

طراحی جبران‌کننده پیش‌بین در کنترل سیستم‌های دارای

محدودیت روی ورودی

محمد حائری (دانشیار)

نیما اعلم (کارشناس ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف

وجود محدودیت‌های مختلف روی ورودی سیستم‌های صنعتی، نکته‌ی مهمی است که در کنترل این‌گونه سیستم‌ها باید به آن توجه کرد. در بین روش‌های مختلفی که برای مواجهه با این مسئله وجود دارد، روش جبران‌سازی در سال‌های اخیر مورد توجه تعدادی از محققان قرار گرفته است. در مطالعه‌ی حاضر از مفاهیم اساسی کنترل پیش‌بین در بررسی و طراحی جبران‌کننده بهره گرفته و عملکرد آن با روش‌های موجود مقایسه شده است.

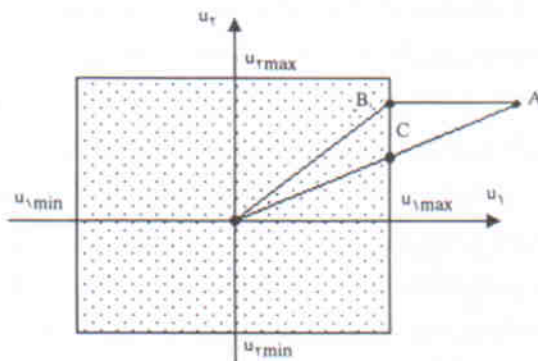
مقدمه

به عبارت دیگر از تابع اشباع استفاده می‌شود تا ورودی قابل اعمال به سیستم به دست آید. برای سیستمی با ورودی u که لازم است بین u_{\min} و u_{\max} محدود باشد، تابع اشباع به صورت رابطه‌ی ۱ عمل می‌کند.

$$u = \text{sat}(v) = \begin{cases} u_{\min}, & v < u_{\min} \\ v, & u_{\min} \leq v \leq u_{\max} \\ u_{\max}, & v > u_{\max} \end{cases} \quad (1)$$

که در آن v خروجی کنترل‌کننده است.

در روش دوم جهت بردار خروجی کنترل‌کننده حفظ شده و در ضمن ورودی سیستم در محدوده‌ی مجاز قرار می‌گیرد. برای یک سیستم چند ورودی - چند خروجی رابطه‌ی بین v و u در روش «حفظ جهت ورودی» با معادله‌ی ۲ بیان می‌شود. در شکل ۲ پاسخ این دوروش برای حالت خاصی از خروجی کنترل‌کننده نمایش داده شده است.



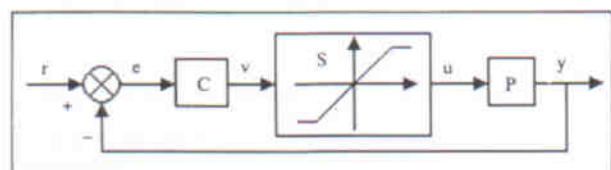
شکل ۲. روش اشباع و حفظ جهت ورودی.

اغلب سیستم‌های تحت کنترل با مسئله‌ی محدودیت روی دامنه و یا نرخ تغییرات ورودی مواجه‌اند. شکل ۱ سیستم کنترلی حلقه‌بسته‌ی را نشان می‌دهد که در آن P و C به ترتیب سیستم تحت کنترل و کنترل‌کننده‌اند. واحد S نیز بیانگر وجود محدودیت روی ورودی سیستم است. اگر خروجی کنترل‌کننده از محدوده‌ی قابل اعمال به سیستم خارج شود، پاسخ به این سؤال که «چگونه می‌توان این ورودی را قابل اعمال به سیستم کرد؟» اهمیت زیادی خواهد یافت. در حقیقت جواب‌های متنوعی برای این پرسش وجود دارد و اغلب تحقیقات موجود در این زمینه روی سیستم‌های چند ورودی - چند خروجی متمرکز بوده است.^[۱]

برخی از روش‌های مطرح شده عبارت‌اند از:

۱. اشباع یا برش^۱
۲. حفظ جهت ورودی^۲
۳. جبران‌سازی^۳ [۳ و ۲]

در روش اول، در صورتی که خروجی کنترل‌کننده خارج از محدوده‌ی مجاز باشد، آن را برابر مقدار مرزی قرار می‌دهند.



شکل ۱. نمودار سیستم کنترلی حلقه‌بسته با عنصر اشباع.

$$P(s) = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & \dots & P_{1m}(s) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ P_{m1}(s) & \dots & P_{mm}(s) \end{bmatrix},$$

$$G(z) = \begin{bmatrix} G_{11}(z) & \dots & G_{1m}(z) \\ \vdots & \dots & \vdots \\ G_{m1}(z) & \dots & G_{mm}(z) \end{bmatrix} \quad (3)$$

که در آن $G_{ij}(z)$ و $i, j = 1, 2, \dots, m$ به صورت زیر است:

$$G_{ij}(z) = \frac{b_{1ij}z^{-1} + \dots + b_{n_b ij}z^{-n_b}}{1 + a_{1ij}z^{-1} + \dots + a_{n_a ij}z^{-n_a}} \quad (4)$$

و برای خروجی k ام داریم:

$$y_k(t+1) = \sum_{j=1}^m b_{kij} u_j(t) + f_k \quad (5)$$

که در آن t زمان حال و $t+1$ زمان نمونه برداری بعدی است و f_k یک ترکیب خطی از خروجی‌های حال و گذشته و ورودی‌های گذشته است. در شکل برداری داریم:

$$y = C_d u + f \quad (6)$$

که در آن:

$$y = \begin{bmatrix} y_1(t+1) \\ \vdots \\ y_m(t+1) \end{bmatrix}, u = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, C_d = \begin{bmatrix} b_{111} & \dots & b_{11m} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ b_{1m1} & \dots & b_{1mm} \end{bmatrix},$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \quad (7)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود C_d بیانگر رفتار خروجی سیستم در زمان بعدی، در پاسخ به ورودی زمان حال است. در این مقطع یادآوری دو نکته ضروری است:

۱. نزدیک‌ترین زمان آتی که در آن خروجی قابل محاسبه است لحظه $t+1$ است.

۲. اگر عناصر غیرقطر اصلی $P(s)$ تأخیری نداشته باشند، C_d غیرقطری خواهد بود.

ماتریس C_d را «ماتریس مشخصه‌ی گسسته‌ی سیستم» می‌نامند.

جهت‌دار بودن یک سیستم چند ورودی - چند خروجی
در صورتی استفاده از جبران‌کننده نتیجه‌بخش است که سیستم خاصیت جهت‌دار بودن از خود نشان دهد. برای بررسی جهت‌دار

$$u_j = v_j \text{Min} \left\{ \frac{\text{Sat}(v_i)}{v_i} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (2)$$

در روش سوم برخلاف روش دوم جهت خروجی کنترل‌کننده حفظ نمی‌شود، بلکه با استفاده از یک ماتریس خاص طوری عوض می‌شود که در ضمن قرار دادن ورودی در محدوده‌ی مجاز، پاسخ حلقه‌بسته را تا حد امکان به پاسخ بدون محدودیت نزدیک کند. این ماتریس خاص که «ماتریس مشخصه‌ی سیستم» نامیده می‌شود، نشانگر رفتار سیستم در لحظات اولیه‌ی پاسخ آن به تغییرات ورودی است.^{[۳] و [۴]} این ماتریس فقط برای سیستم‌های پیوسته MIMO که دارای تأخیر نیستند تعریف شده و برای سیستم‌های غیرحداقل فاز (NMP) مفهوم نادرستی دارد.

در سیستم‌های پیوسته SISO از هر سه روش فوق پاسخ یکسانی حاصل می‌شود. به عبارت دیگر ماتریس مشخصه برای یک سیستم پیوسته SISO تبدیل به یک عدد می‌شود که فقط اندازه‌ی u را عوض می‌کند و تغییر جهت در آن بی‌معنی است.

در نوشتار حاضر با تعریف جدیدی از ماتریس مشخصه، ضمن بهره‌گیری از مزیت تغییر جهت بردار خروجی کنترل‌کننده، کاربرد مفهوم فوق به سیستم‌های SISO، سیستم‌های تأخیردار و حتی سیستم‌های NMP نیز تعمیم داده شده است. برای این منظور از ایده‌ی کنترل‌کننده پیش‌بین بهره‌گرفته شده است.

در بخش‌های بعدی این نوشتار نحوه‌ی تعیین ماتریس مشخصه و اثر کاربرد آن در طراحی جبران‌کننده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

ماتریس مشخصه‌ی گسسته

چنان‌که اشاره شد پاسخ جبران‌کننده طوری تعیین می‌شود که خروجی سیستم تا حد ممکن به پاسخ آن بدون اعمال محدودیت نزدیک باشد.

حل این مسئله با بهینه‌سازی محدودیت‌دار یک تابع هدف تعریف شده امکان‌پذیر است. لازمی این امر استفاده از سیستم‌های گسسته است، که در این صورت به نظر می‌رسد تعریف ماتریس مشخصه در حوزه‌ی گسسته مؤثرتر باشد. اثر استفاده از این تعریف در نتایج شبیه‌سازی‌های انجام گرفته مؤید نظر فوق است. برای تعیین ماتریس مشخصه‌ی گسسته چنین عمل می‌کنیم:

یک سیستم چند ورودی - چند خروجی خطی نامتغیر با زمان را در نظر بگیرید که توسط یک کنترل‌کننده‌ی گسسته کنترل می‌شود. اگر $P(s)$ ماتریس تابع تبدیل این سیستم در حوزه s و $G(z)$ معادل گسسته آن در حوزه z باشد برای این سیستم خواهیم داشت:

را در نظر بگیرید که دارای ورودی u و خروجی y است. برای این سیستم داریم:

$$\begin{aligned} y(t+1) &= \sum_{i=0}^{\infty} g_i \Delta u(t-i) \\ y(t+2) &= \sum_{i=1}^{\infty} g_i \Delta u(t+1-i) \\ &\vdots \\ y(t+P) &= \sum_{i=P-1}^{\infty} g_i \Delta u(t+P-1-i) \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن g_i ، i امین نمونه پاسخ پله واحد سیستم است. $y(t+j)$ معرف خروجی سیستم در j امین لحظه‌ی آتی با فرض $\Delta u(t+i)=0, i>0$ است. معادلات ۱۱ را می‌توان به صورت معادلات ۱۲ نیز بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} y(t+1) &= g_1 \Delta u(t) + f_1 \\ y(t+2) &= g_2 \Delta u(t) + f_2 \\ &\vdots \\ y(t+P) &= g_P \Delta u(t) + f_P \end{aligned} \quad (12)$$

که در آن f_i ترکیب خطی خروجی‌های حال و گذشته و ورودی‌های گذشته است، و P را نیز افق پیش‌بینی می‌نامند. می‌توان معادلات ۱۲ را به صورت برداری نوشت:

$$y = g \Delta u(t) + f \quad (13)$$

که در آن:

$$y = \begin{bmatrix} y(t+1) \\ \vdots \\ y(t+P) \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_P \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{P-1} \end{bmatrix} \quad (14)$$

برای سیستم‌های چند ورودی - چند خروجی نیز می‌توان رابطه‌ی مشابهی به دست آورد:

$$y = G \Delta u + f \quad (15)$$

که در آن:

$$y = [y_1^T \dots y_m^T]^T, \quad y_i = [y_i(t+1) \dots y_i(t+P)]^T, \quad i=1, 2, \dots, m$$

$$f = [f_1^T \dots f_m^T]^T, \quad f_i = [f_{i1} \dots f_{iP}]^T$$

$$\Delta u = [\Delta u_1(t) \dots \Delta u_m(t)]^T$$

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_m \end{bmatrix}, \quad G_i = [g_{i1} \dots g_{im}], \quad g_j = \begin{bmatrix} g_{1j} \\ \vdots \\ g_{P-1j} \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (16)$$

بودن یک سیستم و ارتباط آن با ماتریس مشخصه، تعریف این مفهوم ضروری است.

فرض کنید که یک سیستم چند ورودی - چند خروجی تحت کنترل یک کنترل‌کننده‌ی گسسته است و روی ورودی‌های آن محدودیت وجود دارد (شکل ۱). اگر خروجی کنترل‌کننده (v) خارج از محدوده‌ی مجاز باشد، اشباع می‌تواند یک ورودی قابل اعمال ایجاد کند. فرض کنید u_s ورودی اشباع شده و y_s خروجی‌های متناظر با v و u_s باشند (البته با فرض این که بتوان v را به سیستم اعمال کرد). با توجه به رابطه‌ی ۶ داریم:

$$\begin{aligned} y &= C_d v + f \\ y_s &= C_d u_s + f \end{aligned} \quad (8)$$

و در نتیجه:

$$\|y - y_s\|^T = (v - u_s) C_d^T C_d (v - u_s) \quad (9)$$

حال اگر C_d قطری باشد آنگاه:

$$\|y - y_s\|^T = \sum_{i=1}^m [C_{d_i} (v_i - u_{s_i})]^2 \quad (10)$$

که در آن v_i و u_{s_i} ، به ترتیب i امین ورودی بدون محدودیت و اشباع شده‌اند و C_{d_i} ، i امین درایه روی قطر اصلی C_d است. واضح است که قطری بودن C_d باعث می‌شود که کم‌ترین فاصله بین v و u_s متناظر با کم‌ترین فاصله‌ی y و y_s باشد. به عبارت بهتر اگر ماتریس مشخصه‌ی گسسته‌ی سیستم قطری باشد، اشباع بهترین راه اعمال ورودی غیرمجاز به سیستم است. حال اگر ماتریس C_d قطری نباشد، اشباع لزوماً بهترین راه حل نیست و این امکان وجود دارد که بتوان ورودی (ورودی‌های) مجاز دیگری پیدا کرد تا حتی الامکان کارایی سیستم حلقه‌بسته نسبت به حالت بدون محدودیت حفظ شود. دلیل این ادعا وجود ترکیب خطی ورودی‌های سیستم در معادله‌ی ۹ است. حال می‌توان جهت‌دار بودن یک سیستم را تعریف کرد. گفته می‌شود که یک سیستم چند ورودی - چند خروجی جهت‌دار است یا خاصیت جهت‌دار بودن را از خود نشان می‌دهد، اگر و فقط اگر ماتریس مشخصه‌ی گسسته‌ی آن قطری نباشد. هدف اصلی این نوشتار، معرفی واحدی است که بعد از کنترل‌کننده قرار می‌گیرد و وظیفه‌ی آن حفظ حداکثر کارایی سیستم در صورت وجود محدودیت روی ورودی سیستم، در مقایسه با حالت بدون محدودیت است. این واحد را «جبران‌کننده پیش‌بین» می‌نامیم.

مقدمات ریاضی

یک سیستم تک ورودی - تک خروجی خطی نامتغیر با زمان گسسته

در این معادلات نشان‌دهنده‌ی اندیس خروجی و نشان‌دهنده‌ی اندیس ورودی است.

با توجه به مطالب گفته شده در مورد ماتریس مشخصه‌ی گسسته و تعریف مفهوم جهت‌دار بودن یک سیستم، طراحی جبران‌کننده‌ی پیش‌بین با استفاده از معادلات داده شده در این بخش انجام می‌گیرد.

جبران‌کننده‌ی پیش‌بین

برای درک بهتر مسئله به شکل ۳ توجه کنید. در این شکل واحد PC بیانگر جبران‌کننده‌ی پیش‌بین است که بعد از کنترل‌کننده قرار گرفته است. خروجی کنترل‌کننده و S می‌بین محدودیت‌های روی ورودی است. PC خروجی کنترل‌کننده را دریافت می‌کند، و اگر خروجی در محدوده‌ی مجاز بود آن را بدون تغییر از خود عبور می‌دهد و اگر خارج از محدوده‌ی مجاز بود، u_c را طوری می‌یابد که خروجی سیستم کم‌ترین تغییر را نسبت به حالت بدون محدودیت داشته باشد. محدودیت‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{cases} u_{i_{min}} \leq u_i(t) \leq u_{i_{max}} \\ \Delta u_{i_{min}} \leq \Delta u_i(t) \leq \Delta u_{i_{max}} \end{cases}, i=1,2,\dots,m \quad (17)$$

که در آن Δu_i بیان‌کننده‌ی تغییرات در ورودی i ام است.

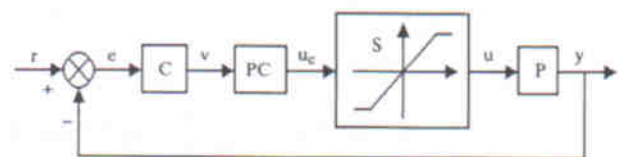
$$\Delta u_i(t) = u_i(t) - u_i(t-1)$$

با توجه به این رابطه محدودیت‌ها را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

$$\begin{aligned} \Delta_{i_{min}} &\leq \Delta u_i(t) \leq \Delta_{i_{max}} \\ \Delta_{i_{min}} &= \text{Max}(\Delta u_{i_{min}}, u_{i_{min}} - u_i(t-1)) \\ \Delta_{i_{max}} &= \text{Min}(\Delta u_{i_{max}}, u_{i_{max}} - u_i(t-1)) \end{aligned} \quad (18)$$

فرض کنید y و y_c خروجی‌های پیش‌بینی شده‌ی آینده متناظر با u و v باشند (u در محدوده‌ی مجاز و v خارج از محدوده مجاز است). حال تابع هزینه (رابطه‌ی ۱۹) را تعریف می‌کنیم:

$$J = (y - y_c)^T Q (y - y_c) \quad (19)$$



شکل ۳. جبران‌کننده‌ی پیش‌بین در کنترل حلقه بسته.

به طوری که:

$$y = G\Delta u + f$$

$$y_c = G\Delta v + f$$

$$Q = \text{diag}\{q_i\} \quad (20)$$

که در آن q_i ها اعداد مثبت مخالف صفراند. کمینه‌سازی J تحت محدودیت‌های موجود روی ورودی منجر به پیدایش یک ورودی قابل اعمال به سیستم می‌شود که کم‌ترین اختلاف بین y و y_c را سبب می‌شود. با جایگذاری معادله‌های y و y_c از رابطه‌ی ۲۰ داریم:

$$J = (\Delta u - \Delta v)^T G^T Q G (\Delta u - \Delta v) \quad (21)$$

کمینه‌سازی J در رابطه‌ی ۲۱، در کنار محدودیت‌های مشخص شده، وظیفه‌ی اصلی جبران‌کننده‌ی پیش‌بین است؛ یعنی:

$$\begin{aligned} \Delta u_c = \arg \text{Min}_{\Delta u} (J) \\ \text{subj. to constraints} \end{aligned} \quad (22)$$

بدیهی است که u_c بدون تغییر از واحد S عبور می‌کند چرا که در محدوده‌ی مجاز قرار دارد. حال دقیق‌تر به مسئله نگاه می‌کنیم. ماتریس A و B را به صورت رابطه‌ی ۲۳ تعریف می‌کنیم:

$$B = G^T Q G, A = \sqrt{Q} G \Rightarrow B = A^T A \quad (23)$$

که در آن \sqrt{Q} ماتریسی قطری است که درایه‌های آن جذر درایه‌های روی قطر Q است. به این قضیه توجه کنید:

قضیه. ماتریس $R = H^T H$ همیشه مثبت نیمه‌معین است مگر در حالتی که ستون‌های H مستقل خطی باشند که در آن صورت R مثبت معین خواهد بود.^[۴]

با توجه به این قضیه، ملاحظه می‌شود که B مثبت معین است چرا که ستون‌های ماتریس $A = \sqrt{Q} G$ مربوط به یک سیستم، همواره مستقل است.

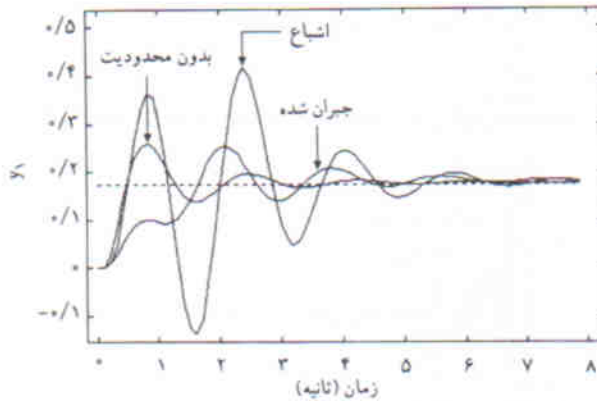
حال به رابطه‌ی $J = x^T B x$ توجه کنید که در آن x یک بردار $m \times 1$ است. این رابطه نماینده‌ی یک بیضی‌گون در فضای m بعدی است اگر و فقط اگر B مثبت معین باشد.^[۴] محورهای این بیضی‌گون‌ها در راستای بردارهای ویژه ماتریس B قرار دارند و قطر کوچک این بیضی‌گون‌ها در راستای بردار ویژه متناظر با بزرگ‌ترین مقدار ویژه و قطر بزرگ آن در راستای بردار ویژه متناظر با کوچک‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس B است.

در شکل ۴ کانتورهای تابع هزینه جبران‌کننده‌ی پیش‌بین برای یک سیستم دو ورودی - دو خروجی با B غیر قطری رسم شده‌اند. نقطه‌ی a ورودی خارج از محدوده‌ی مجاز، نقطه‌ی b جواب جبران‌کننده، و نقطه‌ی c حاصل از اشباع است.

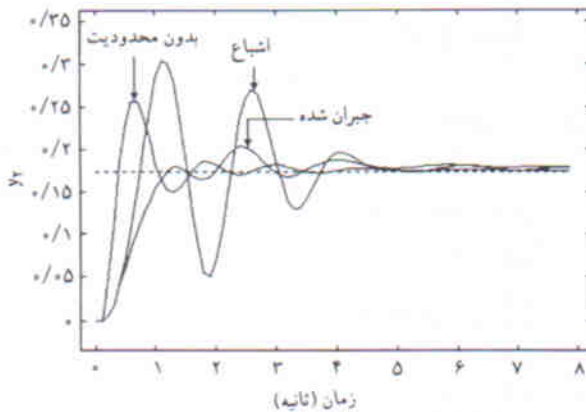
برای طراحی جبران‌کننده‌ی پیش‌بین از افق پیش‌بینی $P=2$ استفاده می‌کنیم که در این صورت داریم:

$$B = \begin{bmatrix} 0/127 & 0/0178 \\ 0/0178 & 0/012 \end{bmatrix}$$

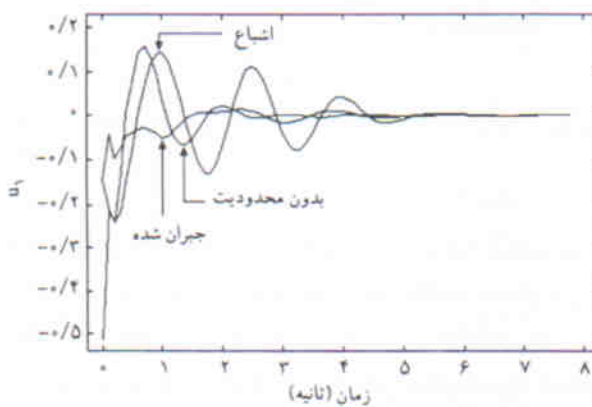
چنان‌که ملاحظه می‌شود B غیر قطری است و بنابراین انتظار می‌رود سیستم از خود خاصیت جهت‌دار بودن نشان دهد. شکل‌های ۵ تا ۱۰



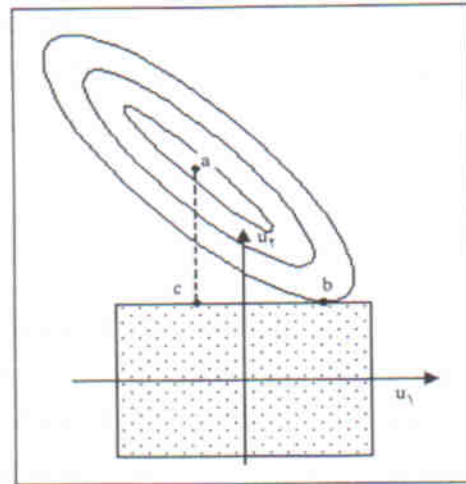
شکل ۵. خروجی اول در حالت‌های تحت محدودیت و بدون محدودیت.



شکل ۶. خروجی دوم در حالت‌های تحت محدودیت و بدون محدودیت.



شکل ۷. ورودی اول در حالت‌های تحت محدودیت و بدون محدودیت.



شکل ۸. کانتورهای تابع هزینه و نتایج اشباع و جبران‌کننده.

شبیه‌سازی

در این قسمت دینامیک هواپیمای F-8 را در نظر می‌گیریم: [5]

$$\begin{cases} \dot{x} = Dx + Ku \\ y = Kx \end{cases}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_c \\ \delta_f \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \alpha \end{bmatrix} \quad (24)$$

که در آن δ_c زاویه‌ی بالابر، δ_f زاویه‌ی شهپر، θ زاویه‌ی فراز و α زاویه‌ی حمله‌اند. ماتریس‌های سیستم به صورت زیر داده شده‌اند:

$$D = \begin{bmatrix} -0/8 & -0/006 & 0/12 & 0 \\ 0 & -0/014 & -16/64 & -32/2 \\ 1 & -0/001 & -1/5 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} -19 & -3 \\ -0/66 & -0/5 \\ -0/16 & -0/5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

برای کنترل این سیستم از یک کنترل‌کننده‌ی PID که بر مبنای روش LQG/LTR طراحی شده استفاده شده است. [6] هدف رساندن خروجی‌های سیستم به مقادیر $y_{sp1} = y_{sp2} = 0/1754$ (rad) است. زمان نمونه‌برداری $T = 0/1$ (s) منظور و محدودیت‌های زیر در محاسبات در نظر گرفته شده‌اند.

$$\begin{cases} -0/4363 \text{ rad} \leq u_1(t) \leq 0/4363 \text{ rad} \\ -0/1454 \text{ rad/s} \leq \Delta u_1(t) \leq 0/1454 \text{ rad/s} \\ -0/4363 \text{ rad} \leq u_2(t) \leq 0/4363 \text{ rad} \\ -0/1454 \text{ rad/s} \leq \Delta u_2(t) \leq 0/1454 \text{ rad/s} \end{cases} \quad (26)$$

در حالت استفاده از جبران‌کننده است. برای بررسی دقیق‌تر این مسئله پارامتر σ را به صورت رابطه‌ی ۲۷ تعریف می‌کنیم:

$$\sigma = \frac{\sum_{i=1}^n (u_{c1}^T(i) + u_{c2}^T(i))}{\sum_{i=1}^n (u_{s1}^T(i) + u_{s2}^T(i))} \quad (27)$$

که در آن اندیس‌های c و s نشان‌دهنده‌ی استفاده از جبران‌کننده و اشباع‌اند. n مدت زمانی است که خروجی‌های سیستم بعد از اعمال پله به حالت ماندگار خود می‌رسند. در این سیستم $\sigma = 0.525$ است که نشان می‌دهد در صورت استفاده از جبران‌کننده، مصرف انرژی تقریباً برابر نصف حالت استفاده از اشباع خواهد بود. در مبحث بعدی به مفهوم میزان جهت‌دار بودن یک سیستم می‌پردازیم.

میزان جهت‌دار بودن

در بخش‌های قبلی به مفهوم جهت‌دار بودن به صورت یک پدیده‌ی دودویی اشاره شد. به عبارت بهتر قطری بودن یا نبودن ماتریس مشخصه‌ی گسسته بیانگر آن است که یک سیستم جهت‌دار است یا خیر. در این قسمت سعی خواهیم کرد که با تعریف یک پارامتر جدید، میزان جهت‌دار بودن سیستم را بیان کنیم. با داشتن چنین پارامتری می‌توان در مورد میزان سودمند بودن طراحی جبران‌کننده‌ی پیش‌بین نظر داد.

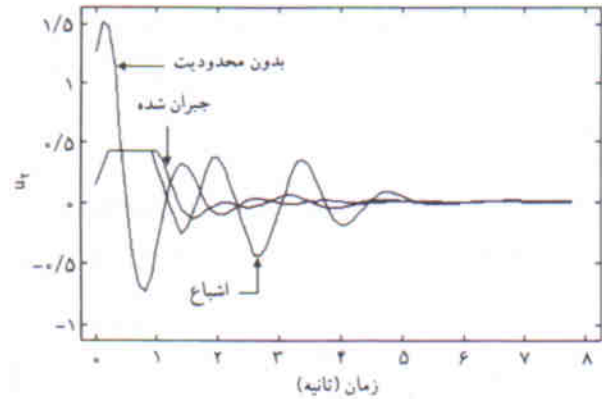
توجه کنید که شکل ماتریس B در تابع هزینه‌ی جبران‌کننده‌ی پیش‌بین ایفاگر نقش مهمی است. به عبارت دیگر اگر این ماتریس قطری باشد، جواب اشباع و جبران‌کننده یکسان خواهد بود و سیستم جهت‌دار نیست. حال اگر B غیرقطری باشد کانتورهای تابع هزینه، بیضی‌گون‌هایی است که نسبت به محورهای مختصات مایل خواهند بود. توجه کنید که برای ماتریس B قطری، محورهای این بیضی‌گون‌ها به موازات محورهای مختصات‌اند. حال اگر ν_j زامین بردار ویژه‌ی ماتریس B باشد (با توجه به متقارن بودن B می‌توان بردارهای ویژه‌ی متعامد بهنجار به دست آورد) آنگاه داریم:

$$C = [\cos(\theta_{ij})] \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,m \quad (28)$$

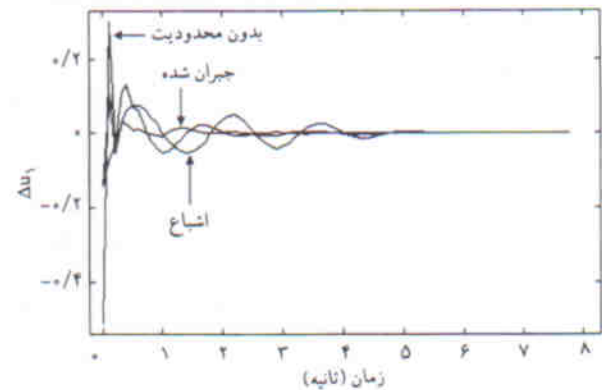
که در آن θ_{ij} زاویه‌ی بردار ویژه‌ی λ_{ij} با i مین محور مختصات است. حال با توجه به: $\sum_{i=1}^m \cos^2(\theta_{ij}) = 1$ می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\text{Min}(\theta_{ij}) < \cos^{-1}(\sqrt{1/m}) \quad (29)$$

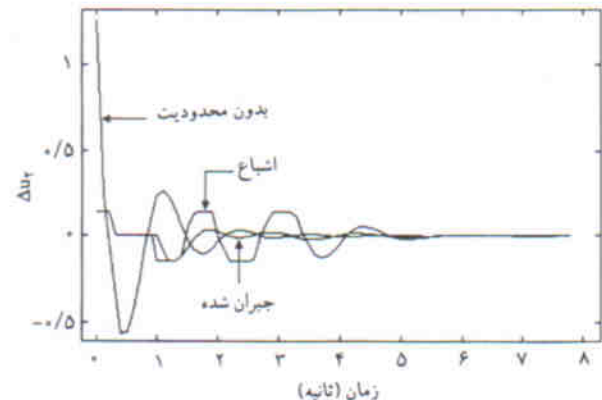
حال پارامتر d_n را به صورت رابطه‌ی ۳۰ تعریف می‌کنیم:



شکل ۸. ورودی دوم در حالت‌های تحت محدودیت و بدون محدودیت.



شکل ۹. تغییرات ورودی اول در حالت‌های تحت محدودیت و بدون محدودیت.



شکل ۱۰. تغییرات ورودی دوم در حالت‌های تحت محدودیت و بدون محدودیت.

نشانگر نتایج شبیه‌سازی‌اند. همان‌طور که در شکل‌های ۵ و ۶ ملاحظه می‌کنید برخلاف عملکرد خوب جبران‌کننده، اشباع سبب رفتار بسیار نامطلوبی در خروجی می‌شود. ورودی‌های سیستم و نرخ تغییرات آنها در شکل‌های ۷ تا ۱۰ قابل ملاحظه‌اند. نکته‌ی دیگری که حائز اهمیت است، مصرف کمتر انرژی برای کنترل سیستم

و به عبارت بهتر افزایش افق پیش‌بینی در جبران‌کننده‌ی پیش‌بین نه تنها حجم محاسبات را افزایش می‌دهد، بلکه باعث تنزل کارایی جبران‌کننده هم می‌شود. البته یادآوری می‌شود که رفتار d_a برای سیستم‌های مختلف متفاوت خواهد بود.

نتیجه‌گیری

در این نوشتار به چند نکته‌ی مهم اشاره شد که می‌توان آنها را چنین خلاصه کرد:

- تمام سیستم‌های MIMO بدون تأخیر تحت کنترل گسسته، جهت دارند.
- سیستم‌های پیوسته‌ی MIMO با ماتریس مشخصه‌ی قطری^[۱]، ماتریس مشخصه‌ی گسسته‌ی غیرقطری دارند. به عبارت دیگر بر عکس نظریات مطرح شده^[۲] می‌توان با استفاده از جبران‌کننده‌ی پیش‌بین پاسخ مناسب‌تری به دست آورد.
- در صورت استفاده از جبران‌کننده، میزان مصرف انرژی برای کنترل سیستم نسبت به حالت استفاده از اشباع کاهش می‌یابد.
- مفهوم جدید «میزان جهت‌دار بودن» کمک می‌کند تا طراح دیدگاه بهتری نسبت به لزوم و چگونگی استفاده از جبران‌کننده پیش‌بین داشته باشد.

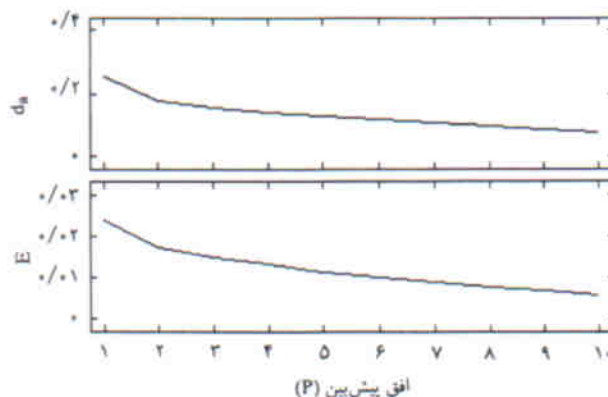
بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که در بسیاری از سیستم‌های صنعتی، خصوصاً آن دسته از سیستم‌هایی که دینامیک کند دارند (مثل سیستم‌های شیمیایی)، جبران‌کننده‌ی پیش‌بین می‌تواند از اهمیت ویژه‌ی برخوردار باشد. در صورتی که از کنترل‌کننده‌های پیش‌بین استفاده شود^[۱]، حتی برای سیستم‌های SISO نیز جبران‌کننده پیش‌بین در مقایسه با روش‌های موجود پاسخ بهتری می‌دهد.

پانوش

- saturation
- direction prservation
- compensator

منابع

- Park, J.K. and Choi, C.H., "Dynamic compensation method for multivariable control systems with saturating actuators", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, **40** (9), 1635 (1995).
- Soroush, M., "Windup and directionality compensation in nonlinear model-based control", NATO ASI Conference on Nonlinear Model - Based Process Control, Turkey (1997).
- Soroush, M. and Valluri, S., "Calculation of optimal feasible



شکل ۱۱. نمودار تغییرات d_a و E برحسب P .

$$d_a = \frac{\lambda_{\max} - \lambda_{\min}}{\lambda_{\max} m \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{m}} \right)} \sum_{i=1}^m \text{Min}_j(\theta_{ij}) \Rightarrow 0 \leq d_a < 1 \quad (30)$$

که در آن، λ مقدار ویژه ماتریس B ، d_a معیاری است که می‌تواند نشان‌دهنده‌ی میزان جهت‌دار بودن یک سیستم باشد. اکنون برای امتحان این معیار، پارامتر دیگری را که بیانگر تفاوت عملکرد جبران‌کننده و اشباع باشد به صورت رابطه‌ی ۳۱ تعریف می‌کنیم:

$$E = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_{cj}(i) - y_{sj}(i))^2} \quad (31)$$

که در آن m تعداد ورودی‌ها و خروجی‌هاست، و y_{sj} و y_{cj} نیز خروجی‌های متناظر با جبران‌کننده و اشباع است. شکل ۱۱ نمودارهای E و d_a سیستم شبیه‌سازی را برحسب افق پیش‌بینی P نشان می‌دهد. نکته‌ی جالب توجه این است که در این سیستم با افزایش افق پیش‌بینی میزان جهت‌دار بودن سیستم کاهش پیدا می‌کند

controller output in multivariable proceses, with input constraints", *Proc. of ACC*, 3475 (1997).

- Strang, G., "Linear algebra and it's applications", Harcourt Brace Javanovich, San Diego, (1988).
- Kapasouris, P., Athans, M. and Stein, G., "Design of feedback control systems for stable plants with saturating actuators", *Proc. of 27th IEEE Conf. On Decision and Control*, **1**, pp 469-479 (1988).
- Doyle, J.C. and Stein, G., "Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis", *IEEE Trans. Auto. Contr.*, Vol. **AC-26**, (1) pp 4-16 (1981).
- Camacho, E.F. and Bordons, C., "Model predictive control in the process industry", Springer, London (1995).