مهندسی عمران شریف، پاییز (۱۳۹۹)
دوره‌ی ۲ - ۳۶، شماره‌ی ۳/۲، ص. ۴۹-۶۵

Original Article

تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های ساندویچی با هسته‌ی حاوی سیال ویسکوکشسان مغناطیسی با استفاده از روش نوار محدود اسپلاین

سجاد مهاجری (کارشناس ارشد)
سعید صرامی فروشانی * (استادیار)
مجتبی ازهری (استاد)
دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

در پژوهش حاضر، یک ورق ساندویچی حاوی سیال ویسکوکشسان مغناطیسی در هسته با رویه‌های کامپوزیتی ارزیابی شده است. همچنین روابط حاکم با در نظرگرفتن درجه‌های آزادی مستقل ناشی از خمش برای لایه‌های فوقانی و زیرین هسته، بر مبنای اصل همیلتون و با استفاده از روش نوار محدود اسپلاین استخراج شده است. جهت صحت‌سنجی نتایج، نتایج به دست آمده با سایر پژوهش‌های مشابه، که با روش‌هایی نظیر المان محدود به بررسی ارتعاش آزاد ورق‌های ساندویچی پرداخته بودند، مقایسه شده است. در پژوهش حاضر، تأثیر پارامترهای گوناگون، از جمله شرایط مختلف مرزی، که در سایر مطالعات چندان به آنها توجه نشده، ارزیابی شده است. همچنین تأثیرپذیری بسامد و ضریب استهلاک، تحت اثر عوامل مختلفی، نظیر شدت میدان مغناطیسی بررسی شده‌اند. نتایج بیانگر آن هستند که روش نوار محدود اسپلاین، سرعت همگرایی و دقت مناسبی دارد و نیز مشخص شد که افزایش شدت میدان مغناطیسی به افزایش بسامد و ضریب استهلاک منجر می‌شود.

واژگان کلیدی: ورق ساندویچی، سیال ویسکوکشسان مغناطیسی، کامپوزیت، ارتعاش آزاد، روش نوار محدود اسپلاین.

s.mohajery@cv.iut.ac.ir
sarrami@cc.iut.ac.ir
mojtaba@cc.iut.ac.ir

۱. مقدمه

سیال‌های مغناطیسی (MR) [۱] دسته‌یی از مواد هوشمند هستند، که خواص رئولوژیکی آنها با اعمال یک میدان مغناطیسی به سرعت تغییر می‌کند. این مواد عموماً از تعلیق ذرات مغناطیسی نظیر آهن در ابعاد میکرون در یک سیال پایه، مانند روغن تشکیل شده‌اند. هنگامی که سیال مغناطیسی در معرض میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد، ویسکوزیته‌ی سیال به سرعت تغییر می‌کند و سیال از حالت مایع به حالت نیمه‌جامد یا جامد تبدیل می‌شود. امروزه از سیال مغناطیسی (MR) در قالب ورق‌های ساندویچی و برای کنترل ارتعاش‌ها و استهلاک نیروهای ناشی از آن استفاده‌های فراوانی می‌شود. از جمله کاربردهای سیال‌های مغناطیسی (MR) در صنعت می‌توان به استفاده‌ی آنها در میراگرهای لرزه‌یی،[۱] شیرهای تحت فشار،[۲] ترمز خودروها[۳] و تجهیزات صیقل‌دهی،[۴] اشاره کرد. به عنوان نمونه، دمپرهای مگنتورئولوژیکی به این دلیل ساخته شده‌اند که می‌توانند نیروهای میراکننده‌ی مختلفی را به محلول مغناطیسی وارد کنند و در صورت خرابی دستگاه بی‌خطر خواهند بود. هرگاه مشکلی در سیستم به وجود بیاید، میراگر مگنتورئولوژیکال قادر است به عنوان یک سیستم میراکننده‌ی منفعل با پارامترهای مشخص، که به مشخصات سیال مگنتورئولوژیکال در غیاب یک میدان مغناطیسی بستگی دارند، عمل کند.[۱] دمپرهای MR کاربردهایی در سیستم‌های کنترل ارتعاش، ماشین لباس‌شویی، کاهش آسیب لرزه‌یی در مهندسی عمران و همچنین کنترل ارتعاش‌های ناشی از باد در پل‌های کابلی دارند.[۵] در سال‌های اخیر، تلاش‌های گوناگونی جهت بررسی رفتار دینامیکی ورق‌های ساندویچی حاوی سیال مغناطیسی در هسته انجام شده است، که از آن جمله می‌توان به مواردی که در ادامه می‌آیند، اشاره کرد. تحلیل‌های ارتعاش ورق‌های ساندویچی، بارها برای کاربردهای صنعتی مختلف گزارش شده‌اند، که در این جا به برخی از آنها اشاره شده است:

پژوهش انجام شده توسط راس و همکاران (۱۹۵۹)،[۶] آثار لایه‌های ماده‌ی ویسکوکشسان در پارامترهای ارتعاش ورق ساندویچی را نشان داده است. دی‌تارانتو و مک‌گراو (۱۹۶۹)،[۷] رابطه‌یی قوی بین ضریب استهلاک مودال و بسامد تحریک را از طریق تحلیل ارتعاش یک ساختار سه‌لایه‌ی صفحه‌ی جفت شده‌ی ویسکوکشسانی، با توجه به آثار لختی عرضی و با فرض شرایط مرزی ساده به دست آورده‌اند. عبدالهادی (۱۹۷۱)،[۸] متعاقباً تحلیل ارتعاش اجباری ورق ساندویچی را گزارش کرده است. میرزا و سینگ (۱۹۷۴)،[۹] پاسخ‌های ارتعاش متقارن محوری ورق‌های

* نویسنده مسئول
تاریخ: دریافت ۱۳۹۸/۲/۲۴، اصلاحیه ۱۳۹۸/۴/۲۴، پذیرش ۱۳۹۸/۵/۲۳.
DOI:10.24200/J30.2019.53084.2528

ساندویچی دایروی، متشکل از صفحات کشسان با لایه‌ی ویسکوکشسان کم‌استحکام و کم‌چگالی را تحلیل کرده‌اند و آثار لختی دورانی و برش عرضی در آنها لحاظ شده و در عین حال از تنش محوری در لایه‌ی مرکزی چشم‌پوشی شده است. روی و گانسان (۱۹۹۳)،[۱۰] یک راه حل اجزاء محدود (FE) برای تحلیل یک صفحه‌ی ساندویچی دایروی سه‌لایه با ماده‌ی ویسکوکشسان و نیز آثار ضخامت و مدول برش لایه‌ی مرکزی در بسامدهای طبیعی و عوامل اتلاف را ارائه کرده‌اند.

تأثیر شار مغناطیسی در خواص میرایی یک تیر ساندویچی مبتنی بر MR، به صورت تجربی توسط لارا پریتو و همکاران (۲۰۱۰)،[۱۱] بررسی و افزایش شدید در نسبت میرایی در حضور یک میدان مغناطیسی نشان داده شده است. سان و همکاران (۲۰۰۳)،[۱۲] مدول برشی مختلط یک سیال MR در ناحیه‌ی پیش از تسلیم را با استفاده از رئومتری نوسانی مشخصه‌یابی کرده و خواص دینامیکی یک تیر ساندویچی MR را بررسی کرده‌اند. در پژوهشی دیگر، ظرفیت بهتر یک تیر حاوی سیال MR در کمینه‌سازی ارتعاش نشان داده شده است.[۱۳] ییینگ و همکاران (۲۰۱۴)،[۱۴] برای کاهش میکروارتعاش تصادفی یک صفحه‌ی ساندویچی، از یک ویسکو الاستومر مگنتورئولوژیکی (MRVE) به عنوان لایه‌ی مرکزی آن صفحه استفاده کرده‌اند.

گان و همکاران (۲۰۰۸)،[۱۵] نیز به بررسی مواد مگنتورئولوژیکال حاوی کربونیل در شدت‌های مختلف میدان مغناطیسی پرداخته‌اند. راجاموهان و همکاران (۲۰۱۰)،[۱۶] هم یک تیر ساندویچی با هسته‌ی MR را با در نظرگرفتن آثار برشی لایه‌ی مقیدکننده‌ی MR در هسته و به کاربردن مدول برشی معادل، مدل‌سازی و برای حل مسئله از دو روش اجزاء محدود و ریتز استفاده کرده‌اند. در ضمن ایشان اثر تغییر شدت میدان مغناطیسی و پارامترهای هندسی تیر را در ویژگی‌های ارتعاشی سازه در شرایط مرزی مختلف و بارگذاری اجباری بررسی کرده‌اند. همچنین ایشان با استفاده از مدل چوی و همکاران (۱۹۹۰)،[۱۷] مدول مختلط مایع MR به کار رفته را تخمین زده و روابطی از نوع چندجمله‌یی درجه دوم وابسته به شدت میدان مغناطیسی را برای مدل‌سازی مدول برشی مایع MR ارائه داده‌اند. جیایی‌یه و چن (۲۰۰۷)،[۱۸] تأثیر به کارگیری سیال الکترورئولوژیکال در ارتعاش آزاد ورق‌های ساندویچی حاوی هسته‌ی هوشمند را با استفاده از روش اجزاء محدود بررسی کردند. همچنین محمدی و همکاران (۲۰۱۰)،[۱۹] به بررسی رفتار مکانیکی سیال‌های هوشمند پرداخته و دو نوع سیال هوشمند را بررسی کرده‌اند. همچنین آنها در مدل‌سازی خود از هر دو مدل ویسکوکشسان و ویسکوخمیری استفاده کردند و دریافتند که مدول برشی بخش کشسان، به ازای شدت میدان‌های مختلف اعمالی در بسامدهای بیشتر از ۵۰ رادیان بر ثانیه، فقط تابع میدان مغناطیسی بوده و تأثیر بسامد بسیار ناچیز است. بنابراین مدول برشی بخش کشسان فقط در حوزه‌ی شدت میدان اعمالی بیان می‌شود. این تذکر لازم است که بر اساس پارامترهای پژوهش مذکور، مدل مایع سه عاملی برای بیان رفتار ویسکوکشسان سیال‌های هوشمند، مدل مطلوبی بوده است. در ضمن بر اساس فرضیات پژوهش اخیر، در مدل‌سازی سیال‌های هوشمند، تنش‌ها و کرنش‌های موجود در سیال در حالت حدی (بیشینه‌ی مقادیر) استخراج و استفاده می‌شوند. رامکومار و گنسان (۲۰۰۹)،[۲۰] نیز مایع الکترورئولوژیکال را به عنوان هسته در دیواره‌ی یک ستون توخالی ساندویچی به کار بردند و به مقایسه‌ی ارتعاش ستون با به کارگیری مایع الکترورئولوژیکال و ماده‌ی ویسکوکشسان پرداخته‌اند. جیایی یه[۲] (۲۰۱۳)،[۲۱] رفتار ارتعاشی ۴ مود ورق ساندویچی ایزوتروپ با هسته‌ی مگنتورئولوژیکال را با استفاده از روش اجزاء محدود بررسی کرده است. همچنین تیکنی و همکاران (۲۰۱۴)،[۲۲] به شبیه‌سازی و ارزیابی تجربی دسته موتور هیدرولیکی مگنتورئولوژیکال پرداخته‌اند. عسگری و همکاران (۲۰۱۵)،[۲۳] نیز ارتعاش آزاد ورق‌های ساندویچی حاوی سیال مغناطیسی و رویه‌های کامپوزیتی و همچنین تأثیر لایه‌ی چینی صفحات فوقانی و زیرین هسته را در یک ورق با شرایط مرزی ساده بررسی کرده‌اند. ملک‌زاده و همکاران (۲۰۱۵)،[۲۴] نیز تحلیل ارتعاش آزاد و ضربه روی ورق ساندویچ با هسته‌ی انعطاف‌پذیر هوشمند را با استفاده از روش ناویر بررسی کردند. همچنین پایگانه و همکاران (۲۰۱۵)،[۲۵] به بررسی پارامترهای هندسی و فیزیکی تأثیرگذار در ارتعاش و نیروی ضربه در ورق‌های ساندویچی حاوی سیال هوشمند با شرایط مرزی ساده پرداخته‌اند. در پژوهشی دیگر، نیز ملک‌زاده و همکاران (۲۰۱۵)،[۲۶] ارتعاش آزاد و کمانش استاتیکی در استوانه‌های ساندویچی حاوی سیال مگنتورئولوژیکال نازک و هسته‌ی انعطاف‌پذیر را بررسی و از روش المان محدود و نیز مدل‌سازی در نرم‌افزار آباکوس استفاده کردند. آروموگام[۳] و همکاران (۲۰۱۸)،[۲۷] هم ورق ساندویچی حاوی سیال مغناطیسی در هسته را در حالت دورانی و تحت تأثیر نیروهای هارمونیک درون صفحه‌یی بررسی و در تحلیل خود از تئوری کلاسیک ورق‌ها استفاده کردند. قربان‌پور و همکاران (۲۰۱۸)،[۲۸] نیز ارتعاش ورق ساندویچی حاوی هسته‌ی MR واقع بر بستر ارتجاعی ویسکوپاسترناک و حاوی رویه‌های کامپوزیتی شامل ماتریسی از جنس مواد پیزوالکتریک و تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را بررسی کردند. در پژوهشی مشابه، طالبیتوتی و فدایی (۲۰۱۹)،[۲۹] تأثیر نانولوله‌های کربنی را هنگام استفاده در لایه‌های فوقانی و زیرین هسته در مسئله‌ی ارتعاش آزاد یک تیر ساندویچی بررسی و در تحلیل خود از تئوری کلاسیک ورق‌ها و فرض ثابت بودن تغییرشکل‌های برون‌صفحه استفاده کرده‌اند. همچنین ومالاری[۴] و همکاران (۲۰۱۸)،[۳۰] به بررسی مسئله‌ی بهینه‌سازی مکان هسته‌ی مغناطیسی با هدف دست‌یابی به بیشینه‌ی بسامد ارتعاش آزاد پرداخته‌اند.

با توجه به مروری که بر مهم‌ترین پژوهش‌های صورت گرفته در حوزه‌ی اشاره شده انجام شده است، در پژوهش حاضر تلاش شده است تا برای اولین بار با استفاده از روش نوار محدود اسپلاین، که یکی از قدرتمندترین روش‌های تحلیل ارتعاش و پایداری ورق‌ها و پوسته‌هاست، ضمن بررسی تأثیر عواملی نظیر شدت میدان اعمالی و همچنین ضخامت هسته در پارامترهای ارتعاش ورق‌های ساندویچی حاوی سیال مغناطیسی، به تحلیل و بررسی تأثیر شرایط مختلف مرزی در پارامترهای مذکور پرداخته شود. در ضمن، در عموم پژوهش‌هایی که از نظر گذشت، غالباً درجه‌های آزادی به واسطه‌ی تغییرشکل‌های خمشی در ضخامت ورق ثابت در نظرگرفته شده است، لذا در پژوهش حاضر تلاش شده است تا با استفاده از یک تئوری اصلاح شده بر مبنای تئوری کلاسیک ورق‌ها، به درون‌یابی هسته بر مبنای درجه‌های آزادی مجزای لایه‌های فوقانی و زیرین پرداخته و نتایج حاصل با سایر پژوهش‌ها ارزیابی و مقایسه شود.

۲. مدل‌سازی رفتار مکانیکی سیال مغناطیسی

رفتار مکانیکی سیال‌های مغناطیسی به گونه‌یی است که در هنگام اعمال میدان، به واسطه‌ی قطبیده شدن ذرات فرومغناطیس و ایجاد نیروی ربایش بین آنها، یک شبکه‌ی زنجیروار در داخل سیال تشکیل می‌شود، که این عامل باعث افزایش ویسکوزیته‌ی سیال می‌شود. در حالت اعمال میدان مغناطیسی، که اصطلاحاً به آن حالت فعال سیال می‌گویند، رفتار ماده در دو ناحیه‌ی قبل و بعد از تسلیم بررسی می‌شود؛ به گونه‌یی که تا قبل از حد مشخصی از تنش برشی، که اصطلاحاً به آن تنش تسلیم گویند، سیال به صورت یک ماده‌ی شبه جامد و در نواحی بعد از تسلیم به واسطه‌ی شکسته شدن برخی از پیوندهای شبکه‌ی پلاریزه شده، رفتار روان‌تر و

شبه مایع است.[۱۶] این تذکر لازم است که با افزایش شدت میدان، تنش تسلیم سیال به واسطه‌ی افزایش نیروی ربایش مغناطیسی افزوده می‌شود. در ضمن، فرض بر آن است که راستای اعمال میدان در جهت ضخامت سیال است. بنابر رفتار سیال مغناطیسی در دو ناحیه‌ی قبل و بعد از تسلیم، می‌توان رابطه‌ی بین تنش و کرنش را مطابق روابط ۱ و ۲ ارائه کرد:

$$\tau < \tau_y \rightarrow \tau = G^* \gamma \qquad (۱)$$

$$\tau > \tau_y \rightarrow \tau = \tau_y + \mu\, \dot{\gamma} \qquad (۲)$$

که در آنها τ_y بیان‌گر تنش تسلیم، G^* مدول برشی سیال براساس مدل ویسکوکشسان، γ کرنش برشی سیال، μ مدول سیال در حالت خمیری و $\dot{\gamma}$ نرخ کرنش برشی سیال هستند. مدول برشی سیال در ناحیه‌ی قبل از تسلیم بر مبنای پژوهش راجاموهان و همکاران (۲۰۱۰)،[۱۶] به صورت رابطه‌ی ۳ در نظر گرفته می‌شود:

$$G^* = G' + i\, G'' \qquad (۳)$$

که در آن، G^* مدول برشی مختلط سیال مغناطیسی است. G' بخش حقیقی مدول برشی سیال و معرف توانایی ماده برای ذخیره‌ی انرژی کرنشی است، در حالی که G'' بخش موهومی مدول برشی و نشان‌دهنده‌ی اتلاف انرژی ماده طی اعمال یک فرایند بارگذاری و باربرداری است. همچنین $i = \sqrt{-۱}$ است.

۳. مدل‌سازی ورق ساندویچی با هسته‌ی سیال MR

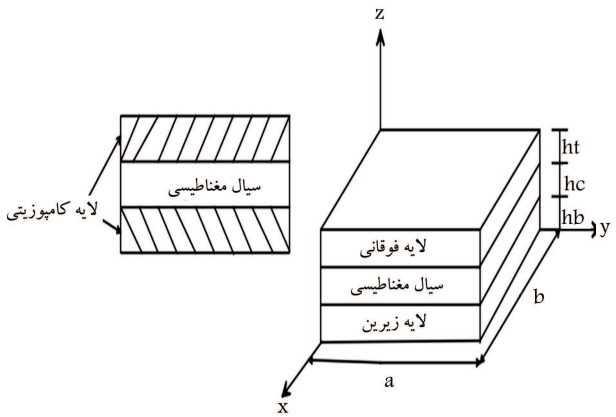
در شکل ۱، یک ورق ساندویچی سه لایه حاوی سیال مغناطیسی در هسته به ضخامت h_c و لایه‌های فوقانی و تحتانی موسوم به لایه‌های محافظ به ترتیب با ضخامت‌های h_t و h_b نشان داده شده است. لایه‌های محافظ از ورق‌های کامپوزیتی چندلایه تشکیل شده‌اند. از آن‌جا که از لغزش بین لایه‌های کامپوزیتی صرف‌نظر شده است، لایه‌های محافظ به عنوان یک ورق نازک و بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌ها تحلیل می‌شوند؛ بنابراین تنش‌های موجود در لایه‌های محافظ، فقط تنش صفحه‌یی هستند و در مقابل از تنش‌های عمودی در لایه‌ی سیال صرف‌نظر می‌شود. این تذکر لازم است که ضخامت لایه‌ی سیال در هسته در مقابل دو بعُد دیگر آن، بسیار کوچک‌تر فرض می‌شود و از لغزش بین هسته و لایه‌های محافظ نیز صرف‌نظر می‌شود.

معادلات هر یک از لایه‌های فوقانی و تحتانی ورق ساندویچی مطابق با شکل ۲ در دستگاه مختصات کارتزین (x', y', z') در نظر گرفته می‌شود. همان‌گونه که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، محور z' در وسط لایه‌ی محافظ قرار گرفته است.

میدان جابه‌جایی در نظر گرفته شده بر اساس تئوری کلاسیک ورق‌ها مطابق با روابط ۴ ارائه می‌شود:

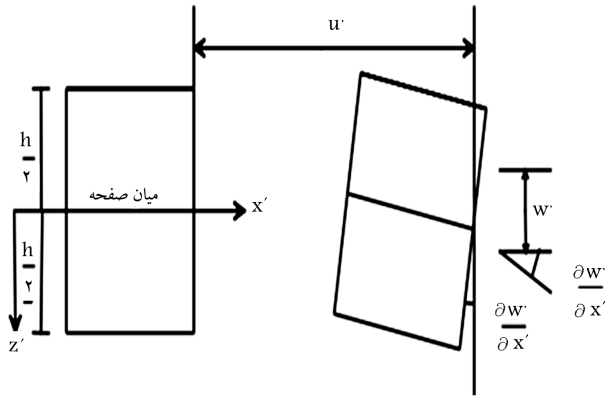
$$u^i(x', y', z', t) = u^{\circ i}(x', y', t) - z' \frac{\partial w^{\circ i}(x', y', t)}{\partial x'}$$
$$v^i(x', y', z', t) = v^{\circ i}(x', y', t) - z' \frac{\partial w^{\circ i}(x', y', t)}{\partial y'} \qquad i = t, b$$
$$w^i(x', y', z', t) = w^{\circ i}(x', y', t) \qquad (۴)$$

که در آن، u°، v° و w° به ترتیب جابه‌جایی‌های صلب میان صفحه‌ی لایه‌ی کامپوزیتی در راستای محورهای x'، y' و z' هستند. همچنین u و v جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ی ورق و w جابه‌جایی ناشی از تغییرشکل‌های عرضی در جهت ضخامت ورق هستند. t و b به ترتیب معرف لایه‌ی محافظ فوقانی و زیرین ورق ساندویچی هستند.



الف) ورق ساندویچی در دستگاه کارتزین؛ ب) نمایی از لایه ها در جهت ضخامت.

شکل ۱. ورق ساندویچی حاوی سیال MR.



مقطع لایه محافظ قبل از تغییر شکل — مقطع لایه محافظ پس از تغییر شکل

شکل ۲. نمایی از لایه‌های محافظ کامپوزیتی در بالا یا پایین ورق ساندویچی و تغییرشکل‌های درون صفحه و خمشی.

بر اساس میدان جابه‌جایی مفروض، کرنش‌های ایجاد شده در لایه‌ی محافظ بر اساس روابط ۵ نوشته می‌شوند:

$$\varepsilon_x(x', y', z', t) = \varepsilon_x^{\circ}(x', y', t) + z' \kappa_x^{\circ}(x', y', t)$$
$$\varepsilon_y(x', y', z', t) = \varepsilon_y^{\circ}(x', y', t) + z' \kappa_y^{\circ}(x', y', t)$$
$$\gamma_{xy}(x', y', z', t) = \gamma_{xy}^{\circ}(x', y', t) + z' \kappa_{xy}^{\circ}(x', y', t) \qquad (۵)$$

که در آن، $(\gamma_{xy}^{\circ}, \varepsilon_y^{\circ}, \varepsilon_x^{\circ})$ بیان‌گر کرنش‌های ناشی از تغییرشکل‌های درون صفحه و $(K_{xy}^{\circ}, K_y^{\circ}, K_x^{\circ})$ انحناهای ایجاد شده در ورق ناشی از تغییرشکل‌های خمشی هستند. روابط تنش - کرنش موجود در هر یک از لایه‌های کامپوزیتی ورق محافظ در دستگاه مختصات (x', y', z') مطابق با روابط ۶ نوشته می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{۱۱} & \bar{Q}_{۱۲} & \bar{Q}_{۱۶} \\ \bar{Q}_{۱۲} & \bar{Q}_{۲۲} & \bar{Q}_{۲۶} \\ \bar{Q}_{۱۶} & \bar{Q}_{۲۶} & \bar{Q}_{۶۶} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_y \\ \varepsilon_x \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \qquad (۶)$$

که در آن، $\bar{Q}_{ij}$ درایه‌های ماتریس سختی کاهش‌یافته برای هر یک از لایه‌های ورق کامپوزیتی است، که از انتقال ماتریس سختی هر لایه در دستگاه مختصات

محلی منطبق با راستای الیاف لایه حاصل می‌شود. پس از استخراج روابط تنش - کرنش برای هر لایه از ورق‌های محافظ کامپوزیتی، نیروهای داخلی در صفحات محافظ با توجه به تئوری کلاسیک ورق‌ها مطابق با رابطه‌ی ۷ ارائه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = u^b{}_{(z_b=-h_b/2)} = u^c{}_{(z_c=h_c/2)}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \\ \kappa_x^\circ \\ \kappa_y^\circ \\ \kappa_{xy}^\circ \end{bmatrix} \quad (۷)$$

درایه‌های زیر ماتریس‌های [A]، [B] و [D] در رابطه‌ی ۷، که به ترتیب ماتریس‌های سختی کششی، سختی همبستگی و سختی خمشی هستند، بر اساس روابط ۸ قابل محاسبه هستند:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1})$$
$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$
$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (۸)$$

که در آنها، N معرف تعداد لایه‌های ورق محافظ، و z_k بیانگر فاصله‌ی میان صفحه‌ی لایه‌ی k تا صفحه‌ی میانی ورق محافظ است. در ادامه، چنان‌چه جابه‌جایی‌های درون صفحه و خمشی لایه‌ی محافظ فوقانی با v_t°، u_t° و w_t° و به طور مشابه برای لایه‌ی محافظ زیرین با u_b°، v_b° و w_b° نشان داده شوند، می‌توان میدان جابه‌جایی در هسته‌ی ورق را با توجه به پیوستگی میان سیال و لایه‌های بالا و پایین مطابق با روابط ۹ بیان کرد:

$$u^t{}_{(z_t=h_t/2)} = u^c{}_{(z_c=-h_c/2)}$$
$$v^t{}_{(z_t=h_t/2)} = v^c{}_{(z_c=-h_c/2)}$$
$$v^b{}_{(z_b=-h_b/2)} = v^c{}_{(z_c=h_c/2)}$$
$$w^t{}_{(z_t=h_t/2)} = w^c{}_{(z_c=-h_c/2)}$$
$$w^b{}_{(z_t=-h_b/2)} = w^c{}_{(z_c=h_c/2)} \quad (۹)$$

به این ترتیب روابط ۱۰ را خواهیم داشت:

$$u^c(x', y', z', t) = \frac{u_t^\circ + u_b^\circ}{2} + \frac{1}{4}\left(-h_t \frac{\partial w_t^\circ}{\partial x} + h_b \frac{\partial w_b^\circ}{\partial x}\right)$$
$$+ z_c \left(\frac{-u_t^\circ + u_b^\circ}{h_c} + \frac{h_t}{2h_c}\frac{\partial w_t^\circ}{\partial x} + \frac{h_b}{2h_c}\frac{\partial w_b^\circ}{\partial x}\right)$$
$$v^c(x', y', z', t) = \frac{v_t^\circ + v_b^\circ}{2} + \frac{1}{4}\left(-h_t \frac{\partial w_t^\circ}{\partial y} + h_b \frac{\partial w_b^\circ}{\partial y}\right)$$
$$+ z_c \left(\frac{-v_t^\circ + v_b^\circ}{h_c} + \frac{h_t}{2h_c}\frac{\partial w_t^\circ}{\partial y} + \frac{h_b}{2h_c}\frac{\partial w_b^\circ}{\partial y}\right)$$
$$w^c(x', y', z', t) = \frac{w_t^\circ + w_b^\circ}{2} + z_c \frac{-w_t^\circ + w_b^\circ}{h_c} \quad (۱۰)$$

با توجه به میدان جابه‌جایی حاصل بر مبنای روابط ۱۰، کرنش‌های برشی در جهت ضخامت هسته‌ی ورق ساندویچی به صورت روابط ۱۱ ارائه می‌شوند:

$$\gamma_{xz}^c = \frac{-u_t^\circ + u_b^\circ}{h_c} + \left(\frac{h_t + h_c - 2z_c}{2h_c}\right)\frac{\partial w_t^\circ}{\partial x}$$
$$+ \left(\frac{h_c + h_b + 2z_c}{2h_c}\right)\frac{\partial w_b^\circ}{\partial x}$$
$$\gamma_{yz}^c = \frac{-v_t^\circ + v_b^\circ}{h_c} + \left(\frac{h_t + h_c - 2z_c}{2h_c}\right)\frac{\partial w_t^\circ}{\partial y}$$
$$+ \left(\frac{h_c + h_b + 2z_c}{2h_c}\right)\frac{\partial w_b^\circ}{\partial y} \quad (۱۱)$$

بر اساس روابط ۱۱، تنش‌های برشی در لایه‌ی میانی ورق ساندویچی مطابق روابط ۱۲ خواهند بود:

$$\tau_{xz}^c = G^* \left(\frac{-u_t^\circ + u_b^\circ}{h_c} + \frac{h_t}{2h_c}\frac{\partial w_t^\circ}{\partial x} + \frac{h_b}{2h_c}\frac{\partial w_b^\circ}{\partial x} + \frac{\partial w^c}{\partial x}\right)$$
$$\tau_{yz}^c = G^* \left(\frac{-v_t^\circ + v_b^\circ}{h_c} + \frac{h_t}{2h_c}\frac{\partial w_t^\circ}{\partial y} + \frac{h_b}{2h_c}\frac{\partial w_b^\circ}{\partial y} + \frac{\partial w^c}{\partial y}\right) \quad (۱۲)$$

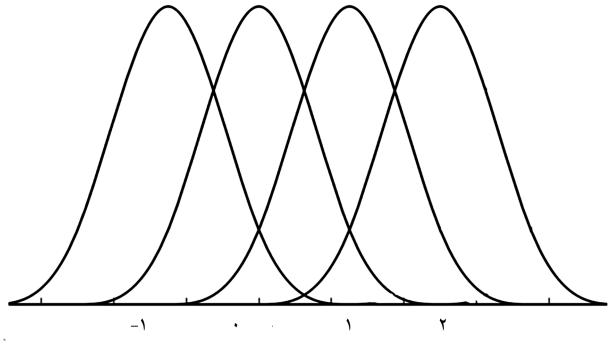
۴. استخراج معادلات حاکم بر ورق ساندویچی

یکی از روش‌های تحلیل و بررسی ارتعاش صفحات و پوسته‌ها، استفاده از روش نوار محدود است. با کمک روش نوار محدود می‌توان با استفاده از توابع شکل مناسب مسائل دوبُعدی را تحلیل و معادلات دیفرانسیل جزئی (پاره‌یی) ورق‌ها را حل کرد. روش‌های اولیه معمولاً با فرض یک تابع چندجمله‌یی ساده در جهت عرضی نوارها و سری توابع مثلثاتی پیوسته یا توابع هذلولی مثلثاتی در جهت طولی نوارها تحلیل را انجام می‌دادند. شکل نهایی تابع تغییرمکان، برابر حاصل‌ضرب چندجمله‌یی‌ها و سری‌های مثلثاتی خواهد بود. در حالت کلی، همه‌ی سری‌هایی که بتوانند کمینه‌ی شرایط مرزی را در لبه‌های نوار برآورده کنند، کاربردی هستند. با توسعه‌ی نوارهای اسپلاین، این امکان فراهم شد که به جای سری‌های مثلثاتی و هایپربولیک، از توابع اسپلاین استفاده شود.

در روش نوار محدود اسپلاین، منطبق با راستای طولی هر نوار، r گره در نظرگرفته می‌شود. همچنین اعمال شرایط مرزی در دو انتهای نوار با در نظرگرفتن ۲ گره در خارج از دامنه میسر می‌شود. پس درکل بر روی هر خط گره‌یی، r+۲ گره قرار دارد. در هر گره، ۴ درجه‌ی آزادی به صورت ۲ درجه‌ی آزادی جابه‌جایی درون‌صفحه (u و v)، یک درجه‌ی آزادی جابه‌جایی عرضی (w) و در نهایت یک درجه‌ی آزادی دورانی حول محور طولی نوار (ϑ_x) در نظرگرفته می‌شود. در روش ذکر شده، برای درون‌یابی یک تابع مفروض در دامنه‌ی توابع اسپلاین مرتبه‌ی سوم $\Phi_m(y)$ بر روی هر گره به مرکزیت $y = y_m$ مطابق با روابط ۱۳ بسط داده می‌شود: در شکل ۳، نمایش چند تابع اسپلاین، که در حوالی گره‌های نظیر بسط یافته‌اند، نشان داده‌شده است:

با بسط توابع اسپلاین بر روی هر گره و با استفاده از اصل بر هم‌نهی می‌توان هر تابع مشتق‌پذیری را در دامنه‌ی مفروض درون‌یابی کرد. اگر مجموع توابع بسط

$$\Phi_m(y)=\frac{1}{6h^3}\begin{cases}(y-y_{m-2})^3 & y_{m-2}\le y\le y_{m-1}\\ h^3+3h^2(y-y_{m-1})+3h(y-y_{m-1})^2-3(y-y_{m-1})^3 & y_{m-1}\le y\le y_m\\ h^3+3h^2(y_{m+1}-y)+3h(y_{m+1}-y)^2-3(y_{m+1}-y)^3 & y_m\le y\le y_{m+1}\\ (y_{m+2}-y)^3 & y_{m+1}\le y\le y_{m+2}\\ 0 & otherwise\end{cases} \quad (۱۳)$$



شکل ۳. بسط توابع اسپلاین در حوالی گره‌های نظیر.

داده‌شده با S(y) نمایش داده شود، آن‌گاه تابع مجموع S (y) به صورت سری رابطه‌ی ۱۴ نشان داده می‌شود:

$$S(y)=\sum_{m=-1}^{r+1}\alpha_m\Phi_m(y) \quad (۱۴)$$

که در آن، α_m ضرایب ترکیب خطی توابع اسپلاین هستند، که بر اساس شرایط مرزی مسئله مشخص می‌شوند. در ادامه، از آن‌جا که در روش نوار محدود از ایده‌ی جداسازی متغیرها در حل معادلات دیفرانسیل استفاده می‌شود، توابع اسپلاین که شرح آنها از نظر گذشت، به عنوان توابع درون‌یاب در جهت طولی هر نوار، توابع هرمیتی با در نظر گرفتن یک درجه‌ی آزادی جابه‌جایی عرضی (w) و یک درجه‌ی آزادی دورانی حول محور طولی(ϑ_x)، برای تغییرمکان خمشی و در آخر توابع لاگرانژی برای درجه‌های آزادی درون صفحه (u و v) به عنوان توابع درون‌یاب در جهت عرضی نوار استفاده می‌شوند؛ بنابراین رابطه‌ی تغییرمکان‌های درون صفحه و خمشی ورق در حالت کلی به صورت روابط ۱۵ نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned}u&=[L][\Phi]\{\Delta^u\}\\ v&=[L][\Phi]\{\Delta^v\}\\ w&=[L][\Phi]\{\Delta^w\}\end{aligned} \quad (۱۵)$$

که در آنها، [L] توابع لاگرانژی هستند. همچنین [Φ] ماتریسی سطری و به صورت رابطه‌ی ۱۶ است:

$$[\Phi]=\begin{bmatrix}\Phi_{-1} & \Phi_0 & \Phi_1 & \dots & \Phi_{r+1}\end{bmatrix} \quad (۱۶)$$

این تذکر لازم است که بردارهای $\{\Delta^u\}$، $\{\Delta^v\}$ و $\{\Delta^w\}$ و شامل درجه‌های آزادی درون صفحه و خمشی هستند. بسط روابط ۱۵ در پیوست نوشتار حاضر مطابق با رابطه‌ی (پ ـ ۱) ارائه شده است. پس از درون‌یابی میدان جابه‌جایی مفروض نوبت به محاسبه‌ی انرژی‌های سازه در حین ارتعاش می‌رسد. برای یک ورق کامپوزیتی چندلایه، انرژی کرنشی ذخیره شده در جسم با محاسبه‌ی کار انجام شده توسط نیروهای داخلی ممکن است. از آن‌جا که نیروهای داخلی در لایه‌های محافظ به صورت معادلات ماتریسی (معادلات ۷) ارائه شده است، لذا انرژی کشسان ذخیره شده در لایه‌های محافظ مطابق با رابطه‌ی ۱۷ خواهد بود:

$$U_e^{t,b}=\frac{1}{2}\int_0^b\int_0^a\begin{bmatrix}\varepsilon_x^0 & \varepsilon_y^0 & \gamma_{xy}^0 & \kappa_x^0 & \kappa_y^0 & \kappa_{xy}^0\end{bmatrix}\times$$
$$\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16}\\ A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26}\\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66}\\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16}\\ B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26}\\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x^0\\ \varepsilon_y^0\\ \gamma_{xy}^0\\ \kappa_x^0\\ \kappa_y^0\\ \kappa_{xy}^0\end{bmatrix}dxdy \quad (۱۷)$$

که در آن، U_e انرژی کشسان، و t و b به ترتیب معرف رویه‌های فوقانی و زیرین سازه هستند. همچنین انرژی کرنشی ذخیره شده در لایه‌ی سیال میانی U_c مطابق با رابطه‌ی ۱۸ است:

$$U_c=\frac{1}{2}\int_{\frac{-h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}}\int_0^b\int_0^a G^* h_c(\tau_{xz}^c\gamma_{xz}^c+\tau_{yz}^c\gamma_{yz}^c)dxdydz \quad (۱۸)$$

بنابراین انرژی کرنشی ذخیره شده در ورق ساندویچی با هسته‌ی سیال MR که با U نشان داده می‌شود، طبق رابطه‌ی ۱۹ به دست می‌آید:

$$U=U_e^{t,b}+U_c \quad (۱۹)$$

انرژی جنبشی ورق ساندویچی حاوی سیال MR، شامل سه بخش انرژی جنبشی حاصل از تغییرشکل محوری ورق (T_1)، انرژی جنبشی حاصل از تغییرشکل عرضی ورق(T_2) و در نهایت انرژی جنبشی حاصل از تغییرشکل‌های دورانی سیال مغناطیسی (T_3) است، که مطابق با روابط ۲۰ ارائه می‌شود. این تذکر لازم است که از انرژی جنبشی موجود در هسته به واسطه‌ی تغییرشکل‌های محوری صرف‌نظر شده است. علت این مسئله نیز به دلیل بالا بودن سختی‌های محوری و سری بودن اتصال سختی‌های مذکور با یکدیگر است. این مطلب در مورد لایه‌های فوقانی و زیرین هسته نیز صادق است:

$$T_1 = \frac{1}{2}\int_0^b\int_0^a \Big[\rho_t h_t((\frac{\partial u_t}{\partial t})^2 + (\frac{\partial v_t}{\partial t})^2) + \rho_b h_b((\frac{\partial u_b}{\partial t})^2 + (\frac{\partial v_b}{\partial t})^2)\Big]\, dxdy$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\Big(\int_0^b\int_0^a \rho_t h_t\Big(\frac{\partial w^t}{\partial t}\Big)^2 + \rho_b h_b\Big(\frac{\partial w^b}{\partial t}\Big)^2 dxdy + \int_{\frac{-h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}}\int_0^a\int_0^b \rho_c h_c\Big(\frac{\partial w^c}{\partial t}\Big)^2 dxdydz\Big)$$

$$T_3 = \frac{1}{2}\int_{\frac{-h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}}\iint_{00}^{ba} \rho_c I_c\left[(\dot{\gamma}^c_{xz})^2 + (\dot{\gamma}^c_{yz})^2\right] dxdydz \qquad (20)$$

که در آنها، ρ_t، ρ_b و ρ_c به ترتیب چگالی لایه‌ی محافظ فوقانی، تحتانی و سیال هستند. همچنین I_c ممان اینرسی دورانی سیال است. به این ترتیب انرژی جنبشی موجود در سازه به صورت رابطه‌ی ۲۱ خواهد بود:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \qquad (21)$$

پس از استخراج انرژی‌های کرنشی و جنبشی، با استفاده از اصل همیلتون می‌توان ماتریس‌های سختی و جرم ورق ساندویچی حاوی سیال مغناطیسی را پس از نوشتن رابطه‌ی ۲۲ به دست آورد:

$$\delta\Pi = \int \delta(U+T)dt = 0 \qquad (22)$$

که در آن، Π معرف انرژی پتانسیل کل سازه است. این تذکر لازم است که درون‌یابی انرژی‌های کرنشی و جنبشی سازه، در پیوست مطابق با روابط (پ ـ ۲) الی (پ ـ ۶) ارائه شده است. با استفاده از رابطه‌ی ۱۹، رابطه‌ی نهایی به صورت رابطه‌ی ۲۳ برای ارتعاش آزاد ورق ساندویچی بیان می‌شود:

$$([K] - \omega^2[M])[\Delta] = [0] \qquad (23)$$

که در آن، [K] ماتریس سختی و [M] ماتریس جرم ورق هستند. این تذکر لازم است که $[\Delta]$ بردار کل درجه‌های آزادی و بسامد طبیعی ورق ساندویچی است. بسط رابطه‌ی ۲۳ و ماتریس‌های جرم و سختی سازه مطابق با روابط (پ ـ ۷) و (پ ـ۸) در پیوست نوشتار حاضر ارائه شده است.

۵. بررسی هم‌گرایی روش

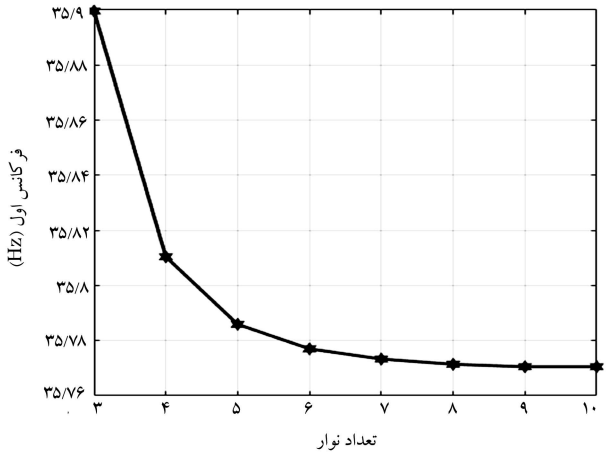
به منظور بررسی هم‌گرایی نتایج حاصل از روش نوار محدود اسپلاین، یک ورق ساندویچی مربعی به ابعاد ۰/۳ × ۰/۳ × ۰/۰۰۳ متر با لایه‌چینی (۰°/۹۰°/۰°/ هسته /۰°/۹۰°/۰°) در نظرگرفته شده است. ضخامت لایه‌های محافظ و هسته هرکدام برابر با ۱ میلی‌متر بوده است. مدول کشسانی لایه‌های کامپوزیتی برابر با $E_1 = 27/8(GPa)$ و $E_2 = 9/52(GPa)$، ضریب پواسون (v_{12}) برابر با ۰/۳ و مدول برشی برابر با $G_{12} = 2/634(GPa)$ بوده است. همچنین چگالی لایه‌های فوقانی، زیرین و هسته به ترتیب برابر با $\rho_t = \rho_b = 2078 kg.m^{-3}$ و $\rho_c = 2812 kg.m^{-3}$ بوده‌اند. مدول‌های برشی سیال مغناطیسی مطابق با مرجع[31] به صورت روابط ۲۴ است:

$$G' = -0/0503B^2 + 428/355B + 858/8$$
$$G'' = -0/57B^2 + 452/105B + 848/35 \qquad (24)$$

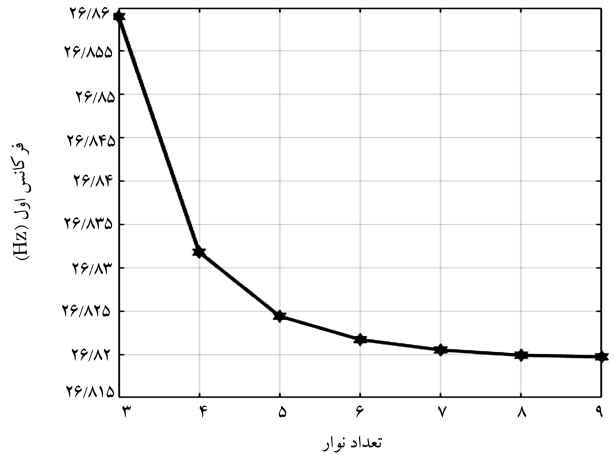
که در آن، B بیان‌گر شدت میدان مغناطیسی و با یکای گوس است. تأثیر تعداد نوار و گره در روش نوار محدود اسپلاین، به ازای شرایط مرزی چهار طرف مفصل و چهار طرف گیردار به ترتیب در جدول‌های ۱ و ۲ ارائه شده است. شایان ذکر است شدت میدان اعمالی در هر دو جدول برابر با صفرگوس در نظرگرفته شده است.

همان‌طورکه از جدول ۱ مشخص است، در شرایط چهار طرف مفصل با افزایش تعداد نوار و نیز گره، چهار بسامد اول ارتعاش، سیری نزولی را طی می‌کنند و در نهایت، به ازای ۹ نوار و ۱۲ گره، روند تغییرات مذکور ثابت خواهد شد. به طور مشابه، در شرایط چهار طرف گیردار نیز به ازای ۱۸ نوار و ۱۶ گره، روند تغییرات بسامدهای مودال ثابت می‌شود.

همچنین در شکل‌های ۴ و ۵، روند هم‌گرایی بسامد مود اول ارتعاش به ترتیب برای شرایط مرزی SCSC و SCSS ارائه شده است. این تذکر لازم است که در شرایط مرزی SCSC به ازای ۱۴ گره و ۱۰ نوار روند تغییرات ۴ بسامد اول ارتعاش ثابت خواهد شد. این مسئله در حالی است که برای شرایط مرزی SCSS، روند ثابت شدن تغییرات بسامدهای ۴ مود اول به ازای ۹ نوار و ۱۴ گره است.



شکل ۴. تغییرات بسامد مود اول به ازای ۱۰ نوار و ۱۴ گره در شرایط مرزی SCSC.



شکل ۵. تغییرات بسامد مود اول به ازای ۹ نوار و ۱۴ گره در شرایط مرزی SCSS.

جدول ۱. نحوه‌ی تغییرات بسامد (بر حسب هرتز) برای چهار مود اول ورق ساندویچی با شرایط مرزی چهار طرف مفصلی با تغییر تعداد نوار و گره در روش نوار محدود اسپلاین به ازای شدت میدان صفر گوس.

بسامد	تعداد نوار	تعداد گره				
		۴	۶	۸	۱۰	۱۲
ω_1	۱	۲۱٫۳۲۵۶	۲۱٫۳۲۲۰	۲۱٫۳۲۱۶	۲۱٫۳۲۱۶	-
	۲	۲۰٫۱۸۷۵	۲۰٫۱۸۳۶	۲۰٫۱۸۳۳	۲۰٫۱۸۳۲	-
	۳	۲۰٫۱۵۴۷	۲۰٫۱۵۰۸	۲۰٫۱۵۰۵	۲۰٫۱۵۰۴	-
	۴	۲۰٫۱۴۹۰	۲۰٫۱۴۵۱	۲۰٫۱۴۴۸	۲۰٫۱۴۴۷	-
	۵	۲۰٫۱۴۷۴	۲۰٫۱۴۳۶	۲۰٫۱۴۳۳	۲۰٫۱۴۳۱	-
	۶	۲۰٫۱۴۶۹	۲۰٫۱۴۳۰	۲۰٫۱۴۲۷	۲۰٫۱۴۲۶	-
	۷	۲۰٫۱۴۶۶	۲۰٫۱۴۲۸	۲۰٫۱۴۲۶	۲۰٫۱۴۲۶	-
	۸	۲۰٫۱۴۶۵	۲۰٫۱۴۲۷	۲۰٫۱۴۲۳	۲۰٫۱۴۲۳	۲۰٫۱۴۲۳
	۹	-	-	-	-	۲۰٫۱۴۲۲
ω_2	۱	۴۵٫۴۰۶۹	۴۴٫۵۲۶۳	۴۴٫۴۷۱۸	۴۴٫۴۶۱۸	-
	۲	۴۴٫۸۳۱۴	۴۳٫۹۴۰۰	۴۳٫۸۸۴۸	۴۳٫۸۷۴۷	-
	۳	۴۴٫۸۱۵۴	۴۳٫۹۲۳۷	۴۳٫۸۶۸۵	۴۳٫۸۵۸۳	-
	۴	۴۴٫۸۱۲۷	۴۳٫۹۲۱۰	۴۳٫۸۶۵۷	۴۳٫۸۵۵۶	-
	۵	۴۴٫۸۱۱۹	۴۳٫۹۲۰۳	۴۳٫۸۶۵۰	۴۳٫۸۵۴۹	-
	۶	۴۴٫۸۱۱۷	۴۳٫۹۲۰۰	۴۳٫۸۶۴۷	۴۳٫۸۵۴۶	-
	۷	۴۴٫۸۱۱۶	۴۳٫۹۱۹۸	۴۳٫۸۶۴۷	۴۳٫۸۵۴۵	-
	۸	۴۴٫۸۱۱۶	۴۳٫۹۱۹۸	۴۳٫۸۶۴۶	۴۳٫۸۵۴۵	۴۳٫۸۵۴۱
	۹	-	-	-	-	۴۳٫۸۵۴۱
ω_3	۱	۷۶٫۶۴۹۹	۷۶٫۶۴۸۷	۷۶٫۶۴۸۶	۷۶٫۶۴۸۶	-
	۲	۶۷٫۷۸۳۰	۶۷٫۷۸۱۷	۶۷٫۷۸۱۶	۶۷٫۷۸۱۵	-
	۳	۶۲٫۵۲۹۲	۶۲٫۵۲۷۸	۶۲٫۵۲۷۷	۶۲٫۵۲۷۷	-
	۴	۶۲٫۱۰۸۶	۶۲٫۱۰۷۲	۶۲٫۱۰۷۰	۶۲٫۱۰۷۰	-
	۵	۶۱٫۹۸۶۸	۶۱٫۹۸۵۴	۶۱٫۹۸۵۳	۶۱٫۹۸۵۳	-
	۶	۶۱٫۹۴۱۹	۶۱٫۹۴۰۴	۶۱٫۹۴۰۳	۶۱٫۹۴۰۳	-
	۷	۶۱٫۹۲۲۴	۶۱٫۹۲۰۲	۶۱٫۹۲۰۸	۶۱٫۹۲۰۸	-
	۸	۶۱٫۹۱۲۸	۶۱٫۹۱۱۴	۶۱٫۹۱۱۲	۶۱٫۹۱۱۲	۶۱٫۹۱۱۲
	۹	-	-	-	-	۶۱٫۹۱۱۱
ω_4	۱	۹۳٫۰۸۴۴	۸۸٫۳۹۵۸	۸۷٫۳۰۰۳	۸۷٫۱۳۰۷	-
	۲	۸۵٫۴۹۹۵	۸۴٫۹۳۴۷	۸۴٫۹۰۴۳	۸۴٫۸۹۸۸	-
	۳	۸۱٫۲۹۳۹	۸۰٫۷۰۱۳	۸۰٫۶۶۹۲	۸۰٫۶۶۳۵	-
	۴	۸۰٫۹۵۹۳	۸۰٫۳۶۴۴	۸۰٫۳۳۲۲	۸۰٫۳۲۶۵	-
	۵	۸۰٫۸۶۳۵	۸۰٫۲۶۸۰	۸۰٫۲۳۵۸	۸۰٫۲۳۰۰	-
	۶	۸۰٫۸۲۸۵	۸۰٫۲۳۲۷	۸۰٫۲۰۰۵	۸۰٫۱۹۴۷	-
	۷	۸۰٫۸۱۳۳	۸۰٫۲۱۷۴	۸۰٫۱۸۵۲	۸۰٫۱۷۹۴	-
	۸	۸۰٫۸۰۵۹	۸۰٫۲۰۹۹	۸۰٫۱۷۷۷	۸۰٫۱۷۲۰	۸۰٫۱۷۱۸
	۹	-	-	-	-	۸۰٫۱۷۱۸

جدول ۲. نحوه‌ی تغییرات بسامد (بر حسب هرتز) برای چهار مود اول ورق ساندویچی دارای شرایط مرزی چهار طرف گیردار با تغییر تعداد نوار و گره در روش نوار محدود اسپلاین به ازای شدت میدان صفر گوس.

بسامد	تعداد نوار	تعداد گره			
		۴	۸	۱۲	۱۶
	۶	۴۰٫۴۶۳۲	-	-	-
	۸	۴۰٫۴۵۸۲	-	-	-
	۱۰	۴۰٫۴۵۶۸	-	-	-
ω_1	۱۲	۴۰٫۴۵۶۳	-	-	-
	۱۴	۴۰٫۴۵۶۱	-	-	-
	۱۶	۴۰٫۴۵۶۰	۴۰٫۳۹۱۸	۴۰٫۳۸۹۵	۴۰٫۳۸۹۵
	۱۸	۴۰٫۴۵۵۹	۴۰٫۳۹۱۷	۴۰٫۳۸۹۴	۴۰٫۳۸۹۴
	۶	۷۰٫۳۰۹۰	-	-	-
	۸	۷۰٫۳۰۳۴	-	-	-
	۱۰	۷۰٫۳۰۱۸	-	-	-
ω_2	۱۲	۷۰٫۳۰۱۲	-	-	-
	۱۴	۷۰٫۳۰۱۰	-	-	-
	۱۶	۷۰٫۳۰۰۹	۶۸٫۹۰۳۲	۶۸٫۸۵۱۷	۶۸٫۸۵۱۵
	۱۸	۷۰٫۳۰۰۸	۶۸٫۹۰۳۱	۶۸٫۸۵۱۶	۶۸٫۸۵۱۴
	۶	۹۵٫۳۷۵۸	-	-	-
	۸	۹۵٫۲۶۲۴	-	-	-
	۱۰	۹۵٫۲۳۰۹	-	-	-
ω_3	۱۲	۹۵٫۲۱۹۶	-	-	-
	۱۴	۹۵٫۲۱۴۷	-	-	-
	۱۶	۹۵٫۲۱۲۳	۹۵٫۱۰۴۷	۹۵٫۰۹۹۶	۹۵٫۰۹۹۶
	۱۸	۹۵٫۲۱۱۷	۹۵٫۱۰۴۲	۹۵٫۰۹۸۹	۹۵٫۰۹۸۹
	۶	۱۱۷٫۹۹۷۳	-	-	-
	۸	۱۱۷٫۸۹۵۲	-	-	-
	۱۰	۱۱۷٫۸۶۷۲	-	-	-
ω_4	۱۲	۱۱۷٫۸۵۷۱	-	-	-
	۱۴	۱۱۷٫۸۵۲۷	-	-	-
	۱۶	۱۱۷٫۸۵۰۶	۱۱۶٫۳۹۲۷	۱۱۶٫۳۵۰۸	۱۱۶٫۳۵۰۳
	۱۸	۱۱۷٫۸۵۰۰	۱۱۶٫۳۹۲۲	۱۱۶٫۳۵۰۲	۱۱۶٫۳۴۹۷

۶. صحت‌سنجی

جهت صحت‌سنجی نتایج، یک ورق ساندویچی حاوی سیال MR مطابق با مشخصات ارائه شده در مرجع[۲۱]، با شرایط مرزی چهار طرف مفصل در نظر گرفته می‌شود. ورق مورد نظر با ابعاد (m^2) ۰/۲ × ۰/۳ و با ضخامت‌های $h_t/h_b = ۰/۳$ و $h_c/h_b = ۰/۵$، $h_b = ۱/۲۵(mm)$ است. مشخصات سیال ویسکوکشسان مغناطیسی بر اساس مرجع[۲۱] مطابق رابطه‌ی ۲۵ است:

$$G' = -۳/۳۶۹۱B^2 + ۴/۹۹۷۵ \times ۱۰^3 B + ۰/۸۷۳ \times ۱۰^6$$
$$G'' = -۰/۹B^2 + ۰/۸۱۲۴ \times ۱۰^3 B + ۰/۱۸۵۵ \times ۱۰^6 \qquad (۲۵)$$

همچنین چگالی آن برابر با $\rho_c = ۳۵۰۰ kg.m^{-3}$ است. مطابق با نتایج به دست آمده از جدول ۱، تعداد گره‌های لازم برابر با ۱۲ گره و تعداد نوارهای مورد

جدول ۳. مقایسه‌ی ۴ بسامد اول (هرتز) ورق ساندویچی بر اساس پژوهش حاضر و مرجع[۲۱].

مود	شدت میدان مغناطیسی					
	۲۰۰ G			۴۰۰ G		
	پژوهش حاضر	مرجع[۲۱]	اختلاف (٪)	پژوهش حاضر	مرجع[۲۱]	اختلاف (٪)
۱	۱۰۹٫۲۸	۱۰۷٫۳۴	۱٫۷۷	۱۱۴٫۹۹	۱۱۵٫۰۱	۰٫۰۱
۲	۱۸۹٫۵۸	۱۸۳٫۸۱	۳٫۰۴	۱۹۸٫۳۸	۱۹۵٫۲۱	۱٫۶
۳	۲۸۸٫۲۲	۲۸۳٫۰۶	۱٫۷۹	۲۹۹٫۸۷	۲۹۵٫۲۱	۱٫۲۲
۴	۳۱۶٫۴۹	۳۱۳٫۰۹	۱٫۰۷	۳۲۷٫۹۹	۳۲۷٫۱۵	۰٫۲۵

نیاز ۹ نوار جهت صحت‌سنجی نتایج استفاده شده است. همان‌گونه که در جدول ۳ ارائه شده است، بسامد ۴ مود اول سازه تحت اثر دو شدت میدان مغناطیسی ۲۰۰ و ۴۰۰ گوس محاسبه شده است. این تذکر لازم است که در جدول ۳، G معرف یکای شدت میدان مغناطیسی، گوس است.

بر اساس نتایج ارائه شده در جدول ۳ می‌توان گفت که هم‌گرایی مناسبی بین نتایج حاصل از مرجع[۲۱] و نتایج حاصل از روش نوار محدود اسپلاین وجود دارد.

۷. نتایج عددی

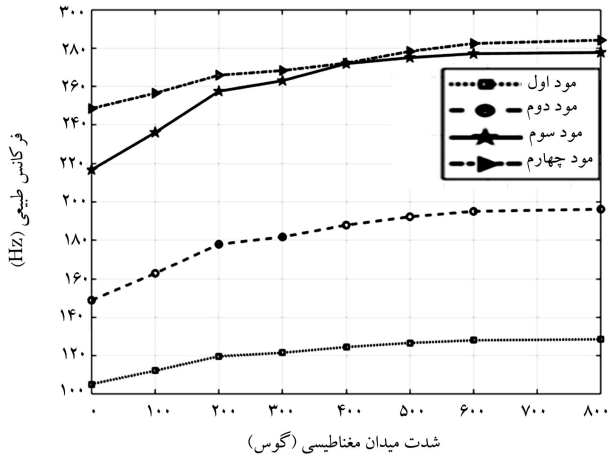
در یک ورق ساندویچی حاوی سیال مگنتورئولوژیکال عوامل مختلفی، نظیر: شدت میدان مغناطیسی، ضخامت هسته و هندسه‌ی ورق در پارامترهای ارتعاشی سازه تأثیرگذار هستند. لذا به منظور بررسی تأثیر عوامل یاد شده در بسامد و ضریب استهلاک، یک ورق ساندویچی با مشخصات هندسی و مکانیکی ارائه شده در بخش ۵ در نظر گرفته شده است.

۱.۷. بررسی تأثیر شدت میدان مغناطیسی

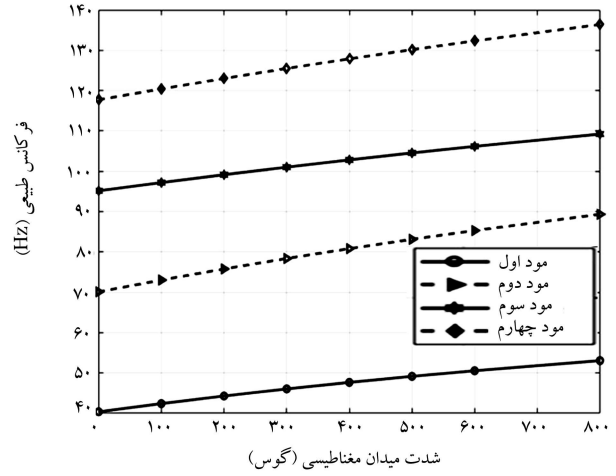
به منظور بررسی تأثیر شدت میدان مغناطیسی در بسامد و ضریب استهلاک، لایه‌های محافظ از جنس کامپوزیت شیشه - اپوکسی با لایه‌چینی (°۰/°۹۰/°۰) هسته (°۰/°۹۰/°۰) در ورق ساندویچی در نظر گرفته شده است. همچنین در بخش حاضر، علاوه بر مشخصات یاد شده برای الیاف و سیال، از الیاف گرافیت - اپوکسی بر اساس مرجع[۳۲] و نوعی دیگر از سیال مغناطیسی مطابق با مراجع[۲۱ و ۳۳] استفاده شده است. شرایط تکیه‌گاهی برای هر چهار لبه‌ی ورق، گیردار انتخاب شده است. نتایج حاصل مطابق با جدول ۴ و شکل‌های ۶ و ۷ ارائه شده‌اند.

همان گونه که در شکل‌های ۶ و ۷ مشاهده می‌شود، با افزایش شدت میدان مغناطیسی، در هر دو دسته‌ی سیال، بسامد نظیر هر مود افزایش پیدا کرده است. افزایش شدت میدان مغناطیسی، تأثیر مستقیمی در افزایش مدول برشی سیال دارد؛ لذا این افزایش باعث بالا رفتن سختی سازه و در نهایت افزایش بسامد در هر مود می‌شود.

همچنین اگر ضریب استهلاک مودال برابر با نسبت مربع بخش موهومی بسامد به بخش حقیقی آن در نظر گرفته شود، آن‌گاه مطابق با جدول ۴ و شکل ۸ مشاهده می‌شود که با افزایش شدت میدان اعمالی، ضریب استهلاک نظیر هر مود نیز افزایش می‌یابد. دلیل این روند آن است که با بالا رفتن شدت میدان اعمالی بخش موهومی مدول برشی سیال، که نماینده‌ی انرژی مستهلک شده در رفتار یک ماده‌ی ویسکوکشسان است، افزایش پیدا می‌کند.



شکل ۶. تأثیر افزایش شدت میدان مغناطیسی در افزایش بسامد در ورق دارای سیال (ρ_e۳۵۰۰$(kg.m^{-3})$) و الیاف گرافیت - اپوکسی.

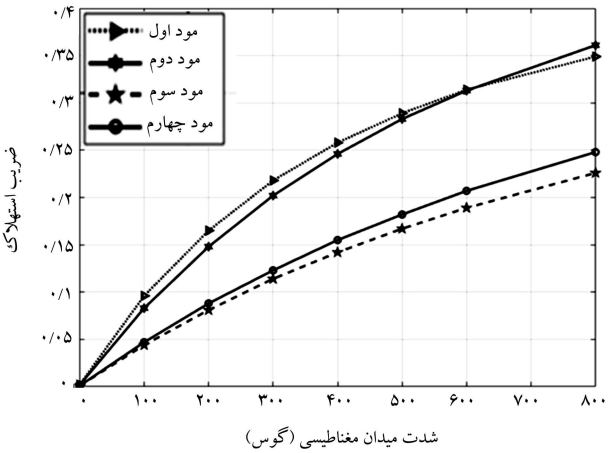


شکل ۷. تأثیر افزایش شدت میدان مغناطیسی در افزایش بسامد مودی در ورق دارای سیال ($\rho_e = ۲۸۱۲(kg.m^{-3})$) و الیاف شیشه - اپوکسی.

همچنین افزایش شدت میدان نیز موجب افزایش کل انرژی ذخیره شده در سازه می‌شود. لذا نسبت انرژی مستهلک شده به کل انرژی کرنشی، که بیان‌گر ضریب استهلاک مودال است، با بالا رفتن شدت میدان، مطابق با نتایج حاصل افزایش می‌یابد؛ اما همان گونه که از جدول ۴ مشخص می‌شود، این نسبت به ازای یک شدت میدان معین در مودهای بالاتر کمتر از مودهای اولیه‌ی سازه است.

جدول ۴. اثر شدت میدان مغناطیسی در بسامد و ضریب استهلاک مودال ورق ساندویچی چهار طرف گیردار.

	بسامد طبیعی (هرتز)					
	مود	۰ G	۱۰۰ G	۳۰۰ G	۵۰۰ G	۸۰۰ G
	۱	۱۰۵٫۲۷	۱۱۲٫۲۶	۱۲۱٫۵۸	۱۲۶٫۶۶	۱۲۸٫۵۵
	۲	۱۴۸٫۸۷	۱۶۲٫۸۵	۱۸۱٫۷۹	۱۹۲٫۲۸	۱۹۶٫۲۱
	۳	۲۱۶٫۶۷	۲۳۶٫۰۸	۲۶۳٫۰۱	۲۷۵	۲۷۷٫۶۸
گرافیت ـ اپوکسی	۴	۲۴۸٫۵۴	۲۵۶٫۵۳	۲۶۸٫۲۹	۲۷۸٫۲۷	۲۸۴٫۰۸
$\rho_c = ۳۵۰۰ \mathrm{kg.m^{-3}}$	ضریب استهلاک					
(رابطه‌ی ۲۵)	مود	۰ G	۱۰۰ G	۳۰۰ G	۵۰۰ G	۸۰۰ G
	۱	۰٫۰۵۶	۰٫۰۶۴	۰٫۰۶۶	۰٫۰۶	۰٫۰۴۱
	۲	۰٫۰۷۹	۰٫۰۸۹	۰٫۰۹۱	۰٫۰۸۳	۰٫۰۵۵
	۳	۰٫۰۷۵	۰٫۰۸۶	۰٫۰۹۱	۰٫۰۳۸	۰٫۰۲۶
	۴	۰٫۰۲۶	۰٫۰۳۳	۰٫۰۳۹	۰٫۰۸۴	۰۹٫۰۵۶
	بسامد طبیعی (هرتز)					
	مود	۰ G	۱۰۰ G	۳۰۰ G	۵۰۰ G	۸۰۰ G
	۱	۴۰٫۳۹	۴۲٫۴۱	۴۶٫۰۵	۴۹٫۱۷	۵۳٫۰۷
	۲	۶۸٫۸۵	۷۳٫۰۵	۷۸٫۳۹	۸۳٫۱۴	۸۹٫۳۰
	۳	۹۵٫۱۰	۹۷٫۲۰	۱۰۱٫۰۳	۱۰۴٫۵۵	۱۰۹٫۲۳
شیشه ـ اپوکسی	۴	۱۱۶٫۳۵	۱۲۰٫۴۳	۱۲۵٫۵۰	۱۳۰٫۱۶	۱۳۶٫۳۹
$\rho_c = ۲۸۱۲ \mathrm{kg.m^{-3}}$	ضریب استهلاک					
رابطه‌ی ۲۴	مود	۰ G	۱۰۰ G	۳۰۰ G	۵۰۰ G	۸۰۰ G
	۱	۰٫۰۰۲۰۶	۰٫۰۹۶	۰٫۲۱۸	۰٫۲۸۹	۰٫۳۴۹
	۲	۰٫۰۰۱۷	۰٫۰۸۳	۰٫۲۰۲	۰٫۲۸۳	۰٫۳۶۱
	۳	۰٫۰۰۰۸۷۷	۰٫۰۴۴	۰٫۱۱۴	۰٫۱۶۷	۰٫۲۲۶
	۴	۰٫۰۰۰۹۳۸	۰٫۰۴۷	۰٫۱۲۳	۰٫۱۸۲	۰٫۲۴۸



شکل ۸. تأثیر افزایش شدت میدان مغناطیسی در افزایش ضریب استهلاک در ورق دارای سیال ($\rho_c = ۲۸۱۲(kg.m^{-3})$) و الیاف شیشه - اپوکسی.

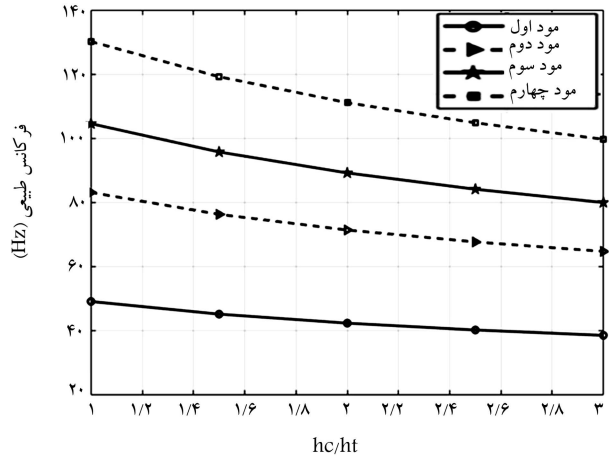
۲.۷. تأثیر ضخامت هسته‌ی ورق ساندویچی

جهت بررسی تأثیر سیال مغناطیسی MR در پارامترهای ارتعاش آزاد یک ورق ساندویچی، نسبت ضخامت سیال به ضخامت لایه‌ی فوقانی در مقادیر مختلف مطابق با جدول ۵ در نظرگرفته شده است. شرایط هندسی مطابق با بخش ۱.۷ و لایه‌های فوقانی و زیرین هسته از جنس کامپوزیت‌های شیشه - اپوکسی بودند. این تذکر لازم است که لایه‌ی میانی از جنس سیال با چگالی $\rho_c = ۲۸۱۲kg.m^{-3}$ انتخاب شده است و همه‌ی لبه‌های ورق، گیردار در نظرگرفته شده‌اند.

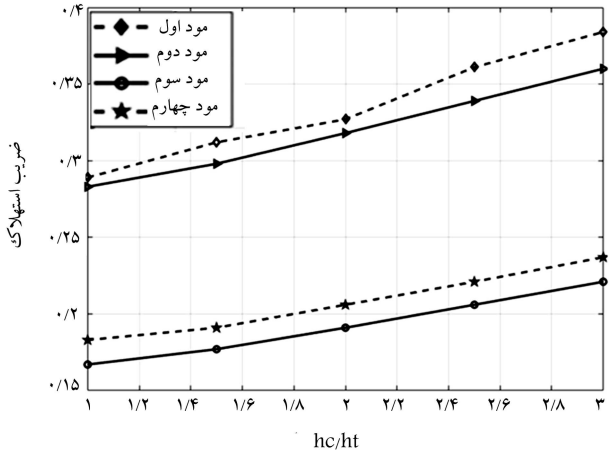
همچنین ترتیب لایه‌چینی درورق ساندویچی به صورت (°۰/°۹۰/°۰/) هسته (°۰/°۹۰/°۰) در نظرگرفته شده است. همان گونه که در جدول ۵ و شکل ۹ مشاهده می‌شود، با افزایش ضخامت سیال، بسامد نظیر هر مود در ورق کاهش یافته است. به دلیل افزایش ضخامت سیال، جرم کل سازه افزایش می‌یابد. همچنین افزایش ضخامت هسته نیز موجب بالا رفتن انرژی کرنشی سازه و در نهایت سختی سازه می‌شود. لذا نتایج حاکی از آن است که افزایش جرم در مقایسه با افزایش

جدول ۵. تأثیر ضخامت هسته در بسامد و ضریب استهلاک ورق چهار طرف گیردار تحت شدت میدان ۵۰۰ گوس.

h_c/h_t	بسامد طبیعی (هرتز)				ضریب استهلاک			
	مود ۱	مود ۲	مود ۳	مود ۴	مود ۱	مود ۲	مود ۳	مود ۴
۱	۴۹٫۱۷	۸۳٫۱۴	۱۰۴٫۵۵	۱۳۰٫۱۶	۰٫۲۸۹	۰٫۲۸۳	۰٫۱۶۷	۰٫۱۸۲
۱٫۵	۴۵٫۲۲	۷۶٫۳۰	۹۵٫۷۴	۱۱۹٫۱۹	۰٫۳۱۲	۰٫۲۹۸	۰٫۱۷۷	۰٫۱۹۱
۲	۴۲٫۴۳	۷۱٫۴۴	۸۹٫۲۲	۱۱۱٫۱۱	۰٫۳۳۷	۰٫۳۱۸	۰٫۱۹۱	۰٫۲۰۶
۲٫۵	۴۰٫۳۰	۶۷٫۷۲	۸۴٫۱۳	۱۰۴٫۸۱	۰٫۳۶۱	۰٫۳۳۹	۰٫۲۰۶	۰٫۲۲۱
۳	۳۸٫۶۱	۶۴٫۷۶	۸۰	۹۹٫۷۱	۰٫۳۸۴	۰٫۳۶۰	۰٫۲۲۱	۰٫۲۳۷



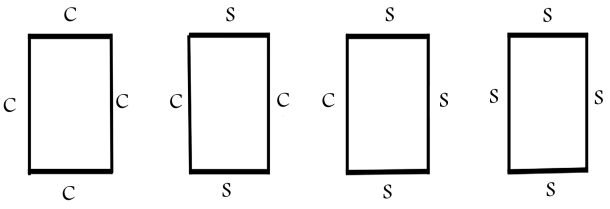
شکل ۹. اثر افزایش ضخامت سیال در بسامد نظیر هر مود.



شکل ۱۰. تأثیر افزایش ضخامت سیال در ضریب استهلاک.

سختی بیشتر بوده و همان گونه که در شکل ۹ مشخص است، بسامد نظیر هر مود، روندی نزولی را با افزایش ضخامت هسته طی کرده است.

در بررسی تأثیر ضخامت سیال در ضریب استهلاک نظیر هر مود همان گونه که از جدول ۵ و نیز شکل ۱۰ مشخص می‌شود، با افزایش ضخامت سیال، ضریب استهلاک نیز افزایش یافته است. به علت افزایش ضخامت سیال، هم انرژی کرنشی سازه و هم انرژی اتلاف شده در هسته افزایش می‌یابند؛ اما نسبت بین انرژی هدر رفته به کل انرژی کرنشی سازه در مجموع به ازای هر مود ارتعاشی، بالاتر می‌رود و در نتیجه ضریب استهلاک نظیر افزایش می‌یابد.



شکل ۱۱. شرایط مختلف مرزی در ورق ساندویچی حاوی سیال مغناطیسی (MR).

۳.۷. بررسی تأثیر شرایط مرزی مختلف

برای بررسی شرایط تکیه‌گاهی بر پارامترهای ارتعاش آزاد ورق ساندویچی حاوی سیال مگنتورئولوژیکال در هسته، یک ورق ساندویچی با مشخصات ارائه شده در بخش ۱.۷ و با لایه‌چینی (°/°۹۰/°۰/°۹۰/°۰) هسته در نظرگرفته شده است. شرایط تکیه‌گاهی در بخش حاضر مطابق با شکل ۱۱ به صورت CCCC، SCSC، SCSS و SSSS هستند.

همچنین در هر شرط مرزی سه شدت مغناطیسی ۰، ۲۰۰ و ۵۰۰ گوس بررسی شده است. همان گونه که در جدول ۶ ارائه شده است، به ازای تمام شرایط تکیه‌گاهی با افزایش شدت میدان مغناطیسی، بسامد نظیر هر مود افزایش یافته است.

همان‌گونه که قبلاً نیز ذکر شد، با افزایش شدت میدان اعمالی، مدول برشی سیال در هسته افزایش می‌یابد، که نتیجه‌ی آن افزایش سختی کل سازه و بالا رفتن بسامدهای مودی است. همچنین می‌توان از نتایج جدول ۶ و نیز شکل ۱۲ دریافت که شرایط مرزی CCCC و SSSS به ترتیب بیشترین و کمترین بسامد نظیر هر مود را در هر سه شدت میدان اعمالی دارند. بدیهی است علت این امر آن است که شرط مرزی تمام گیردار، بیشترین سختی را برای ورق ایجاد می‌کند؛ در حالی که از میان شرایط مرزی ذکر شده، شرط مرزی چهار طرف مفصل، کمترین سختی را دارد. از آن‌جا که سختی رابطه‌ی مستقیمی با بسامد دارد، لذا بسامدهای حاصل به ترتیب بیشترین و کمترین مقادیر متناظر را دارند.

همچنین در جدول ۷ نتایج حاصل از ضریب استهلاک مودال به ازای شرایط مختلف مرزی ارائه شده است.

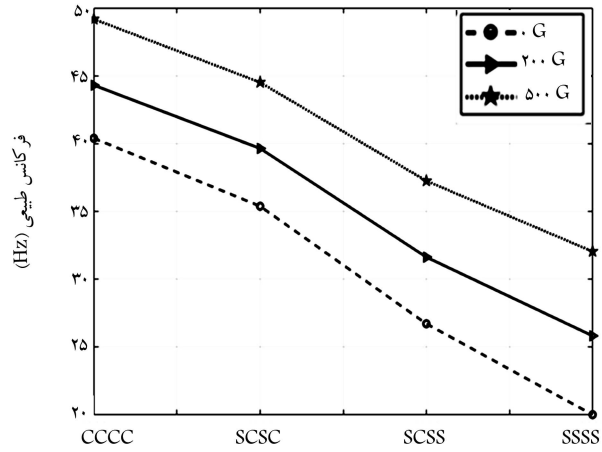
همان گونه که مشاهده می‌شود، با افزایش شدت میدان اعمالی، در تمام شرایط مرزی، ضریب استهلاک افزایش می‌یابد. همچنین از نتایج جدول ۷ و نیز شکل ۱۳ می‌توان دریافت که تقریباً در تمام مودها، شرط مرزی چهار طرف گیردار، کمترین ضریب استهلاک نظیر هر مود را دارد و شرط مرزی چهار طرف مفصل، بیشترین مقدار نظیر را دارد. این موضوع حاکی از آن است که با کم کردن قیدهای تکیه‌گاهی روی تغییر شکل‌های درون صفحه و همچنین تغییر شکل‌های خمشی در تکیه‌گاه‌ها، شدت تنش‌های وارده بر سازه در مرزها کاهش می‌یابد. این امر باعث کاهش سختی

جدول ۶. بسامدهای (هرتز) ورق ساندویچی با رویه‌های مرکب شیشه - اپوکسی و سیال به چگالی ($kg.m^{-3}$۲۸۱۲).

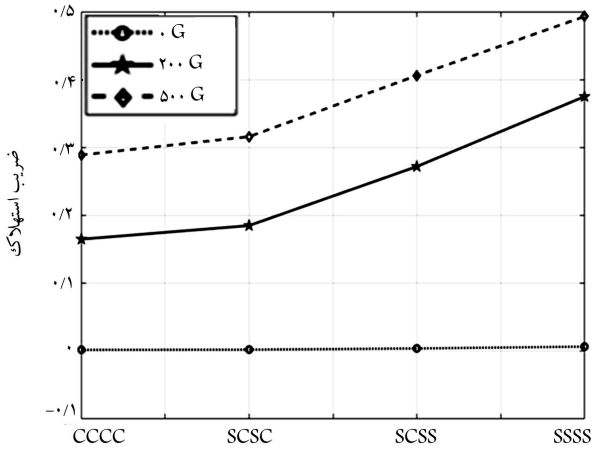
شدت میدان (گوس)	مود	شرایط مرزی			
		$CCCC$	$SCSC$	$SCSS$	$SSSS$
۰	۱	۴۰٫۳۹	۳۵٫۳۸	۲۶٫۷۲	۲۰٫۱۴
	۲	۶۸٫۸۵	۵۳٫۴۸	۴۷٫۶۵	۴۳٫۸۵
	۳	۹۵٫۱۰	۹۲٫۴۷	۷۶٫۳۶	۶۱٫۹۱
	۴	۱۱۶٫۳۵	۹۲٫۸۴	۸۸٫۹۵	۸۰٫۱۷
۲۰۰	۱	۴۴٫۳	۳۹٫۶۴	۳۱٫۶۳	۲۵٫۸۳
	۲	۷۵٫۸	۵۹٫۶۴	۵۴٫۳۷	۵۰٫۷۴
	۳	۹۹٫۱۵	۹۶٫۸۲	۸۰٫۸۹	۶۷٫۰۳
	۴	۱۲۳٫۰۱	۹۹٫۵۶	۹۶٫۲۳	۸۶٫۳۹
۵۰۰	۱	۴۹٫۱۷	۴۴٫۵۱	۳۷٫۲۵	۳۲٫۰۵
	۲	۸۳٫۱۴	۶۷٫۳۶	۶۲٫۵۹	۵۹٫۲۶
	۳	۱۰۴٫۵۵	۱۰۲٫۱۴	۸۶٫۸۶	۷۳٫۶۶
	۴	۱۳۰٫۱۶	۱۰۸٫۷۷	۱۰۵٫۸۳	۹۴٫۷۰

جدول ۷. ضرایب استهلاک ورق ساندویچی با رویه‌های مرکب شیشه - اپوکسی و سیال به چگالی۲۸۱۲($kg.m^{-3}$) .

شدت میدان (گوس)	مود ارتعاش	شرایط مرزی			
		$CCCC$	$SCSC$	$SCSS$	$SSSS$
۰	۱	۰٫۰۰۲۰۶	۰٫۰۰۲۳۷	۰٫۰۰۴۰۸	۰٫۰۰۶۷۳
	۲	۰٫۰۰۱۷۰	۰٫۰۰۲۴۶	۰٫۰۰۳۰۵	۰٫۰۰۳۵۳
	۳	۰٫۰۰۰۸۷۷	۰٫۰۰۱۶۱	۰٫۰۰۱۲۳	۰٫۰۰۱۷۶
	۴	۰٫۰۰۰۹۳۸	۰٫۰۰۰۸۸۷	۰٫۰۰۱۷۲	۰٫۰۰۱۶۹
۲۰۰	۱	۰٫۱۶۵	۰٫۱۸۵	۰٫۲۷۲	۰٫۳۷۵
	۲	۰٫۱۴۸	۰٫۲۰۰	۰٫۲۳۵	۰٫۲۶۲
	۳	۰٫۰۸۱	۰٫۰۸۲	۰٫۱۱۱	۰٫۱۵۱
	۴	۰٫۰۸۸	۰٫۱۴۲	۰٫۱۵۱	۰٫۱۴۷
۵۰۰	۱	۰٫۲۸۹	۰٫۳۱۶	۰٫۴۰۶	۰٫۴۹۳
	۲	۰٫۲۸۳	۰٫۳۵۴	۰٫۳۹۹	۰٫۴۳۱
	۳	۰٫۱۶۷	۰٫۱۶۹	۰٫۲۲۰	۰٫۲۸۳
	۴	۰٫۱۸۲	۰٫۲۷۸	۰٫۲۳۶	۰٫۲۸۲



شکل ۱۲. کاهش بسامد مود اول با نرم‌تر شدن سازه.



شکل ۱۳. افزایش ضریب استهلاک مود اول با نرم‌تر شدن سازه.

جدول ۸. بسامد طبیعی (بر حسب هرتز) ورق چهار طرف مفصلی حاوی سیال مغناطیسی (MR) برای حالت‌های مختلف لایه‌چینی.

لایه‌چینی صفحات محافظ	مود	شدت میدان مغناطیسی		
		۰ G	۲۰۰ G	۵۰۰ G
/۰°/۹۰°/۰° هسته ۰°/۹۰°/۰°/	۱	۲۰٫۱۴	۲۵٫۸۳	۳۲٫۰۵
	۲	۴۳٫۸۵	۵۰٫۷۴	۵۹٫۲۶
	۳	۶۱٫۹۱	۶۷٫۰۳	۷۳٫۶۶
	۴	۸۰٫۱۷	۸۶٫۳۹	۹۴٫۷۰
/۴۵°/۳۰°/۴۵° هسته ۴۵°/۳۰°/۴۵°/	۱	۲۲٫۸۱	۲۸٫۱۰	۳۳٫۹۳
	۲	۴۹٫۵۹	۵۶٫۰۱	۶۳٫۹۲
	۳	۵۸٫۹۰	۶۴٫۳۷	۷۱٫۳۲
	۴	۸۴٫۴۶	۹۰٫۹۷	۹۹٫۴۱
/۴۵°/۳۰°/۴۵° هسته ۴۵° − /۳۰° − /۴۵° − /	۱	۲۳٫۶۹	۲۸٫۷۶	۳۴٫۴۲
	۲	۵۵٫۸۸	۶۱٫۵۶	۶۸٫۷۴
	۳	۵۶٫۲۴	۶۱٫۸۹	۶۹٫۰۲
	۴	۹۴٫۶۳	۱۰۰٫۱۱	۱۰۷٫۳۵

جدول ۹. ضریب استهلاک ورق چهار طرف مفصلی حاوی سیال مغناطیسی (MR) برای حالت‌های مختلف لایه‌چینی.

لایه‌چینی صفحات محافظ	مود	شدت میدان مغناطیسی		
		۰ G	۲۰۰ G	۵۰۰ G
۰°/۹۰°/۰° هسته ۰°/۹۰°/۰°	۱	۰٫۰۰۶۷۳	۰٫۳۷۵	۰٫۴۹۳
	۲	۰٫۰۰۳۵۳	۰٫۲۶۲	۰٫۴۳۱
	۳	۰٫۰۰۱۷۶	۰٫۱۵۱	۰٫۲۸۳
	۴	۰٫۰۰۱۶۹	۰٫۱۴۷	۰٫۲۸۲
۴۵°/۳۰°/۴۵° هسته ۴۵°/۳۰°/۴۵°	۱	۰٫۰۰۵۲۶	۰٫۳۲۰	۰٫۴۴۴
	۲	۰٫۰۰۲۷۹	۰٫۲۱۷	۰٫۳۶۹
	۳	۰٫۰۰۱۹۷	۰٫۱۶۵	۰٫۳۰۴
	۴	۰٫۰۰۱۶۲	۰٫۱۴۱	۰٫۲۶۹
۴۵°/۳۰°/۴۵° هسته ۴۵° − /۳۰° − /۴۵° −	۱	۰٫۰۰۴۸۱	۰٫۳۰۲	۰٫۴۲۸
	۲	۰٫۰۰۲۱۶	۰٫۱۷۷	۰٫۳۱۵
	۳	۰٫۰۰۲۱۳	۰٫۱۷۷	۰٫۳۲۲
	۴	۰٫۰۰۱۲۰	۰٫۱۰۹	۰٫۲۱۸

سازه و در نهایت نرم‌تر شدن آن می‌شود. لذا افزایش نرمی باعث میرایی و استهلاک هر چه بیشتر انرژی می‌شود.

۴.۷. تأثیر لایه‌چینی صفحات محافظ

برای بررسی آثار لایه‌چینی رویه‌های بالایی و پایینی ورق ساندویچی حاوی سیال مغناطیسی در هسته، یک ورق چهار طرف مفصلی با شرایط هندسی و مکانیکی ارائه شده در بخش ۱.۷ در نظرگرفته شده است. لایه‌چینی رویه‌های بالایی و پایینی به صورت متقارن و پادمتقارن بوده است. همچنین آثار لایه‌چینی تحت سه شدت میدان ۰، ۲۰۰ و ۵۰۰ گوس ارزیابی شده است. مطابق نتایج جدول‌های ۸ و ۹، در هر دو حالت متقارن و پادمتقارن با افزایش شدت میدان اعمالی، بسامد و ضریب استهلاک مودی افزایش یافته‌اند. افزایش شدت میدان منجر به افزایش مدول برشی مختلط سیال موجود در هسته و در نتیجه افزایش انرژی کرنشی و انرژی مستهلک شده در هسته می‌شود. لذا افزایش انرژی کرنشی موجب افزایش سختی هسته و در نهایت بالا رفتن سختی کل سازه می‌شود، که این عامل به افزایش بسامد مودی منجر شده است.

همچنین نتایج حاکی از آن است که نسبت انرژی مستهلک شده در هسته به کل انرژی کرنشی سازه نیز افزایش یافته است. علی‌رغم این‌که تغییر وضعیت لایه‌چینی می‌تواند در انرژی کرنشی اثرگذار باشد، اما همان گونه که در جدول ۸ مشاهده می‌شود، در هر دو وضعیت متقارن و پادمتقارن، نهایتاً حدود ۱۲٪ به مقدار بسامد افزوده شده است. این موضوع بیان‌گر آن است که تغییر در وضعیت لایه‌چینی، تأثیر چشمگیری در تغییرات بسامد ندارد. از دیگر نتایج به دست آمده از جدول ۸ این است که تغییر وضعیت لایه‌چینی از حالت متقارن به وضعیت پادمتقارن، منجر به افزایش حدوداً ۱۰ درصدی در مقدار بسامد می‌شود. البته به غیر از مود سوم، مطابق نتایج جدول ۸، که با تغییر لایه‌چینی از متقارن به پادمتقارن، بسامد کاهش پیدا کرده است.

همچنین می‌توان از نتایج جدول ۹ دریافت در مواردی که با تغییر لایه‌چینی،

بسامد افزایش یافته است، به طور متقابل ضریب استهلاک نظیر مود مذکور کاهش یافته است. به علت تغییر در وضعیت لایه‌چینی به دلیل افزایش ماتریس‌های سختی اصلاح شده در لایه‌های کامپوزیتی، انرژی کرنشی و در پی آن سختی سازه افزایش می‌یابد. افزایش سختی لایه‌های محافظ به کاهش میدان جابه‌جایی در لایه‌ها می‌انجامد. از طرفی، به دلیل ارتباط میان هسته و لایه‌های محافظ، میدان جابه‌جایی و در پی آن انرژی ذخیره شده و اتلافی در هسته کاهش می‌یابد. بنابراین نسبت میان انرژی اتلافی در هسته به کل انرژی کرنشی کاهش یافته است.

۸. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، تأثیر شدت میدان مغناطیسی، ضخامت هسته، شرایط مرزی، و نوع لایه‌چینی صفحات محافظ یک ورق ساندویچی حاوی سیال مغناطیسی (MR)، در بسامد و ضریب استهلاک ارزیابی شد و نتایج نشان داد که افزایش شدت میدان، تأثیر مستقیمی در افزایش بسامد و ضریب استهلاک دارد، که ناشی از افزایش انرژی کرنشی و انرژی اتلافی در هسته‌ی ورق است. همچنین افزایش ضخامت سیال منجر به افزایش ضریب استهلاک می‌شود. حال آن‌که ازدیاد ضخامت هسته منجر به کاهش بسامد شده است. افزایش ضخامت هسته باعث افزایش سختی سازه و بالا رفتن جرم آن می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که میزان افزایش جرم، بیشتر از افزایش سختی سازه است و در نهایت، بسامد کاهش می‌یابد. این تذکر لازم است که با توجه به در نظرگرفتن چهار شرط مرزی مختلف، ورق چهار طرف گیردار بیشترین بسامد و شرط مرزی ساده، کمترین بسامد نظیر را داشته‌اند. همچنین تأثیر شرایط تکیه‌گاهی در ضریب استهلاک مودال به گونه‌یی است که در شرایط مرزی چهار طرف مفصل، بیشترین و در حالت چهار طرف گیردار، کمترین ضریب استهلاک مودی حاصل می‌شود. شایان ذکر است علی‌رغم تغییر انرژی کرنشی سازه، به واسطه‌ی تغییر در جهت‌گیری الیاف لایه‌های کامپوزیتی، بسامد نظیر هر مود تغییرات چشمگیری از خود نشان نداده است.

پانوشت‌ها

1. magneto rheological
2. Yeh, J.
3. Arumugam
4. Vemuluri

منابع (References)

1. Chooi, W.W. and Oyadiji S.O. "Design, modelling and testing of magnetorheological (MR) dampers using analytical flow solutions", *Computers & Structures*, **86**(3-5), pp. 473-482 (2008).
2. Rosenfeld, N.C. and Wereley, N.M. "Volume-constrained optimization of magnetorheological and electrorheological valves and dampers", *Smart Materials and Structures*, **13**(6), pp. 1303-1313 (2004).
3. Patel, R. "Mechanism of chain formation in nanofluid based MR fluids", *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, **323**(10), pp. 1360-1363 (2011).
4. Li, S.W., Bok, C.S., Won, L.D. and Hee, et al. "Micro-precision surface finishing using magneto-rheological fluid", *Science China Technological Sciences*, **55**(1), pp. 56-61 (2012).
5. Kciuk, M. and Turczyn, R. "Properties and application of magnetorheological fluids", *Journal of Achievements in Materials and Manufacturing Engineering*, **18**(12), pp. 127-130 (2006).
6. Ross, D., Ungar, E.E. and Kerwin, E.M. "Damping of plate flexural vibrations by means of viscoelastic laminae", *ASME annual meeting on structural damping, New York*, **3**, pp. 48-87 (1959).
7. DiTaranto, R.A. and McGraw, J.R. "Vibratory bending of damped laminated plates", *Journal of Engineering for Industry*, **91**(4), pp. 1081-1090 (1969).
8. Abdulhadi, F. "Transverse vibrations of laminated plates with viscoelastic layer damping", *Rochester, MN: IBM Systems Development Division* (1971).
9. Mirza, S. and Singh, A.V. "Axisymmetric vibration of circular sandwich plates", *AIAA Journal*, **12**(10), pp. 1418-1420 (1974).
10. Roy, P.K. and Ganesan, N. "A vibration and damping analysis of circular plates with constrained damping layer treatment", *Computers & Structures*, **49**(2), pp. 269-274 (1993).
11. Lara-Prieto, V., Parkin Rob, J.M., Silberschmidt, V. and et al. "Vibration characteristics of MR cantilever sandwich beams: experimental study", *Smart Materials and Structures*, **19**(1), 015005 (2010).
12. Sun, Q., Zhou, J.X. and Zhang, L. "An adaptive beam model and dynamic characteristics of magnetorheological materials", *Journal of Sound and Vibration*, **261**(3), pp. 456-481 (2003).
13. Chen, L. and Hansen, CH. "Active vibration control of a magnetorheological sandwich beam", *Acoustics 2005, Busselton*, WA (9-11 Nov) (2005).
14. Ying, Z.G., Ni, Y.Q. and Ye, S.Q. "Stochastic microvibration suppression of a sandwich plate using a magnetorheological viscoelastomer core", *Smart Material and Structures*, **23**(2), 025019-025019 (2014).
15. Guan, X., Dong, X. and Ou, J. "Magnetostrictive effect of magnetorheological elastomer", *Journal of Magnetism and Magnetic Material*, **320**(3-4), pp. 158-163 (2008).

16. Rajamohan, V., Sedaghati, R. and Rakheja, S. "Vibration analysis of a multi-layer beam containing magnetorheological fluid", *Journal of Smart Material and Structures*, **19**(1) (2010).

17. Choi, Y., Sprecher, A.F. and Conrad, H. "Vibration characterics of a composite beam containing an electrorheological fluid", *Journal of Inteligent Material System and Structures*, **1**(1), pp. 91-104 (1990).

18. Yeh, J. and Chen, L.W. "Finite element dynamic of orthotropic sandwich plates with an electrorheolo-gical fluid core layer", *Journal of Composite Structures*, **78**(3), pp. 368-376 (2007).

19. Mohammadi, M., Mahjoob, M.J. and Malakooti, S. "An experimental evaluation of pre-yield and post-yield rheological models of magnetic field dependent smart materials", *Journal of Mechanical Science and Technology*, **24**(9), pp. 1829-1837 (2010).

20. Ramkunar, K. and Ganesan, N. "Vibration and damping of camposite sandwich box column viscoelastic electrorheological fluid core and Performance comparison", *Material and Design*, **30**(8), pp. 2981-2994 (2009).

21. Yeh, J. "Vibration analysis of sandwich rectangular plates with magnetorheological elastomer damping treatment", *Journal of Smart Materials and Structures*, **22**(3), 035010 (2013).

22. Tikani, R., Ziaei-Rad, S. and Esfahanian, M." Simulation and experimental evaluation of a magnetorheological hydraulic engine mount", *Modares Mechanicl Engineering*, **14**(10), pp. 43-49 (2014).

23. Asgari, M., Payganeh, Gh., Malekzade Fard, K. and et al. "A parametric study of the free vibration analysis of composite sandwich plate with magneto-rheological smart core", *Modares Mechanical Engineering*, **15**(11), pp. 396-404 (2015).

24. Malekzade Fard, K., Payganeh, Gh. and Rashed Saghavaz, F. "Free vibration and low velocity impact analysis of sandwich plates with smart flexible cores", *Modares Mechanical Engineering*, **14**(13), pp. 191-200 (2015).

25. Payganeh, Gh., Malekzade Fard, K. and Rashed Saghavaz, F. "Effects of important geometrical and physical parameters on free vibration and impact force for sandwich plates with smart flexible cores", *Modares Mechanical Engineering*, **15**(1), pp. 21-30 (2015).

26. Malekzadeh Fard, K., Gholami, M., Reshadi, F. and et al. "Free vibration and buckling analyses of cylindrical sandwich panel with magneto rheological fluid layer", *Journal of Sandwich Structures and Materials*, **0**(00), pp. 1-27 (2015).

27. Arumugam, A.B., Ramamoorthy, M., Rajamohan, V. and et al. "Dynamic characterization and parametric instability analysis of rotating magnetorheological fluid composite sandwich plate subjected to periodic in-plane loading", *Journal of Sandwich Structures & Materials*, **0**(0), pp. 1-28 (2018).

28. Ghorbanpour Arani, A., Babakbar Zarei, H. and Haghparast, E. "Vibration response of viscoelastic sandwich plate with magnetorheological fluid core and functionally gradedpiezoelectric nanocomposite face sheets", *Journal of Vibration and Control*, **24**(21), pp. 5169-5185 (2018).

29. Talebitooti, M. and Fadaee, M. "Effects of carbon nanotube reinforcements on vibration suppression of magnetorheological fluid sandwich beam", *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, pp. 1-17 (2019).

30. Vemuluri, R., Rajamohan, V. and Edwin Sudhagar, P. "Structural optimization of tapered composite sandwich plates partially treated with magnetorheological elastomers", *Composite Structures*, **200**, pp. 258-276 (2018).

31. Ramamoorthy, M., Rajamohan, V. and Jeevanantham, A.K. "Vibration analysis of a partially treated laminated composite magnetorheological fluid sandwich plate", *Journal of Vibration and Control*, **22**(3), pp. 869-895 (2014).

32. Kaw, A. "Mechanics of composite materials", *Taylore and Francis, Newyork*, (2006).

33. Ramamoorthy, M., Rajamohan, V. and Jeevanantham, A.K. "Dynamic characterization of a laminated composite magnetorheological fluid sandwich plate", *Journal of Smart Material and Structures*, **23**(2), 025022 (2014).

فهرست علائم و نشانه‌ها

τ: تنش برشی سیال (kPa)؛

τ_y: تنش حد تسلیم (kPa)؛

G^*: مدول برشی مختلط سیال؛

γ: کرنش برشی سیال؛

μ: مدول سیال در حالت خمیری؛

$\dot{\gamma}$: نرخ کرنش برشی سیال؛

G': مدول برشی بخش کشسان سیال؛

G'': مدول برشی بخش ویسکوز سیال؛

$U_e^{t,b}$: انرژی کرنشی لایه‌های فوقانی و زیرین‌هسته (N.m)؛

U_c: انرژی کرنشی هسته (N.m)؛

T_1: انرژی جنبشی ناشی از تغییر شکل درون صفحه (N.m)؛

T_2: انرژی جنبشی ناشی از تغییر شکل برون صفحه(N.m)؛

T_3: انرژی جنبشی ناشی از اینرسی دورانی سیال (N.m)؛

Π: انرژی پتانسیل کل (N.m)؛

$[K]$: ماتریس سختی سازه؛

$[M]$: ماتریس جرم سازه؛

ω: بسامد مودی (Rad/s)؛

B: شدت میدان مغناطیسی (G)؛

G: یکای شدت میدان مغناطیسی (گوس)؛

t: زمان (s)؛

a: عرض نوار (m)؛

b: طول نوار (m).

پیوست

درون‌یابی درجه‌های آزادی خمشی و درون صفحه در لایه‌های فوقانی و زیرین هسته با استفاده از توابع اسپلاین مطابق با رابطه‌ی (پ ـ ۱) است. رابطه‌ی اساسی حاکم بر حرکت در دامنه‌ی یک نوار به عرض a و طول b به صورت رابطه‌ی (پ ـ ۲) خواهد بود: که در آن، ماتریس‌های B، ماتریس‌های کرنش نامیده می‌شوند، که بر حسب درجه‌های آزادی درون‌یابی شده بیان می‌شوند. در ادامه، مطابق با رابطه‌ی (پ ـ ۳)، ماتریس کرنش برای لایه‌ی فوقانی ارائه شده است. این تذکر لازم است که ماتریس مذکور برای لایه‌ی زیرین همانند لایه‌ی فوقانی است و فقط محل توابع شکل جابه‌جا می‌شوند. ماتریس کرنش برای هسته مطابق با رابطه‌ی (پ ـ ۴) است.

همچنین سایر ماتریس‌های موجود در رابطه‌ی (پ ـ ۲) برای لایه‌ی فوقانی و هسته مطابق با روابط (پ ـ ۵) و (پ ـ۶) هستند. ماتریس‌های سختی و جرم بر اساس ماتریس‌های کرنش درون‌یابی شده بر اساس روابط (پ ـ ۳) تا (پ ـ ۶) مطابق با روابط (پ ـ ۷) و (پ ـ ۸) هستند:

$$\begin{bmatrix} u^t \\ v^t \\ u^b \\ v^b \\ w^t \\ w^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1\mathbf{\Phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2\mathbf{\Phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1\mathbf{\Phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2\mathbf{\Phi} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_1\mathbf{\Phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2\mathbf{\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1\mathbf{\Phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2\mathbf{\Phi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_1\mathbf{\Phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2\mathbf{\Phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_1\mathbf{\Phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2\mathbf{\Phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{\Delta}^{ut} \\ \mathbf{\Delta}^{vt} \\ \mathbf{\Delta}^{ub} \\ \mathbf{\Delta}^{vb} \\ \mathbf{\Delta}^{wt} \\ \mathbf{\Delta}^{wb} \end{bmatrix}$$

(پ ـ ۱)

$$\int_0^a \int_0^b \Big(\mathbf{B}^{iT} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{21} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \mathbf{B}^i dxdy +$$

$$\int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \int_0^a \int_0^b \mathbf{B}^{cT} \begin{bmatrix} G^* & 0 \\ 0 & G^* \end{bmatrix} \mathbf{B}^c dxdydz - \omega^2 \Big(\int_0^a \int_0^b \big(\rho_i h_i \big(\mathbf{B}^{iuT}\mathbf{B}^{iu} + \mathbf{B}^{ivT}\mathbf{B}^{iv} + \mathbf{B}^{iwT}\mathbf{B}^{iw} \big) \big) dxdy +$$

$$\int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}} \int_0^a \int_0^b \big(\rho_c I_c \big(\mathbf{B}^{1cT}\mathbf{B}^{1c} + \mathbf{B}^{2cT}\mathbf{B}^{2c} \big) + \rho_c h_c \mathbf{B}^{wcT}\mathbf{B}^{wc} \big) dxdydz \Big) \circ i = t, b$$

(پ ـ ۲)

$$\mathbf{B^t} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1\mathbf{\Phi}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial L_2\mathbf{\Phi}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial L_1\mathbf{\Phi}}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial L_2\mathbf{\Phi}}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial L_1\mathbf{\Phi}}{\partial y} & \frac{\partial L_1\mathbf{\Phi}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{partial L_2\mathbf{\Phi}}{\partial y} & \frac{\partial L_2\mathbf{\Phi}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 L_1\mathbf{\Phi}}{\partial x^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 L_2\mathbf{\Phi}}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 L_1\mathbf{\Phi}}{\partial y^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial^2 L_2\mathbf{\Phi}}{\partial y^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{\partial^2 L_1\mathbf{\Phi}}{\partial x \partial y} & L_1\mathbf{\Phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\frac{\partial^2 L_2\mathbf{\Phi}}{\partial x \partial y} & 0 \end{bmatrix}$$

(پ ـ ۳)

$$\mathbf{B^c}=\begin{bmatrix} \frac{-L_1\Phi}{h_c} & 0 & \frac{L_1\Phi}{h_c} & 0 & \frac{h_t+h_c-2z_c}{2h_c}\frac{\partial L_1\Phi}{\partial x} & \frac{h_b+h_c+2z_c}{2h_c}\frac{\partial L_1\Phi}{\partial x} & \frac{-L_2\Phi}{h_c} & 0 & \frac{L_2\Phi}{h_c} & 0 & \frac{h_t+h_c-2z_c}{2h_c}\frac{\partial L_2\Phi}{\partial x} & \frac{h_b+h_c+2z_c}{2h_c}\frac{\partial L_2\Phi}{\partial x} \\ 0 & \frac{-L_1\Phi}{h_c} & 0 & \frac{L_1\phi}{h_c} & \frac{h_t+h_c-2z_c}{2h_c}\frac{\partial L_1\Phi}{\partial y} & \frac{h_b+h_c+2z_c}{2h_c}\frac{\partial L_1\Phi}{\partial y} & 0 & \frac{-L_2\Phi}{h_c} & 0 & \frac{L_2\Phi}{h_c} & \frac{h_t+h_c-2z_c}{2h_c}\frac{\partial L_2\Phi}{\partial y} & \frac{h_b+h_c+2z_c}{2h_c}\frac{\partial L_2\Phi}{\partial y} \end{bmatrix}$$

(پ ـ ۴)

$$\mathbf{B^{tu}}=\begin{bmatrix} L_1\mathbf{\Phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2\mathbf{\Phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B^{tv}}=\begin{bmatrix} 0 & L_1\mathbf{\Phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2\mathbf{\Phi} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B^{tw}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & L_1\mathbf{\Phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2\mathbf{\Phi} & 0 \end{bmatrix}$$

(پ ـ ۵)

$$\mathbf{B^{1c}}=\begin{bmatrix} \frac{-L_1\Phi}{h_c} & 0 & \frac{L_1\Phi}{h_c} & 0 & \frac{h_t+h_c-2z_c}{2h_c}\frac{\partial L_1\Phi}{\partial x} & \frac{h_b+h_c+2z_c}{2h_c}\frac{\partial L_1\Phi}{\partial x} & \frac{-L_2\Phi}{h_c} & 0 & \frac{L_2\Phi}{h_c} & 0 & \frac{h_t+h_c-2z_c}{2h_c}\frac{\partial L_2\Phi}{\partial x} & \frac{h_b+h_c+2z_c}{2h_c}\frac{\partial L_2\Phi}{\partial x} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B^{2c}}=\begin{bmatrix} 0 & \frac{-L_1\Phi}{h_c} & 0 & \frac{L_1\phi}{h_c} & \frac{h_t+h_c-2z_c}{2h_c}\frac{\partial L_1\Phi}{\partial y} & \frac{h_b+h_c+2z_c}{2h_c}\frac{\partial L_1\Phi}{\partial y} & 0 & \frac{-L_2\Phi}{h_c} & 0 & \frac{L_2\mathrm{f}\Phi}{h_c} & \frac{h_t+h_c-2z_c}{2h_c}\frac{\partial L_2\Phi}{\partial y} & \frac{h_b+h_c+2z_c}{2h_c}\frac{\partial L_2\Phi}{\partial y} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{B^{wc}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_c-2z_c}{2h_c}L_1\mathbf{\Phi} & \frac{h_c+2z_c}{2h_c}L_1\mathbf{\Phi} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{h_c-2z_c}{2h_c}L_2\mathbf{\Phi} & \frac{h_c+2z_c}{2h_c}L_2\mathbf{\Phi} \end{bmatrix}$$

(پ ـ ۶)

$$\mathbf{K}=\int_0^a\int_0^b\Big(\mathbf{B^{i}}^T\begin{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16}\\ A_{21} & A_{22} & A_{26}\\ A_{16} & A_{26} & A_{66}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16}\\ B_{21} & B_{22} & B_{26}\\ B_{16} & B_{26} & B_{66}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16}\\ B_{21} & B_{22} & B_{26}\\ B_{16} & B_{26} & B_{66}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16}\\ D_{21} & D_{22} & D_{26}\\ D_{16} & D_{26} & D_{66}\end{bmatrix}\end{bmatrix}\mathbf{B}^i dxdy+$$
$$\int_{-\frac{h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}}\int_0^a\int_0^b\mathbf{B^c}^T\begin{bmatrix} G^* & 0\\ 0 & G^*\end{bmatrix}\mathbf{B^c}dxdydz$$

(پ ـ ۷)

$$\mathbf{M}=\int_0^a\int_0^b\left(\rho_i h_i\left(\mathbf{B^{iu}}^T\mathbf{B^{iu}}+\mathbf{B^{iv}}^T\mathbf{B^{iv}}+\mathbf{B^{iw}}^T\mathbf{B^{iw}}\right)\right)dxdy+$$
$$\int_{\frac{-h_c}{2}}^{\frac{h_c}{2}}\int_0^a\int_0^b\left(\rho_c I_c\left(\mathbf{B^{1c}}^T\mathbf{B^{1c}}+\mathbf{B^{2c}}^T\mathbf{B^{2c}}\right)+\rho_c h_c\mathbf{B^{wc}}^T\mathbf{B^{wc}}\right)$$
$$dxdydz$$

(پ ـ ۸)