing Technology Conference, Society of Petroleum Engineers* (2007).
29. Bunger, A.P. and Detournay, E. "Early-time solution for a radial hydraulic fracture", *Journal of Engineering Mechanics*, **133**(5), pp. 534-540 (2007).
30. Abe, H., Keer, L. and Mura, T. "Growth rate of a penny-shaped crack in hydraulic fracturing of rocks", *Journal of Geophysical Research*, **81**(35), pp. 6292-6298 (1976).
31. Garagash, D.I. "Propagation of a plane-strain hydraulic fracture with a fluid lag: Early-time solution", *International Journal of Solids and Structures*, **43**(18-19), pp. 5811-5835 (2006).
32. Garagash, D. "Transient solution for a plane-strain fracture driven by a shear-thinning, power-law fluid", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **30**(14), pp. 1439-1475 (2006).
33. Savitski, A.A. "Propagation of a pennyshape hydraulic fracture in an impermeable rock", PhD Thesis, University of Minnesota (2000).

34. Asgari, A., Golshani, A. and Lakirouhani, A. "Hydraulic fracture propagation in brittle rock: Considering interaction term between fluid inertia and viscosity parameters", *Sharif Journal, Civil Engineering*, **32.2**(2.1), pp. 59-66 (In Persian) (2016).

35. Garagash, D. and Detournay, E. "Erratum:Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture: Small toughness solution", *Journal of Applied Mechanics*, bf 72(6), pp. 916-928, Journal of Applied Mechanics, **74**(4), pp. 832-832 (2007).

36. Sneddon, I.N., Lowengrub, M. and Mathematician, P. "Crack problems in the classical theory of elasticity", Wiley New York (1969).

37. Nilson, R. "Gas-driven fracture propagation", *Journal of Applied Mechanics*, **48**(4), pp. 757-762 (1981).

38. Shapiro, R.A. "The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow", New York: Ronald Press, 2(1) (1954).

39. Batchelor, G. "An introduction to fluid dynamics", Cambridge Univ. Press, Bentley House, London (1967).

40. Rice, J.R. "Mathematical analysis in the mechanics of fracture", *Fracture: An Advanced Treatise*, **2**, pp. 191-311 (1968).

41. Detournay, E. "Propagation regimes of fluid-driven fractures in impermeable rocks", *International Journal of Geomechanics*, **4**(1), pp. 35-45 (2004).

42. Adachi, J.I. and Detournay, E. "Plane strain propagation of a hydraulic fracture in a permeable rock", *Engineering Fracture Mechanics*, **75**(16), pp. 4666-4694 (2008).

43. Sarvaramini, E. and Garagash, D.I. "Breakdown of a Pressurized Fingerlike Crack in a Permeable Solid, *Journal of Applied Mechanics*, **82**(6), pp.061006-(1-10) (2015).

44. Van Dyke, M.D. "Perturbation methods in fluid dynamics", Stanford: Parabolic Press (1975).

45. Van Dyke, M.D. "Analysis and improvement of perturbation series", *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **27**(4), pp. 423-450 (1974).