

# تشخیص محل آسیب در سازه‌های پوسته‌ی استوانه‌یی دارای مواد هدفمند واقع بر بستر کشسان

احسان آقا احمدی (کارشناس ارشد)

رضا تقی پور\* (استادیار)

محسن بزرگ نسب (استادیار)

محمد ملاعلی پور (استادیار)

دانشکده‌ی هندی عمران، دانشگاه مازندران

مهندسی عمران شریف، پاییز (۱۳۹۹)  
دوری ۲ - ۳۶، شماره ۲/۳، ص. ۱۲۵-۱۳۳

شناسایی آسیب در سازه، اهمیت زیادی دارد؛ چرا که بیشتر سازه‌ها به دلیل افت کارایی و بارگذاری‌های پیش‌بینی نشده، در معرض تهدیدهای عمده‌ی هستند. هدف اصلی نوشتار حاضر، بررسی ارتعاش آزاد سازه‌های پوسته‌ی استوانه‌یی دارای مواد هدفمند واقع بر بستر کشسان در حالت‌های سالم و آسیب‌دیده است. بدین منظور از یک روش تحلیلی مبتنی بر تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی اول استفاده شده است. معادلات مرتبط با کمک سری مک‌لورن استخراج و در نرم‌افزار میپل پیاده‌سازی شده و بسامدها و شکل‌های مودی آن استخراج شده است. در ادامه، صحت‌سنجی عددی مدل با کمک مراجع معتبر و نیز نتایج نرم‌افزار آباکوس انجام شده است. به منظور بررسی کارایی روش پیشنهادی در تشخیص محدوده‌ی آسیب‌دیده‌ی سازه، سناریوهای مختلف خرابی در شرایط تکیه‌گاهی مختلف و با شرایط بستر کشسان متفاوت اعمال شده است. در تعیین محدوده‌ی آسیب‌دیده‌ی سازه از مشتق‌های شکل‌های مودی استفاده شده است. بررسی‌ها نشان‌گر عملکرد مناسب مدل پیشنهادی در تشخیص محدوده‌ی آسیب هستند.

واژگان کلیدی: پوسته‌ی استوانه‌یی دارای مواد هدفمند، تشخیص محل آسیب، رفتار ارتعاش آزاد، تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی اول، مشتق‌های شکل‌های مودی.

aghaahmadi12@gmail.com  
r.taghipour@umz.ac.ir  
m.bozorgnasab@umz.ac.ir  
m.mollaalipour@umz.ac.ir

## ۱. مقدمه و تاریخچه مطالعات

۱۹۹۹، لوی و لم<sup>۲</sup> روشی تقریبی برای بررسی ارتعاش پوسته‌های استوانه‌یی دایره‌یی ضخیم براساس تئوری کشسانی سه‌بعدی ارائه و شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده - ساده و تکیه‌گاه گیردار-گیردار را بررسی کردند. در رویکرد اخیر، پوسته‌ی استوانه‌یی ضخیم به تعداد دلخواه لایه‌های استوانه‌یی نازک در جهت ضخامت تقسیم می‌شود و هر لایه، یک حالت تنش سه‌بعدی را در نظر می‌گیرد.<sup>[۱]</sup> در سال ۲۰۰۱ ونگ<sup>۳</sup> و همکارانش، الگوریتمی برای شناسایی خسارت سازه با استفاده از اطلاعات آزمایش استاتیکی و تغییرات در بسامدهای طبیعی ارائه کردند و نشان دادند که الگوریتم پیشنهادی قابلیت استفاده در حالتی که اطلاعات اندازه‌گیری شده، ناقص باشند، را نیز دارد. همچنین کارایی روش اشاره شده را با استفاده از مدل‌سازی سازه‌های خرابایی صفحه‌یی و تیر دو سرگیردار نشان دادند.<sup>[۴]</sup> در سال ۲۰۰۶، کینگ<sup>۴</sup> و همکارانش یک روش نیمه‌تحلیلی را برای تجزیه و تحلیل بسامدهای طبیعی و شکل‌های مودی پوسته‌های دو لایه‌ی ضخیم‌گسترش دادند. براساس روش نیمه‌تحلیلی ریاضی برای سیستم‌های پوسته‌ی دو لایه‌ی ضخیم برای معادله‌ی برداری، پوسته‌های استوانه‌یی دایره‌یی ایجاد شده است. مزیت اصلی مدل اخیر آن است که مش اجزاء محدود فقط در سطح منحنی پوسته‌ها استفاده می‌شود و تعداد متغیرها مستقل از ضخامت دیواره‌ی پوسته‌های استوانه‌یی است.<sup>[۵]</sup> در سال ۲۰۰۹، اقبال<sup>۵</sup> و همکارانش با استفاده از روش انتشار

شناسایی خرابی در سازه، اهمیت زیادی دارد. زیرا بیشتر سازه‌ها به دلیل افت کارایی و بارگذاری‌های پیش‌بینی نشده، در معرض تهدیدهای عمده‌ی، مانند تولید و رشد ترک‌ها و گسیختگی هستند؛ و مشکلات ذکر شده با بارگذاری حاصل از خطرهای طبیعی یا مصنوعی، مانند زلزله و انفجار تشدید می‌شوند. پوسته‌ها در شکل‌ها و کاربردهای مختلفی تعریف شده‌اند، که به عنوان مثال می‌توان به استفاده از آنها در بدنه، بال و موتور هواپیماها و فضاپیماها، لوله‌های انتقال گاز، نفت و مواد شیمیایی، مخازن آب و سوخت، بدنه‌ی زیردریایی، سیلواها و بسیاری از موارد مشابه اشاره کرد. گستردگی کاربرد پوسته‌ها، علت رشد چشمگیر مطالعات انجام یافته در حوزه‌ی مذکور است. مواد هدفمند (FGM)<sup>۱</sup> که در پژوهش حاضر استفاده شده‌اند، موادی هستند که به واسطه‌ی تغییر تدریجی خواص، توزیع و جهت‌گیری در یک یا چند بعد، خواص متفاوتی را در مناطق مختلف از خود نشان می‌دهند. این تغییر تدریجی در ساختار و خواص منجر به گسترش کاربرد مواد هدفمند شده است. در ادامه، به طور مختصر، به برخی از مطالعات انجام شده بر روی پوسته‌ها اشاره شده است. در سال

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۸/۴/۱۳۹۸، اصلاحیه ۱۵/۷/۱۳۹۸، پذیرش ۲۱/۷/۱۳۹۸.

DOI:10.24200/J30.2019.53877.2600

موج به بررسی ویژگی‌های ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای دایره‌ای هدفمند برای شرایط مرزی مختلف پرداختند. و به منظور صحت‌سنجی، نتایج به دست آمده را با نتایج موجود در نوشتارهای دیگر مقایسه کردند و نشان دادند که انطباق خوبی دارند.<sup>[۴]</sup> در سال ۲۰۱۰، شریعت و علی‌پور بر اساس روش تبدیل دیفرانسیل، یک راه حل نیمه تحلیلی برای تجزیه و تحلیل ارتعاش آزاد و تنش مودال صفحات دایره‌ای دارای مواد هدفمند با ضخامت متغیر و لبه‌های گیردار واقع بر بسترکشسان ارائه کردند. تغییرات پارامترهای مواد و هندسه توسط پنج تابع نمایی به صورت مجزا بررسی شده است.<sup>[۵]</sup> در سال ۲۰۱۳، شریعت و علی‌پور، یک راه حل مبتنی بر سری توانی برای تحلیل صفحات هدفمند تحت ارتعاش آزاد و با میرایی ویسکوالاستیک ارائه کردند. در پژوهش مذکور، تغییرات خواص برای مواد هدفمند (FGM) به طور هم‌زمان در دو جهت مختلف عرضی و شعاعی لحاظ شده است.<sup>[۶]</sup> در سال ۲۰۱۴، علی‌پور و شریعت، روش دیگری را برای بررسی ارتعاش‌های آزاد ورق ساندویچ حلقوی هدفمند را بر روی بسترکشسان و ینکار پیشنهاد دادند و نتایج حاصل از روش پیشنهادی را با نتایج نرم‌افزار آباکوس مقایسه کردند.<sup>[۷]</sup> در سال ۲۰۱۴، نیز ژانگ<sup>۶</sup> و همکارانش یک روش جدید برای شناسایی آسیب در سازه‌های پوسته‌ای استوانه‌ای شکل بر اساس منحنی تغییر بسامد (FSC) ارائه کردند. منحنی ذکر شده با استفاده از جرم کمکی که در برگینده‌ی اطلاعات بسامدهای طبیعی و شکل‌های مودی است، به وجود می‌آید. زمانی که منحنی تغییر بسامد (FSC) صاف باشد، نشان‌دهنده‌ی عدم وجود آسیب و در صورت داشتن قله‌های تناوبی، امکان نقص محلی یا آسیب‌دیدگی مشاهده می‌شود. ایشان همچنین در مقایسه با دیگر روش‌های مبتنی بر ارتعاش نشان دادند که روش پیشنهادی سرعت و کارآمدی بیشتر دارد، به صورتی که بسامدهای اندازه‌گیری شده، دقیق‌تر از شکل‌های مودی هستند.<sup>[۸]</sup> در سال ۲۰۱۵، یزدان‌پناه و همکاران یک شاخص خرابی بر پایه‌ی اطلاعات شکل مودی برای تیر پیشنهادی کردند و از مشتقات مرتبه‌ی اول و دوم شکل‌های مودی برای شناسایی محل آسیب‌های منفرد و چندگانه استفاده کردند. نتایج حاصل نشان می‌دهد که شاخص پیشنهادی نسبت به سایر شاخص‌های ارائه شده در مراجع، عملکرد بهتری دارد.<sup>[۹]</sup> در سال ۲۰۱۵، سانگ<sup>۷</sup> و همکارانش به وسیله‌ی مجموعه‌ی بی‌از فنرهای مصنوعی به تحلیل ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی متقارن با شرایط تکیه‌گاهی مختلف پرداختند و دریافتند که روش حاضر برای تحلیل ارتعاش پوسته‌هایی که تحت شرایط تکیه‌گاهی مختلف، از جمله: محدودیت‌های کلاسیک، محدودیت‌های کشسان و ترکیب آنها، مؤثر و کارآمد است.<sup>[۱۰]</sup> در سال ۲۰۱۵، نوایان و همکاران یک شاخص کارآمد بر پایه‌ی اطلاعات شکل مودی سازه‌های سالم و آسیب‌دیده برای سازه‌های صفحه‌ی ارائه کردند. ایشان، برای شناسایی محل آسیب‌های منفرد و چندگانه، شاخصی مبتنی بر مشتق‌های شکل‌های مودی پیشنهاد کردند و دریافتند که شاخص پیشنهادی با دقت بسیار بالا قادر به تشخیص محل وقوع خرابی‌های منفرد و چندگانه است.<sup>[۱۱]</sup> در سال ۲۰۱۷، ژانگ و همکارانش برای تشخیص آسیب مبتنی بر ارتعاش از یک روش نمایش سلامت سازه استفاده کردند، که برای شناسایی خسارت در ساختارهای کامپوزیت به کار می‌رود. با این حال، دقت آن ممکن است به شدت تحت تأثیر خطاهای اندازه‌گیری و اختلاف بین ساختار واقعی کامپوزیت و مدل‌های عددی آن باشد. بنابراین مطالعه‌ی اثر چنین اختلال‌هایی در دقت پیش‌بینی بسیار مهم است.<sup>[۱۲]</sup> در سال ۲۰۱۷، گارو<sup>۸</sup> و همکارانش یک روش مبتنی بر پارامتر مودال ارائه کرده‌اند، تا آسیب را در لوله‌های استوانه‌ای فولادی تشخیص دهد. بدین منظور، یک فرمول تحلیلی که تغییرات شعاعی لوله را بر اساس معادله‌ی پرسکات<sup>۹</sup> در نظر می‌گیرد، ارائه کردند و دریافتند که روش پیشنهادی در تشخیص آسیب در سازه‌ی اخیر قابل اتکاست.<sup>[۱۳]</sup> در سال ۲۰۱۹، محمدرضا زاده و جعفری، کنترل ارتعاشی فعال لایه‌ی

## ۲. معادلات حاکم

شکل ۱، تصویر کلی و پارامترهای هندسی یک پوسته‌ی استوانه‌ای را نشان می‌دهد: همان‌طور که ملاحظه می‌شود، L طول استوانه، R شعاع بیرونی و h ضخامت استوانه است. بر اساس تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی اول،<sup>[۱۴]</sup> معادلات حاکم بر روابط پوسته‌ی استوانه‌ای به صورت رابطه‌ی ۱ است:

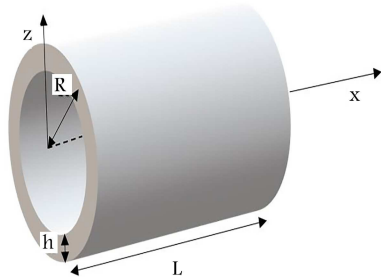
$$\begin{cases} u(x, z) = u_x + z\psi_x \\ w(x, z) = w_x \end{cases} \quad (1)$$

که در آن، u و w جابه‌جایی‌ها،  $u_x$  و  $w_x$  جابه‌جایی‌های صفحه‌ی میانی ( $z=0$ ) در راستای x و z هستند و  $\psi_x$  چرخش حول راستای محور طولی استوانه و z متغیر ضخامت استوانه است، که در شکل ۱ تعریف شده‌اند. روابط جابه‌جایی کرنش برای پوسته‌های استوانه‌ای شکل به صورت معادلات ۲ بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} + z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_\theta = \frac{w}{R} \\ \gamma_{xz} = \psi_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} \end{cases} \quad (2)$$

که در آنها،  $\varepsilon_x$  کرنش طولی و  $\varepsilon_\theta$  کرنش زاویه‌ی  $\gamma_{xz}$  کرنش برشی هستند. همچنین تنش‌های متناظر که بر اساس قانون هوک تعمیم داده شده‌اند، به صورت روابط ۳ تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu \varepsilon_\theta) \\ \sigma_\theta = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_x) \\ \tau_{xz} = \frac{E}{1+\nu} \gamma_{xz} \end{cases} \quad (3)$$



شکل ۱. هندسه‌ی پوسته‌ی استوانه‌ای.

$$\begin{cases} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{D} \end{cases} = \int_{-h/\tau}^{h/\tau} \frac{vE(x, z)}{\sqrt{1-v^2}} \begin{cases} 1 \\ z \\ z^2 \end{cases} dz, \\ \begin{cases} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{D} \end{cases} = \int_{-h/\tau}^{h/\tau} \frac{E(x, z)}{\sqrt{1+v}} \begin{cases} 1 \\ z \\ z^2 \end{cases} dz, \\ \begin{cases} I_0 \\ I_1 \\ I_2 \end{cases} = \int_{-h/\tau}^{h/\tau} \rho(x, z) \begin{cases} 1 \\ z \\ z^2 \end{cases} dz \quad (7)$$

در ادامه، معادله‌ها و مشتق‌های روابط ۶ در معادله‌های ۵ جایگذاری شده و همچنین  $k = \frac{E}{\rho}$  ضریب تصحیح برشی مربوط به تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی اول جهت بهبود پاسخ‌ها بوده است. معادلات ۸ به این صورت به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} A \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{\bar{A}}{R} \frac{\partial w_x}{\partial x} = I_0 \frac{d^2 u_x}{dx^2} + I_1 \frac{d^2 \psi_x}{dx^2} \\ B \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{\bar{B}}{R} \frac{\partial w_x}{\partial x} - \kappa \tilde{A} \left( \psi_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) = \\ I_1 \frac{d^2 u_x}{dx^2} + I_2 \frac{d^2 \psi_x}{dx^2} \\ - \frac{A}{R^2} \frac{\partial w_x}{\partial x} - \frac{\bar{A}}{R} \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\bar{B}}{R} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \kappa \tilde{A} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \\ k \tilde{A} \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + k w_x (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) w = I_0 \frac{d^2 w_x}{dx^2} \end{cases} \quad (8)$$

رابطه‌ی ۹ انواع شرایط مرزی در دو انتهای پوسته‌ی استوانه‌یی را نشان می‌دهد:

$$\begin{aligned} \text{تکیه‌گاه ساده:} \quad & u_x = 0, M_x = 0, w_x = 0 \\ \text{انتهای آزاد:} \quad & N_x = 0, M_x = 0, Q_x = 0 \\ \text{انتهای گیردار:} \quad & u_x = 0, \psi_x = 0, w_x = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

برای حل معادلات از سری توانی مک لورن استفاده می‌شود و بر اساس مجهولات، سه معادله بر اساس روابط ۱۰ به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} u_x = \sum_{i=0}^{\infty} u_i x^i \\ \psi_x = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i x^i \\ w_x = \sum_{i=0}^{\infty} w_i x^i \end{cases} \quad (10)$$

با استفاده از سری توانی مک لورن و با قراردادن معادلات ۱۰ در معادلات ۸، سه معادله‌ی اصلی که مورد بررسی هستند، به دست می‌آیند و همچنین در این رابطه‌ها  $w$  بسامد طبیعی سازه است.

- معادله‌ی اول:

$$\begin{aligned} A \sum_{i=2}^N (i)(i-1) u_i x^{i-2} + B \sum_{i=2}^N (i)(i-1) \psi_i x^{i-2} + \\ \frac{\bar{A}}{R} \sum_{i=1}^N (i) w_i x^{i-1} = -I_0 \omega^2 u_i - I_1 \omega^2 \psi_i \Rightarrow \\ A \sum_{i=0}^N (i+2)(i+1) u_{i+2} x^i + B \sum_{i=0}^N (i+2)(i+1) \psi_{i+2} x^i + \end{aligned}$$

که در آنها،  $\nu$  ضریب پواسون،  $E$  مدول کشسانی،  $\tau_{xz}$  تنش برشی و  $\sigma_x$  و  $\sigma_\theta$  تنش‌های نرمال هستند. چنان‌چه جنس پوسته‌ی استوانه‌یی به صورت هدفمند FGM ترکیبی از سرامیک و فلز باشد، خواص ماده به طور پیوسته بر اساس روابط ۴ تغییر می‌کنند:

$$\begin{cases} E = (E_c - E_m) \left[ \left( -\frac{z}{h} \right) + 0.5 \right]^g + E_m \\ \rho = (\rho_c - \rho_m) \left[ \left( -\frac{z}{h} \right) + 0.5 \right]^g + \rho_m \\ \nu = (\nu_c - \nu_m) \left[ \left( -\frac{z}{h} \right) + 0.5 \right]^g + \nu_m \end{cases} \quad (4)$$

که در آنها،  $g$  توان نسبت حجمی بوده و مقدارش برابر با ۱ در نظر گرفته شده است. همچنین  $\rho_m$  چگالی فلز،  $E_m$  مدول کشسانی فلز،  $\nu_m$  ضریب پواسون فلز،  $\rho_c$  چگالی سرامیک،  $E_c$  مدول کشسانی سرامیک و  $\nu_c$  ضریب پواسون سرامیک هستند. از معادلات استوانه، معادلات ۵ به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} = I_0 \frac{d^2 u}{dx^2} + I_1 \frac{d^2 \psi_x}{dx^2} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_{xz} = I_1 \frac{d^2 u}{dx^2} + I_2 \frac{d^2 \psi_x}{dx^2} \\ \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - \frac{N_\theta}{R} - k_w (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) w = I_0 \frac{d^2 w}{dx^2} \end{cases} \quad (5)$$

که در آنها،  $N_x$  نیروی درون‌صفحه‌یی،  $M_x$  گشتاور خمشی و  $Q_{xz}$  نیروی برشی عرضی هستند، که بر اساس تئوری برشی مرتبه‌ی اول هستند. همچنین  $k_w$  ضریب وینگر بستر کشسان و  $a_0, a_1, a_2$  ضرایب هستند و مقدارشان برابر ۱ است و  $I_0, I_1$  و  $I_2$  ضرایبی هستند که در معادلات ۷ ارائه شده‌اند.  $D^*$  پارامتر بی‌بعد ساز و  $\tilde{K}_w$  سختی بستر است، که در این رابطه بی‌بعد شده است:

$$D^* = \frac{E_m h^2}{12(1-\nu_m^2)}, \tilde{K}_w = \frac{k_w L^2}{D^*}$$

برای محاسبه‌ی روابط معادله‌ی ۵ نیاز به معادلات ۶ است، که از جایگذاری معادله‌های ۲ در ۳ به دست می‌آیند:

$$\begin{cases} N_x = \int_{-h/\tau}^{h/\tau} \sigma_x dz = A \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{A'}{R} w_x + B \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ N_\theta = \int_{-h/\tau}^{h/\tau} \sigma_\theta dz = \frac{A}{R} w_x + A' \frac{\partial u_x}{\partial x} + B' \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ M_x = \int_{-h/\tau}^{h/\tau} \sigma_x z dz = B \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{B'}{R} w_x + D \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ M_\theta = \int_{-h/\tau}^{h/\tau} \sigma_\theta z dz = \frac{B}{R} w_x + B' \frac{\partial u_x}{\partial x} + D' \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ Q_x = k \int_{-h/\tau}^{h/\tau} \tau_{xz} dz = k A'' \left( \psi_x + \frac{\partial w_x}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (6)$$

که سپس بر اساس معادلات ۵ از معادلات ۶ مشتق‌گیری می‌شود، ضرایبی که در معادلات ۷ مشاهده می‌شود بر اساس قانون هوک است، که در معادلات ۳ توضیح داده شده و به این شرح به دست آمده‌اند:

$$\begin{cases} A \\ B \\ D \end{cases} = \int_{-h/\tau}^{h/\tau} \frac{E(x, z)}{\sqrt{1-v^2}} \begin{cases} 1 \\ z \\ z^2 \end{cases} dz,$$

$$k_w a_r \sum_{i=0}^N (i+1)(i+2) W_{i+r} x^i = -I_s \omega^r \sum_{i=0}^N w_i x^i \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^N x^i \left[ \begin{array}{l} -\frac{\bar{A}}{R_s} ((i+1) u_{i+1}) - \frac{\bar{B}}{R_s} ((i+1) \psi_{i+1}) - \\ \frac{\bar{A}}{R_s} w_i + k\tilde{A} ((i+1) \psi_{i+1}) + \\ k\tilde{A} ((i+2)(i+1) w_{i+r}) + k_w a_s W_i + \\ k_w a_s (i+1) W_{i+1} + k_w a_r (i+1)(i+2) W_{i+r} + \\ I_s \omega^r w_i \end{array} \right]$$

$$= 0 \quad (13)$$

برای به دست آوردن معادلات شرایط مرزی ۹ از معادلات ۶ استفاده می‌شود و با کمک معادلات سری توانی ۱۰، معادلات ۱۴ الی ۱۶ به دست می‌آیند:

$$N_x = A \sum_{i=1}^N (i) u_i x^{i-1} + \frac{\bar{A}}{R_s} \sum_{i=0}^N w_i x^i +$$

$$B \sum_{i=1}^N (i) \psi_i x^{i-1} \Rightarrow N_x = A \sum_{i=0}^N (i+1) u_{i+1} x^i +$$

$$\frac{\bar{A}}{R_s} \sum_{i=0}^N w_i x^i + B \sum_{i=0}^N (i+1) \psi_{i+1} x^i \Rightarrow$$

$$N_x = \sum_{i=0}^N x^i \left[ A(i+1) u_{i+1} + \frac{\bar{A}}{R_s} w_i + B(i+1) \psi_{i+1} \right] \quad (14)$$

$$M_x = B \sum_{i=1}^N (i) u_i x^{i-1} + \frac{\bar{B}}{R_s} \sum_{i=0}^N w_i x^i +$$

$$D \sum_{i=1}^N (i) \psi_i x^{i-1} \Rightarrow M_x = B \sum_{i=0}^N (i+1) u_{i+1} x^i +$$

$$\frac{\bar{B}}{R_s} \sum_{i=0}^N w_i x^i + D \sum_{i=0}^N (i+1) \psi_{i+1} x^i \Rightarrow$$

$$M_x = \sum_{i=0}^N x^i \left[ B(i+1) u_{i+1} + \frac{\bar{B}}{R_s} w_i + D(i+1) \psi_{i+1} \right] \quad (15)$$

$$Q_x = k \int_{-h/r}^{h/r} \tau_{xz} dz = k\tilde{A} \sum_{i=0}^N \psi_i x^i + k\tilde{A} \sum_{i=1}^N (i) w_i x^{i-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_x = k\tilde{A} \sum_{i=0}^N \psi_i x^i + k\tilde{A} \sum_{i=0}^N (i+1) w_{i+1} x^i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_x = \sum_{i=0}^N x^i \left[ k\tilde{A} \psi_i + k\tilde{A} (i+1) w_{i+1} \right] \quad (16)$$

با استفاده از روابط ۱۰ الی ۱۲،  $w$  استخراج می‌شود، که نمایانگر مقدار تغییرشکل عرضی است، بر همین اساس،  $w'$  شیب (مشتق اول تغییرمکان) و  $w''$  انحنا (مشتق دوم تغییرشکل) هستند.

### ۳. صحت‌سنجی مدل عددی

جهت صحت‌سنجی مدل عددی استفاده شده، نتایج حاصل از مدل عددی با نتایج نظیر در نوشتار لوی و لم<sup>[۱]</sup> (۱۹۹۹) و نیز نتایج حاصل از مدل‌سازی مدل نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است. مشخصات مصالح پوسته‌ای استوانه‌ای استفاده شده در روند صحت‌سنجی در جدول ۱ ارائه شده‌اند:

$$\frac{\bar{A}}{R_s} \sum_{i=0}^N (i+1) w_{i+1} x^i = -I_s \omega^r \sum_{i=0}^N u_i x^i - I_s \omega^r \sum_{i=0}^N \psi_i x^i \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^N x^i \left[ \begin{array}{l} A((i+2)(i+1) u_{i+r}) + B((i+2)(i+1) \psi_{i+r}) + \\ \frac{\bar{A}}{R_s} ((i+1) w_{i+1}) + I_s \omega^r u_i + I_s \omega^r \psi_i \end{array} \right]$$

$$= 0 \quad (11)$$

- معادله‌ی دوم:

$$B \sum_{i=r}^N (i) (i-1) u_i x^{i-r} + D \sum_{i=r}^N (i) (i-1) \psi_i x^{i-r} +$$

$$\frac{\bar{B}}{R_s} \sum_{i=0}^N (i) w_i x^{i-1} - k\tilde{A} \sum_{i=0}^N \psi_i^{(X)} x^i -$$

$$k\tilde{A} \sum_{i=1}^N (i) w_i x^{i-1} = -I_s \omega^r u_i - I_s \omega^r \psi_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B \sum_{i=0}^N (i+2)(i+1) u_{i+r} x^i + D \sum_{i=0}^N (i+2)(i+1) \psi_{i+r} x^i +$$

$$\frac{\bar{B}}{R_s} \sum_{i=0}^N (i+1) w_{i+1} x^i - k\tilde{A} \sum_{i=0}^N \psi_i x^i - k\tilde{A} \sum_{i=0}^N w_{i+1} x^i +$$

$$I_s \omega^r \sum_{i=0}^N u_i x^i + I_s \omega^r \sum_{i=0}^N \psi_i x^i = 0 \Rightarrow$$

$$\sum_{i=0}^N x^i \left[ \begin{array}{l} B((i+2)(i+1) u_{i+r}) + D((i+2)(i+1) \psi_{i+r}) + \\ \frac{\bar{B}}{R_s} ((i+1) w_{i+1}) - k\tilde{A} \psi_i - k\tilde{A} (i+1) w_{i+1} + \\ I_s \omega^r u_i + I_s \omega^r \psi_i \end{array} \right]$$

$$= 0 \quad (12)$$

- معادله‌ی سوم:

$$-\frac{\bar{A}}{R_s} \sum_{i=1}^N (i) u_i x^{i-1} - \frac{\bar{B}}{R_s} \sum_{i=1}^N (i) \psi_i x^{i-1} -$$

$$\frac{\bar{A}}{R_s} \sum_{i=0}^N w_i x^i + k\tilde{A} \sum_{i=1}^N i \psi_i x^{i-1} +$$

$$k\tilde{A} \sum_{i=r}^N (i) (i-1) w_i x^{i-r} + k_w a_s \sum_{i=0}^N W_i x^i +$$

$$k_w a_s \sum_{i=1}^N (i) W_i x^{i-1} + k_w a_r \sum_{i=r}^N (i) (i-1) W_i x^{i-r} =$$

$$-I_s \omega^r w_i \Rightarrow -\frac{\bar{A}}{R_s} \sum_{i=0}^N (i+1) u_{i+1} x^i -$$

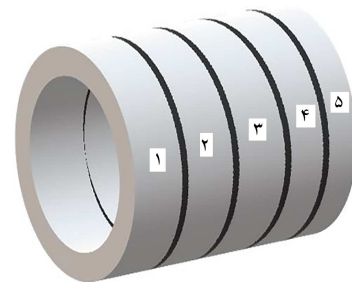
$$\frac{\bar{B}}{R_s} \sum_{i=0}^N (i+1) \psi_{i+1} x^i - \frac{\bar{A}}{R_s} \sum_{i=0}^N w_i x^i +$$

$$k\tilde{A} \sum_{i=0}^N (i+1) \psi_{i+1} x^i + k\tilde{A} \sum_{i=0}^N (i+2)(i+1) w_{i+r} x^i +$$

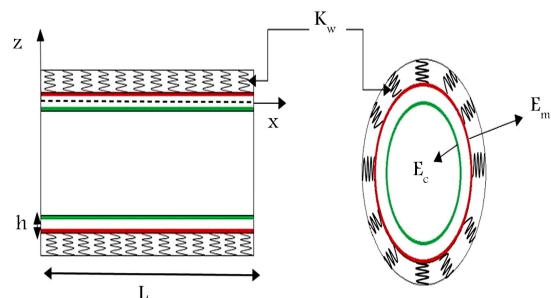
$$k_w a_s \sum_{i=0}^N W_i x^i + k_w a_s \sum_{i=0}^N (i+1) W_{i+1} x^i +$$

جدول ۱. مشخصات مصالح پوسته‌ی استوانه‌ی بی.

ضریب پواسون	مدول کشسانی (GPa)	چگالی ( $\text{kg/m}^3$ )
۰٫۳	۷۰	۲۷۰۰



شکل ۲. شماره‌ی لایه‌های پوسته‌ی استوانه‌ی بی مورد مطالعه.



شکل ۳. پارامترهای هندسی و مشخصات مصالح پوسته‌ی استوانه‌ی بی FGM با در نظر گرفتن تکیه‌گاه کشسان.

به منظور مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس از تئوری کشسانی سه‌بعدی در حالت متقارن محوری استفاده شده است. جهت مدل‌سازی از  $250^\circ$  المان ۸ گره‌ی متقارن محوری (CAX8R) استفاده شده است تعداد المان‌ها بر اساس آنالیز حساسیت صورت گرفته است؛ به نحوی که با کوچک‌تر کردن ابعاد المان، تغییرات چندانی در پاسخ به وجود نیامده است.

نتایج حاصل از مقایسه‌ی بسامد مود اول سازه در مدل عددی پیشنهادی،<sup>[۱]</sup> و نیز مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس در جدول ۲ ارائه شده است. همانند مرجع<sup>[۱]</sup>، بسامدهای به دست آمده با استفاده از رابطه‌ی  $\Omega = \omega R \sqrt{(\nu - \nu^2)} \rho / E$  بی‌بُعد شده‌اند. شرایط تکیه‌گاهی، دو سر ساده و ضریب سختی، صفر ( $K_w = 0$ ) در نظر گرفته شده است. همان‌طور که در جدول ۲ ملاحظه می‌شود، نتایج به دست آمده از مدل‌سازی عددی و نیز نتایج حاصل از مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس با نتایج نظیر در نوشتار لوی و لم (۱۹۹۹)،<sup>[۱]</sup> هم‌خوانی مناسبی دارد، که بیان‌گر دقت روش عددی استفاده شده و همچنین مدل‌سازی انجام شده در نرم‌افزار آباکوس است.

در ادامه، به بررسی نتایج تحلیل پوسته‌ی استوانه‌ی بی هدفمند (FGM) پرداخته شده است. با توجه به آن‌که صحت مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس در جدول ۲ به تأیید رسیده است، در بخش حاضر نیز نتایج حاصل با نتایج خروجی نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است.

جنس لایه‌ی داخلی پوسته، سرامیک و لایه‌ی خارجی آن، فاز بوده و تغییرات مشخصات مصالح به کمک معادله‌ی ۴ محاسبه شده است. نام‌گذاری المان‌های در نظر گرفته شده در راستای طولی در شکل ۲ مشاهده می‌شود. پارامترهای هندسی و مشخصات مصالح در نظر گرفته شده در شکل ۳ و جدول ۳ ارائه شده است.

پوسته‌ی استوانه‌ی بی تحت ارتعاش آزاد قرار گرفته و تغییرات پارامترهای مختلف در آن بررسی شده است. تغییر در ضخامت المان‌های مختلف، تغییر درصد خرابی و مشخصات مصالح المان‌های مختلف و همچنین تغییر در سختی بستر ( $K_w$ ) و نیز اعمال شرایط تکیه‌گاهی مختلف از جمله‌ی تغییرات مذکور هستند.

پس از مدل‌سازی و تحلیل سازه‌ی مورد بررسی، بسامد مودهای اول الی پنجم سازه به دست آمده است. بسامدهای مذکور با استفاده از رابطه‌ی  $\Omega = \omega R \sqrt{(\nu - \nu^2)} \rho / E$  که پیشتر نیز استفاده شده است، بی‌بُعد شده‌اند. نتایج حاصل برای ضخامت‌های مختلف پوسته‌ی استوانه‌ی بی هدفمند (FGM) در شرایط تکیه‌گاهی دو سر ساده و دو سر گیردار و به ازاء ضریب سختی صفر ( $K_w = 0$ ) استخراج و با مقادیر نظیر در نرم‌افزار آباکوس مقایسه شده است، که نتایج آن در جدول‌های ۴ و ۵ ارائه شده‌اند.

مطابق نتایج جدول‌های ۴ و ۵ مشخص است که نتایج مدل عددی پیشنهادی با خروجی نرم‌افزار آباکوس، مطابقت قابل قبولی دارند.

#### ۴. کنترل کارایی روش پیشنهادی در تعیین مکان آسیب با سناریوهای مختلف

در ادامه‌ی پژوهش حاضر، در لایه‌های مختلف پوسته‌ی استوانه‌ی بی هدفمند (FGM) (لایه‌ها مطابق شکل ۲) آسیبی ایجاد شده و بسامد بی‌بُعد شده‌ی مودهای اول سازه‌های سالم و آسیب‌دیده برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف و به ازاء ضریب سختی‌های ( $K_w$ ) مختلف در جدول‌های ۶ و ۷ ارائه شده‌اند. آسیب مرتبط از طریق کاهش در مدول کشسانی مصالح لایه‌های استوانه اعمال شده است. مشخصات هندسی مرتبط با پوسته‌ی استوانه‌ی بی شامل ضخامت (H) برابر با  $0.7$  متر، طول کلی (L) برابر با  $1$  متر که به  $5$  لایه به ترتیب به طول‌های  $0.7$ ،  $0.5$ ،  $0.3$ ،  $0.5$ ،  $0.7$  و  $0.3$  تقسیم شده است، همچنین شعاع مرکزی پوسته‌ی استوانه‌ی بی مد نظر (R) برابر با  $1$  متر بوده است.

مطابق جدول ۶، بسامد مود اول سازه‌ی آسیب‌دیده نسبت به بسامد مود سالم در هر سناریو کاهش و سپس با افزایش ضریب سختی بستر کشسان، که موجب افزایش صلبیت بستر می‌شود، بسامد افزایش یافته است.

بررسی‌های انجام شده توسط برخی پژوهشگران،<sup>[۱۱]</sup> نشان می‌دهد که تغییرات مشتق دوم شکل‌های مودی، پارامتر مناسبی برای نشان دادن وجود آسیب در سازه است. لذا در ادامه، تغییرات پارامتر مذکور برای شکل مودی اول سازه‌ی آسیب‌دیده در سناریوهای خرابی جدول ۶ بررسی شده است.

شکل‌های ۴ الی ۶، تغییرات مشتق دوم شکل مودی اول در طول تیر را برای سازه‌ی آسیب‌دیده برای هر یک از سناریوهای اخیر نشان می‌دهند. در شکل ۴، مشتق دوم جابه‌جایی برای سازه‌ی آسیب‌دیده در المان سوم با ضرایب سختی  $0$ ،  $50$  و  $100$  مشاهده می‌شود، که مطابق آن مشتق دوم در ابتدا و انتهای المان سوم (در  $x = 0.35$  م و  $x = 0.65$  م) نسبت به ابتدای استوانه (ناپوستگی دارد، که نشان‌دهنده‌ی آسیب در المان سوم است و در سایر قسمت‌ها، نمودار پیوسته است، که نشان‌گر عدم وجود آسیب‌دیدگی در سایر المان‌های سازه است. همچنین مشاهده می‌شود که با کاهش ضریب بستر، ناپوستگی در نقاط مورد نظر محسوس‌تر است. موارد اشاره شده برای هر دو حالت تکیه‌گاهی گیردار و ساده برقرار است. در شکل ۵، مشتق دوم جابه‌جایی برای سازه‌ی آسیب‌دیده در المان‌های اول و چهارم (سناریوی ۲) با ضرایب سختی  $0$ ،  $50$  و  $100$  نشان داده شده است؛ در این حالت،

جدول ۲. مقایسه‌ی بسامد مود اول بی‌بُعد شده‌ی به دست آمده از مرجع [۱] و مدل عددی پیشنهادی برای پوسته‌ی استوانه‌ی بی با تکیه‌گاه دو سر ساده و  $\tilde{K}_w = 0$ .

H/R		H/L					
		0,8		0,6		0,4	
مدل پیشنهادی	مرجع [۱]	آباکوس	درصد اختلاف	مدل پیشنهادی	مرجع [۱]	آباکوس	درصد اختلاف
0,2	2,0511	2,0471	0,19	3,59565	3,62123	3,6179	0,7
0,4	1,2946	1,2798	1,15	1,96129	1,95313	1,9513	0,41
0,6	1,0921	1,0835	0,79	1,46905	1,45184	1,4048	1,18
0,8	1,0003	0,9293	7,64	1,24830	1,23445	1,2334	1,12

\* درصد اختلاف بین مدل عددی پیشنهادی و مرجع [۱]

جدول ۳. مشخصات مصالح پوسته‌ی استوانه‌ی بی برای حالت FGM.

نوع مصالح	ضریب پواسون	مدول کشسانی (GPa)	چگالی (Kg/m <sup>3</sup> )
فلز	0,3	70	2700
سرامیک	0,3	380	3800

جدول ۴. مقایسه‌ی بسامد بی‌بُعد شده‌ی مودهای اول تا پنجم به دست آمده از مدل عددی پیشنهادی و خروجی نرم‌افزار آباکوس در شرایط تکیه‌گاهی دو سر ساده و  $\tilde{K}_w = 0$ .

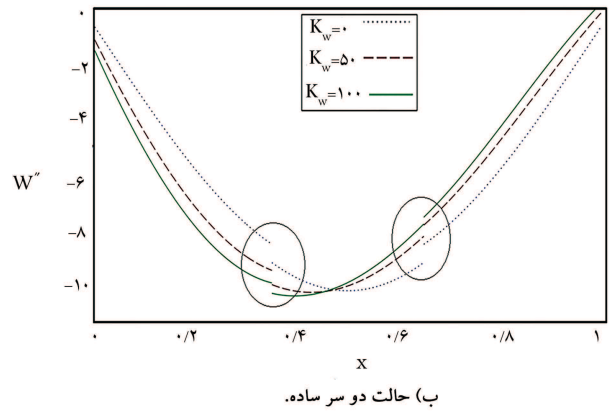
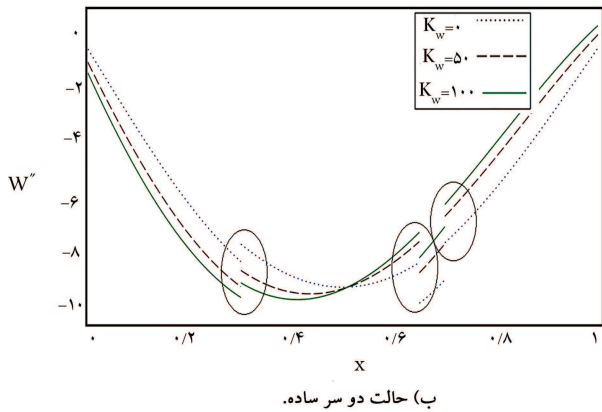
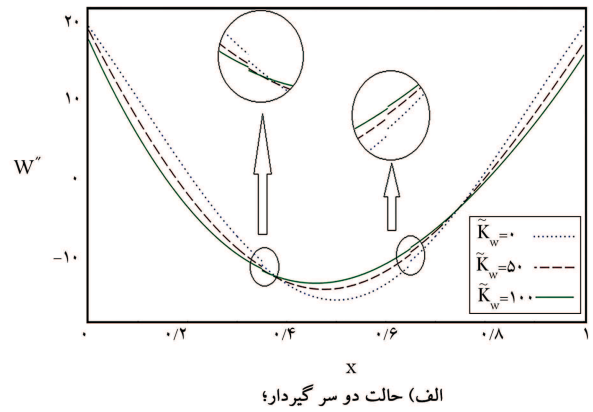
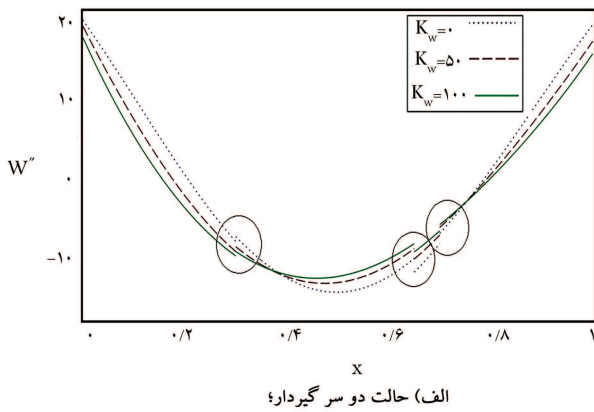
بسامد (Hz)	$H = 0,2, L = 1, R = 1$			$H = 0,15, L = 1, R = 1$			$H = 0,1, L = 1, R = 1$		
	مدل پیشنهادی	آباکوس	درصد اختلاف (%)	مدل پیشنهادی	آباکوس	درصد اختلاف (%)	مدل پیشنهادی	آباکوس	درصد اختلاف (%)
$\omega_1$	0,2596	0,2572	0,92	0,2668	0,2671	0,11	0,2769	0,2788	0,66
$\omega_2$	0,3543	0,3552	0,24	0,4336	0,4362	0,58	0,5043	0,5097	1,05
$\omega_3$	0,5939	0,5952	0,20	0,7639	0,7696	0,74	0,7889	0,8053	2,03
$\omega_4$	0,7867	0,8150	3,46	0,7898	0,8109	2,60	0,8895	0,9004	1,21
$\omega_5$	0,9387	0,9318	0,73	1,1745	1,1837	0,78	1,3322	1,3515	1,43

جدول ۵. مقایسه‌ی بسامد بی‌بُعد شده‌ی مودهای اول تا پنجم به دست آمده از مدل عددی پیشنهادی و خروجی نرم‌افزار آباکوس در شرایط تکیه‌گاهی دو سر گیردار و  $\tilde{K}_w = 0$ .

بسامد (Hz)	$H = 0,2, L = 1, R = 1$			$H = 0,1, L = 1, R = 1$			$H = 0,15, L = 1, R = 1$		
	مدل پیشنهادی	آباکوس	درصد اختلاف (%)	مدل پیشنهادی	آباکوس	درصد اختلاف (%)	مدل پیشنهادی	آباکوس	درصد اختلاف (%)
$\omega_1$	0,3574	0,3625	1,40	0,2938	0,2957	0,64	0,3263	0,3299	1,09
$\omega_2$	0,6257	0,6344	1,37	0,4445	0,4489	0,75	0,5503	0,5569	1,18
$\omega_3$	0,8137	0,8122	0,18	0,7193	0,7302	1,49	0,8158	0,8153	0,06
$\omega_4$	0,9955	1,0140	1,82	0,8170	0,8166	0,04	0,8891	0,9048	1,73
$\omega_5$	1,4020	1,4290	1,88	1,0581	1,08	1,02	1,2760	1,3018	1,98

جدول ۶. مقایسه‌ی بسامد بی‌بعد شده‌ی مود اول به دست آمده برای سازه‌های آسیب‌دیده و سالم در سناریوهای خرابی مختلف در شرایط تکیه‌گاهی دو سر گیردار و دو سر ساده.

سناریو خرابی			سناریو ۲			سناریو ۱			سناریو خرابی
شماره‌ی المان			۴ و ۱			۳			شماره‌ی المان
نوع خرابی			دو گانه			تک گانه			نوع خرابی
درصد خرابی			٪۱۲ و ٪۶			٪۶			درصد خرابی
سختی بستر ( $\bar{K}_w$ )			۵۰، ۱۰۰، ۰			۵۰، ۱۰۰، ۰			سختی بستر ( $\bar{K}_w$ )
دو	بسامد سازی سالم	۰٫۴۴۲۲	۰٫۴۰۲۵	۰٫۳۵۷۴	۰٫۴۴۲۲	۰٫۴۰۲۵	۰٫۳۵۷۴	بسامد سازی سالم	
سرگیر دار	بسامد سازی آسیب دیده	۰٫۴۳۹۳	۰٫۳۹۴۹	۰٫۳۵۳۸	۰٫۴۳۸۸	۰٫۳۹۹۱	۰٫۳۵۲۵	بسامد سازی آسیب دیده	
دو	بسامد سازی سالم	۰٫۳۷۱۵	۰٫۳۲۷۴	۰٫۲۷۶۹	۰٫۳۷۱۵	۰٫۳۲۷۴	۰٫۲۷۶۹	بسامد سازی سالم	
دو	بسامد سازی ساده	۰٫۳۶۸۳	۰٫۳۲۳۷	۰٫۲۷۲۳	۰٫۳۶۸۲	۰٫۳۲۳۹	۰٫۲۷۲۹	بسامد سازی ساده	



شکل ۵. مقادیر مشتق دوم مود اول بسامد برای سناریوی ۲.

شکل ۴. مقادیر مشتق دوم مود اول بسامد برای سناریوی ۱.

و چهارم است و در سایر قسمت‌ها، نمودار پیوسته است، که نشان‌گر عدم وجود آسیب‌دیدگی در سایر المان‌های سازه است. همانند شکل ۴ مشاهده می‌شود که با کاهش ضریب بستر ناپوستگی در نقاط مدنظر محسوس‌تر است. نتایج حاصل از شکل ۴ نمایان‌گر کارایی روش مورد استفاده در تشخیص محل خسارت‌های دوگانه است. نکته‌ی که باید در بررسی محل آسیب‌ها مد نظر قرار گیرد، آن است که با

برخلاف سناریوی ۱، تعداد المان‌های آسیب‌دیده افزایش یافته است، تا کارایی روش مورد استفاده در تشخیص محل آسیب‌های دوگانه مشخص شود. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مشتق دوم شکل مود اول در انتهای المان اول و دو سر المان چهارم (در  $x = 0/3m$ ،  $x = 0/65m$  و  $x = 0/7m$ ) نسبت به ابتدای استوانه (ناپوستگی دارد، که نشان‌دهنده‌ی آسیب در المان‌های اول

چرا که با افزایش تعداد المان‌ها، محدوده‌ی آسیب با دقت بیشتری تشخیص داده خواهد شد.

نکته‌ی دیگر آن‌که چنان‌چه المان پنجم (که المان انتهایی است)، آسیب دیده باشد، معمولاً مشتق دوم سازه‌های سالم و آسیب دیده در سر انتهایی المان پنجم از هم فاصله می‌گیرند. در ادامه، برای نشان دادن این موضوع، مشتق دوم سازه‌های سالم و آسیب دیده در سناریوی ۲ (آسیب در المان‌های ۱ و ۴) به همراه حالت آسیب دیدگی در المان‌های ۴، ۱ و ۵ به ترتیب به میزان ۶، ۱۲ و ۱۰ درصد با سختی بستر صفر در یک نمودار ترسیم شده است. همان طور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، در حالت خرابی المان ۵ (علاوه بر دو المان ۱ و ۴)، مقدار مشتق دوم در انتهای المان ۵، نسبت به مقدار نظیر در سازه‌ی سالم تغییر یافته است، که این موضوع نشان‌گر وجود آسیب در المان پنجم است.

در ادامه، نتایج حاصل از سناریوی خرابی ۳ بررسی شده است. در این سناریوی، سه المان مختلف دچار آسیب شده‌اند، که بررسی وضعیت سازه در این حالت می‌تواند کارایی روش مورد استفاده در تشخیص خرابی‌های چندگانه را بررسی کند. شکل ۷، تغییرات مشتق دوم شکل مود اول را در حالت سناریوی ۳ نشان می‌دهد.

همانند سناریوهای خرابی پیشین، در شکل‌های ۷ (الف و ب)، مشتق دوم در اطراف المان‌های آسیب دیده، شکل مودی ناپیوستگی دارد. همچنین مشابه حالت‌های اخیر، این ناپیوستگی در حالت ضریب بستر کوچک‌تر با وضوح بیشتری در نمودارها مشاهده می‌شود. موارد ذکر شده در خصوص سناریوی خرابی ۲ مورد این حالت نیز صادق است.

با توجه به آن‌چه که در شکل‌های ۴ الی ۷ مشاهده شده است، روش ارائه شده برای مدل‌سازی پوسته‌های استوانه‌ای هدفمندی هدفمند، به خوبی قادر به تشخیص محدوده‌ی آسیب خواهد بود و می‌تواند در سازه‌های واقعی نیز استفاده شود.

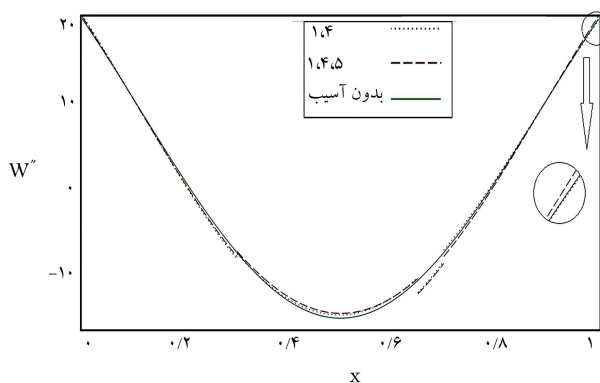
## ۵. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر، یک روش تحلیلی براساس تئوری برشی مرتبه‌ی اول برای مدل‌سازی عددی پوسته‌های استوانه‌ای هدفمند بیان شده است. با استخراج معادلات حاکم و به منظور بررسی صحت مدل‌سازی عددی، نتایج حاصل با نتایج ارائه شده در نوشتار لوی و لم (۱۹۹۹)<sup>[۱]</sup> و نرم‌افزار آباکوس برای حالت‌های پوسته‌ی استوانه‌ای ساده و با نتایج به دست آمده از نرم‌افزار آباکوس برای حالت پوسته‌ی استوانه‌ای دارای مواد هدفمند مقایسه شده است، که در هر دو حالت انطباق قابل قبولی داشته است. در ادامه، برای بررسی کارایی روش پیشنهادی در تشخیص محدوده‌ی آسیب دیده‌ی سازه، پوسته‌ی استوانه‌ای به ۵ المان تقسیم شد؛ سناریوهای خرابی تک‌گانه، دوگانه و چندگانه در شرایط تکیه‌گاهی مختلف و با اعمال شرایط بستر متفاوت تعریف شده است. با کمک مشتق‌های شکل‌های مودی، محدوده‌ی آسیب بررسی شد. بررسی‌ها نشان‌گر عملکرد مناسب مدل پیشنهادی در تشخیص محل آسیب هستند. روش پیشنهادی قابلیت گسترش در سازه‌های واقعی را دارد.

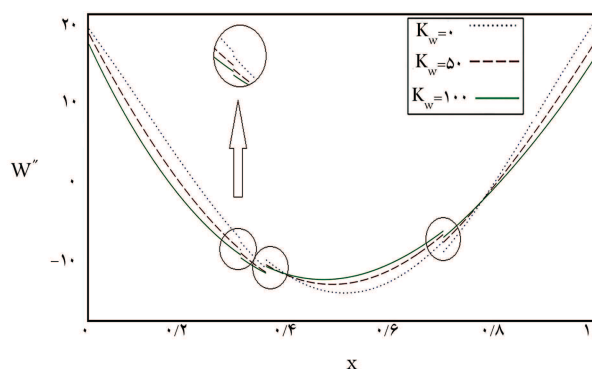
## پانویس‌ها

1. functionally graded material

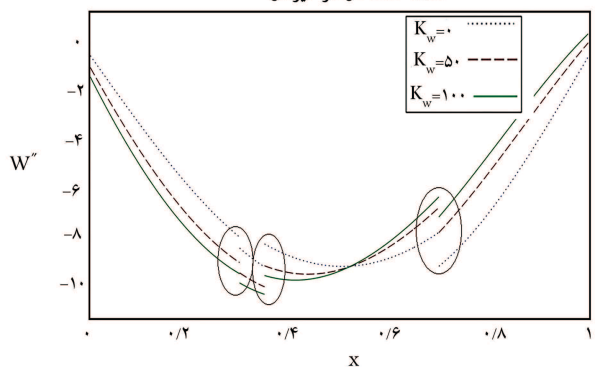
2. Loy & Lam  
3. Wang  
4. Qing



شکل ۶. مقادیر مشتق دوم مود اول بسامد برای سازه‌های سالم و دو حالت آسیب دیده ذکر شده.



الف) حالت دو سر گیردار؛



ب) حالت دو سر ساده.

شکل ۷. مقادیر مشتق دوم مود اول بسامد برای سناریوی ۱.

توجه به وجود ناپیوستگی در انتهای المان چهارم (ابتدای المان پنجم)، این شبیه به وجود می‌آید که امکان وجود آسیب در المان پنجم نیز وجود دارد. در این خصوص ذکر این نکات ضروری است:

اولاً همان طور که ملاحظه می‌شود، این موضوع در خصوص المان‌های انتهایی رخ داده است. این موارد با افزایش تعداد المان‌های سازه‌ی کمتر ملاحظه شده است.



5. Iqbal
6. Zhang
7. Song
8. Gaurav
9. Prescott's equation
10. Maple

### منابع (References)

1. Loy, C.T. and Lam, K.Y. "Vibration of thick cylindrical shells on the basis of three-dimensional theory of elasticity", *Journal of Sound and Vibration*, **226**(4), pp. 719-737 (1999).
2. Wang, X., Hu, N., Fukunaga, H. and et al. "Structural damage identification using static test data and changes in frequencies", *Engineering Structures*, **23**(6), pp. 610-621 (2001).
3. Qing, G.-H., Liu, Y.-H., Qiu, J.-J. and et al. "A semi-analytical method for the free vibration analysis of thick double-shell systems", *Finite Elements in Analysis and Design*, **42**(10), pp. 837-845 (2006).
4. Iqbal, Z., Naeem, M.N. and Sultana, N. "Vibration characteristics of FGM circular cylindrical shells using wave propagation approach", *Acta Mechanica*, **208**(3-4), pp. 237-248 (2009).
5. Shariyat, M. and Alipour, M. "A differential transform approach for modal analysis of variable thickness two-directional FGM circular plates on elastic foundations", *Iranian Journal of Mechanical Engineering Transactions of the ISME*, **11**(2), pp. 15-38 (2010).
6. Shariyat, M. and Alipour, M.M. "A power series solution for vibration and complex modal stress analyses of variable thickness viscoelastic two-directional FGM circular plates on elastic foundations", *Applied Mathematical Modelling*, **37**(5), pp. 3063-3076 (2013).
7. Alipour, M. and Shariyat, M. "An analytical global-local taylor transformation-based vibration solution for annular FGM sandwich plates supported by nonuniform elastic foundations", *Archives of civil and Mechanical Engineering*, **14**(1), pp. 6-24 (2014).
8. Zhang, Y., Lie, S.T., Xiang, Z. and et al. "A frequency shift curve based damage detection method for cylindrical shell structures", *Journal of Sound and Vibration*, **333**(6), pp. 1671-1683 (2014).
9. Song, X., Han, Q. and Zhai, J. "Vibration analyses of symmetrically laminated composite cylindrical shells with arbitrary boundaries conditions via Rayleigh-Ritz method", *Composite Structures*, **134**, pp. 820-830 (2015).
10. Yazdanpanah, O., Seyedpoor, S.M. and Akbarxadeh, H. "A new damage detection indicator for beams based on mode shape data", *Structural Engineering & Mechanics*, **53**(4), pp. 725-744 (2015).
11. Navabian, N., Bozorgnasab, M., Taghipour, R. and et al. "Damage identification in plate-like structure using mode shape derivatives", *Archive of Applied Mechanics*, **86**(5), pp. 819-830 (2016).
12. Gaurav, K., Sonam, K., Singhal, V. and et al. "Modal parameter-based damage identification in cylindrical pipe using dynamic response", *Procedia Engineering*, **199**, pp. 1988-1993 (2017).
13. Zhang, Z., Zhan, C., Shankar, K. and et al. "Sensitivity analysis of inverse algorithms for damage detection in composites", *Composite Structures*, **176**, pp. 844-859 (2017).
14. Mohammadrezazadeh, S. and Jafari, A.A. "The influences of magnetostrictive layers on active vibration control of laminated composite rotating cylindrical shells based on first-order shear deformation theory", *Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, **233**(3), pp. 4606-4619 (2019).