

# ارتعاش آزاد تیرهای مدرج هدفمند بر بستر ارتجاعی دو پارامتری با استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر

افشین خلیلی (کارشناس ارشد)

علیرضا ونوقی\* (دانشیار)

محمودرضا بنان (دانشیار)

محمدرضا بنان (استاد)

بخش مهندسی راه، ساختمان و محیط زیست، دانشکده مهندسی، دانشگاه شیواز

مهندسی عمران شریف، (بهار ۱۳۹۹)  
دربی ۲ - ۳۶، شماره ۱/۱، ص. ۱۳۷-۱۴۳

تیرهای قرارگرفته بر بسترهای ارتجاعی، یک مدل پر کاربرد در تحلیل و بررسی سازه‌های مهندسی هستند. در دهه‌های اخیر، به دلیل داشتن مقاومت بالا در برابر حرارت، جذب انرژی و وزن سبک، مطالعاتی در رابطه با مواد نوین همچون مواد مدرج هدفمند انجام شده است. خواص مکانیکی مواد مدرج هدفمند به صورت پیوسته از یک سطح به سطح دیگر و از فلز به سرامیک تغییر می‌کند. در نوشتار حاضر، برای اولین بار معادلات حاکم بر ارتعاش آزاد تیرهای مدرج هدفمند بر بستر ارتجاعی دو پارامتری شامل فنر خطی و لایه‌ی برشی با استفاده از نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی اول به دست آمده و با به‌کارگیری روش دیفرانسیل کوادریچر تجزیه شده‌اند. با تجزیه‌ی شرایط مرزی با روش دیفرانسیل کوادریچر، اثر شرایط مذکور در معادلات حاکم تجزیه شده بررسی و دستگاه معادلات به دست آمده به حوزه‌ی بسامد منتقل و بسامد مسئله تعیین شده است. تأثیر شرایط مرزی، پارامترهای بستر ارتجاعی، نسبت طول به ضخامت، و ضریب کسر حجمی از موارد بررسی شده در نوشتار حاضر است.

واژگان کلیدی: تیرهای مدرج هدفمند، ارتعاش آزاد، نظریه برشی مرتبه‌ی اول، روش دیفرانسیل کوادریچر.

khaliliafshin@yahoo.com  
vosoughi@shirazu.ac.ir  
bananm@shirazu.ac.ir  
banan@shirazu.ac.ir

## ۱. مقدمه

مواد مدرج هدفمند برای اولین بار در سال ۱۹۸۴ در ژاپن به منظور ترکیب کردن فلز به همراه مقاومت در برابر دمای بالای سرامیک ساخته شده‌اند. مواد مدرج هدفمند به عنوان مواد مقاوم در برابر حرارت برای پوشش شاتل‌های فضایی، راکتورهای هسته‌یی، ریل‌ها، و ... که در معرض درجه حرارت بالا هستند، استفاده می‌شوند. بنابراین استفاده‌ی روزافزون از سازه‌های ساخته شده از مواد مدرج هدفمند، همچون تیرهای مدرج هدفمند در صنایع مدرن مختلف، بررسی رفتار آن‌ها را حائز اهمیت ویژه‌یی ساخته است،<sup>[۱-۱۶]</sup> و به تبع آن پژوهش‌گران بسیاری به ارائه‌ی راه‌حل‌های مختلفی جهت تحلیل رفتار دینامیکی تیرهای هدفمند مدرج پرداخته‌اند، که در ادامه به بررسی پژوهش‌های انجام شده‌ی در دسترس، که اخیراً در این زمینه چاپ شده‌اند، پرداخته شده است.

سیمسک و کوکاترک<sup>[۱]</sup> (۲۰۰۹)، با استفاده از نظریه‌ی اوپلر - برنولی و روش

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۷/۲/۱۲، اصلاحیه ۱۳۹۷/۵/۹، پذیرش ۱۳۹۷/۵/۱۳

DOI:10.24200/J30.2018.50883.2351

همچنین در زمینه‌ی بررسی ارتعاش آزاد تیرهای مدرج هدفمند واقع بر بستر ارتجاعی، فقط یک پژوهش توسط ینگ<sup>۶</sup> و همکارانش (۲۰۰۸)،<sup>[۸]</sup> انجام شده است. که جهت بررسی مسئله از نظریه‌ی کشسانی دو بُعدی استفاده کرده و با به‌کارگیری

$$v(z) = v_m + (v_c - v_m) \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^n \quad (\text{ب} - 3)$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^n \quad (\text{ج} - 3)$$

با استفاده از نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی اول (تیر تیموشنکو)، جابه‌جایی طولی  $u$  و عرضی  $w$  یک نقطه‌ی دلخواه از تیر با فرض تغییر شکل‌های کوچک را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۴ (الف و ب) بیان کرد:

$$U(x, z, t) = u(x, t) + z\varphi^x(x, t) \quad (\text{الف} - 4)$$

$$W(x, z, t) = w(x, t) \quad (\text{ب} - 4)$$

که در آن‌ها،  $U$  و  $W$  به ترتیب مؤلفه‌های جابه‌جایی طولی و عرضی هر نقطه‌ی دلخواه با مختصات  $(x, z)$  در زمان از تیر مدرج هدمند است. همچنین  $u$  و  $w$  به ترتیب جابه‌جایی هر نقطه‌ی دلخواه واقع بر محور میانی تیر مدرج هدمند در امتداد جهت  $x$  و  $z$  در زمان  $t$  هستند.  $\varphi^x$  نیز چرخش مقطع تیر عمود بر صفحه‌ی حول محور  $y$  در زمان  $t$  است.

با توجه به مؤلفه‌های جابه‌جایی در رابطه‌ی اخیر می‌توان روابط کرنش و جابه‌جایی را به صورت رابطه‌ی ۵ (الف و ب) نوشت:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi^x}{\partial x} \quad (\text{الف} - 5)$$

$$\gamma_{xz} = \varphi^x + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (\text{ب} - 5)$$

که در آن  $\varepsilon_{xx}$ ، کرنش در عمودی در راستای طولی تیر و  $\gamma_{xz}$  کرنش برشی است. همچنین رابطه‌ی تنش و کرنش به صورت رابطه‌ی ۶ (الف و ب) است:

$$\sigma_{xx} = Q(z)\varepsilon_{xx} \quad (\text{الف} - 6)$$

$$\sigma_{xz} = \frac{1-v(z)}{2} \kappa Q(z)\gamma_{xz} \quad (\text{ب} - 6)$$

که در آن  $\sigma_{xx}$ ، تنش عمودی در راستای طولی و  $\sigma_{xz}$  تنش برشی است.  $\kappa$  ضریب تصحیح برشی است که با توجه به فرضیات نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی اول و به دلیل عدم یکنواختی کرنش و تنش در ضخامت تیر با مقطع مستطیلی عموداً مساوی  $\frac{5}{6}$  لحاظ می‌شود.  $Q(z)$  به صورت رابطه‌ی ۷ تعریف می‌شود:

$$Q(z) = \frac{E(z)}{1-v(z)^2} \quad (\text{۷})$$

با به‌کارگیری اصل هامیلتون، معادله‌ی حرکت تیر مدرج هدمند واقع بر بستر ارتجاعی با استفاده از روابط تنش کرنش و صرف نظر کردن از نیروی محوری به صورت رابطه‌ی ۸ (الف، ب و ج) خواهد بود:

$$A_{11} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) + B_{11} \frac{\partial^2 \varphi^x}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{الف} - ۸)$$

$$A_{55} \left( \frac{\partial \varphi^x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + k_1 w - k_g \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (\text{ب} - ۸)$$

$$B_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + D_{11} \frac{\partial^2 \varphi^x}{\partial x^2} - A_{55} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi^x \right) = I_2 \frac{\partial^2 \varphi^x}{\partial t^2} \quad (\text{ج} - ۸)$$

که در آن‌ها،  $k_1$  و  $k_g$  به ترتیب پارامترهای مربوط به بستر ارتجاعی خطی و لایه‌ی برشی هستند، که در پژوهش حاضر جهت یافتن نتایج عددی به صورت رابطه‌ی ۹ (الف و ب) بی‌بعد شده‌اند:

$$K_1 = \frac{k_1 EI}{L^2} \quad (\text{الف} - ۹)$$

$$K_g = \frac{k_g EI}{L^2} \quad (\text{ب} - ۹)$$

سری‌ها، معادلات مربوط را به صورت تحلیلی برای تیر دوسر ساده حل و بسامد را به دست آورده‌اند.

با توجه به بررسی‌های انجام شده، در نوشتار حاضر برای اولین بار معادلات حاکم جهت تعیین بسامد طبیعی تیرهای مدرج هدمند بر بستر ارتجاعی دو پارامتری با استفاده از نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی اول (تئوری تیموشنکو) به دست آمده و با استفاده از روش عددی کارا و دقیق دیفرانسیل کوادریچر، معادلات حاکم و شرایط مرزی تجزیه شده و سپس با انتقال دستگاه معادلات از حوزه‌ی زمان به حوزه‌ی بسامد، بسامدهای تیر به دست آمده‌اند. همچنین تأثیر پارامترهای مختلف، همچون اثر بستر ارتجاعی در بسامد تیر مدرج هدمند مطالعه شده است.

## ۲. بیان مسئله و معادلات حاکم

در شکل ۱، تیر مدرج هدمند واقع بر بستر ارتجاعی دو پارامتری نشان داده شده است.

که در آن،  $L$  طول و  $h$  و ضخامت تیر است، که بر بستر ارتجاعی دو پارامتری، شامل لایه‌ی خطی و لایه‌ی برشی قرار گرفته است. تیر به صورت اورتوتروپیک در نظر گرفته شده و در جهت ضخامت تیر، توزیع خواص ماده به صورت نمایی از فلز در یک وجه به سرامیک در وجه دیگر تغییر می‌کند. در حالت کلی، خصوصیات مواد مدرج هدمند، که از دو فاز فلز و سرامیک تشکیل شده است، را می‌توان با در نظر گرفتن رابطه‌ی ۱ عنوان کرد:<sup>[۱]</sup>

$$P = P_m V_m + P_c V_c \quad (۱)$$

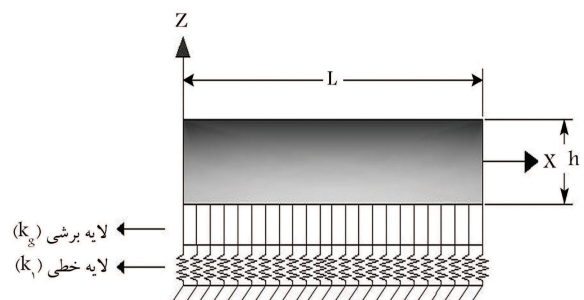
که در آن،  $P$  و  $V$  به ترتیب نشان‌دهنده‌ی خصوصیات ماده و میزان حجم در فازهای مختلف ماده هستند.  $m$  و  $c$  نیز به ترتیب بیان‌گر فازهای فلز و سرامیک ماده‌ی موردنظر هستند. حجم ماده در مواد مدرج هدمند را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۲ نوشت:<sup>[۱]</sup>

$$V_c = \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^n, V_m = 1 - \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^n \quad (۲)$$

که در آن،  $n$  ضریب کسر حجمی است.

با جایگزینی رابطه‌ی ۲ در رابطه‌ی ۱، می‌توان مدول یانگ ( $E$ )، ضریب پواسون ( $\nu$ ) و چگالی ( $\rho$ ) تیر مدرج هدمند را به صورت رابطه‌ی ۳ (الف، ب و ج) به دست آورد:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^n \quad (\text{الف} - ۳)$$



شکل ۱. هندسه‌ی تیر مدرج هدمند بر روی بستر ارتجاعی.

همچنین جهت تولید گره‌ها می‌توان از توزیع کسینوسی در رابطه‌ی ۱۵ استفاده کرد:

$$\frac{x_i}{L} = \frac{1}{\pi} \left\{ 1 - \cos \left[ \frac{(i-1)\pi}{(N_x-1)} \right] \right\}; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (15)$$

با استفاده از روابط مذکور می‌توان معادلات حاکم بر تیر مدرج هدفمند بر روی بستر ارتجاعی را در دامنه‌ی مکان در هر نقطه‌ی  $i$  دامنه، که  $i = 2, \dots, N_x$  و  $N'_x (= N_x - 1)$  است، را تجزیه کرد. فرم تجزیه شده‌ی روابط مذکور به صورت رابطه‌ی ۱۶ (الف، ب و ج) است:

$$A_{11} \left( \sum_{m=2}^{N'_x} B_{im}^x u_m \right) + B_{11} \left( \sum_{m=2}^{N'_x} B_{im}^x \phi_m^x \right) = 0 \quad (الف - 16)$$

$$A_{55} \left( \sum_{m=2}^{N'_x} A_{im}^x \varphi_m^x \right) + \sum_{m=2}^{N'_x} B_{im}^x w_m + k_1 w - k_g \sum_{m=2}^{N'_x} B_{im}^x w_m = I_x \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (ب - 16)$$

$$B_{11} \sum_{m=2}^{N'_x} B_{im}^x u_m + D_{11} \left( \sum_{m=2}^{N'_x} B_{im}^x \varphi_m^x \right) - A_{55} \left( \sum_{m=2}^{N'_x} A_{im}^x w \varphi_m^x \right) = I_x \frac{\partial^2 \varphi_x}{\partial t^2} \quad (ج - 16)$$

فرم تجزیه شده‌ی شرایط مرزی نیز به صورت رابطه‌ی ۱۷ (الف و ب) است:

$$u_i = 0, w_i = 0, D_{11} \sum_{i=m}^{N_x} A_{im} \varphi_m^x = 0, i = N_x, i = 1 \quad (الف - 17)$$

$$u_i = 0, w_i = 0, \varphi_m^x = 0, i = N_x, i = 1 \quad (ب - 17)$$

که در روابط اخیر، (الف) و (ب)  $i = 1$  در  $x = 0$  و  $i = N_x$  در  $x = L$  است.

بعد از انتقال دادن فرم تجزیه شده‌ی معادله‌ها از دامنه‌ی زمان به دامنه‌ی بسامد،

فرم ماتریسی معادله‌ها با در نظر گرفتن شرایط مرزی، می‌تواند به صورت رابطه‌ی ۱۸ نوشته شود:

$$\left( \left[ \begin{array}{cc} [K_{ww}] & [K_{wU}] \\ [K_{Uw}] & [K_{UU}] \end{array} \right] - \omega^2 \left[ \begin{array}{cc} [M_{ww}] & [0] \\ [0] & [M_{UU}] \end{array} \right] \right) \left\{ \begin{array}{c} \{w\} \\ \{U\} \end{array} \right\} = \{0\} \quad (18)$$

که در آن،  $\{U\} = \left\{ \begin{array}{c} \{u\} \\ \{\varphi^x\} \end{array} \right\}$  بردار درجه‌های آزادی  $[K_{ij}]$ ، با  $(i, j = u, w)$

ماتریس سختی و  $[M_{ij}]$  با  $(i, j = u, w)$  ماتریس جرم است.

همچنین در رابطه‌ی اخیر،  $\omega$  بسامد طبیعی تیر مدرج هدفمند واقع بر بستر ارتجاعی دو پارامتری است، که با حل معادله‌ی مشخصه‌ی مذکور به دست می‌آید.

#### ۴. نتایج عددی

ابتدا به منظور بررسی صحت نتایج به دست آمده، نتایج پژوهش حاضر با دیگر نتایج موجود در دسترس مقایسه و بررسی شده است. همگرایی و دقت روش حل

و مؤلفه‌های سختی، جابه‌جایی و برآیند نیروهای درون صفحه به صورت رابطه‌ی ۱۰ (الف، ب و ج) تعریف می‌شوند:

$$(A_{11}, B_{11}, D_{11}) = \int_{-h/4}^{h/4} Q(z) (1, z, z^2) dz \quad (الف - 10)$$

$$A_{55} = \int_{-h/4}^{h/4} \kappa \frac{\rho \Delta E(z)}{1 + \nu(z)} dz \quad (ب - 10)$$

$$I_i = \int_{-h/4}^{h/4} \rho(z) (1, z^2) dz, i = 0, 2 \quad (ج - 10)$$

شرایط تکیه‌گاهی مربوط به تیر مدرج هدفمند مورد بررسی را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۱۱ (الف و ب) در نظر گرفت:

تکیه‌گاه ساده:

$$u = 0, w = 0, M_{xx} = 0 \quad (الف - 11)$$

$$M_{xx} = D_{11} \frac{\partial \varphi^x}{\partial x}$$

تکیه‌گاه گیردار:

$$u = 0, w = 0, \varphi^x = 0 \quad (ب - 11)$$

### ۳. حل معادلات حاکم با استفاده از روش دیفرانسیل

#### کوادرینچر

ایده‌ی اساسی مورد استفاده در روش دیفرانسیل کوادرینچر، تبدیل مشتق توابع به متغیر مکانی در نقطه‌ی مورد نظر است. این عمل با جمع جبری تقریب تابع در نقاط روی دامنه با توجه به متغیرها انجام می‌شود. به عنوان مثال، تابع  $f(x)$  به گونه‌ی  $0 \leq x \leq L$  باشد، را در نظر بگیرید. می‌خواهیم مقادیر مجهول مربوط به جابه‌جایی  $u$ ،  $w$  و  $\varphi^x$  را در نقاط مختلف دامنه‌ی مورد نظر به دست آوریم. با استفاده از روش دیفرانسیل کوادرینچر، مشتق مرتبه‌ی  $r$  تابع  $f$  نسبت به  $x$  در نقطه‌ی مشخص به صورت رابطه‌ی ۱۲ تخمین زده می‌شود: [۱۷-۱۹]

$$\frac{\partial^r f(x_i)}{\partial x^r} = \sum_{j=1}^{N_x} A_{ij}^{x(r)} f(x_j) = \sum_{j=1}^{N_x} A_{ij}^{x(r)} f_j, \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (12)$$

که در آن  $N_x$ ، تعداد نقاط در راستای طول تیر مورد نظر است.

معادله‌های اخیر بیان‌گر آن است که نکته‌ی مهم در روش دیفرانسیل کوادرینچر تعیین ضرایب وزن و انتخاب نقاط نمونه است. به منظور تعیین ضرایب وزن با استفاده از چند جمله‌ی لاگرانژ ضریب وزن مشتق اول در جهت  $x$  به صورت رابطه‌ی ۱۳ خواهد بود:

$$A_{ij}^x = \frac{1}{L} \begin{cases} \frac{M(x_i)}{(x_i - x_j)M'(x_j)} & \text{for } i \neq j \\ - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N_x} A_{ij}^x & \text{for } i = j \end{cases}; \quad (13)$$

که در آن،  $M(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^{N_x} (x_i - x_j)$  و  $j = 1, 2, \dots, N_x$  است. همچنین ضرایب وزن برای مشتق مرتبه‌ی دوم مطابق رابطه‌ی ۱۴ محاسبه می‌شوند:

$$[B_{ij}^x] = [A_{ij}^x][A_{ij}^x] = [A_{ij}^x]^T \quad (14)$$

جدول ۳. بسامد بی‌بُعد شده‌ی تیر مدرج هدفمند دو سر ساده به‌ازاء پارامترهای مختلف بستر ارتجاعی و نسبت طول به ضخامت ( $n = 1$ ).

$L/h$			$K_g$	$K_1$
۱۰۰	۵۰	۱۰		
۴,۰۶۹۲	۴,۰۶۷۱	۴,۰۰۲۶	۰	۰
۵,۷۸۱۶	۵,۷۷۹۸	۵,۷۲۳۶	۱۰	
۱۳,۶۱۰۴	۱۳,۶۰۸۲	۱۳,۵۴۲۸	۱۰ <sup>۲</sup>	
۵,۸۰۰۸	۵,۷۹۹۰	۵,۷۴۲۹	۰	۱۰ <sup>۲</sup>
۷,۱۰۷۶	۷,۱۰۵۸	۷,۰۵۱۲	۱۰	
۱۴,۲۲۴۴	۱۴,۲۲۲۲	۱۴,۱۵۵۱	۱۰ <sup>۲</sup>	
۴۱,۵۴۳۱	۴۱,۵۳۶۰	۴۱,۳۷۳۱	۰	۱۰ <sup>۴</sup>
۴۱,۷۴۳۸	۴۱,۷۳۸۵	۴۱,۵۷۴۹	۱۰	
۴۱,۵۴۴۳	۴۱,۵۱۸۸	۴۱,۳۴۸۲	۱۰ <sup>۲</sup>	

جدول ۴. بسامد بی‌بُعد شده‌ی تیر مدرج هدفمند یک سرگیردار و یک سر ساده به‌ازاء پارامترهای مختلف بستر ارتجاعی و نسبت طول به ضخامت ( $n = 1$ ).

$L/h$			$K_g$	$K_1$
۱۰۰	۵۰	۱۰		
۶,۲۹۸۲	۶,۲۹۰۷	۶,۰۶۵۱	۰	۰
۷,۶۹۲۵	۷,۶۸۵۲	۷,۴۶۷۳	۱۰	
۱۵,۰۸۴۴	۱۵,۰۷۳۰	۱۴,۷۶۵۹	۱۰ <sup>۲</sup>	
۷,۵۳۳۸	۷,۵۲۷۳	۷,۳۳۰۳	۰	۱۰ <sup>۲</sup>
۸,۷۳۳۰	۸,۷۲۶۳	۸,۵۲۷۲	۱۰	
۱۵,۶۴۰۶	۱۵,۶۲۹۵	۱۵,۳۲۹۵	۱۰ <sup>۲</sup>	
۴۱,۸۱۸۲	۴۱,۸۱۱۳	۴۱,۶۰۷۲	۰	۱۰ <sup>۴</sup>
۴۲,۰۵۰۸	۴۲,۰۴۳۸	۴۱,۸۳۸۷	۱۰	
۴۴,۰۰۷۳	۴۳,۹۹۸۳	۴۳,۷۴۸۹	۱۰ <sup>۲</sup>	

جدول ۵. بسامد بی‌بُعد شده‌ی تیر مدرج هدفمند دو سرگیردار به‌ازاء پارامترهای مختلف بستر ارتجاعی و نسبت‌های طول به ضخامت ( $n = 1$ ).

$L/h$			$K_g$	$K_1$
۱۰۰	۵۰	۱۰		
۹,۱۱۹۷	۹,۱۰۱۰	۸,۵۶۰۷	۰	۰
۱۰,۲۰۰۹	۱۰,۱۸۲۴	۹,۶۵۱۵	۱۰	
۱۶,۸۶۳۷	۱۶,۸۴۱۷	۱۶,۱۸۰۹	۱۰ <sup>۲</sup>	
۱۰,۰۱۳۰	۹,۹۹۵۷	۹,۴۹۹۶	۰	۱۰ <sup>۲</sup>
۱۱,۰۰۶۸	۱۰,۹۸۹۴	۱۰,۴۹۳۳	۱۰	
۱۷,۳۶۶۵	۱۷,۳۴۱۵	۱۶,۶۹۱۷	۱۰ <sup>۲</sup>	
۴۲,۳۳۵۰	۴۲,۳۲۴۹	۴۲,۰۵۲۸	۰	۱۰ <sup>۴</sup>
۴۲,۵۸۱۱	۴۲,۵۷۰۶	۴۲,۲۹۲۰	۱۰	
۴۴,۶۴۹۸	۴۴,۶۳۴۷	۴۴,۲۵۸۲	۱۰ <sup>۲</sup>	

مسئله در جدول ۱ بررسی شده است، که در آن چگالی و مدول کشسانی ماده در وجه بالایی تیر ۱۰ برابر وجه پایینی در نظر گرفته شده است.

مطابق نتایج به دست آمده از جدول ۱ مشخص است که به‌ازاء مقادیر مختلف لایه‌ی برشی بستر ارتجاعی، با افزایش تعداد نقاط مورد استفاده، روش ذکر شده با تغییر بسیار اندک به جواب همگرا شده است. همچنین نتایج به دست آمده با نظریه‌ی دوبُعدی مورد استفاده در پژوهش ینگ و همکاران (۲۰۰۸)<sup>[۸]</sup> همخوانی بسیار خوبی دارد و با توجه به نظریه‌ی دوبُعدی مورد استفاده در پژوهش آن‌ها، جواب‌های به دست آمده از روش دیرفرانسیل کوادرچر کمی بالاتر است و این موضوع می‌تواند صحت نتایج و دقت روش مورد استفاده در پژوهش حاضر را نشان دهد. آن‌ها با استفاده از سری‌ها، یک روش تحلیلی برای به دست آوردن بسامد تیر دو سر ساده ارائه کردند. همچنین همگرایی و پایداری روش دیرفرانسیل کوادرچر در سایر پژوهش‌ها نیز مشاهده شده است.<sup>[۱۷-۱۳,۱۱,۹,۱]</sup>

از این به بعد جهت بررسی مسئله، مقادیر مربوط به خصوصیات ماده در دو وجه فلز و سرامیک تیر مدرج هدفمند، همان‌گونه که در جدول ۲ ارائه شده، استفاده شده است. همچنین بسامد بی‌بُعد شده در نتایج به دست آمده به صورت  $\lambda = \omega \frac{L}{h} \sqrt{\frac{\rho_{mm}}{E_{mm}}}$  در نظر گرفته شده است. در جدول‌های ۳ الی ۵، بسامدهای بی‌بُعد شده‌ی تیرهای مدرج هدفمند با شرایط مرزی مختلف به‌ازاء مقادیر مختلف پارامترهای بی‌بُعد شده‌ی بستر ارتجاعی و نسبت‌های مختلف طول به ضخامت ارائه شده است.

همان‌گونه که در جدول ۳ قابل مشاهده است، با افزایش مقدار بی‌بُعد شده‌ی پارامترهای بستر ارتجاعی، مقدار بسامد بی‌بُعد شده افزایش یافته است. همچنین با افزایش مقدار پارامتر لایه‌ی خطی، مقدار لایه‌ی برشی تأثیر چندانی در بسامد بی‌بُعد شده‌ی تیر مدرج مورد نظر ندارد. همان‌گونه که از جدول ۴ مشاهده می‌شود، نسبت به جدول ۳، با افزایش میزان گیرداری تیر مدرج هدفمند مقدار بسامد بی‌بُعد شده افزایش یافته است.

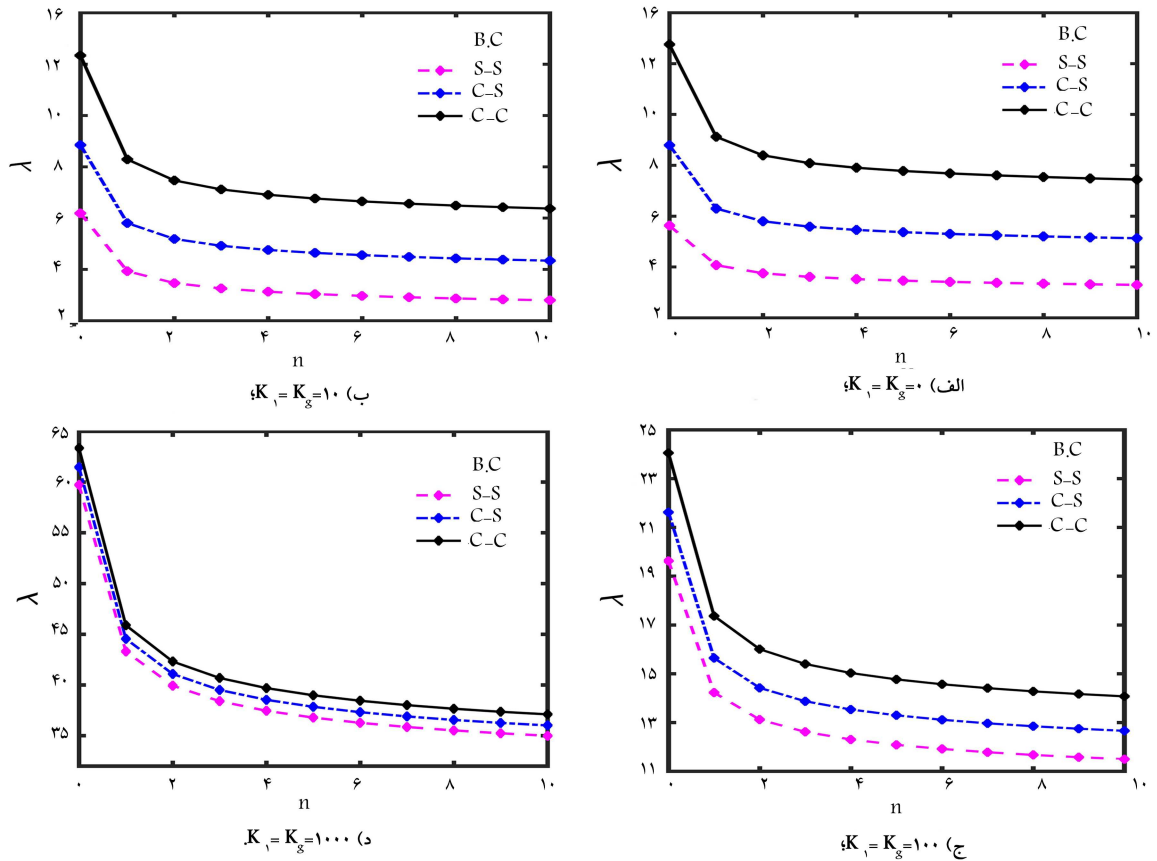
در جدول ۵، بسامدهای بی‌بُعد شده‌ی تیر مدرج هدفمند دو سرگیردار به‌ازاء پارامترهای بی‌بُعد شده و نسبت‌های طول به ضخامت مختلف مشاهده می‌شود، که مطابق آن با افزایش میزان گیرداری تیر در حالت دو سرگیردار نسبت به دو حالت دو سر ساده و یک سر ساده - یک سرگیردار، مقادیر بسامد به دست آمده افزایش یافته است.

جدول ۱. همگرایی بسامد بی‌بُعد شده‌ی  $\left( \lambda = \sqrt{\frac{\rho \omega^2 AL^2}{h^2 EI}} \right)$  به دست آمده‌ی تیر مدرج هدفمند دو سر ساده به‌ازاء  $L/h = 5$ ،  $K_1 = 10^2$  و  $n = 1$ .

$K_g$	$N_{\omega}$		
	۱۹	۱۱	۷
۳,۱۰۰۵	۳,۲۱۹۳	۳,۲۱۹۳	۳,۲۱۹۸
۳,۲۸۰۴	۳,۳۴۲۹	۳,۳۴۲۹	۳,۳۴۳۴
۳,۵۰۳۰	۳,۵۰۶۰	۳,۵۰۶۰	۳,۵۰۶۴

جدول ۲. خصوصیات مواد مدرج هدفمند مورد استفاده در پژوهش حاضر در وجوه مختلف تیر مدرج هدفمند.<sup>[۱۶]</sup>

خصوصیت	واحد	فلز	سرامیک
$E$	Gpa	۲۱۰	۳۹۰
$\rho$	kg/m <sup>۳</sup>	۷۸۰۰	۳۹۶۰
$\nu$	-	۰,۳۱	۰,۲۵



شکل ۲. تأثیر ضریب کسر حجمی در بسامد بی بعد شده تیرهای مدرج هدفمند به ازاء شرایط مرزی و پارامترهای بستر ارتجاعی مختلف  $L/h = 100$ .

جدول ۷. بسامد بی بعد شده تیر مدرج هدفمند یک سر گیردار و یک سر ساده به ازاء پارامترهای مختلف بستر ارتجاعی و نسبت های طول به ضخامت ( $n = 3$ ).

$L/h$			$K_g$	$K_1$
۱۰۰	۵۰	۱۰		
۶,۲۹۸۲	۶,۲۹۰۷	۶,۰۶۵۱	۰	۰
۶,۴۳۲۵	۶,۴۲۵۱	۶,۲۰۲۳	۱۰	
۷,۵۳۳۸	۷,۵۲۷۳	۷,۳۳۰۳	۱۰ <sup>۲</sup>	
۱۵,۰۸۴۴	۱۵,۰۷۳۰	۱۴,۷۶۵۹	۰	۱۰ <sup>۲</sup>
۱۵,۱۴۰۹	۱۵,۱۲۹۵	۱۴,۸۲۳۲	۱۰	
۱۵,۶۴۰۶	۱۵,۶۲۹۵	۱۵,۳۲۹۵	۱۰ <sup>۲</sup>	
۱۳,۰۸۹۹	۱۳,۰۸۲۴	۱۲,۹۶۳۴۸	۰	۱۰ <sup>۴</sup>
۱۳,۰۹۶۴	۱۳,۰۸۳۰۵	۱۲,۹۶۴۱۳	۱۰	
۱۳,۱,۱۵۵۰	۱۳,۰,۸۸۹۳	۱۲,۹,۷۰۰۰	۱۰ <sup>۲</sup>	

جدول ۶. بسامد بی بعد شده تیر مدرج هدفمند دو سر گیردار به ازاء پارامترهای مختلف بستر ارتجاعی و نسبت های طول به ضخامت ( $n = 3$ ).

$L/h$			$K_g$	$K_1$
۱۰۰	۵۰	۱۰		
۴,۰۶۹۲	۴,۰۶۷۱	۴,۰۰۲۶	۰	۰
۴,۲۷۴۰	۴,۲۷۲۰	۴,۲۰۹۱	۱۰	
۵,۸۰۰۸	۵,۷۹۹۰	۵,۷۴۲۹	۱۰ <sup>۲</sup>	
۱۳,۶۱۰۴	۱۳,۶۰۸۲	۱۳,۵۴۲۸	۰	۱۰ <sup>۲</sup>
۱۳,۶۷۳۰	۱۳,۶۷۰۹	۱۳,۶۰۵۳	۱۰	
۱۴,۲۲۴۴	۱۴,۲۲۲۲	۱۴,۱۵۵۱	۱۰ <sup>۲</sup>	
۱۲۹,۹۴۲۰	۱۲۹,۹۲۵۹	۱۲۹,۳۰۸۱	۰	۱۰ <sup>۴</sup>
۱۲۹,۹۴۸۵	۱۲۹,۹۳۲۵	۱۲۹,۳۱۴۶	۱۰	
۱۳۰,۰۰۷۷	۱۲۹,۹۹۱۶	۱۲۹,۳۷۳۳	۱۰ <sup>۲</sup>	

در تغییرات بسامد به دست آمده ندارد. همچنین در سه جدول اشاره شده، با افزایش نسبت طول به ضخامت، مقدار بسامد بی بعد شده نیز افزایش یافته است. مطابق جدول های ۳ الی ۸ مشخص است که ضریب کسر حجمی در بسامدهای اندازه گیری شده اثرگذار است. لذا در شکل ۲، به ازاء پارامترهای بستر ارتجاعی بی بعد شده و شرایط مرزی مختلف، اثر ضریب کسر حجمی در بسامد بی بعد به دست آمده ترسیم شده است. همان گونه که در شکل ۲ مشاهده می شود، با افزایش شرایط گیرداری تیر مدرج

در جدول های ۶ الی ۸، بسامدهای بی بعد شده تیرهای مدرج هدفمند با شرایط مرزی مختلف به ازاء مقادیر مختلف پارامترهای بی بعد شده بستر ارتجاعی و نسبت های مختلف طول به ضخامت ارائه شده اند. تفاوت سه جدول مذکور با جدول های قبلی در مقدار ضریب کسر حجمی است. نتایج به دست آمده از جدول های اخیر همانند نتایج قبلی به دست آمده، نشان دهنده این موضوع است که با افزایش میزان گیرداری تیر، مقدار بسامد بی بعد شده افزایش می یابد. همچنین با افزایش میزان پارامتر خطی بستر ارتجاعی، تغییرات لایه ی برشی بستر، اثر چندانی

جدول ۸. بسامد بی‌بُعد شده‌ی تیر مدرج هدفمند دو سرگیردار به‌ازاء پارامترهای مختلف بستر ارتجاعی و نسبت‌های طول به ضخامت ( $n = 3$ ).

$L/h$		$K_g$	$K_1$
۱۰۰	۵۰		
۹,۱۱۹۷	۹,۱۰۱۰	۸,۵۶۰۷	۰
۹,۲۱۲۹	۹,۱۹۴۴	۸,۶۵۹۲	۱۰
۱۰,۰۱۳۰	۹,۹۹۵۷	۹,۴۹۹۶	۱۰ <sup>۲</sup>
۱۶,۸۶۷۳	۱۶,۸۴۱۷	۱۶,۱۸۰۹	۰
۱۶,۹۱۷۸	۱۶,۸۹۲۳	۱۶,۲۳۳۳	۱۰
۱۷,۳۶۶۵	۱۷,۳۴۱۵	۱۶,۶۹۷۱	۱۰ <sup>۲</sup>
۱۳۲,۲۶۰۶	۱۳۱,۷۳۵۳	۱۲۹,۹۶۵۳	۰
۱۳۲,۲۶۷۰	۱۳۱,۷۴۱۸	۱۲۹,۹۷۱۸	۱۰
۱۳۲,۳۲۵۱	۱۳۱,۸۰۰۲	۱۳۰,۰۳۰۵	۱۰ <sup>۲</sup>

اندازه‌گیری شده افزایش یافته است. اما با افزایش میزان پارامترهای بستر ارتجاعی بی‌بُعد شده، تفاوت بسامدهای اندازه‌گیری شده به‌ازاء ضریب کاهش کسری یکسان کاهش یافته است، که این موضوع می‌تواند به دلیل افزایش سختی تیر واقع در بستر ارتجاعی دو پارامتری موردنظر باشد.

## ۵. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر، ارتعاش آزاد تیرهای مدرج هدفمند بر بستر ارتجاعی دو پارامتری بررسی شده است. معادله‌های حاکم بر ارتعاش تیرهای مدرج هدفمند با استفاده از نظریه‌ی برشی مرتبه‌ی اول به دست آمده و با استفاده از روش عددی نسبتاً نوین دیفرانسیل کوادریچر در بُعد مکان تجزیه شده‌اند. سپس معادله‌ها از بُعد زمان به بُعد بسامد انتقال و بسامد تیر موردنظر محاسبه شده است. همگرایی و دقت روش مورد استفاده در حل مسئله مشخص و آثار پارامترهای مختلف، همچون: شرایط مرزی، نسبت طول به ارتفاع، ضریب کاهش حجمی و پارامترهای بستر ارتجاعی در ارتعاش آزاد تیرهای مدرج هدفمند بررسی شده است. همچنین می‌توان نتیجه گرفت که بستر ارتجاعی، تأثیر قابل توجهی در بسامد تیرهای مدرج هدفمند دارد.

هدفمند از دو سر ساده به یک سر ساده - یک سرگیردار و در نهایت به دو سرگیردار، مقدار بسامد بی‌بُعد اندازه‌گیری شده افزایش یافته است. همچنین با افزایش میزان پارامترهای بی‌بُعد شده‌ی بستر ارتجاعی تیر مدرج هدفمند، میزان بسامدهای بی‌بُعد

## پانوشتها

1. Şimşek & Kocatürk
2. Pradhan & Chakraverty
3. Su & Banerjee
4. Lü
5. Wattanasakulpong
6. Ying

## منابع (References)

1. Vosoughi, A.R. "Thermal buckling analysis of functionally graded beams using differential quadrature method", *Civil Eng. Sharif*, **31-2**(2-4), pp. 127-132 (2015).
2. Şimşek, M. and Kocatürk, T. "Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load", *Compos. Struct*, **90**(4), pp. 465-473 (2009).
3. Pradhan, K.K. and Chakraverty, S. "Free vibration of euler and timoshenko functionally graded beams by rayleigh-ritz method", *Compos. Part B Eng*, **51**, pp. 175-184 (2013).
4. Su, H. and Banerjee, J.R. "Development of dynamic stiffness method for free vibration of functionally graded Timoshenko beams", *Comput. Struct*, **147**, pp. 107-116 (2015).
5. Lü, C.F., Chen, W.Q., Xu, R.Q. and et al. "Semi-analytical elasticity solutions for bi-directional functionally graded beams", *Int. J. Solids Struct*, **45**(1), pp. 258-275 (2008).
6. Sina S.A., Navazi, H.M. and Haddadpour, H. "An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams", *Mater. Des*, **30**(3), pp. 741-747 (2009).
7. Wattanasakulpong, N., Prusty, B.G., Kelly, D.W. and et al. "Free vibration analysis of layered functionally graded beams with experimental validation", *Mater. Des*, **36**, pp. 182-190 (2012).
8. Ying, J., Lü, C.F. and Chen, W.Q. "Two-dimensional elasticity solutions for functionally graded beams resting on elastic foundations", *Compos. Struct*, **84**(3), pp. 209-219 (2008).
9. Vosoughi, A.R. "Thermal postbuckling analysis of functionally graded Beams", *J. Therm. Stress*, **37**(4), pp. 532-544 (2014).
10. Yang, L. and Zhifei, S. "Free vibration of a functionally graded piezoelectric beam via state-space based differential quadrature", *Compos. Struct*, **87**, pp. 257-264 (2009).
11. Malekzadeh, P. and Vosoughi, A.R. "DQM large amplitude vibration of composite beams on nonlinear elastic foundations with restrained edges", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul*, **14**(3), pp. 906-915 (2009).
12. Wang, X., Liang, X. and Jin, C. "Accurate dynamic analysis of functionally graded beams under a moving point load", *Mech. Base. Des. Struct. Mach*, **45**(1), pp. 76-91 (2017).
13. Vosoughi, A.R., Malekzadeh, P. and Roosta, H.R. "A hybrid numerical method for trade-off optimal relation between mass and fundamental natural frequency of moderately thick laminated composite beams", *Mater. Today Commun*, **16**, pp. 42-55 (2018).

14. Darabi, A. and Vosoughi, A.R. "A hybrid inverse method for small scale parameter estimation of FG nanobeams", *Steel Compos. Struct*, **20**(5), pp. 1119-1131 (2016).
15. Khalili, A. and Vosoughi, A.R. "An approach for the Pasternak elastic foundation parameters estimation of beams using simulated frequencies", *Inv. Prob. Sci. Eng*, **26**(8), pp. 1079-1093 (2018).
16. Khalili, A. "Elastic foundation parameters estimation of functionally graded beams using measured frequencies", M.Sc. Thesis, Shiraz University (2015).
17. Vosoughi, A.R., Anjabin, N. and Amiri, S.M. "Thermal post-buckling analysis of moderately thick nanobeams", *IJST, Transac. Civil Eng*, **42**(1), pp. 33-38 (2018).