

تعیین ضریب شکل بهینه‌ی دیسک نیم‌دایره با لبه‌ی ترک‌خورده تحت بار فشاری یکنواخت (ECS D)

ابراهیم خلیل‌زاده وحیدی* (استادیار)

علی پرمون (دانشجوی دکتری)

رؤیا ربیسی (دانشجوی کارشناسی ارشد)

دانشکده‌ی فنی و مهندسی عمران، دانشگاه رازی، کرمانشاه

مهندسی عمران شریف، (تابستان ۱۳۹۸)
دوری ۲ - ۳۵، شماره ۲/۲، ص. ۱۶۵-۱۷۲، (پادداست فنی)

در بررسی حاضر با استفاده از دیسک نیم‌دایره‌ی با لبه‌ی ترک‌خورده (ECS D) به ارزیابی سریع چقرمگی مواد شکننده توسط بار فشاری یکنواخت پرداخته شده است. با محاسبه‌ی ضریب شدت تنش (SIF)، ضریب شکل بهینه تحت بار فشاری یکنواخت ارائه شده است. در مطالعه‌ی حاضر، ابتدا روش عددی با نتایج آزمایشگاهی اعتبارسنجی و مدل‌سازی عددی با دقت قابل قبولی کالیبره شد، سپس نمونه‌های عددی با پخی در محل بارگذاری و تکیه‌گاه، تحت زاویه‌ی β از 0° تا 10° درجه، با نمو 1 درجه و طول ترک (α) از 1 میلی‌متر تا 29 میلی‌متر با نمو 1 میلی‌متر بررسی شدند. با بررسی نتایج به دست آمده، ضریب شکل بهینه‌ی $1/325$ تحت بار فشاری یکنواخت و طول پخی متناظر با زاویه‌ی 2 درجه نسبت به مرکز برای دیسک نیم‌دایره‌ی ترک‌دار ارائه شد.

واژگان کلیدی: دیسک نیم‌دایره‌ی ترک‌دار، مواد فتوکشسان، ضریب شدت تنش، ضریب شکل، اجزاء محدود.

۱. مقدمه

معمولاً برای به دست آوردن چقرمگی بسیاری از نمونه‌های آزمایشگاهی، از چقرمگی کرنش صفحه‌ی استفاده می‌شود که بسیاری از آن‌ها نیاز به وسایل مخصوصی برای بارگذاری خمشی و کششی دارند. اما در پژوهش حاضر با استفاده از آزمایش فشاری ضریب شکل محاسبه شده و با استفاده از ضریب شکل، ضریب شدت تنش به دست آمده است. ضریب شکل F از نقطه نظر طراحی و گسترش فهم تئوری برای گسترش ترک تحت بارهای خستگی و یا ضربه بسیار مهم است. هر چند تعداد بسیار زیادی مطالعه در زمینه‌ی شکست مصالح به وسیله‌ی دیسک ترک‌خورده منتشر شده است، اما تقریباً هیچ روشی برای ارائه‌ی بهینه‌سازی ضریب شکل F ارائه نشده است. لذا جنبه‌ی ذکر شده، یکی از انگیزه‌های اصلی نوشتار حاضر برای به دست آوردن ضریب شدت تنش (SIF) برای مدل دیسک نیم‌دایره تحت بار فشاری یکنواخت و محاسبه‌ی ضریب شکل بهینه است.

در پژوهشی در سال 2006 ^[۱]، نمونه‌های دیسک برزیلی تحت بارگذاری ضربه‌ی بررسی و تأثیر آن در چقرمگی دینامیکی مواد ارزیابی شد. همچنین در سال 2012 ، مرور کاملی بر روش‌های آزمون چقرمگی و طراحی نمونه‌ها، خصوصیات هندسی، استانداردهای و خصوصیات مواد مورد آزمون انجام شد.^[۲] برخی پژوهشگران

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۶/۲/۱۸، اصلاحیه ۱۳۹۶/۴/۱۸، پذیرش ۱۳۹۶/۷/۱۱.

DOI:10.24200/J30.2018.2173.2125

(۱۹۸۲)^[۳]، نیز در آزمایشگاه، دیسک برزیلی ترک‌دار را تحت ترکیب مودهای شکست بررسی و سپس رابطه‌ی برای محاسبه‌ی ضریب شدت تنش مواد ترد تحت ترکیب مودها ارائه کردند. همچنین در سال 1993 ^[۴] به مطالعه‌ی خصوصیات چقرمگی دینامیکی مواد در نمونه‌های تحت آزمایش تنش-کرنش دینامیکی پرداخته شده است. در سال 1992 ^[۵] نیز یک روش دقیق تئوری برای در نظر گرفتن آثار دینامیکی در تعیین تجربی ضریب شدت تنش ارائه شد. همچنین در پژوهش دیگری (۱۹۹۹)^[۶]، ابتدا به اصلاح نمونه‌ی دیسک برزیلی در مطالعه‌ی ژئو و همکاران پرداخته شده و سپس با استفاده از نمونه‌ی اصلاح شده، چقرمگی مواد شبه ترد بررسی شده است. در سال 2006 ^[۷]، نیز برای تحلیل شکست مواد ترد، از نمونه‌ی دیسک نیم‌دایره‌ی ترک‌خورده‌ی تحت آزمایش خمش سه نقطه‌ی استفاده شده است. همچنین در سال 2011 ^[۸]، نشان داده شد که ضریب شدت تنش برای طیف وسیعی از طول ترک، در دیسک دایره‌ی با ترک مرکزی توسط بار کششی با افزایش طول ترک، ضریب شدت تنش نیز افزایش می‌یابد. در پژوهش دیگری (۲۰۰۸)^[۹]، نیز اثر طول ترک نسبی و خطای زاویه‌ی بارگذاری برای نتایج تجربی آزمایش دیسک برزیلی تجزیه و تحلیل شد. در سال 1994 لیم و همکاران^[۱۰] به مطالعه‌ی آزمایشگاهی دیسک نیم‌دایره ترک‌دار از جنس سنگ، تحت ترکیب مود اول و دوم شکست پرداختند، با توجه به نتایج آزمایشگاهی سطح شکستی برای نمونه‌های مذکور ارائه شد. برخی پژوهشگران (۲۰۱۱)^[۱۱]، نیز معادله‌ی برای ضریب شدت

بانگ $E = 3000 (MPa)$ ، نسبت پواسون $\nu = 0.33$ و ثابت $f\sigma = 11772 Pa \cdot m / fringe$ هستند. برای ایجاد ترک در هنگام ریخته‌گری رزین اپوکسی، از یک فیلم نازک پلیمری در محل استفاده شده است،^[۱۳] که ممکن است باعث انحنای بسیار کوچک نوک ترک شود. اما انحنای مذکور، تأثیر کمی در محاسبات ضریب شدت تنش دارد و با تقریب بسیار عالی و بدون خطای قابل ملاحظه می‌توان KI را محاسبه کرد. در نمونه‌ی آزمایشگاهی، ضخامت نمونه‌ها ۶ میلی‌متر، شعاع دیسک ۳۰ میلی‌متر و بار وارده به تمامی نمونه‌ها ثابت و برابر ۳۹۵ کیلو نیوتن بوده است.

۳. رفتار مکانیکی دیسک نیم‌دایره تحت بار فشاری

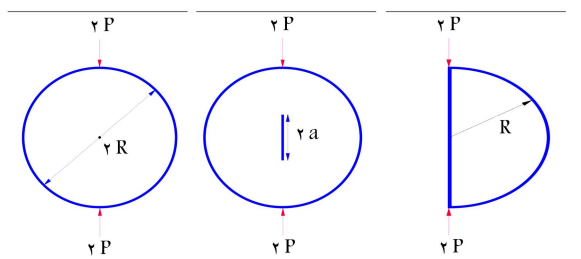
برای درک رفتار مکانیکی دیسک نیم‌دایره، یک دیسک دایره‌ی ترک‌نخورده، یک دیسک ترک‌خورده‌ی برزیلی با طول ترک $2a$ و یک دیسک نیم‌دایره‌ی ترک‌نخورده را در نظر بگیرید. تمامی نمونه‌های مذکور مانند شکل ۲، تحت بار فشاری در راستای قطر قرار می‌گیرند. دیسک دایره‌ی را می‌توان دیسک برزیلی با ترکی برابر $2a = 0$ در نظر گرفت. از طرف دیگر، دیسک نیم‌دایره بدون ترک را می‌توان دیسک برزیلی با ترکی به طول $2a = 2R$ در نظر گرفت. مطابق شکل ۳، با اعمال بار فشاری به نمونه‌های فتوکشسان، خطوط تراز تنش در نمونه‌ها ایجاد می‌شود که هر یک از آن‌ها بیانگر ترکیبی از تنش‌های اصلی هستند و هر خط تراز تنش طبق قوانین حاکم بر مقاومت مصالح از رابطه‌ی ۱ پیروی می‌کنند:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\tau_{max} \quad (1)$$

در مواد فتوکشسان با توجه به شماره‌ی هر خط تراز تنش و مشخصات مصالح، تنش به صورت رابطه‌ی ۲ برقرار است:^[۱۷]

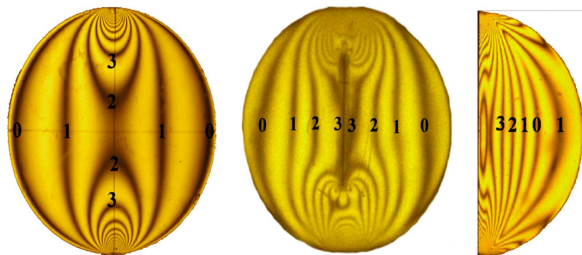
$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{N f \sigma}{h} \quad (2)$$

که در آن، N شماره‌ی هر خط تراز، h ضخامت نمونه‌ها و $f\sigma$ ثابت ماده‌ی فتوکشسان است. خط تراز تنش مرتبه‌ی صفر، با توجه به رابطه‌ی ۳ مکان هندسی خطی است



الف) نیم‌دایره‌ی بدون ترک؛ ب) با ترک مرکزی؛ ج) بدون ترک.

شکل ۲. دیسک برزیلی.



شکل ۳. الگوی خطوط تراز تنش نمونه‌های دیسک برزیلی تحت بار ۳۹۵ نیوتن.^[۱۳]

تنش‌های بیشینه در طول ترک بحرانی از دیسک برزیلی با حاشیه‌ی پایدار را برای انتشار ترک ناپایدار ارائه کردند. علاوه بر مطالعات ذکر شده، دیسک برزیلی نیم‌دایره تحت بارهای خستگی نیز در سال ۲۰۰۱ مطالعه شده است.^[۱۲]

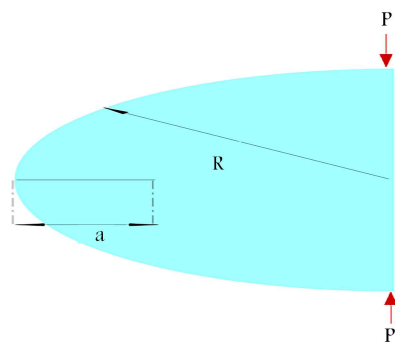
همچنین در سال ۲۰۱۳، روشی سریع برای تعیین چقرمگی مواد ترد تحت بار فشاری و بهینه‌ترین ضریب شکل ارائه شده است. در مطالعاتی در سال ۲۰۱۷،^[۱۴] نیز به بررسی روش جدیدی برای اندازه‌گیری چقرمگی شکست و همچنین تجزیه و تحلیل چگونگی شکست میلاگردهای آسیب‌دیده با ترک‌های سطحی پرداخته شده است. برخی دیگر از پژوهشگران،^[۱۵] نیز برای به‌دست آوردن درک درستی از چگونگی رفتار شکست تکیه‌گاه غلتکی ترک‌خورده‌ی پل‌ها، به شبیه‌سازی عددی دو بعدی به صورت یک دیسک دایره‌ی ترک‌خورده تحت بار یکنواخت فشاری با استفاده از روش اجزاء محدود پرداخته‌اند. همچنین در سال ۲۰۱۷،^[۱۶] مطالعاتی در مورد تأثیر سرعت سرد شدن و نیز محیط پردازش فلز ذوب شده در مقدار چقرمگی شکست فلز شیشه‌ی ۲ انجام شده است.

با وجود تجربه‌ی گسترده در طراحی نمونه‌ها و تعیین چقرمگی آن‌ها با استفاده از کشش، خمش و یا بار فشاری، همیشه نیاز به طرح‌های جدیدتر با توجه به امکانات مختلف وجود دارد. در پژوهش حاضر، به‌وسیله‌ی یک دیسک نیم‌دایره‌ی ترک‌دار (شکل ۱) مشاهده شده است که می‌توان ضریب شدت تنش مود اول نمونه‌ها را تحت بار فشاری تعیین کرد. نمونه‌های دیسک فشاری به‌طور گسترده می‌توانند در تعیین ضرایب شدت تنش مواد ترد، مانند: سنگ، سرامیک و شیشه استفاده شوند. ضریب شدت تنش تقریباً در همه‌ی نمونه‌ها به‌وسیله‌ی عبارت کلی $F\sigma\sqrt{\pi a}$ بیان می‌شود، که در آن F یک ضریب شکل بدون بعد و وابسته به نسبت طول ترک به بعد جسم، σ تنش اطراف نوک ترک و a طول ترک است.

در پژوهش حاضر، ابتدا با اعتبارسنجی نرم‌افزار اجزاء محدود ANSYS با نتایج آزمایشگاهی از درستی نتایج اطمینان حاصل شده و سپس ضریب شکل دیسک نیم‌دایره‌ی ترک‌دار تحت بار فشاری یکنواخت به‌دست آمده است. ضریب شکل بهینه با در نظر گرفتن طول‌های مختلف ترک و طول پخ محل تکیه‌گاه و بار متناظر با زاویه‌ی β متفاوت محاسبه شده است. در بررسی مذکور، نمونه‌های مورد مطالعه به صورت سه بعدی مدل شده‌اند تا تمامی اندرکش تنش‌ها در هر سه راستا در نظر گرفته شود. در شکل ۱، نمای کلی مدل تحت بار فشاری نقطه‌ی سوزندار،^[۱۲] مشاهده می‌شود.

۲. مشخصات مکانیکی و هندسی نمونه‌ها

نمونه‌های آزمایشگاهی سوزندار،^[۱۲] از جنس رزین اپوکسی پرسپکس ۳، با مدول



شکل ۱. نمای کلی از مدل آزمایشگاهی سوزندار تحت بار نقطه‌ی.

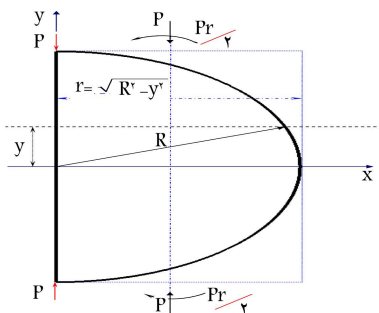
محل تلاقی دو تنش ذکر شده در ۱۶/۹ میلی متر از لبه ی قائم رخ می دهد. از این رو با توجه به رابطه ی ۳، مکان هندسی خطوط تنش مرتبه ی صفر از نقطه ی P می گذرد. خط تراز تنش مرتبه ی صفر در آزمایشگاه در حوالی ۱۷/۱ میلی متر از لبه ی قائم شکل گرفته است. اختلاف بین نتایج عددی و آزمایشگاهی ممکن است ناشی از توزیع بارگذاری نقطه یی در نرم افزار باشد، زیرا در آزمایشگاه با فشار جک بر نمونه، محل بار و تکیه گاه فشرده می شود و بارگذاری از الگوی هرگزین پیروی می کند. در ادامه، برای اطمینان از محل نقطه ی P در آزمایشگاه و مدل عددی، مطابق شکل ۵، نمونه ی دیسک نیم دایره بدون ترک مانند یک تیر مستطیلی با ضخامت ثابت و ارتفاع متغیر $r = \sqrt{R^2 - y^2}$ بررسی و تحت بار فشاری تحلیل شده است. بار وارده به لبه ی قائم را می توان با انتقال بار و لنگر معادل $\frac{Pr}{r}$ جایگزین کرد، بار P باعث فشار یکنواخت و لنگر $\frac{Pr}{r}$ در محل می شود، از این رو طبق قوانین حاکم بر مقاومت مصالح، مقدار تنش قائم از طریق رابطه ی ۴ به دست می آید:

$$\sigma_y = \sigma_y^c + \sigma_y^b = -\frac{P}{rh} + \frac{6P(x - \frac{r}{r})}{hr^2} = (\frac{6(x - \frac{r}{r})}{r} - 1)(\frac{P}{hr}) \quad (4)$$

مکان هندسی خطوط تنش مرتبه ی صفر با مساوی قرار دادن $\sigma_y = 0$ به دست می آید که در محل مذکور هیچ گونه تنش برشی وجود ندارد و مقدار تنش نرمال σ_x طبق حل تئوری صفر است؛ بنابراین، مکان هندسی خطوط تنش تراز مرتبه ی صفر از رابطه ی ۵ به دست می آید:

$$\begin{aligned} (\frac{6(x - \frac{r}{r})}{r} - 1) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{3}{r}x &= r = \sqrt{R^2 - y^2} \\ (\frac{x}{\sqrt{2}R/3})^2 + (\frac{y}{R})^2 &= 1 \end{aligned} \quad (5)$$

مکان خط تراز تنش صفر از حل تحلیلی به صورت معادله ی بیضی به دست می آید که قطر کوچک بیضی بر محور X منطبق است و قطر کوچکی به ابعاد $20 \text{ mm} = \frac{2R}{3}$ دارد که محل نقطه ی P با توجه به حل تحلیلی است. نتایج آزمایشگاهی در شکل ۳ و نتایج عددی در شکل ۴، نیز مکان هندسی مذکور را به خوبی برای خط تراز تنش صفر ($N = 0$) نشان می دهند. اختلاف بین تحلیل عددی و حل تحلیلی به دلیل در نظر گرفتن نوع بارگذاری در حل تحلیلی است. در حل تحلیلی، بار به صورت نقطه یی و در حل عددی، بار به صورت توزیع هرگزین در نظر گرفته می شود که بارگذاری مذکور در حل عددی، تطابق بیشتری با بار وارده در آزمایشگاه دارد.



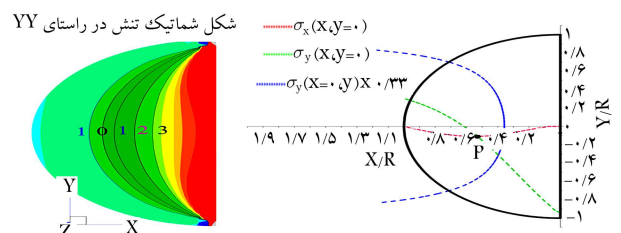
شکل ۵. تحلیل نمونه ی دیسک نیم دایره ی بدون ترک توسط مفهوم تیر مستطیلی. [۱۳]

که تنش برشی صفر است و این خط مرز بین قسمت فشاری و کششی در نمونه است.

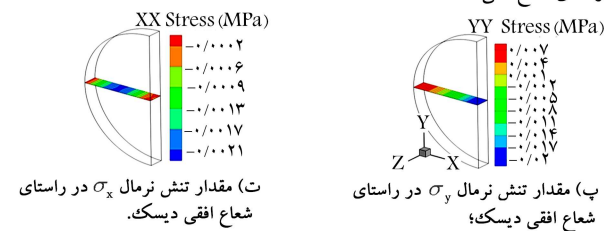
$$\tau_{\max} = \frac{Nf\sigma}{t} \quad (3)$$

$$N = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tau = 0 \\ \sigma_1 = \sigma_2 \end{cases}$$

در شکل ۳، الگوی خطوط تراز تنش تحت بار فشاری در دیسک دایره ی ترک نخورده مشاهده می شود که در آن خطوط تنش مرتبه ی صفر (ZOF) در حاشیه ی دیسک قرار دارد و نشان می دهد که تمام دیسک تقریباً تحت فشار است. در حالی که در دیسک برزیلی در شکل ۳، الگوی خطوط تنش مرتبه ی صفر بین ترک مرکزی و حاشیه ی دیسک قرار گرفته است که نشان دهنده ی یک منطقه ی کششی کوچک در حاشیه ی دیسک است. در نهایت، در دیسک نیم دایره ی ترک نخورده (شکل ۳ الف)، الگوی خطوط تنش مرتبه ی صفر بین لبه های داخلی و بیرونی است که تقریباً $\frac{1}{3}$ منطقه ی نزدیک به لبه ی بیرونی تحت کشش است. بنابراین می توان اطمینان حاصل کرد که با ایجاد ترکی کوچک روی کمان خارجی دیسک، نوک ترک تحت کشش و گسترش ترک نیز تحت مود اول است. برای اعتبار صحت سنجی مدل عددی با نتایج آزمایشگاهی، دیسک ترک نخورده ی نیم دایره تحت بار فشاری نقطه یی در نرم افزار ANSYS مدل شد و سپس مدل مذکور به صورت سه بعدی با المان های ۲۰ گره یی solid ۱۸۶ که هر گره ی آن ۳ درجه آزادی انتقالی داشت، تحلیل شد. با تحلیل تنش در راستای شعاع افقی می توان محل خط تراز تنش صفر و مرز ناحیه ی فشاری و کششی را پیدا کرد تا در ادامه بتوان طول ترک را انتخاب کرد و اطمینان حاصل شود که در ناحیه ی کششی است. از این رو دیسک نیم دایره بدون ترک تحت بار فشاری واحد (۱ نیوتن) قرار داده شد (شکل ۴) و با محاسبه ی تنش های نرمال نقطه ی عبور خط تراز تنش صفر را به دست آورد. با توجه به توزیع تنش σ_y در طول شعاع افقی مشخص است که تنش σ_y ، به صورت فشاری با آهنگ کاهشی عمل می کند و تقریباً در ۱۸/۵ میلی متر از لبه ی قائم به مقدار صفر می رسد، و از این طول تا انتهای دیسک نیم دایره یی به صورت کششی با آهنگی افزایشی عمل می کند. همچنین با مشاهده ی الگوی تنش σ_x بر روی شعاع افقی مشخص می شود که



شکل ۴. دیسک ترک نخورده ی نیم دایره تحت بار فشاری نقطه یی.

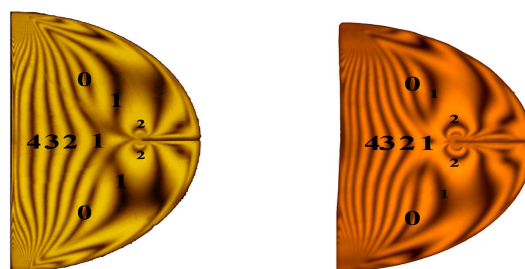


۴. مدل‌سازی اجزاء محدود و صحت‌سنجی

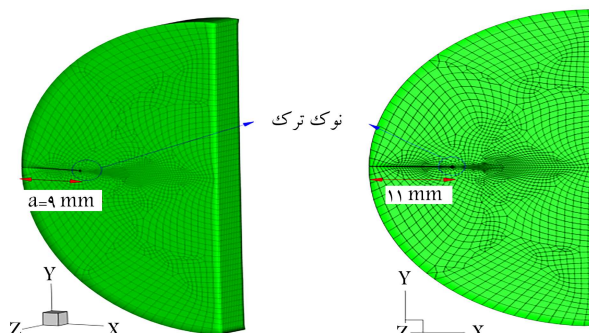
دو نمونه دیسک نیم‌دایره‌ی ترک‌دار (ECCSD) ^۵ توسط سورندرا، ^{۱۳} در آزمایشگاه با شعاع ۳۰ میلی‌متر و ضخامت ۶ میلی‌متر و ترک‌هایی به طول ۹ و ۱۱ میلی‌متر ساخته شدند. الگوی خطوط تراز تنش در دیسک ترک‌دار در شکل ۶ مشاهده می‌شود. کاملاً مشخص است که نوک ترک در محدوده‌ی خطوط تراز تنش کششی واقع و در حال باز شدن است، لذا مود اول شکست بر دیسک حاکم است. براساس حل تئوری فقط مقدار K_{II} موجود است، اما در آزمایشگاه برای مود دوم نیز مقداری بسیار کوچک ثبت شده است، در جدول ۱، نتایج آزمایشگاهی ضرایب شدت تنش ارائه شده است.

از این رو برای صحت‌سنجی مدل‌سازی عددی، نمونه‌ها با المان‌های ۲۰ گرهه‌ی ۳ بعدی solid۱۸۶ با ۳ درجه آزادی انتقالی در هر گره استفاده شده است. المان مذکور قابلیت حل سینگولاریته‌ی نوک ترک را دارد و در شکل ۷، نحوه‌ی مش‌بندی مدل‌های مشاهده می‌شود.

بار وارده در قسمت بالایی مدل به صورت هرتزین وارد می‌شود. همچنین با توجه به اینکه باید تقارن مدل حفظ شود، گره‌های مقابل نیروی اعمالی در راستای قائم مقید شده‌اند تا سیستم تقارن نمونه حفظ شود و نیز برای پایداری حل اجزاء محدود، یک گره در محل تکیه‌گاه در جهت‌های X و Z مقید شده است. با توجه به اینکه بارگذاری صحیح در مدل‌های عددی می‌تواند در صحت نتایج خیلی تأثیرگذار



شکل ۶. الگوی خطوط تراز تنش در نمونه‌ها، ^[۱۳]



شکل ۷. شکل کلی نمونه‌های عددی و نحوه‌ی مش‌بندی.

جدول ۱. مقادیر ضریب شدت تنش محاسبه شده در آزمایشگاه برای ۲ ترک با طول متفاوت. ^[۱۳]

طول ترک (میلی‌متر)	$K_I (MPa\sqrt{mm})$	$K_{II} (MPa\sqrt{mm})$
۹	۱۷,۵۹۱	۰,۹۸۰۳
۱۱	۱۹,۶۱۵	۰,۶۳۸۷

باشد، لذا سعی شده است تا حد امکان در مسئله‌ی مذکور دقت به عمل آید. از این رو بار فشاری به صورت توزیع هرتزین مطابق شکل ۸ به گره‌های بالای مدل وارد شده است. بار هر گره توسط روابط ۶ و به صورت کاهش از لبه‌ی قائم به سمت داخل محاسبه شده است.

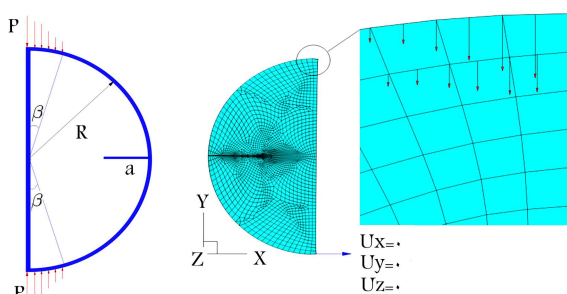
$$V(\theta) = V\left(\frac{\pi}{4}\right) \sqrt{1 - \frac{(\frac{\pi}{4} - \theta)^2}{\beta^2}} \text{ for } \left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$$

$$V\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4P}{\pi R\beta}$$

Then $V(\theta) = V\left(\frac{4P}{\pi R\beta}\right) \sqrt{1 - \frac{(\frac{\pi}{4} - \theta)^2}{\beta^2}}$ (۶)

با توجه به اینکه در آزمایشگاه، بار وارده تقریباً تا $\beta = 4^\circ$ بر دیسک وارد شده است، لذا در مدل عددی نیز تا زاویه‌ی $\beta = 4^\circ$ توزیع هرتزین محاسبه و بار هر گره بر نمونه اعمال شده است. مقدار بار فشاری در تمامی نمونه‌ها ۳۹۵ نیوتن است. همچنین با توجه به هزینه‌ی محاسبات و دقت مدل‌سازی نمونه‌ها به صورت دو بعدی نیز مدل شده است تا بتوان با مدل سه بعدی مقایسه و با توجه به دقت موردنظر یکی از روش‌های دو بعدی یا سه بعدی انتخاب شود. در جدول ۲، مقادیر ضریب شدت تنش مود اول هر دو نمونه‌ی عددی دو و سه بعدی و مدل آزمایشگاهی مقایسه شده است. با مقایسه‌ی نتایج ضریب شدت تنش مود اول در هر یک از دو مدل عددی با مدل آزمایشگاهی می‌توان دریافت که در مدل سه بعدی، دقت نتایج نسبت به مدل دو بعدی بسیار بیشتر است زیرا در مدل سه بعدی، رفتار مکانیکی نمونه با در نظر گرفتن هر سه تنش اصلی تحلیل می‌شود، اما در مدل دو بعدی با فرض تنش مسطح و یا کرنش مسطح، از تنش و یا کرنش خاصی صرف نظر شده است و فرض ذکر شده دقت مدل‌سازی را کاهش می‌دهد.

همچنین در بخش حاضر برای اطمینان از جواب‌های به دست آمده‌ی مدل عددی، حساسیت مدل نسبت به اندازه‌ی مش‌بندی نیز بررسی شد. لذا برای حساسیت‌سنجی مدل مذکور، ابعاد مش‌بندی مدل سه بعدی به غیر از نوک ترک، از ۰/۱ میلی‌متر تا ۳ میلی‌متر تغییر داده شد، اما مش‌بندی المان‌های ردیف اول و دوم



الف) بار گره‌ی در مدل عددی؛ ب) شکل کلی توزیع هرتزین.

شکل ۸. نحوه‌ی بارگذاری هرتزین.

جدول ۲. مقایسه‌ی نتایج ضریب شدت تنش در دو مدل عددی و آزمایشگاهی.

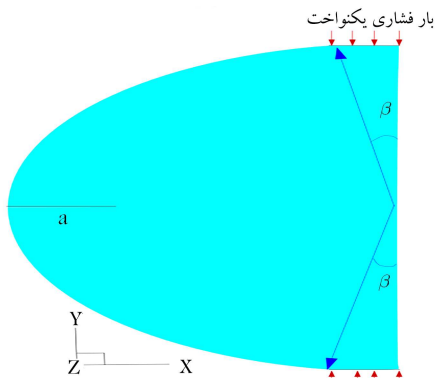
طول ترک	مدل عددی	مدل آزمایشگاهی درصد خطای نسبی
۹ میلی‌متر	دو بعدی ۱۵,۸۴۶	۹,۹۱
	سه بعدی ۱۷,۳۲۸	۱,۱۸
۱۱ میلی‌متر	دو بعدی ۱۷,۸۹۴	۸,۷۷
	سه بعدی ۱۹,۵۴۶	۰,۳۵

۵. نتایج

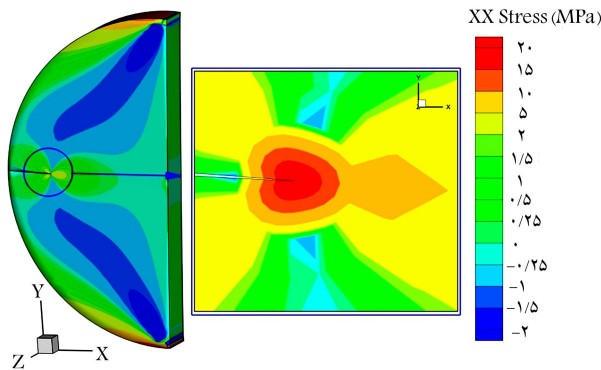
با توجه به اینکه به دست آوردن ضریب شدت تنش مود اول همواره حائز اهمیت بوده است، لذا پژوهشگران همیشه سعی داشته‌اند تا آزمایش‌هایی برای به دست آوردن سریع چقرمگی مواد ارائه دهند. آزمایش‌های به دست آوردن ضریب شدت تنش معمولاً تحت بار کششی و خمشی هستند و تجهیزات خاص آزمایشگاهی مورد نیاز است، اما سورندرا، [۱۳] با ارائه دیسک نیم‌دایره‌ی ترک‌دار تحت بار فشاری، روشی ساده و سریع برای ارزیابی چقرمگی مود اول ارائه داد. در پژوهش حاضر، با توجه به اینکه قرار دادن یک دیسک نیم‌دایره زیر جک فشاری از لحاظ ایستایی مشکل است و همچنین در محاسبات تحلیلی، باید از توزیع بار هرتزین استفاده کرد که ممکن است روند تحلیل را با مشکل روبرو کند؛ لذا با پخ کردن محل بار و تکیه‌گاه، نمونه زیر جک ایستا و بار به صورت فشاری و یکنواخت بر دیسک وارد و مشکل الگوی توزیع بار هرتزین برطرف شد. در شکل ۱۱، نمایی از مدل پیشنهادی تحت بار فشاری یکنواخت مشاهده می‌شود.

۱.۵. بررسی دیسک نیم‌دایره‌ی ترک‌دار با ضخامت ثابت

از این رو در ادامه، با تغییر زاویه β از 0° تا 10° با نمو 1° ، طول ترک (a) از 1 mm تا 29 mm با نمو 1 mm و با ضخامت ثابت 6 mm ، به بررسی ضریب شدت تنش مود اول دیسک نیم‌دایره‌ی ترک‌دار تحت بار فشاری یکنواخت پرداخته شده است (روابط ۷). برای نمونه در شکل ۱۲، تنش در راستای X نوک ترک در نمونه‌ی $\beta = 2^\circ$ و طول ترک 8 میلی‌متر مشاهده می‌شود. مقدار به دست آمده از



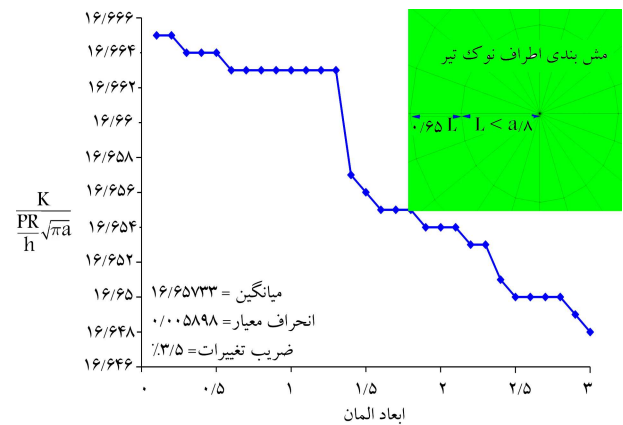
شکل ۱۱. نمای کلی از نمونه‌ی پیشنهادی تحت بار فشاری یکنواخت.



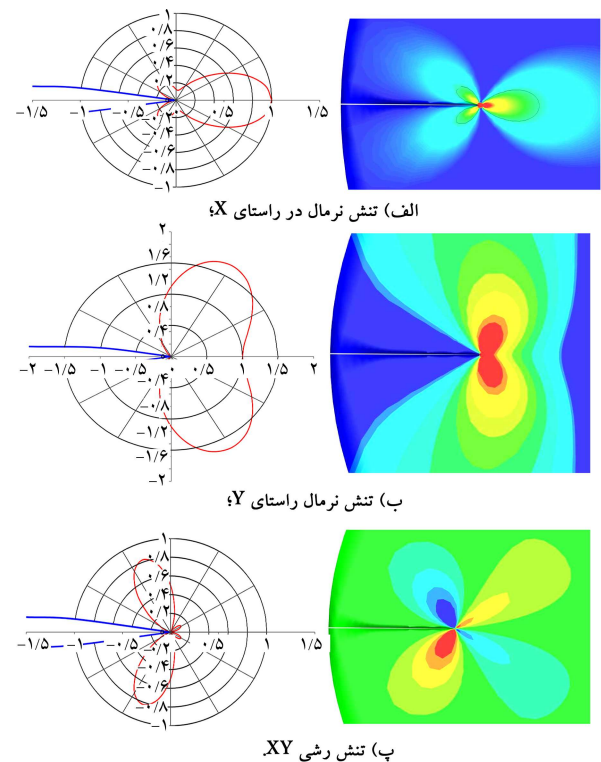
شکل ۱۲. تنش نرمال در راستای نوک ترک.

اطراف نوک ترک ثابت و با توجه به راهنمای نرم‌افزار و توصیه‌ی پژوهشگران، به ترتیب طولی کوچک‌تر از $a/8$ و 0.65 طول المان‌های ردیف اول را دارند. در شکل ۹ کاملاً مشخص است که ضریب شدت تنش نرمال شده تقریباً با ابعاد مش‌بندی بین 0.71 میلی‌متر تا 3 میلی‌متر مستقل از ابعاد مش‌بندی است، و در ادامه‌ی بررسی حاضر، ابعاد مش 0.71 میلی‌متر در نظر گرفته شده است.

با توجه به تقارن کانتورهای تنش در شکل ۱۰ و مقایسه‌ی کانتور تنش نرمال و برشی برای نوک ترک و مقایسه با روابط تحلیلی ایروین، [۱۸] مشخص است که نوک ترک فقط تحت کشش بوده و مود اول شکست حاکم است، و از تقارن کانتورها می‌توان نتیجه گرفت که بارگذاری و تکیه‌گاه کاملاً درست و به صورت متقارن مدل شده است و هیچ‌کدام از مودهای دیگر وارد عمل نشده‌اند، به همین دلیل درصد خطای نسبی مدل عددی نسبت به آزمایشگاه بسیار کوچک است.



شکل ۹. حساسیت مدل نسبت به اندازه‌ی مش‌بندی.



شکل ۱۰. مقایسه‌ی الگوی تنش نوک ترک در مدل عددی و روابط تحلیلی ایروین.

روش اجزاء محدود با روابط تحلیلی مطابقت دارد.

افزایش یافته و با توجه به رابطه $F = \frac{K_I}{P/Rh\sqrt{\pi a}}$ ، مقادیر ضریب شکل، به سمت عددی ثابت میل کرده است.

همانطور که در شکل ۱۴ مشخص است، در محدوده‌ی بین $0.067 \leq \frac{a}{R} \leq 0.06$ تقریباً خطوط مربوط به ضریب شدت تنش نرمال شده در مقابل طول ترک نسبی افقی تراست، از این رو محدوده‌ی مذکور برای ارائه‌ی ضریب شکل ثابت انتخاب شد. سپس با محاسبه‌ی مقدار انحراف از معیار و درصد ضریب تغییرات (C_v) در ضریب شکل (F) برای تمامی زوایا در محدوده‌ی اخیر مشخص شد که نمونه تحت زاویه‌ی بارگذاری $\beta = 2^\circ$ در محدوده‌ی $0.067 \leq \frac{a}{R} \leq 0.06$ ، کمترین درصد ضریب تغییرات در ضریب شکل را دارد که این بدان معناست که در زاویه‌ی بارگذاری $\beta = 2^\circ$ ، نمودار نسبت به سایر نمودارها افقی تراست و درصد خطای کمتری برای ارائه‌ی ضریب شکل ثابت دارد و می‌توان میانگین مقادیر ضریب شکل را با تقریب مناسبی ثابت به دست آورد.

از این رو با توجه به جدول ۳، ضریب 1.325 برای زاویه‌ی $\beta = 2^\circ$ ، مناسب‌ترین ضریب شکل برای دیسک نیم‌دایره‌ی ترک‌دار تحت بار فشاری یکنواخت است. از این رو برای مطالعات بعدی ساخت دیسک نیم‌دایره‌ی ترک‌دار با برش و تر به اندازه‌ی

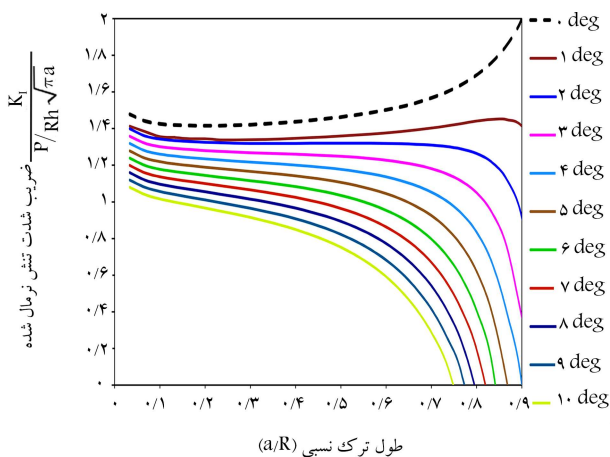
$$\begin{cases} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{cases} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \begin{bmatrix} 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \theta = 0 \\ r = 0.1 \text{ mm} \Rightarrow \sigma_{xx} = 187321 \text{ (MPa)} \\ K_I = 147523 \end{cases} \quad (7)$$

از شکل ۱۳ می‌توان پی برد که مقدار K_I با افزایش زاویه‌ی β کاهش می‌یابد، که دلیل آن کاهش منطقه‌ی کششی در لبه‌های دیسک نیم‌دایره است. همچنین با افزایش طول ترک، مقدار K_I ابتدا افزایش و سپس کاهش یافته است. این کاهش به دلیل نزدیک شدن نوک ترک به منطقه‌ی فشاری دیسک است که مانع از باز شدن نوک ترک می‌شود. گراف صفر درجه حالت حدی شکل مذکور است، زیرا در این حالت بار کاملاً به صورت نقطه‌یی وارد شده و مقدار K_I همواره در حال افزایش بوده است، از این رو هیچ گرافی نباید گراف بحرانی صفر را قطع کند. همچنین با توجه به شکل ۱۰ مشخص است زمانی که مقدار K_I برای یک زاویه‌ی خاص صفر می‌شود، طول ترک معادل آن (a^*) ، بیشینه‌ی طول ترکی است که نوک ترک در کشش بوده و مقدار K_I مثبت است و از طول a^* به بعد، نوک ترک در فشار قرار می‌گیرد و بسته می‌شود. مطابق شکل ۱۳، با افزایش زاویه‌ی β طول ترک مورد بررسی برای محاسبه‌ی K_I ، در آزمایشگاه محدود می‌شود، و به این مسئله هنگام ساخت نمونه‌های آزمایشگاهی باید توجه شود.

مقدار K_I در طول ترکی بیش از طول ترک a^* منفی است، اگرچه مقدار منفی K_I از لحاظ فیزیکی امکان‌پذیر نیست، اما بررسی تئوری آن می‌تواند جالب باشد. برای این منظور دیسک نیم‌دایره‌ی ترک‌دار در طولی بیشتری از a^* به جای بار فشاری یکنواخت تحت بار کششی یکنواخت با همان مقدار بار قرار داده شد و مقادیر K_I تحت بار کششی همان مقادیر K_I تحت بار فشاری با علامت مثبت به دست آمد. در شکل ۱۱، مقادیر K_I تحت بار فشاری در طول ترکی بیش از a^* مشاهده می‌شود.

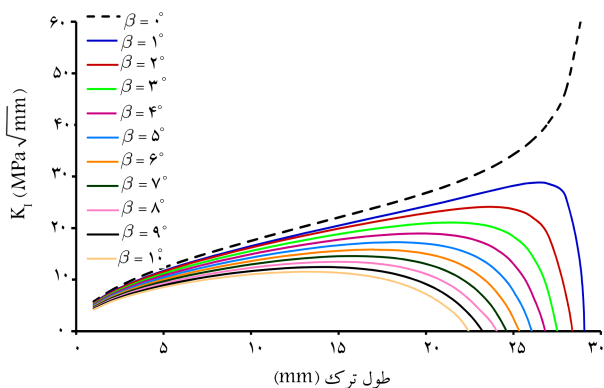
برای به دست آوردن ضریب شکل ثابت دیسک ترک‌دار باید مقادیر ضریب شدت تنش و طول ترک، بدون بعد شوند. در شکل ۱۴، ضریب شدت تنش نرمال شده‌ی $(\frac{K_I}{P/Rh\sqrt{\pi a}})$ در مقابل طول ترک نسبی (a/R) رسم شده است که مطابق آن، الگوی گراف مذکور شبیه شکل ۱۳ است، با این تفاوت که قسمت‌های افقی آن



شکل ۱۴. مقادیر نرمال شده‌ی K_I در مقابل ترک نسبی a/R .

جدول ۳. مقادیر میانگین و انحراف از معیار ضریب شکل.

β	میانگین	انحراف معیار	درصد ضریب تغییرات
0°	1.441	0.27	1.584
1°	1.352	0.14	1.021
2°	1.325	0.11	0.841
3°	1.267	0.24	1.861
4°	1.21	0.38	3.172
5°	1.152	0.54	4.652
6°	1.095	0.69	6.3
7°	1.038	0.84	8.128
8°	0.981	1.0	10.175
9°	0.924	1.15	12.475
10°	0.867	1.31	15.071



شکل ۱۳. مقادیر K_I در مقابل طول ترک.

۶. نتیجه‌گیری

دیسک نیم‌دایره‌ی ترک‌دار تحت بار فشاری، روشی مناسب برای اندازه‌گیری چقرمگی مواد ترد است. روش مذکور، چقرمگی مود اول مصالح ترد را تحت بار فشاری یکنواخت با دقت خوبی محاسبه می‌کند. با توجه به اینکه ممکن است در آزمایشگاه، بارگذاری بر روی نمونه‌ی بدون پخ مشکل باشد، به همین دلیل ایجاد پخ در محل تکیه‌گاه و بارگذاری می‌تواند مشکل مذکور را حل کند. در مطالعه‌ی حاضر، طیف وسیعی از طول پخ با زاویه‌های مختلف β و ترک‌هایی با طول متفاوت ارزیابی شد و نتایج نشان داد که تحت بار فشاری یکنواخت در دیسک نیم‌دایره‌ی ترک‌دار با طول پخی متناظر با زاویه‌ی $\beta = 2^\circ$ ، بهینه‌ترین ضریب شکل برابر $1,325$ به دست آمد.

۲ درجه نسبت به مرکز در آزمایشگاه توصیه می‌شود. فرمول کلی مورد استفاده برای محاسبه‌ی شدت تنش مطابق رابطه‌ی ۸ است:

$$K_I = F\sigma\sqrt{\pi a} \quad (8)$$

که در آن، F ضریب شکل دیسک است و به شکل و هندسه‌ی نمونه بستگی دارد. با توجه به جدول ۳، ضریب F برای دیسک نیم‌دایره‌ی ترک‌دار تحت بار فشاری یکنواخت $1,325$ تحت زاویه‌ی $\beta = 2^\circ$ به دست آمد و ضریب شدت تنش مود اول برای دیسک نیم‌دایره‌ی ترک‌دار با ضخامت ثابت طبق رابطه‌ی ۹ محاسبه می‌شود:

$$K_I^{ECSD} = 1,325 \frac{P}{Rh} \sqrt{\pi a} \quad (9)$$

پانوشتها

1. stress intensity factor
2. metallic glass
3. perspex
4. zeroth order fringe (ZOF)
5. edge cracked semicircular disk

منابع (References)

1. Dong, S., Wang, Y. and Xia, Y. "A finite element analysis for using Brazilian disk in split Hopkinson pressure bar to investigate dynamic fracture behavior of brittle polymer materials", *Polymer Testing*, **25**(7), pp. 943-952 (2006).
2. Zhu, X.-K. and Joyce, J.A. "Review of fracture toughness (G, K, J, CTOD, CTOA) testing and standardization", *Engineering Fracture Mechanics*, **85**, pp. 1-46 (2012).
3. Atkinson, C., Smelser, R. and Sanchez, J. "Combined mode fracture via the cracked Brazilian disk test", *International Journal of Fracture*, **18**(4), pp. 279-291 (1982).
4. Maigre, H. and Rittel, D. "Mixed-mode quantification for dynamic fracture initiation: Application to the compact compression specimen", *International Journal of Solids and Structures*, **30**(23), pp. 3233-3244 (1993).
5. Bui, H., Maigre, H. and Rittel, D. "A new approach to the experimental determination of the dynamic stress intensity factor", *International Journal of Solids and Structures*, **29**(23), pp. 2881-2895 (1992).
6. Wang, Q.-Z. and Xing, L. "Determination of fracture toughness K IC by using the flattened Brazilian disk specimen for rocks", *Engineering fracture mechanics*, **64**(2), pp. 193-201 (1999).
7. Ayatollahi, M. and Aliha, M. "On determination of mode II fracture toughness using semi-circular bend specimen", *International Journal of Solids and Structures*, **43**(17), pp. 5217-5227 (2006).
8. Albinmousa, J., Merah, N. and Khan, S.M. "A model for calculating geometry factors for a mixed-mode I-II single edge notched tension specimen", *Engineering Fracture Mechanics*, **78**(18), pp. 3300-3307 (2011).
9. Dong, S. "Theoretical analysis of the effects of relative crack length and loading angle on the experimental results for cracked Brazilian disk testing", *Engineering Fracture Mechanics*, **75**(8), pp. 2575-2581 (2008).
10. Lim, I. and et al. "Fracture testing of a soft rock with semi-circular specimens under three-point bending: Part 1- mode I", *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts*, Elsevier (1994).
11. Keles, C. and Tutluoglu, L. "Investigation of proper specimen geometry for mode I fracture toughness testing with flattened Brazilian disc method", *International Journal of Fracture*, **169**(1), pp. 61-75 (2011).
12. Simha, K. "Fracture mechanics for modern engineering design", Universities Press (2001).
13. Surendra, K. and Simha, K. "Design and analysis of novel compression fracture specimen with constant form

factor: Edge cracked semicircular disk (ECSD)", *Engineering Fracture Mechanics*, **102**, pp. 235-248 (2013).

14. Elices, M., Perez-Guerrero, M., Lordachescu, M. and et al. "Fracture toughness of high-strength steel bars", *Engineering Fracture Mechanics*, **170**, pp. 119-129 (2017).

15. Noury, P. and Eriksson, K. "Determination of stress intensity factors for cracked bridge roller bearings using finite element analyses", *Engineering Fracture Mechanics*, **169**, pp. 67-73 (2017).

16. Gludovatz, B., Granata, D., Thurston, Keli, V.S. and et al. "On the understanding of the effects of sample size on the variability in fracture toughness of bulk metallic glasses", *Acta Materialia*, **126**, pp. 494-506 (2017).

17. Sanford, R.J. and Dally, J.W. "A general method for determining mixed-mode stress intensity factors from isochromatic fringe patterns", *Engineering Fracture Mechanics*, **11**(4), pp. 621-633 (1979).

18. Irwin, G.R. "Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate", *Journal of Applied Mechanics*, **24**(3), pp. 361-364 (1957).