

بررسی مقایسه‌ی شرایط ماتریس سختی در روش‌های آنالیز اجزای محدود با المان ویژه، اجزای محدود توسعه یافته و روش آنالیز ایزوژنومتریک در مسئله‌ی شکست

عبدالغفور خادم‌الرسول* (استادیار)

زهرا حاتم‌پور (دانشجوی کارشناسی ارشد)

مسعود اولی‌پور (استادیار)

سیدعنایت‌اله علوی (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه شهید چمران اهواز

مهندسی عمران شریف، پاییز ۱۳۹۹ (۳۳-۳۰)
دوری ۲ - ۳۶، شماره ۱/۳، ص. ۵۴-۳۳

ماتریس سختی یکی از ویژگی‌های ذاتی هر روش عددی است. شرایط این ماتریس تأثیر به‌سزایی در حجم محاسبات و پایداری روش حل می‌گذارد. در مطالعه‌ی حاضر، به لحاظ نظری مقایسه‌ی بر اساس هندسه و ویژگی‌های ریاضی ماتریس سختی حاصل از روش‌های عددی اجزای محدود استاندارد، اجزای محدود توسعه یافته و روش آنالیز ایزوژنومتریک، در حل مسئله‌ی ورق حاوی ترک صورت گرفته است. به منظور مدل‌سازی ترک در روش اجزای محدود استاندارد، المان ویژه تکین هشت‌گره‌ی اجزای محدود به کار گرفته شده است. از طرفی در روش اجزای محدود توسعه یافته از اصول غنی‌سازی توابع درون‌یاب اجزای محدود و کاربرد روش ریاضی پیکره‌بندی واحد اجزای محدود استفاده می‌شود. به علاوه در روش آنالیز ایزوژنومتریک از تکرار نقاط کنترلی در یک موقعیت به منظور ایجاد ضمنی ناپوستگی و ایجاد تکینگی در ماتریس سختی، بهره گرفته شده است و از توابع پایه مرتبه ۳ در تقریب هندسه و حل استفاده می‌شود.

ag.khadem@scu.ac.ir
zahra.htmpr@gmail.com
oulapour.m@scu.ac.ir
se.alavi@scu.ac.ir

واژگان کلیدی: ماتریس سختی، روش اجزای محدود، روش اجزای محدود توسعه یافته، روش آنالیز ایزوژنومتریک، پیکره‌بندی واحد.

۱. مقدمه

می‌نویسیم و با ترکیب این معادلات، مجهولات مورد نظر را برای کل دامنه محاسبه می‌کنیم.

در روش اجزای محدود استاندارد، به منظور به دست آوردن یک مسیر رشد ترک هموار باید از فرایند پیچیده‌ی مش‌گذاری مجدد استفاده کرد که این امر باعث ناکارآمدی این روش در شبیه‌سازی خودکار رشد ترک می‌شود. لذا به دلیل پیچیدگی و نبود دقت کافی در فرایند مش‌گذاری در دامنه‌های دارای ترک، محققین به دنبال روش‌های عددی دقیق‌تری بودند. ایده‌ی غنی‌سازی نقاط اطراف ترک در روش اجزای محدود استاندارد ابتدا توسط بنزلی^۱ در سال ۱۹۷۴ برای مسایل شکست استاتیکی معرفی شد و به وسیله‌ی آنلوری^۲ و همکاران و گیفورد^۳ و همکاران ادامه یافت. در سال ۱۹۹۶ ملانک^۴ و بابوشکا^۵ مفهومی از پیکره‌بندی واحد^۶ را پیشنهاد کردند. بر این اساس روش اجزای محدود پیشرفته در سال ۱۹۹۹ برای اولین بار توسط بلیچکو^۷ و همکاران برای مسایل گسترش ترک معرفی شد.^[۱] این روش به ناپوستگی‌ها اجازه می‌دهد تا با استفاده از پیکره‌بندی واحد اجزای محدود، به صورت مستقل از شبکه

مطالعه‌ی رفتار اجسام دارای ناپوستگی در چارچوب علم مکانیک شکست صورت می‌گیرد. روش‌های محاسبه‌ی کمیت‌های مکانیک شکست به سه دسته‌ی روش‌های عددی، تجربی و تحلیلی تقسیم می‌شوند.^[۱] برای بسیاری از مسائل عملی امکان حل تحلیلی وجود ندارد و یا حل‌های موجود، تقریب‌های غیردقیقی هستند. از سوی دیگر، روش‌های تجربی زمان‌بر و پرهزینه بوده و غالباً برای مسائل با هندسه‌های پیچیده مناسب نیستند. از این رو، روش‌های عددی نقش مهمی در محاسبه‌ی کمیت‌های مکانیک شکست ایفا می‌کنند. در روش اجزای محدود که از اوایل دهه‌ی ۶۰ میلادی، برای حل مسائل مختلف به کار برده شد، فرایند مدل‌سازی در این روش با تقسیم دامنه به مجموعه‌ی المان‌ها صورت می‌پذیرد که به جای حل مسئله برای همه‌ی دامنه، معادلات را برای المان‌های تشکیل‌دهنده‌ی آن

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۷/۱۰/۱۳۹۷، اصلاحیه ۲۳/۲/۱۳۹۸، پذیرش ۲۵/۳/۱۳۹۸.

DOI:10.24200/J30.2019.52527.2482

اجزای محدود نمایش داده شوند. این مدل‌سازی با استفاده از فرایند غنی‌سازی المان‌های قطع شده با ترک به وسیله‌ی توابع غنی‌سازی ارضاکنده رفتار ناپیوسته و درجات آزادی اضافی و بدون نیاز به تطبیق شبکه با هندسه‌ی ناپیوستگی، مدل می‌شوند. اگرچه روش اجزای محدود توسعه‌یافته یکی از روش‌های عددی کارآمد در مکانیک شکست است، ترکیب این روش با روش توابع مجموعه‌ی تراز به منظور حذف امر دشوار مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها و تکامل مرزهای ناپیوسته‌ی داخلی کاربرد دارد.^[۳] در این روش چهار نوع ماتریس سختی وجود دارد که یکی از آنها ماتریس سختی معمول در روش اجزای محدود است. دو ترکیب دیگر ترکیب‌هایی هستند که از دو ماتریس استاندارد و ماتریس غنی‌سازی شده‌ی B استفاده می‌کنند و دیگری تنها ماتریس سختی غنی‌سازی شده است.^[۵]

یکی دیگر از روش‌های عددی، روش آنالیز ایزوژئومتریک است. در سال‌ها اخیر روش آنالیز ایزوژئومتریک به طور گسترده‌ی برای حل مسایل مکانیک شکست خطی و مکانیک شکست مورد استفاده قرار گرفته است. در این روش از توابع پایه‌ی طراحی به کمک رایانه^۸ (کد) در آنالیزهای عددی استفاده می‌شود. اگرچه اجزای محدود استاندارد با توابع پایه لاگرانژی معروف‌ترین شیوه در مهندسی به کمک رایانه است. رایج‌ترین توابع پایه کد، توابع غیریک‌نواخت نسبتی بی‌اسپلاین^۹ است. بنابراین بیشترین تحقیقات در روش ایزوژئومتریک بر پایه‌ی فرمولاسیون نریز متمرکز شده است.^[۷] این روش تنها روشی است که می‌تواند هندسه را به طور دقیق حداقل تا سطوح مرتبه دو مدل‌سازی کند. به دلیل نظم بالای عناصر مش در روش آنالیز ایزوژئومتریک، این روش نوین، برحسب درجات آزادی و خواص طیفی بهبود یافته، از دقت بالاتری در مقایسه با آنالیز اجزای محدود برخوردار است. اگرچه این ویژگی ذاتی آنالیز ایزوژئومتریک، الگوی پراکندگی ماتریس سختی را کاهش می‌دهد و سرهم‌بندی ماتریس سختی در آنالیز ایزوژئومتریک نیازمند محاسبات زیادی است؛ بدین منظور توجه ویژه‌ی باید در این باره صورت پذیرد تا در عمل، مقرون به صرفه باشد.^[۸] در سال ۱۳۹۴، نادری و خادم‌الرسول به مقایسه‌ی روش آنالیز ایزوژئومتریک و روش اجزای محدود توسعه یافته پرداختند. آنان دریافتند که روش آنالیز ایزوژئومتریک از پتانسیل مورد نیاز برای تبدیل شدن به ابزاری قدرتمند در موضوع مکانیک شکست محاسباتی برخوردار است. همچنین، روش آنالیز ایزوژئومتریک با در نظر گرفتن درجات آزادی یکسان، فضای تنش و کرنش هموارتری ارائه می‌کند. علاوه بر این در روش آنالیز ایزوژئومتریک، برخلاف روش اجزای محدود نیازی به تولید شبکه نیست و این امر یک برتری بسیار ویژه محسوب می‌شود.^[۹] همچنین، به مدل‌سازی خودکار گسترش ترک در اندرکنش با حفره و مرز ناهمگن بدون مش‌گذاری مجدد پرداختند. آنان روش‌های اجزای محدود توسعه یافته، روش مجموعه‌ی تراز و انتگرال اندرکنش را به منظور شبیه‌سازی گسترش اندرکنشی ترک با یکدیگر ترکیب کردند. بدین طریق، نیاز به وجود شبکه داخلی برای مدل‌سازی مرزها برطرف شده و علاوه بر این، امکان برخورد مسیر رشد ترک با مرزهای داخلی به طور طبیعی برقرار شد.

دامنه معتبر است. این راه حل‌های تحلیلی نیازمند حل معادلات دیفرانسیل جزئی یا معمولی است که به علت پیچیدگی‌های مسئله قابل محاسبه نیستند. بنابراین برای حل این گونه مسایل نیازمند روش‌های عددی مثل روش اجزای محدود استاندارد هستیم. فرمولاسیون روش اجزای محدود استاندارد به جای حل معادلات دیفرانسیل به حل معادلات چندمجهولی جبری می‌پردازد. فرایند مدل‌سازی در این روش با تقسیم دامنه به مجموعه‌ی المان‌ها صورت می‌پذیرد که به جای حل مسئله برای همه‌ی دامنه، معادلات را برای المان‌های تشکیل‌دهنده‌ی آن نوشته و با ترکیب این معادلات، مجهولات مورد نظر را برای کل دامنه محاسبه می‌کنیم.

در روش اجزای محدود هر المان دارای یک تابع شکل فرضی بوده و به صورت مستقیم یا غیر مستقیم با المان‌های دیگر از طریق مرزهای معمول، شامل گره‌ها یا خطوط و سطوح مرزی در ارتباط است. با استفاده از ویژگی‌های تنش/کرنش مصالح تشکیل‌دهنده، محیط و شرایط مرزی معلوم، می‌توان رفتار یک گره را برحسب ویژگی‌های المان‌های دیگر موجود در محیط تعیین کرد.^[۱۰] امکان تغییر مکان هر المان را می‌توان به وسیله‌ی درجه آزادی گره‌های هر المان تعریف کرد. به این ترتیب هر گره محل تمرکز ویژگی‌های مؤثر در مسئله است. المان هشت‌گره‌ی که در شکل ۱ نشان داده شده است، دارای دو درجه آزادی تغییر مکانی در جهات x و y است و توابع شکل آن مطابق معادله‌های ۱ تا ۳ است.

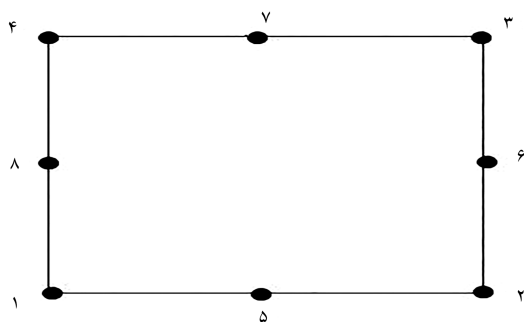
استفاده از المان‌ها معمول اجزای محدود در نزدیکی نوک ترک حتی در صورتی که مش اطراف نوک ترک به اندازه کافی ریز باشد دقت شبیه‌سازی تنش در نوک ترک را تا حدی افزایش می‌دهد، اما این امر منجر به غیر اقتصادی شدن تحلیل می‌شود. در سال ۱۹۷۵، هنشل، شاو و بارسوم^{۱۱}، المان‌های تکین^{۱۱} را به منظور مدل‌سازی دقیق تنش در نوک ترک پیشنهاد کردند. در این گونه المان‌ها، گره‌های وسط اضلاع، به نصف فاصله‌ی اولیه‌ی خود از گره گوشه انتقال می‌یابند و به نوک ترک نزدیک‌تر می‌شوند. در نتیجه، مدل‌سازی تکینگی در نزدیکی نوک ترک دقیق‌تر صورت می‌پذیرد و عملکرد روش تا حد زیادی بهبود می‌یابد.^[۱۱-۱۳] تشکیل ماتریس‌ها برای هر المان و بیان معادلات بر حسب سیستم مختصات گلوبال در صورت امکان، امر بسیار مشکلی است و بنابراین فرمولاسیون طبیعی شکل گرفت.

-- گره‌های ۱ تا ۴

$$N_i(r, s) = \frac{1}{4} (1 + r_i r) (1 + s_i s) (r_i r + s_i s - 1) \quad (1)$$

-- گره‌های ۵ و ۷

$$N_i(r, s) = \frac{1}{4} (1 + s_i s) (1 - r^2) \quad (2)$$



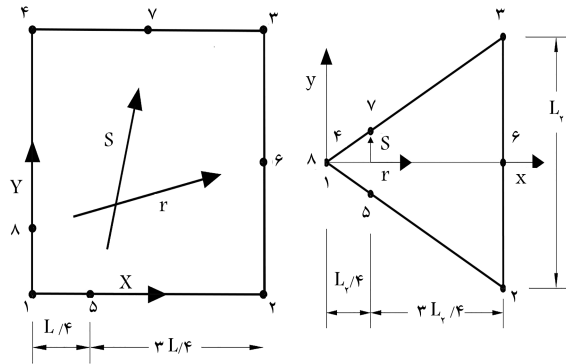
شکل ۱. المان هشت‌گره‌ی در دستگاه مختصات طبیعی (s, r).

۲. اصول اجزای محدود با المان تکین هشت‌گره‌ی

روش اجزای محدود یک روش عددی برای حل مسایل سازه‌ی و غیرسازه‌ی مهندسی و فیزیکی ریاضی است. در مسایلی که هندسه، بارگذاری و مصالحی با مشخصات و ویژگی‌های پیچیده دارند، راه حل‌های تحلیلی ریاضی وجود ندارد. راه حل‌های تحلیلی، راه حل‌هایی هستند که با استفاده از یک رابطه‌ی ریاضی مقدار کمیت‌های مطلوب را در هر نقطه‌ی از دامنه ارائه می‌دهد و برای نقاط نامحدودی از

که در آن $[k]_{n \times n}$ ماتریس سختی هر المان است و تعداد سطرها و ستون‌های آن برابر با تعداد درجات آزادی هر المان است؛ ماتریس $[D]$ ماتریس مشخصات رفتاری مصالح، $[J]$ ماتریس ژاکوبین و t ضخامت المان است. پس از محاسبه ماتریس سختی برای هر المان، ماتریس سختی کل سازه از سرهم‌بندی این ماتریس‌ها به شیوه‌ی سیستماتیک به دست می‌آید.

روش‌های سنتی اجزای محدود که مبتنی بر به کارگیری توابع شکل پیوسته برای مدل‌سازی میدان جابه‌جایی هستند، با دو مشکل اساسی مواجه‌اند: نیاز به تغییر هندسه‌ی شبکه‌بندی در هنگام گسترش ترک و وابستگی نتایج تجزیه و تحلیل به هندسه شبکه‌بندی. در نتیجه به منظور تسهیل مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها، نیازمند استفاده از روش‌هایی مثل روش اجزای محدود توسعه یافته هستیم که امکان ایجاد ناپیوستگی را در داخل مش پیوسته اجزای محدود به طریقی ممکن می‌سازد و نیازی به تغییر شبکه‌بندی در فرایند رشد ترک نیست. [۱۵ و ۱۶]



شکل ۲. انواع المان‌های تکین. [۱۴]

-- گره‌های ۶ و ۸

۳. روش اجزای محدود توسعه یافته

مفهوم اصلی روش اجزای محدود توسعه یافته، غنی‌سازی فضای تقریب به نحوی است که توانایی بازتولید خصوصیات معین مسئله مورد نظر در حضور ترک‌ها و با به طور کلی ناپیوستگی‌ها را داشته باشد. [۱۷] در این رویکرد از توابع شکل موسوم به توابع غنی‌سازی برای مدل‌سازی ناپیوستگی و نیز رفع تکینگی تابع تنش، علاوه بر توابع شکل اجزای محدود استاندارد استفاده می‌شود. درجات آزادی مجازی نیز که بیانگر هندسه‌ی ناپیوستگی هستند، برای گره‌های تحت تأثیر ناپیوستگی در نظر گرفته می‌شوند. توابع شکل استاندارد برای همه گره‌ها و توابع شکل غنی‌سازی تنها برای گره‌های تحت تأثیر ناپیوستگی اعمال می‌شود. [۱۵ و ۱۶]

برای تولید توابع غنی‌سازی در اجزای محدود توسعه یافته از روش پیکره‌بندی واحد اجزای محدود استفاده می‌شود. [۱۶] به طور کلی شکل‌گیری مبنای ریاضی روش اجزای محدود توسعه یافته بر مبنای این روش، توسط بابوشکا و ملانک در سال ۱۹۹۶ آغاز شد. بر این اساس به منظور ساخت توابع غنی‌سازی، از حاصل ضرب توابع شکل استاندارد در توابع دارای خاصیت مورد نظر (مانند خاصیت پرش در میدان جابه‌جایی) استفاده می‌شود. که این ضرب، موجب ایجاد قید در حوزه عملکردی غنی‌سازی و رعایت شرایط مرزی جابه‌جایی می‌شود. تابع غنی‌سازی برای شبیه‌سازی رفتار نوک ترک باید دارای دو شرط باشد: ایجاد ناپیوستگی در محل ترک و عدم اختلال شرایط پیوستگی میدان جابه‌جایی بر روی مرزها.

ترکیب این روش با روش توابع مجموعه‌ی تراز منجر به تسهیل مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها و تکامل مرزهای ناپیوسته داخلی می‌شود. پس از شناخت هندسه‌ی مسیر به وسیله‌ی توابع مجموعه‌ی تراز باید توابع غنی‌سازی اجزای محدود توسعه یافته را تعریف کنیم. برای مدل‌سازی ترک در مصالح همگن، دو بخش غنی‌سازی شامل غنی‌سازی المان‌های نوک ترک و نیز تابع هویساید برای آن دسته از المان‌هایی که توسط بدنه‌ی ترک قطع شده باشند، صورت می‌گیرد. تابع هویساید یک تابع علامت است که در روش اجزای محدود توسعه یافته از آن به منظور نمایش ترک استفاده می‌شود. این تابع مطابق رابطه‌ی ۷ بیان می‌شود:

$$H(\xi) = \begin{cases} +1 & \text{Above crack} \\ -1 & \text{Below crack} \end{cases} \quad (7)$$

در مکانیک شکست خطی کشسان، می‌توان نشان داد که محدوده‌ی تغییر شکل اطراف نوک ترک شامل چهار تابع است معادله‌ی ۸ و در نتیجه توابع غنی‌سازی

$$N_i(r, s) = \frac{1}{4} (1 + r_i r) (1 - s^2) \quad (3)$$

r و s مؤلفه‌های دستگاه مختصات طبیعی برای بیان توابع شکل است. المان‌های تکین به دو صورت المان‌های چهار ضلعی ۸ گرهی و مثلثی ۶ گرهی هستند. این دو نوع المان در شکل ۲ نشان داده شده است.

در این مقاله از المان تکین هشت‌گره‌ی استفاده شده، که توابع شکل آن مطابق معادله‌ی ۴ است. [۱۳] در تحلیل‌های اجزای محدود این نوع المان منعطف بوده و از دقت قابل قبولی برخوردار است.

در آنالیز اجزای محدود توابع شکل، معمولاً توابع لاگرانژی چندجمله‌ی پیوسته‌ی هستند که متغیرهای مستقل داشته و به منظور ارضای شرایط مشخصی در گره‌ها، تعیین شده‌اند و تغییرات متغیرهای دامنه را درون مش اجزای محدود توصیف می‌کنند.

$$N_i = \left[(1 + r r_i) (1 + s s_i) - (1 - r^2) (1 + s s_i) - (1 - s^2) (1 + r r_i) \right] r_i^2 s_i^2 / 4 + (1 + r^2) (1 + s s_i) (1 + r_i^2) s_i^2 / 2 + (1 - s^2) (1 + r r_i) (1 - s_i^2) s_i^2 / 2 \quad (4)$$

بنابر نظریه‌ی الاستیسیته صفحه‌ی، روابط بین کرنش‌ها و جابه‌جایی‌ها به صورت معادلات دیفرانسیل بیان می‌شود. بر این اساس، ماتریس $[B]$ که مؤلفه‌های کرنش و جابه‌جایی‌ها را به یکدیگر مرتبط می‌سازد، ماتریسی است با سه سطر و m ستون که در آن m تعداد درجات آزادی هر المان به کار رفته است. برای المان ۸ گرهی در این مقاله، ماتریس $[B]$ از رابطه‌ی ۵ به دست می‌آید:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_4}{\partial x} & \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5)$$

در نهایت ماتریس سختی هر المان برحسب ماتریس کرنش - جابه‌جایی گرهی $[B]$ مطابق رابطه‌ی ۶ قابل بیان است:

$$[K]_{n \times n} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D] [B] t \det j \, dr \, ds \quad (6)$$

گره‌های متأثر از نوک ترک مطابق رابطه‌ی ۹ بیان می‌شود:

$$F(r, \theta) = \begin{cases} \sqrt{r} \cos(\frac{\theta}{\gamma}) \\ \sqrt{r} \sin(\frac{\theta}{\gamma}) \\ \sqrt{r} \sin(\frac{\theta}{\gamma}) \sin(\theta) \\ \sqrt{r} \cos(\frac{\theta}{\gamma}) \cos(\theta) \end{cases} \quad (8)$$

$$F(r, \theta) = \{F^1, F^r, F^\tau, F^\varphi\} \quad (9)$$

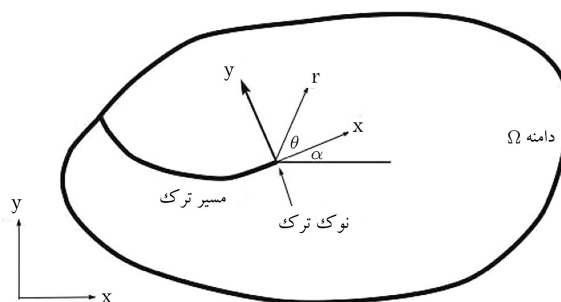
در شکل ۳ نمایش کلی محیط حاوی ناپیوستگی (ترک) و دستگاه‌های مختصات محلی و قطبی نشان داده شده است.

که r و θ مختصات قطبی نسبت به نوک ترک می‌باشند. در مسئله‌ی غنی‌سازی نوک ترک در خصوص ترک میانی دو المان و در خصوص ترک لبه یک المان با این توابع غنی‌سازی می‌شوند. توابع استفاده شده به خودی خود ناپیوسته نیستند و تنها زمانی که با متغیرهای کمکی با توابع مجموعه‌ی تراز تعریف شده باشند، خصوصیات دلخواه آنها نمایان می‌شود. در دامنه‌ی که حاوی ترک است، روش اجزای محدود توسعه یافته، توابع شکل استاندارد اجزای محدود را با توابع هویساید و نوک ترک به صورت رابطه‌ی ۱۰ غنی‌سازی می‌کند.

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^n N_I(x) u_I + \underbrace{\sum_{I=1}^{n_j} N_I(x) H(x) a_I}_{for I \in \Omega_H} + \underbrace{\sum_{I=1}^{n_T} \left[N_I(x) \sum_{j=1}^{n_F} F_j(x(r, \theta) b_{jI}) \right]}_{for I \in \Omega_{CT}} \quad (10)$$

که در آن $x = \{x, y\}^T$ مختصات فضایی و n_j, n_T, n_F به ترتیب تعداد نقاط گره‌ی، نقاط غنی‌سازی شده، نقاط غنی‌سازی شده با نوک ترک و توابع غنی‌سازی هستند. همچنین Ω_{CT} منطقه‌ی غنی‌سازی شده با تابع نوک ترک و Ω_H منطقه‌ی غنی‌سازی شده با تابع هویساید است. N_I توابع شکل اجزای محدود استاندارد و a_I و b_{jI} درجات آزادی ناشی از گره‌های غنی‌سازی شده است.

در این روش درجات آزادی جدیدی از طریق توابع وزن جدید، به درجات آزادی اجزای محدود اضافه می‌شود. وظیفه‌ی تابع غنی‌سازی این است که این وزن‌ها را به شیوه‌ی تعیین کند که رفتار ناپیوستگی را به دست آورد. از آنجا که رفتار هر ناپیوستگی به میزان زیادی به شکل مرز وابسته است، لازم است انتخاب تابع غنی‌سازی فرمولاسیون شده به وسیله‌ی توابع مجموعه‌ی تراز صورت گیرد. [۱۸-۲۰] با استفاده از روش مجموعه‌ی تراز می‌توان موقعیت نوک و بدنه ترک را در هر مرحله



شکل ۳. مختصات قطبی در نوک ترک.

از رشد پیدا و در نتیجه المان‌هایی را که باید غنی‌سازی شوند انتخاب کرد. گره‌های موجود در المانی که غنی‌سازی باید درباره آن صورت پذیرد، به وسیله‌ی تابع مناسب، غنی‌سازی می‌شوند. اگرچه لازم به ذکر است که یک گره نمی‌تواند همزمان با دو تابع هویساید و نوک ترک، غنی‌سازی شود و استفاده از تابع غنی‌سازی نوک ترک بر تابع غنی‌سازی هویساید اولویت دارد. یادآوری این موضوع حائز اهمیت است که تابع غنی‌سازی نوک ترک در عمل چهار نوع غنی‌سازی دارد و هشت درجه آزادی جدید به گره می‌افزاید (چهار درجه در راستای محور x و چهار درجه در راستای محور y). همچنین در مورد تابع غنی‌سازی هویساید باید گفت که این تابع با افزودن دو درجه آزادی در هر گره وظیفه‌ی قطع ارتباط بین دو طرف ترک را به عهده دارد، در حالی که هر دو طرف دارای مصالح‌اند، در نتیجه هیچ مشارکتی برای سختی در طرف دیگر وجود ندارد. هنگامی که تعداد درجه آزادی اضافه شده به المان تعیین می‌شود، محاسبات واقعی سختی المان انجام می‌شود. [۵]

۱.۳. ماتریس سختی

در روش اجزای محدود توسعه یافته چهار نوع ماتریس سختی وجود دارد؛ یکی از آنها ماتریس سختی معمول روش اجزای محدود (K_{std}) است. دو ترکیب دیگر ترکیب‌هایی هستند که از دو ماتریس استاندارد و ماتریس غنی‌سازی شده B استفاده می‌کنند (K_{blend}) و دیگری تنها ماتریس سختی غنی‌سازی شده است (K_{extra}). ماتریس‌هایی که از ترکیب ماتریس‌های نرمال و غنی‌سازی شده B تشکیل شده‌اند به طور معمول به عنوان سختی ترکیبی^{۱۱} از آنها یاد می‌شود. دستگاه معادلات تعادل به شکل معادلات ۱۱ است.

$$B_{tot} = [B_{std} B_H B_{f_1} B_{f_r} B_{f_\tau} B_{f_\varphi}] \begin{bmatrix} K_{std} & K_{blend} \\ K_{blend}^T & K_{extra} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{std} \\ u_{extra} \end{bmatrix} = F \quad (11)$$

به طوری که

$$K_{std} = \int B^T D B dV$$

$$K_{blend} = \int B^T D B_{enr} dV$$

$$K_{extra} = \int B^T_{enr} D B_{enr} dV$$

ماتریس B_{tot} در این روش از ترکیب ماتریس B استاندارد (B_{std}), ماتریس B در غنی‌سازی هویساید (B_H) و ماتریس B در غنی‌سازی نوک ترک (B_{f_1-4}) تشکیل می‌شود. u_{std} و u_{extra} نیز به ترتیب جابه‌جایی برای المان‌های استاندارد و غنی‌سازی شده است. در المان‌هایی که گره غنی‌سازی شده ندارند، سختی المان همان سختی تعیین شده در محاسبات اجزای محدود استاندارد است. [۵]

لازم به ذکر است که در روش‌های عددی اجزای محدود استاندارد و توسعه یافته، شبکه‌بندی به اندازه کافی ریز در نظر گرفته شده است تا علاوه بر حفظ پایداری حل مسئله‌ی عددی، دقت کافی در حل تأمین شود.

۴. اصول روش آنالیز ایزوژئومتریکی در مکانیک شکست

کاربرد روش آنالیز ایزوژئومتریکی در دهه‌های اخیر در مکانیک شکست مورد توجه قرار گرفته است. [۲۱] از میان تمامی روش‌های عددی، روش آنالیز ایزوژئومتریکی تنها

پیوستگی. منظور از کنترل پیوستگی یعنی این که اگر یک مقدار گرهی دارای k تکرار باشد $(\xi_i = \xi_{i+1} = \dots = \xi_{i+k-1})$ آن‌گاه توابع پایه در آن موقعیت دارای پیوستگی از نوع C^{p-k} هستند. چهار مورد اول تضمین کننده‌ی درستی حل و ماتریس‌های با پراکنندگی پایین در فضای کل ماتریس هستند. پنجمین ویژگی امکان انعطاف‌پذیری بالا را فراهم می‌آورد. [۲۵] و [۲۶]

۲.۴. نربز

تکنولوژی عمده‌یی که برای نمایش هندسه‌های پیچیده توسط کد استفاده می‌شود، تکنولوژی نربز است. سطح نربز بر مبنای یک دسته نقاط کنترلی تعریف می‌شود که از نظر توپولوژی، روی یک شبکه‌ی مستطیل مربع قرار دارند. [۲۷] مفهوم کلیدی این آنالیز توسط هیوز و همکارانش بیان شد تا از توابع نربز نه تنها در گسسته‌سازی هندسه بلکه به عنوان ابزاری برای گسسته‌سازی در آنالیز ایزوژئومتریک استفاده شود. توابع بی‌اسپلین توانایی مدل‌سازی دقیق اشکال ساده‌بی مثل دایره‌ها و بیضی‌ها را ندارند، به همین دلیل امروزه تکنولوژی استاندارد کد، تولید نوعی توابع بی‌اسپلین موسوم به «توابع نربز» را پیشنهاد کرده که از طریق توابع نسبتی بی‌اسپلین شکل گرفته‌اند و از مجموعه‌یی از بی‌اسپلین‌ها تشکیل شده‌اند. همچنین ضمن برخورداری از تمامی ویژگی‌های بی‌اسپلین، با داشتن توانایی در ایجاد اشکال مخروطی، کروی، بیضی و پارابول‌شده‌ها و هایپر بلوئیدها و... به صورت دقیق بیش از توابع بی‌اسپلین مورد توجه و استفاده هستند. توابع پایه‌ی نربز چنین تعریف می‌شود: [۲۶]

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{W(\xi)} = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i} \quad (14)$$

که در آن $\{N_{i,p}\}_{i=1}^n$ مجموعه‌یی از بی‌اسپلین‌های مرتبه‌ی p است و $\{w_i\}_{i=1}^n$ مجموعه‌ی توابع وزن نربز است.

انتخاب وزن‌های مناسب اجازه‌ی مدل‌سازی انواع منحنی‌ها - مثل قوس‌های دایره‌یی - را می‌دهد. در حالتی که همه‌ی وزن‌ها برابر باشند تابع نربز به تابع بی‌اسپلین کاهش می‌یابد. مهم‌ترین توانایی‌های نربز عبارت است از: مناسب بودن برای مدل‌سازی سطوح آزاد؛ امکان نمایش تقریباً دقیق سطوح درجه دو مانند استوانه، کره، بیضی و غیره و همچنین وجود چندین الگوریتم مؤثر پایدار و عددی در تولید اجسام نربز. [۲۵]

سطوح واحجام نربز با به کار بردن قوانین ضرب تانسوری و همچنین تعریف توابع چندمتغیره‌ی پایه تعیین می‌شود. این سطوح و احجام تمام خصوصیات و ویژگی‌های مربوط به توابع پایه‌ی خود از جمله پیوستگی و مشتق‌پذیری را در بردارند. یک سطح نربز به صورت رابطه‌ی ۱۵ تعریف می‌شود:

$$S(\xi) = \sum_{i \in I} p_i R_{i,p}(\xi) \quad (15)$$

که در آن p_i مجموعه نقاط کنترلی و $R_{i,p}$ توابع پایه‌ی چندمتغیره است. توابع پایه نربز چند متغیره به شکل رابطه‌ی ۱۶ بیان می‌شود:

$$B_{i,p}(\xi) = \prod_{i=1}^{dp} N_{i,p}^l(\xi) \quad (16)$$

dp متناظر با ابعاد مسئله انتخاب می‌شود و به صورت $dp = 1, 2, 3, \dots$ است. همچنین نربز ویژگی‌های محاسباتی سودمندی مانند: امکان بهبود از طریق اعمال گره، پیوستگی از مرتبه‌ی C^{p-1} برای تابع نربز از مرتبه‌ی p ، تقلیل تغییرات [۲۳] و نیز مشخصه‌ی بدنه‌ی محدب [۲۴] است. به طور کلی قابلیت تغییر در توابع پایه‌ی

روشی است که قادر به مدل‌سازی هندسه‌ی سطوح درجه دو به طور تقریباً دقیق است، در این روش از توابع پایه تقریب نربز استفاده می‌شود. [۲۲] همچنین یکی دیگر از مزایای روش آنالیز ایزوژئومتریک نسبت به روش‌های مبتنی بر تکنولوژی المان، مربوط به شرایط پیوستگی از مراتب بالاتر است، که در این روش به دست می‌آید. در مدل‌های ناحیه‌ی چسباننده وجود پیوستگی از مراتب بالاتر لازم و بسیار با اهمیت است، زیرا در این صورت می‌توان ترک یا ناپیوستگی را با سطوح هموارتری گسسته‌سازی کرد. البته تلفیق روش‌های پیکره‌بندی واحد و روش آنالیز ایزوژئومتریک در مدل‌سازی فرایند مکانیک شکست و گسترش ترک مورد استفاده قرار گرفته است، بنابراین این امکان وجود دارد که با ترکیب روش آنالیز ایزوژئومتریک و روش پیکره‌بندی واحد، ناحیه‌ی چسباننده گسسته‌سازی شود. اما در این حالت ناپیوستگی مورد نظر باید با استفاده از توابع هوساید در حل مسئله وارد شود. درحالی که تمام این فرایند را می‌توان از طریق ویژگی‌های ذاتی روش آنالیز ایزوژئومتریک انجام داد. در واقع روش آنالیز ایزوژئومتریک دارای قابلیت‌یی است که می‌تواند ناپیوستگی‌ها را مستقیماً در حل مسئله وارد کند. ایده‌ی اصلی، در کنترل پیوستگی بین المانی است. در روش آنالیز ایزوژئومتریک درجه پیوستگی بین المانی با اعمال گره، که یک فرایند ریاضی است و در فضای پارامتری صورت می‌گیرد، کنترل و از این طریق مدل‌سازی هموارتری از متغیرهای مسئله به دست می‌آید. [۲۳] و [۲۴]

این روش، در واقع تلفیقی اساسی بین کلیه‌ی روش‌های محاسباتی در یک موضوع است. تکنولوژی‌های هندسی محاسباتی مختلفی نظیر تکنولوژی بی‌اسپلین و نربز وجود دارد که می‌توان در روش آنالیز ایزوژئومتریک از آنها بهره برد. در میان ویژگی‌های توابع بنیادی بی‌اسپلین، امکان افزایش پایه‌ی بی‌اسپلین با ناپیوستگی‌ها از طریق افزودن گره، موجب شد تا روش آنالیز ایزوژئومتریک کاندید مناسبی برای مدل‌سازی ترک‌های گسسته شود. همچنین تکرار دو نقطه‌ی کنترل متفاوت بین دو وصله می‌تواند یک ناپیوستگی ایجاد کند و نمایانگر تکین بودن ماتریس سختی باشد. در مورد مرز از پیش تعریف شده، توابع نربز به منظور به دست آوردن گسسته‌سازی کارآمد مورد استفاده قرار می‌گیرد. شبیه‌سازی‌های عددی مختلف برای ترک‌های لبه و میانی نمایانگر شایستگی آنالیز ایزوژئومتریک در مکانیک شکست است. [۲۵]

۱.۴. توابع بی‌اسپلین

در یک بردار گره‌ی Ξ توابع پایه بی‌اسپلین مرتبط $\{N_{i,p}\}_{i=1}^n$ از فرمول بازگشتی کوکس - دی‌بور تعریف می‌شود. توابع پایه مرتبه‌ی صفر به صورت معادله‌ی ۱۲ معادله‌ی ب است.

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}, \quad (\text{الف})$$

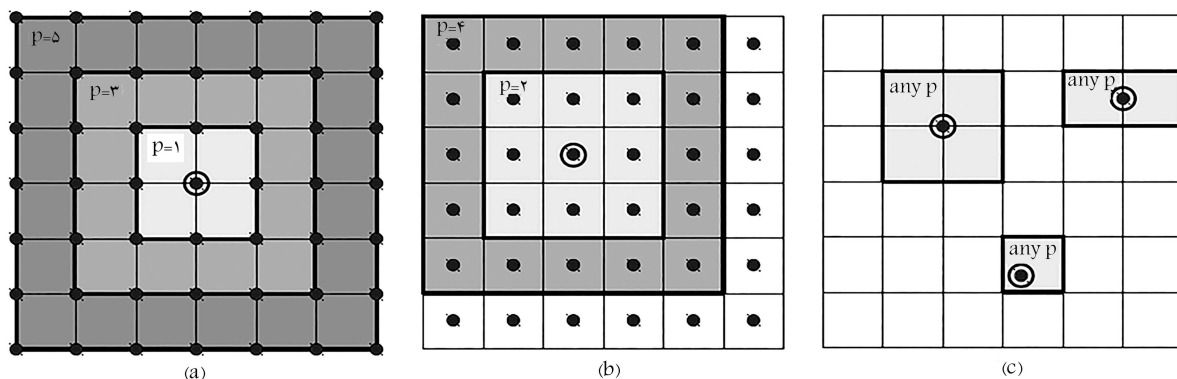
$$i = 1, 2, \dots, n + p + 1, \xi_i \in \square \quad (\text{ب})$$

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

که در آن ξ معرف مقادیر گره‌ی است. این توابع برای یک چندجمله‌یی با مرتبه‌ی بزرگ‌تر از $(p \geq 1)$ تعریف می‌شود:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (13)$$

برخی ویژگی‌های برجسته‌ی توابع پایه بی‌اسپلین عبارت است از: پیکره‌بندی واحد، غیر منفی بودن، مستقل خطی بودن، دارای منطقه‌ی پوششی مشخص و کنترل



شکل ۴. محدوده‌ی اثر بر نقاط کنترلی: قسمت‌های تأثیرگذار، نقاط گاوسی هستند که در نواحی هاشور خورده واقع شده‌اند. [۴]

روش اجزای محدود نسبت به مدت زمان مدل‌سازی، اهمیت چندانی نداشته باشد اما در آنالیز ایزوژئومتری که تعداد نقاط گاوسی و نواحی متأثر از این نقاط به میزان قابل توجهی زیاد است اهمیت ویژه‌ی می‌یابد. محاسبات ضرب ماتریسی Q_G را می‌توان به عملیات کوچک‌تر و ساده‌تر روی نقاط کنترلی متأثر (i, j) درون محدوده‌ی اثر نقاط گاوسی مورد نظر، طبق فرمول ۲۱ تقسیم کرد:

$$Q_{ij} = B_i^T D B_j \quad (21)$$

هرگاه زیرماتریس Q_{ij} محاسبه شود در فاکتور وزن ضرب شده و بر اساس المان در موقعیت مناسب درون ماتریس سختی کل قرار می‌گیرد. محاسبات مربوط به Q_{ij} به همراه به روزرسانی K قسمت ویژه‌ی از فرمولاسیون ماتریس سختی کل را تشکیل می‌دهد. ماتریس سختی هر المان (K_E) متعاقباً در موقعیت مناسب به ماتریس سختی کل (K) با فرمول ۲۲ اضافه می‌شود:

$$K = \sum_E K_E \quad (22)$$

عمل جمع برای هر نقطه‌ی گاوسی انجام می‌پذیرد و نقاط کنترلی موجود در محدوده‌ی اثر را تحت تأثیر قرار می‌دهد. در مقایسه با روش اجزای محدود استاندارد مقدار محاسبات مورد نیاز برای سرهم‌بندی ماتریس سختی به طور قابل توجهی بیشتر است زیرا، دامنه‌ی تأثیر نقاط گاوسی در روش آنالیز ایزوژئومتری در مقایسه با روش اجزای محدود استاندارد خیلی بزرگ‌تر است. در شکل ۴ مقایسه‌ی بین محدوده‌ی اثر در روش‌های اجزای محدود و آنالیز ایزوژئومتری در مسئله‌ی دو بعدی نشان داده شده است.

باید توجه کرد که ارتباط اصلی میان نقاط گاوسی و کنترلی است. المان‌ها گروه‌بندی مشخصی را تشکیل می‌دهند لذا ایجاد ارتباط و ذخیره‌سازی راحت‌تر صورت می‌پذیرد. در روش اجزای محدود هر نقطه‌ی گاوسی با گره‌های درون المان‌هایش در محاسبات دخیل است. توابع شکل و مشتقات آنها برای هر نوع المان از پیش تعیین شده و باید برای هر ترکیبی از گره‌ها و نقاط گاوسی درون المان، ارزیابی و بررسی شود. اگرچه در آنالیز ایزوژئومتری هر نقطه‌ی گاوسی در محاسبات با نقاط کنترلی اطراف نیز درگیر است شکل ۵ توابع شکل از پیش تعریف نشده و در دامنه‌های بزرگ‌تر با مقادیر بیشتری از نقاط کنترلی و گاوسی در ارتباط‌اند. به علت بزرگ‌تر بودن ماتریس سختی نیازمند روش‌های ذخیره‌سازی مؤثر و صحیحی است. [۸]

بی‌اسپلاین با اعمال گره در بردار گره‌ی و کنترل درجه پیوستگی چندجمله‌ی پایه، روش آنالیز ایزوژئومتری را به یک روش مناسب برای مدل‌سازی انواع ترک یا حتی وجود ناپیوستگی‌های متعدد در یک دامنه تبدیل کرده است. توابع تقریب جابه‌جایی برای مسایل کشسان صفحه‌ی را می‌توان با سطوح به صورت روابط ۱۷ تقریب زد: [۲۴]

$$u(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) p_{ui,j} \quad \text{الف}$$

$$v(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) p_{vi,j} \quad \text{ب} \quad (17)$$

که در آن ξ و η پارامترهایی با مقادیر بین صفر و ۱ هستند و $P_{u ij}$ و $P_{v ij}$ متغیرهای کنترلی جابه‌جایی در روش آنالیز ایزوژئومتری‌اند.

۳.۴. محاسبه‌ی ماتریس سختی

در روش آنالیز ایزوژئومتری یک حل مسئله به صورت یک سطح در نظر گرفته می‌شود. این سطح توسط بی‌اسپلاین و نرئز قابل تعریف است. ماتریس سختی هر وصله با استفاده از نظریه‌ی انرژی پتانسیل کمیته و از رابطه‌ی ۱۸ به دست می‌آید:

$$k_e = \int_{\Omega_e} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (18)$$

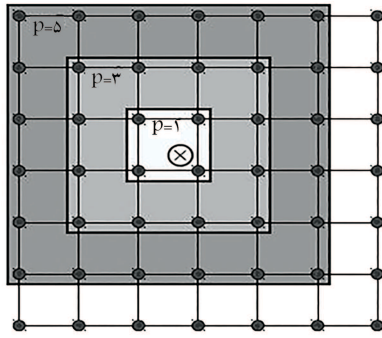
ماتریس B در فضای پارامتری (ξ_1, ξ_2) به صورت رابطه‌ی ۱۹ نوشته می‌شود:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial R_{1v}}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial R_{n_{en}}}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial R_{1v}}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial R_{n_{en}}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial R_{1v}}{\partial x_1} & \frac{\partial R_{1v}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial R_{n_{en}}}{\partial x_1} & \frac{\partial R_{n_{en}}}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (19)$$

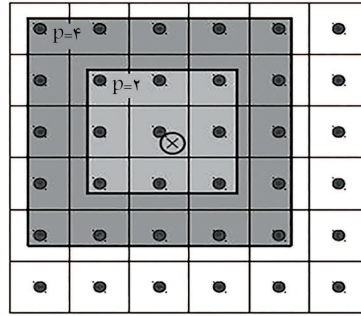
که در آن R همان توابع پایه‌ی نرئز است. به منظور ایجاد ماتریس سختی دامنه یا یک وصله، مجموعه‌ی از نقاط گاوسی باید به دامنه اضافه شود. این امر از طریق معادله‌ی ۲۰ صورت می‌پذیرد:

$$K_E = \sum_{E_G} w_G B_G^T D B_G = \sum_{E_G} w_G Q_G \quad (20)$$

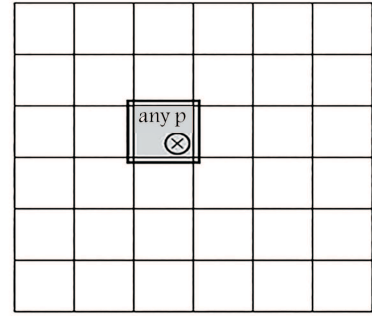
محاسبه‌ی سریع ضرب ماتریسی $Q_G = B_G^T D B_G$ در معادله‌ی ۲۰ اهمیت زیادی دارد زیرا در هر نقطه انتگرال‌گیری تکرار شده است. این امر ممکن است در



(ج) روش اجزای محدود.



(ب) روش آنالیز ایزوژنومتریکی برای P زوج؛



(الف) روش آنالیز ایزوژنومتریکی برای P فرد؛

شکل ۵. گره‌ها و نقاط کنترلی متأثر از نقاط گاوسی.

طبق تعریف داریم:

$$(\lambda_i I - A) = 0 \quad (26)$$

که در آن I ماتریسی واحد با ابعاد یکسان با ماتریس A است. بنابراین بردارهای ویژه x_i متعلق به فضای ماتریس $(\lambda_i I - A)$ هستند. مقادیر ویژه λ_i ریشه‌هایی چندجمله‌یی مرتبه‌ی n حاصل از $|\lambda I - A|$ هستند. در صورتی که $|\lambda I - A|$ را بسط دهیم، چندجمله‌یی مطابق معادله‌ی ۲۷ نوشته می‌شود:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \quad (27)$$

$$= \lambda^n + C_1 \lambda^{n-1} + \dots + C_{n-1} \lambda + C_n$$

که چندجمله‌یی مشخصه‌ی ماتریس $A_{n \times n}$ نام دارد. ریشه‌های چندجمله‌یی مشخصه در واقع همان مقادیر ویژه‌اند که تعداد آنها n است.

۴.۵. تقارن و هرمیتی بودن یک ماتریس

ماتریس مربعی A متقارن است، اگر با ترانزاده‌ی غیر مزدوج خود برابر باشد:

$$A = A^T \quad (28)$$

برحسب درایه‌های ماتریس می‌توان گفت که:

$$a_{ij} = a_{ji} \quad (29)$$

و ماتریس مربعی A هرمیتی است، اگر با ترانزاده‌ی مزدوج خود برابر باشد.

$$A = \overline{A^T} \quad (30)$$

بر حسب درایه‌های ماتریس، این بدان معناست که:

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}} \quad (31)$$

از آن‌جا که ماتریس‌های حقیقی، متأثر از مزدوج مختلط خود نیستند، یک ماتریس حقیقی متقارن، هرمیتی نیز هست. بنابراین اگر ماتریسی هرمیتی (متقارن) باشد،

۵. کنترل پارامترهای مربوط به ماتریس سختی

در بخش‌های پیشین به بحث در رابطه با روش‌های عددی اجزای محدود استاندارد، اجزای محدود توسعه‌یافته و آنالیز ایزوژنومتریکی پرداختیم. حال در این قسمت، به منظور کنترل ماتریس سختی، پارامترهای کنترلی یک ماتریس را بررسی خواهیم کرد.

۱.۵. عرض باند ماتریس

عرض باند بالایی و پایینی یک ماتریس با یافتن آخرین قطر (به ترتیب بالا یا پایین قطر اصلی) که مقادیر غیر صفر را در بردارد، اندازه‌گیری می‌شود. در واقع تعداد درایه‌های غیر صفر بالای قطر اصلی ماتریس نمایانگر عرض باند بالا و تعداد درایه‌های غیر صفر پایین قطر اصلی نشان‌دهنده‌ی عرض باند پایین است.

۲.۵. مستقل خطی بودن سطر و ستون‌های ماتریس

در این قسمت، درجه‌ی ساختاری یک ماتریس تنک بررسی می‌شود. در این حالت برای یک ماتریس مربعی، باید درجه‌ی ساختاری ماتریس با تعداد سطرها (ستون‌ها) برابر باشد.

۳.۵. مقادیر ویژه‌ی ماتریس

دستگاه معادلات ۲۳ را در نظر می‌گیریم؛

$$A_{n \times n} x_{n \times 1} = b_{n \times 1} \quad (23)$$

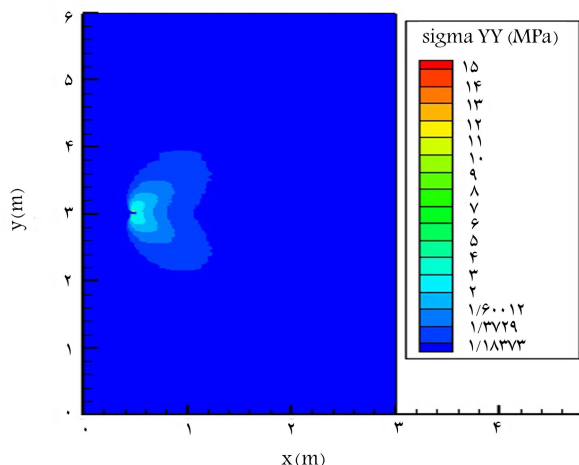
می‌توان این دستگاه را به صورت نگاشتی در فضای برداری R^n در نظر داشت که هر بردار x را به یک بردار b تبدیل می‌کند.

$$x \rightarrow A \rightarrow Ax = b \quad (24)$$

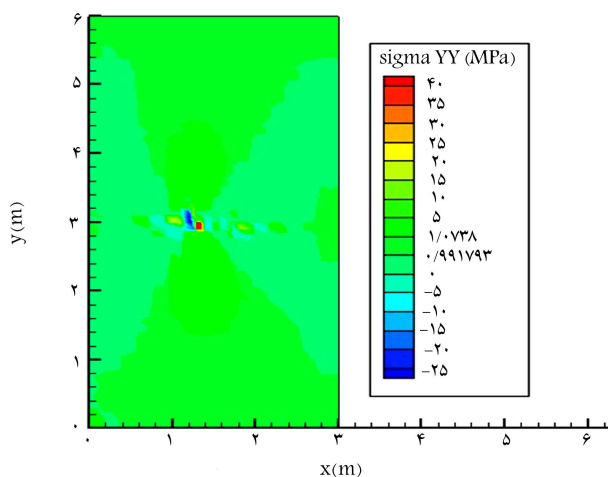
برخی از این نگاشت‌ها، فقط اندازه‌ی بردار x را تغییر می‌دهند و امتداد آن را بدون تغییر باقی می‌گذارند. به عبارت دیگر، بردار b به صورت مضربی از بردار x تعریف می‌شود. بنابراین نگاشت حاصل چنین تعریف می‌شود:

$$Ax = \lambda x \quad (25)$$

بردارهای x_i مخالف صفر که دارای چنین خاصیتی هستند، بردارهای ویژه ماتریس $A_{n \times n}$ نام دارند. به ضریب ثابت λ_i مقدار ویژه‌ی ماتریس $A_{n \times n}$ گفته می‌شود.



شکل ۷. شبکه‌ی اجزای محدود و توزیع تنش σ_{yy} برای مثال ترک لبه‌یی (۱۳۴۲۶) درجه آزادی).

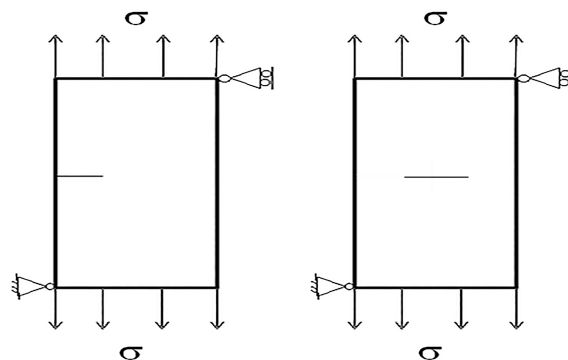


شکل ۸. شبکه‌ی اجزای محدود و توزیع تنش σ_{yy} مثال ترک میانی (۳۸۲۴) درجه آزادی).

یکنواخت (المان ۴ گرهی اجزای محدود) انجام شده اما در مبنای انتگرال‌گیری نوک ترک، از زیرماتریس‌سازی استفاده شده است که در این حالت با شکست ماتریس و تقسیم کردن مجازی المان‌های مربعی به مثلثی تعداد نقاط گوسی را در انتگرال‌گیری افزایش داده و به این ترتیب دقت محاسبات افزایش می‌یابد.

در شکل ۹ بهترین توزیع تنش مربوط به ترک لبه‌یی و ترک میانی حاصل از روش اجزای محدود توسعه یافته، نمایش داده شده است. توزیع تنش به دست آمده نشان‌دهنده‌ی تمرکز تنش در نوک ترک است. این توزیع تنش با المان‌های مربعی به طول 0.2° به دست آمده و در مدل حاوی ترک لبه‌یی 91022° درجه آزادی و مدل حاوی ترک میانی، 91044° درجه آزادی به کار رفته است؛ لذا شبکه بسیار ریز محسوب می‌شود. به طور معمول با ریز کردن شبکه نتایج دقیق‌تر خواهد شد؛ مگر در موارد خاصی که دامنه به علت ریز کردن بیش از حد شبکه، اشباع شده و نتایج همواری را در اختیار محقق قرار نمی‌دهد.

در جدول ۲ نتایج حاصل از آنالیز ورق حاوی ترک لبه‌یی و نیز ترک میانی برای چند مش بندی مناسب با استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته ارائه شده است.



شکل ۶. ورق حاوی ترک لبه‌یی و میانی واحد تحت بار تک‌محوری کششی.

مقدار ویژه‌ی آن عددی حقیقی بوده و بردار ویژه‌ی آن متعامد خواهد بود.^[۲۸] در روش آنالیز ایزوژئومتریک ماتریس محاسبه شده حتی در صورت هریمیتی بودن نامتقارن است. این عدم وجود تقارن به علت نیاز به حل دستگاه معادلات خطی ویژگی نامطلوبی تلقی می‌شود.^[۲۹]

۵.۵. شاخص سختی

شاخص سختی در واقع نسبت بیشینه مقدار ویژه‌ی ماتریس سختی به کمینه آن است که هرچه قدر این شاخص به مقدار یک نزدیک‌تر باشد، بیان‌گر این است که ماتریس سختی در وضعیت مطلوب‌تری قرار دارد.

۶. مدل‌سازی و آنالیز

در این قسمت به مدل‌سازی و آنالیز ترک‌های لبه و میانی به طول 0.5° متر در ورقی به ابعاد 3×6 متر تحت تنش 1 MPa با شرایط تکیه‌گاهی نشان داده شده در شکل ۶ با استفاده از روش‌های اجزای محدود استاندارد، اجزای محدود توسعه یافته و روش آنالیز ایزوژئومتریک می‌پردازیم.

۱.۶. مدل‌سازی به روش اجزای محدود استاندارد

چنان که در بخش قبل اشاره شد، در مدل‌سازی به روش اجزای محدود استاندارد در اطراف نوک ترک از المان‌های تکین استفاده می‌شود. بنابراین در این پژوهش، المان‌های تکین هشت‌گره‌ی مورد استفاده قرار گرفته و شبکه‌بندی به سمت نوک ترک ریزتر می‌شود. واضح است در حالتی که ورق دارای یک ترک لبه‌یی باشد، چهار المان تکین و هنگامی که ورق حاوی یک ترک میانی باشد، هشت المان تکین در اطراف دو نوک ترک به کار می‌رود. شبکه‌بندی‌های صورت گرفته و توزیع تنش مربوط به آنها، به ترتیب برای دو حالت ترک لبه‌یی و ترک میانی در دو شکل ۷ و ۸ نشان داده شده است.

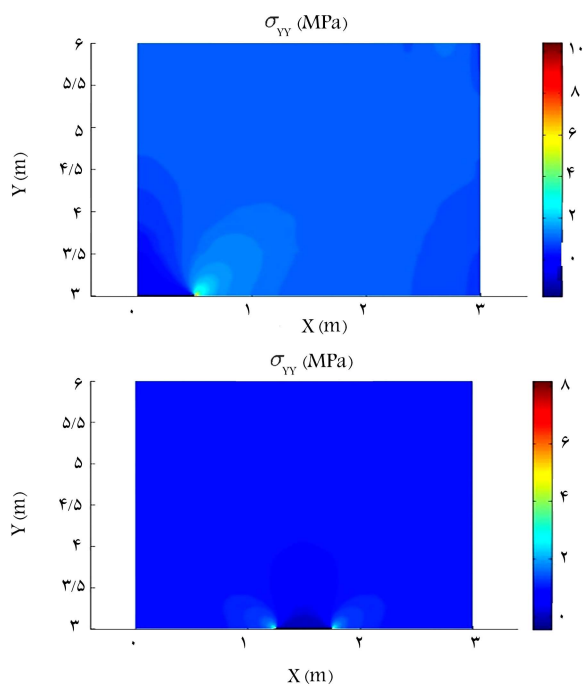
در جدول ۱، نتایج حاصل از تحلیل ورق حاوی ترک لبه‌یی و نیز ترک میانی برای چند شبکه‌بندی مناسب با استفاده از روش اجزای محدود استاندارد ارائه شده است.

۲.۶. مدل‌سازی به روش اجزای محدود توسعه یافته

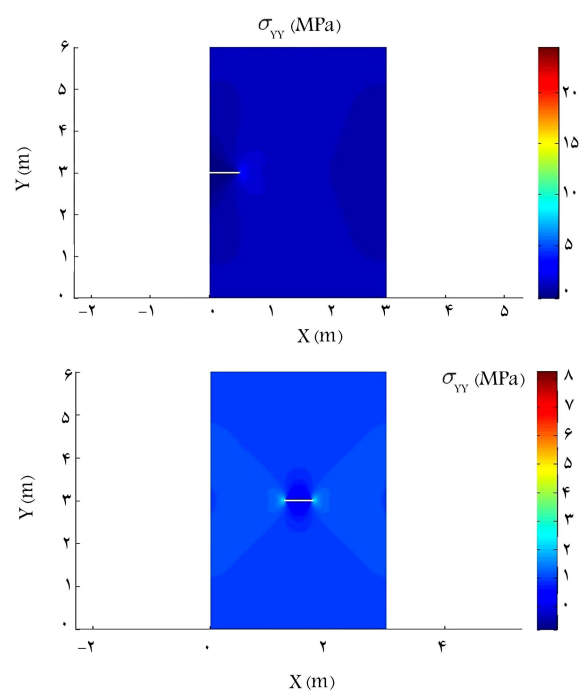
در این بخش، گسسته‌سازی دامنه‌ی مورد نظر در هر جهت با المان‌های مربعی با ابعاد مختلف صورت گرفته است. در این روش، مدل‌سازی با استفاده از مش

جدول ۱. نتایج حاصل از محاسبه‌ی ماتریس سختی با روش اجزای محدود برای مثال‌های ترک لبه‌یی و ترک میانی.

تشریح مدل	تعداد المان‌ها	درجات آزادی	شاخص سختی	عرض باند		سطرهای مستقل	تقارن ماتریس سختی	هرمیتی بودن
				پایین	بالا			
ترک لبه‌یی	۱۹۲	۱۲۹۰	۶,۲۲	۱۲۹	۱۲۹	۱۲۹۰	متقارن	هرمیتی
ترک لبه‌یی	۲۲۸	۱۸۹۰	۶,۲۲	۱۲۹	۱۲۹	۱۸۹۰	متقارن	هرمیتی
ترک لبه‌یی	۳۵۲	۲۲۹۰	۲۴,۲۶	۱۲۹	۱۲۹	۲۲۹۰	متقارن	هرمیتی
ترک لبه‌یی	۴۴۸	۲۸۹۰	۶,۲۲	۱۲۹	۱۲۹	۲۸۹۰	متقارن	هرمیتی
ترک لبه‌یی	۵۱۲	۳۲۹۰	۳,۵۰	۱۲۹	۱۲۹	۳۲۹۰	متقارن	هرمیتی
ترک لبه‌یی	۶۸۰	۴۳۳۴	۴,۰۸	۱۳۵	۱۳۵	۴۳۳۴	متقارن	هرمیتی
ترک لبه‌یی	۲۱۶۰	۱۳۴۲۶	۱,۴۹	۴۴۹	۴۴۹	۱۳۴۲۶	متقارن	هرمیتی
ترک میانی	۳۲۰	۲۰۸۸	۹,۷۵	۱۵۱	۱۵۱	۲۰۸۸	متقارن	هرمیتی
ترک میانی	۴۴۰	۲۸۳۲	۶,۰۱	۱۵۱	۱۵۱	۲۸۳۲	متقارن	هرمیتی
ترک میانی	۶۰۰	۳۸۳۴	۵,۴۵	۱۵۱	۱۵۱	۳۸۳۴	متقارن	هرمیتی



شکل ۱۰. توزیع تنش σ_{yy} حاصل از روش آنالیز ایزوژئومتریک برای ترک لبه‌یی و ترک میانی.



شکل ۹. توزیع تنش σ_{yy} حاصل از روش اجزای محدود توسعه‌یافته برای ترک لبه‌یی (۹۱۰۲۲ درجه آزادی) و ترک میانی (۹۱۰۴۴ درجه آزادی).

شایان ذکر است که انتخاب مختصات نقاط کنترلی در فضای فیزیکی و همچنین موقعیت مقادیر گرهی در فضای پارامتری ξ و η به ترتیب در جهت‌های x و y به گونه‌یی در نظر گرفته شده که در مختصات نوک ترک، بیشترین تمرکز مقادیر گرهی و نیز نقاط کنترلی فراهم آید. در مدل‌سازی ورق حاوی ترک میانی با این روش، از 123° و 401° نقطه‌ی کنترلی که به ترتیب دارای 246° و 802° درجه آزادی هستند و همچنین دو وصله استفاده شده است. در این روش، ترک میانی به وسیله‌ی تکرار نقاط کنترلی و در نتیجه ایجاد تکینگی در ماتریس سختی صورت پذیرفته است. می‌توان از تعداد نقاط کنترلی کمتر نیز استفاده کرد. اما به علت حصول نتایج بهتر، از این تعداد نقاط کنترلی استفاده شده است. در شکل ۱۰ توزیع تنش به دست آمده از روش آنالیز ایزوژئومتریک برای ورق حاوی ترک لبه‌یی و نیز ورق حاوی ترک میانی نشان داده شده است.

۳.۶. مدل‌سازی به روش آنالیز ایزوژئومتریک

در مدل‌سازی ورق حاوی ترک لبه‌یی با استفاده از روش آنالیز ایزوژئومتریک، از تعداد ۱۲۳۳ نقطه‌ی کنترلی استفاده شده است. همچنین توابع تقریب پایه نربز در هر دو جهت x و y از مرتبه‌ی ۳ انتخاب شده است. لذا مراتب بالاتر توابع تقریب نربز بایستی قادر به مدل‌سازی تغییرات ناگهانی به صورت هموارتر باشد. در این روش شبکه کنترلی و شبکه پارامتری با نزدیک شدن به نوک ترک ریزتر می‌شوند. شبکه‌ی کنترلی در هر وصله، ۲۵ در ۲۵ است. طول بردار گرهی در دو جهت x و y نیز برابر با ۲۹ در نظر گرفته شده است. برای تعیین طول بردار گرهی از رابطه‌ی $k = n + p + 1$ استفاده می‌شود. در جدول ۳ نتایج حاصل از آنالیز ایزوژئومتریک نشان داده شده است.

جدول ۲. نتایج حاصل از محاسبه‌ی ماتریس سختی‌ها با روش اجزای محدود توسعه‌یافته برای مثال‌های ترک لبه‌یی و ترک میانی.

تشریح مدل	اندازه المان‌ها	درجات آزادی	شاخص سختی	عرض باند		تعداد سطرهای مستقل	تقارن ماتریس	هرمیتی بودن
				پایین	بالا			
ترک لبه‌یی	۰٫۲	۱۰۴۴	۱٫۵۰	۵۹۱	۵۹۱	۱۰۴۴	نامتقارن	غیرهرمیتی
ترک لبه‌یی	۰٫۱	۳۸۶۲	۱٫۷۸	۲۰۶۷	۲۰۶۷	۳۸۶۲	نامتقارن	غیرهرمیتی
ترک لبه‌یی	۰٫۰۵	۱۴۸۵	۱٫۲۹	۷۷۰۷	۷۷۰۷	۱۴۸۵۲	نامتقارن	غیرهرمیتی
ترک لبه‌یی	۰٫۳۳	۳۳۰۴	۱٫۲۲	۱۶۹۴	۱۶۹۴	۳۳۰۴۲	نامتقارن	غیرهرمیتی
ترک لبه‌یی	۰٫۲۵	۵۸۴۳	۱٫۱۸	۲۹۷۸	۲۹۷۸	۵۸۴۳۲	نامتقارن	غیرهرمیتی
ترک لبه‌یی	۰٫۰۲	۹۱۰۲	۱٫۱۱	۴۶۲۲	۴۶۲۲	۹۱۰۲۲	نامتقارن	غیرهرمیتی
ترک میانی	۰٫۱	۳۸۸۴	۱٫۷۱	۲۰۴۹	۲۰۴۹	۳۸۸۴	نامتقارن	غیرهرمیتی
ترک میانی	۰٫۰۵	۱۴۹۲	۱٫۳۰	۷۶۷۷	۷۶۷۷	۱۴۹۲۰	نامتقارن	غیرهرمیتی
ترک میانی	۰٫۳۳	۳۳۰۶	۱٫۲۲	۱۶۸۹	۱۶۸۹	۳۳۰۶۴	نامتقارن	غیرهرمیتی
ترک میانی	۰٫۲۸	۴۴۸۶	۱٫۲۰	۲۲۸۵	۲۲۸۵	۴۴۸۶۰	نامتقارن	غیرهرمیتی
ترک میانی	۰٫۰۲	۹۱۰۴۴	۱٫۱۲	۴۶۱۴۳	۴۶۱۴۳	۹۱۰۴۴	نامتقارن	غیرهرمیتی

جدول ۳. نتایج حاصل از محاسبه‌ی ماتریس سختی با روش آنالیز ایزوژئومتریکی برای مثال‌های ترک لبه‌یی و ترک میانی.

تشریح مدل	اندازه المان گرهی	تعداد درجات آزادی	شاخص سختی	عرض باند		تعداد سطرهای مستقل	تقارن ماتریس	هرمیتی بودن ماتریس
				پایین	بالا			
ترک لبه‌یی	متغیر	۲۴۶۶	۱٫۵۶	۱۵۷	۱۳۲۴	۲۴۶۶	نامتقارن	غیرهرمیتی
ترک میانی	متغیر	۲۴۶۰	۱٫۸۵	۱۵۷	۱۳۱۸	۲۴۶۰	نامتقارن	غیرهرمیتی
ترک میانی	متغیر	۸۰۲۰	۱٫۶۹	۲۷۷	۴۱۵۸	۸۰۲۰	نامتقارن	غیرهرمیتی

المان‌های اطراف نوک ترک، گاهی با ریزتر کردن شبکه، نتیجه‌ی مورد انتظار حاصل نمی‌شود.

با توجه به جدول ۳، می‌توان دریافت مقادیر شاخص سختی در روش آنالیز ایزوژئومتریکی، مقادیر مطلوب‌تری هستند. اما برخلاف دو روش اجزای محدود استاندارد و توسعه‌یافته، در روش آنالیز ایزوژئومتریکی، برابر نبودن عرض بالا و پایین ماتریس سختی نشان‌دهنده‌ی پر بودن ماتریس سختی محاسبه شده در این روش است.

در نتیجه ماتریس سختی‌های حاصل از دو روش اجزای محدود استاندارد و اجزای محدود توسعه یافته، از شرایط قطری بودن مناسب‌تری نسبت به ماتریس سختی حاصل از روش آنالیز ایزوژئومتریکی برخوردارند. زیرا چنان که در جداول ۱ تا ۳ مشاهده می‌کنیم، در روش‌های اجزای محدود و اجزای محدود توسعه یافته، پهنای باند بالا و پایین دارای مقادیر برابری است حال آن که در روش آنالیز ایزوژئومتریکی، مقادیر پهنای باند و پایین متفاوت است. در واقع ماتریس سختی حاصل از روش آنالیز ایزوژئومتریکی، متراکم‌تر از ماتریس سختی حاصل از دو روش دیگر است. این موضوع به خودی خود از نظر محاسبات ماتریسی، سبب بروز اختلافاتی در نوع حل یا حجم محاسبات جهت معکوس کردن ماتریس می‌شود. اما، شاید بتوان گفت که به علت کوچک‌تر بودن ابعاد ماتریس در مقایسه با روش دیگر، این اختلاف قابل چشم‌پوشی است. همچنین باید اشاره کرد که ماتریس سختی حاصل از روش آنالیز ایزوژئومتریکی غیرقطری است. این مسئله منجر به افزایش میزان محاسبات لازم در عملیات‌های ماتریسی می‌شود.

نتایج حاصل از محاسبه‌ی ماتریس سختی برای ترک‌های میانی و لبه در روش‌های اجزای محدود استاندارد، توسعه یافته و روش آنالیز ایزوژئومتریکی به ترتیب در جدول‌های ۱ تا ۳ آمده است. ماتریس سختی‌های به دست آمده از سه روش، پر یا متراکم نیستند و مقادیر صفر زیادی دارند. چنان که در جدول‌های ۱ و ۲ مشاهده می‌شود، نسبت پیشینه به کمینه مقدار ویژه‌ی ماتریس سختی که شاخص سختی نام دارد، در روش اجزای محدود توسعه یافته به مقدار ۱ نزدیک‌تر است و بنابراین ماتریس سختی در این روش نسبت به روش اجزای محدود استاندارد از شرایط مطلوب‌تری برخوردار است.

همچنین در هر دو روش، عرض باند بالا و پایین با یکدیگر برابر است و در نتیجه هر دو روش از شرایط قطری بودن خوبی برخوردارند و شرایط تراکم و پر بودن ماتریس سختی (وجود درایه‌های غیر صفر) در دو روش یکسان است. همچنین لازم به ذکر است که در روش اجزای محدود توسعه یافته، با ریزتر شدن شبکه، شاخص سختی به عدد ۱ نزدیک‌تر شده و وضعیت ماتریس سختی مطلوب‌تر می‌شود. در روش اجزای محدود استاندارد، وضعیت ماتریس سختی به میزان قابل توجهی به شبکه، خصوصاً مش‌بندی در اطراف نوک ترک و ابعاد المان‌ها حساس است، به طوری که دستیابی به یک مش‌بندی مطلوب که در آن ماتریس سختی تکین نشده و شاخص سختی به عدد ۱ نزدیک باشد، تا حدودی دشوار است. در مواردی مشاهده شد که با ریزتر کردن مش، مقدار شاخص سختی بالاتر می‌رفت که این امر ناشی از وجود ناپیوستگی در هندسه‌ی مسئله است؛ با ریزتر کردن مش، حضور ناپیوستگی بهتر نشان داده می‌شود. حال آن که در روش اجزای محدود و

هندسه و ویژگی‌های ریاضی ماتریس سختی به دست آمده از سه روش عددی اجزای محدود استاندارد، اجزای محدود توسعه یافته و روش آنالیز ایزوژئومتریکی در این مطالعه به نحو مطلوبی مقایسه شد. هر دو روش آنالیز ایزوژئومتریکی و اجزای محدود توسعه یافته از توانایی‌های قابل توجهی در تولید دامنه‌ی ناپیوسته برخوردارند. در روش آنالیز ایزوژئومتریکی امکان استفاده از توابع پایه‌ی مرتبه‌ی بالاتر نیز، موجب بالا رفتن قابلیت این روش برای شبیه‌سازی تغییرات ناگهانی سطح تنش در مقایسه با دو روش دیگر شده است. لذا روش آنالیز ایزوژئومتریکی می‌تواند به ابزاری قدرتمند در زمینه‌ی حل مسایل مکانیک شکست تبدیل شود. این روش نسبت به دو روش دیگر، توزیع تنش قائم σ_{yy} هموارتری را در اختیار قرار می‌دهد. علاوه بر این، به تولید شبکه‌ی بین‌المانی مشابه با روش اجزای محدود نیاز ندارد که این امر، یک مزیت بزرگ در این روش محسوب می‌شود. به عبارت دیگر در زمان بسیار کوتاه‌تری، دامنه‌ی مسئله را از طریق یک یا چند وصله تولید می‌کند. در روش آنالیز ایزوژئومتریکی بر پایه‌ی نر، هندسه‌ی مدل با دقت بسیار بالایی ایجاد می‌شود. در

حالی که در دو روش دیگر با خطای تقریب هندسه و متغیر اصلی مسئله مواجه هستیم. استفاده از تکرار نقاط کنترلی در مرز وصله‌ها با پیوستگی C^0 در یک موقعیت که به تولید ناپیوستگی به شکل ترک می‌انجامد، یک امکان منحصر به فرد در روش آنالیز ایزوژئومتریکی محسوب می‌شود. ماتریس سختی به دست آمده از دو روش اجزای محدود استاندارد و اجزای محدود توسعه یافته نسبت به روش آنالیز ایزوژئومتریکی از شرایط قطری بودن بهتر و مناسب‌تری برخوردارند و پهنای باند بالا و پایین در این روش‌ها برابر است. در حالی که در روش آنالیز ایزوژئومتریکی، پهنای باند بالا و پایین ماتریس سختی یکسان نیست.

درواقع این بدان معناست که ماتریس سختی حاصل از روش آنالیز ایزوژئومتریکی متراکم‌تر و پرتراز دو روش دیگر است که این امر موجب بالا رفتن حجم محاسبات ماتریسی خواهد شد. همچنین شاخص سختی در روش اجزای محدود توسعه یافته از دو روش دیگر کمتر بوده و به مقدار ۱ نزدیک‌تر است. پس از آن، روش آنالیز ایزوژئومتریکی دارای شاخص سختی کمتری نسبت به روش اجزای محدود استاندارد است. این امر نشان می‌دهد که شرایط ماتریس سختی در روش اجزای محدود توسعه یافته از دو روش دیگر مناسب‌تر است.

پانویس‌ها

1. Benzley
2. Atluri
3. Gifford
4. Melank
5. Babuska
6. partition of Unity
7. Belytschko
8. computer aided design (CAD)
9. non-uniform rational b-spline (NURBS)
10. Hensell, Shaw & Barsoum
11. singular element
12. blended stiffness
13. variation diminishing
14. convex hull property

منابع (References)

1. Gdoutos, E.E. "Fracture mechanics: an introduction", Springer Science & Business Media, 2nd Edn., Waterloo, Ontario, Canada, pp. 1-15, (2006).
2. Lin, M., et al. "Application of the extended Finite Element method (XFEM) to simulate crack propagation in pressurized steel pipes". In ASME 2017 Pressure Vessels and Piping Conference. pp. 16-20, Waikoloa, Hawaii, USA, (2017).
3. Khademalrasoul, A. and R. Maghsoudi, "Estimation of failure path in the Structures and the influences of non-singular term on crack propagation", Journal of Hydraulic Structures, 1, pp. 1-21, (in Persian)(2017).
4. Moës, N., Dolbow, J. and Belytschko, T. "A finite element method for crack growth without remeshing", International journal for numerical methods in engineering, 46, pp. 131-150 (1999).
5. Arnesson, S. "XFEM-analysis and implementation," Division of Solid Mechanics, M.Sc. dissertation, Lund University, Sweden, (2014).
6. Tan, P., Nguyen-Thanh, N. and Zhou, K. "Extended isogeometric analysis based on B'ezier extraction for an FGM plate by using the two-variable refined plate theory", Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 89, pp. 127-138, (2017).
7. Nguyen - Thanh, N. and Zhou, K. " Extended isogeometric analysis based on PHT - splines for crack propagation near inclusions", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 112, pp. 1777-1800, (2017).
8. Karatarakis, A., Karakitsios, P. and Papadrakakis, M.. "Computation of the isogeometric analysis stiffness matrix on GPU", In Proc. of the 3rd South-East European Conference on Computational Mechanics (SEECCM). Elsevier. Athens, Greece (2013).
9. Naderi, R. and Khademalrasoul, A. "Comparison between isogeometric analysis and extended Finite element methods in discontinuities modeling and stress intensity factor calculation ", Journal of Computational Methods in Engineering (Esteghlal), 5, pp. 83-109, (in Persian) (Summer 2016).
10. Logan, D., A First Course in the Finite Element Method. Thomson Canada., Fourth Edition, University of Wisconsin-Platteville: pp. 1-343 (2007).
11. Barsoum, R., "An assessment of the quarter-point elements in pressure vessel fracture analysis", In Structural mechanics in Reactor Technology, 6th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology; Paris, France (1981).

12. Henshell, R. and Shaw, K. "Crack tip finite elements are unnecessary", *International journal for numerical methods in engineering*, **9**, pp. 495-507 (1975).
13. Banks-Sills, L. and Sherman, "Comparison of methods for calculating stress intensity factors with quarter-point elements", *International Journal of Fracture*, **32**, pp. 127-140 (1986).
14. Mirzaei, M. "Fracture mechanics; theory and applications", Department of Mechanical Engineering, TMU, (2016).
15. Sukumar, N., Moës, N., Belytschko, T. and et al. "Extended finite element method for three-dimensional crack modelling", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **48**11, pp. 1549-1570 (2000).
16. Melenk, J.M. and Babuška, I. "The partition of unity finite element method: basic theory and applications", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **139**, 289-314 (1996).
17. Mohammadi, S. "Extended finite element method: for fracture analysis of structures", *Blackwell Publishing*, Oxford, UK, pp. 1-115 (2008).
18. Lan, M., Waisman, H. and Harari, I. "A direct analytical mode components of strain energy release-method to extract mixed rates from Irwin's integral using extended finite element method". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **95**, pp. 1033-1052 (2013).
19. Naderi, R. and Khademalrasoul, A. "Fully automatic crack propagation modeling in the interaction with void and inclusion without remeshing", *Modares Mechanical Engineering*, **15**, pp. 261-273 (in Persian)(2015).
20. Naderi, R. and Khademalrasoul, A. "Automatic mixed-mode crack propagation and fatigue growth without domain remeshing". *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, Summer 2011, pp. 27-38 (in Persian).(2011)
21. Cottrell, J.A., Hughes, T.J. and Bazilevs, Y. "Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA", *John Wiley & Sons, UK* (2009).
22. Hughes, T.J., Cottrell, J.A. and Bazilevs, Y. "Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **194**, 4135-4195 (2005).
23. De Luycker, E., et al. "X -FEM in isogeometric analysis for linear fracture mechanics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **87**, pp. 541-565 (2011).
24. Khademalrasoul, A. and Naderi, R. "Local and global approaches to fracture mechanics using isogeometric analysis method", *Journal of Applied and Computational Mechanics*, **1**, pp. 168-180 (2015).
25. Khademalrasoul, A. "NURBS-based isogeometric analysis method application to mixed-mode computational fracture mechanics". *Journal of Applied and Computational Mechanics*, **5**, pp. 217-230 (2019).
26. Nguyen, V.P., et al., "Isogeometric analysis: an overview and computer implementation aspects", *Mathematics and Computers in Simulation*, **117**, pp. 89-116 (2015).
27. Khademalrasoul, Abdolghafoor, and Reza Naderi. "Local and global approaches to fracture mechanics using isogeometric analysis method", *Journal of Applied and Computational Mechanics*, pp. 168-180 (in Persian)(2015).
28. Kostić, A., *Eigenvalue Problems*, in Applied Linear Algebra in Action, IntechOpen, Bosnia and Herzegovina (2016).
29. Tani, M. "A preconditioning strategy for linear systems arising from nonsymmetric schemes in isogeometric analysis", *Computers & Mathematics with Applications*, **74**, pp. 1690-1702 (2017).