Original Article

مهندسی عمران شریف، زمستان (۱۳۹۹)
دوره‌ی ۲ - ۳۶، شماره‌ی ۴/۱، ص. ۱۵-۲۷

تحلیل ارتعاش آزاد صفحات مستطیلی ضخیم همسانگرد عرضی بر بستر دو پارامتری پاسترناک

شایان محمدعلی‌زاده (دانشجوی کارشناسی ارشد)
بهرام نوایی‌نیا * (دانشیار)
پروانه ناطقی بابگی (دانشجوی دکتری)
دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل

در پژوهش حاضر، به ارائه‌ی روشی برای حل دقیق ارتعاش آزاد صفحات مستطیلی ضخیم همسانگرد عرضی بر بستر پاسترناک پرداخته شده است. بدین منظور، معادلات حاکم بر حسب توابع پتانسیل تغییرمکان بیان و به روش جداسازی متغیرها و با اعمال دقیق شرایط مرزی، حل و بسامد زاویه‌یی صفحه تعیین شده است. به منظور بررسی صحت محاسبات، نتایج حاصل از پژوهش حاضر، ابتدا برای حالت خاص صفحه‌ی همسانگرد و سپس همسانگرد عرضی با دیگر منابع مقایسه و سپس تحلیل پارامتریک جهت تعیین بسامدهای بی‌بُعد ارائه شده است. نتایج نشان دادند که افزایش ضریب بستر همراه با افزایش بسامد بی‌بُعد بوده است، تا جایی که با افزایش سختی بستر از یک مقدار مشخص برای هر مود و ابعاد صفحه، تغییری در بسامد بدون بُعد رخ نداده است. همچنین با افزایش ضخامت، همواره بسامد افزایش نیافته است، که بسته به سختی‌های بستر و صفحه، بسامد می‌تواند کاهش یابد. علاوه بر این، نتایج نشان دادند که تأثیر مدول برشی در بسامد، بیشتر از مدول کشسانی و ضریب پواسون بوده است.

واژگان کلیدی: ارتعاش آزاد، صفحات مستطیلی ضخیم، همسانگرد عرضی، بستر ارتجاعی پاسترناک، توابع پتانسیل تغییرمکان.

malizadeh.shayan@gmail.com
navayi@nit.ac.ir
nateghi2020@gmail.com

۱. مقدمه و تاریخچه‌ی پژوهش‌ها

تحلیل ارتعاش آزاد برای تعیین بسامدهای تشدید، امری اجتناب‌ناپذیر در تحلیل سازه‌ها و به ویژه صفحات به شمار می‌آید. از این رو، پژوهش در زمینه‌ی رفتار ارتعاشی صفحات و همچنین ارتعاش آزاد آنها، اهمیت ویژه‌یی دارد و باید به عنوان پارامتر ضروری در طراحی آنها مدنظر قرار گیرد.[۱]

مطالعات زیادی در زمینه‌ی تحلیل ارتعاش آزاد صفحات به عنوان یک المان سازه‌یی رایج در حیطه‌ی مهندسی صورت گرفته است. از اولین تئوری‌های مطرح شده در زمینه‌ی ارتعاشی صفحات می‌توان به ارتعاش آزاد ورق‌های مربعی با لبه‌های آزاد توسط چلادنی[۱]،[۲] در سال ۱۷۸۷ اشاره کرد. در ادامه، مطالعات گسترده‌یی روی ارتعاش‌های صفحه‌های نازک با شکل‌های هندسی، شرایط تکیه‌گاهی و نیز بارگذاری‌های مختلف صورت پذیرفت، که اغلب آنها برای صفحات معمول در کارهای ارزشمند لیسا[۲] [۳-۱۰] و برای صفحات نازک مرکب و ساندویچی توسط برت[۳]،[۱۱-۱۶] مرور و مقایسه شده‌اند. با افزایش ضخامت صفحات، اثر تغییرشکل‌های برشی و اینرسی دورانی قابل توجه بوده است و استفاده از تئوری صفحه‌ی نازک برای این دسته از صفحات را با خطا همراه می‌سازد؛ از این رو بخش عمده‌ی مطالعات صورت گرفته در تحلیل ارتعاش‌های ورق‌های ضخیم نسبی بر پایه‌ی تئوری ریسنر - میندلین[۴] استوار است.[۲]

علاوه بر کاربرد وسیع صفحات در شاخه‌های مختلف مهندسی، تحلیل صفحه بر بستر کشسان نیز اهمیت ویژه‌یی دارد و در طیف وسیعی از مسائل مهندسی به خصوص در مهندسی عمران مطرح است. پی گسترده‌ی ساختمان‌ها بر روی خاک، حرکت هواپیماهای پهن‌پیکر بر باند فرودگاه و موارد مشابه از نمونه‌هایی هستند که تحلیل صفحه بر بستر کشسان را با اهمیت جلوه می‌دهند.

مدل‌سازی رفتار خاک بستر وابسته به عوامل متعددی است و لذا ارائه‌ی الگویی که در برگیرنده‌ی تأثیر تمامی عوامل باشد، کاری سخت و دشوار است. از این جهت در حل مسائل مربوط به اندرکنش خاک و شالوده، به استفاده از نمونه‌های ساده‌تر توجه شده است. تعدادی از این مدل‌های ساده بر فرضیه‌ی رفتار کشسان خطی دلالت دارند، که از این بین می‌توان الگوی ساده شده‌ی وینکلر[۵] که در سال ۱۸۶۷ ارائه شده است، را نام برد.[۱۷]

در مدل وینکلر، تغییرشکل هر نقطه از بستر با مقدار تنش موجود در همان نقطه تناسب دارد و تأثیر تنش‌ها و جابه‌جایی‌های نقاط دیگر در نظر گرفته نمی‌شود، که منجر به رفتار غیرپیوسته‌ی خاک می‌شود. بر خلاف فرضیه‌ی وینکلر، مدل‌های

* نویسنده مسئول
تاریخ: دریافت ۱۳۹۸/۳/۲۰، اصلاحیه ۱۳۹۸/۷/۲۸، پذیرش ۱۳۹۸/۸/۲۰.
DOI:10.24200/J30.2019.53464.2560

دیگری متکی بر مطالعات اولیه‌ی بوسینسک[۶] (۱۸۸۵) ارائه شده است، که در آنها خاک، پیوسته و به صورت نیم‌فضای کشسان آنالیز می‌شود. بررسی‌های بیشتر رفتار خاک‌ها، پژوهشگران را وادار به بازنگری مدل‌های پیشین کرده است. به عنوان نمونه مشاهده شد که تغییرشکل‌هایی در نواحی خارج از محدوده‌ی بارگذاری نیز وجود دارد که با فرضیه‌ی وینکلر در تضاد است. از طرفی دیگر، با دور شدن از محل تأثیر بار، تغییرشکل‌ها به مراتب سریع‌تر از آنچه در الگوهای نیم فضای کشسان مشاهده شد، کاهش می‌یابند که باعث ناکارآمدی فرضیه‌ی پیوستگی خاک به صورت نیم فضای کشسان شده است. از این رو مدل‌های دو و سه پارامتری کشسان توسط پژوهشگران ارائه شد تا نواقص دو الگوی قبلی را رفع کند.[۱۷ و ۱۸] پاسترناک[۷] از طریق اتصال فنرها به لایه‌یی که در جهت قائم تراکم‌ناپذیر و فقط در اثر برش عرضی تغییرشکل می‌دهد، عدم پیوستگی مدل وینکلر را رفع کرد. ولاسوف[۸] و لئونتیف[۹] در ۱۹۶۶ با ساده‌سازی مدل‌های کشسان پیوسته و هوروث[۱۰] نیز با ساده‌سازی مدل‌های ریسنر، پاسترناک و وینکلر، الگوهای خود را به ثبت رساندند.[۱] کر[۱۱] در ۱۹۶۴ با اضافه کردن مجموعه‌ی سوم فنر در جهت قائم، مدل دو پارامتری پاسترناک را به سه پارامتر ارتقا داد، که پیوستگی بین دو مجموعه‌ی فنر از طریق یک لایه‌ی برشی تأمین می‌شود.[۱۹]

از پژوهش‌های صورت گرفته در زمینه‌ی ارتعاش آزاد صفحات بر بستر کشسان می‌توان به ارتعاش آزاد صفحه‌ی میندلین روی بستر کشسان توسط ژیانگ[۱۲] و همکاران در سال ۱۹۹۴ اشاره کرد. علاوه بر این، ژیانگ و همکارانش به تجزیه و تحلیل ارتعاش صفحات مستطیلی میندلین بر لبه‌های کشسان پرداختند.[۲۰ و ۲۱] در ادامه، ارتعاش سه‌بُعدی ورق‌های مستطیلی ضخیم توسط ژو[۱۳] و همکاران بررسی شده است.[۲۲] ارتعاش آزاد صفحات FGM [۱۴] روی شالوده، در سال ۲۰۰۹ توسط حسینی و همکاران با استفاده از تئوری‌های برشی مرتبه‌ی اول و بالاتر انجام شد.[۲۳] در ادامه، دهقانی و فرج‌پور با روش دقیق سه‌بُعدی به بررسی ارتعاش آزاد صفحات مستطیلی همسانگرد بر بستر کشسان پرداختند.[۲۴] در ۲۰۱۶، راهبررنجی و شهبازتبار به مطالعه در زمینه‌ی ارتعاش آزاد صفحات مستطیلی نسبتاً ضخیم بر بستر پاسترناک با تکیه‌گاه‌های نقطه‌یی و لبه‌های مقید کشسان با استفاده از روش رایلی - ریتز پرداختند.[۲۵] در ادامه، ارتعاش آزاد صفحات کامپوزیت[۱۵] مستطیلی نسبتاً ضخیم بر بستر وینکلر و پاسترناک، توسط شی[۱۶] و همکاران بررسی شد.[۲۶] در ۲۰۱۸، پارک[۱۷] و چی[۱۸]، کمانش، خمش و ارتعاش آزاد صفحات همسانگرد بر بستر کشسان را با استفاده از تئوری برشی مرتبه‌ی اول و بالاتر بررسی کردند.[۲۷]

همچنین به استفاده از مواد همسانگرد عرضی به دلیل مشخصات برتر آنها، همچون چگالی کم و مقاومت بالا در شاخه‌های مختلف مهندسی توجه شده است، که به موجب آن می‌توان مطالعه‌ی انجام شده در سال ۲۰۰۸ توسط سعیدی و آتشی‌پور را نام برد، که ارتعاش آزاد صفحات مستطیلی همسانگرد عرضی را با تئوری برشی مرتبه‌ی اول (FSDT) [۱۹] بررسی کردند.[۲۸] در ادامه، حسینی و همکاران به کمک تئوری برشی مرتبه‌ی سوم ردی (TSDT) [۲۰] ارتعاش آزاد ورق مستطیلی همسانگرد عرضی را بررسی کردند.[۲۹] در سال ۲۰۱۶، ارتعاش آزاد صفحات کامپوزیت مستطیلی ارتوتروپیک، توسط فتحی و رضایی انجام شد، که ویژگی بارز روش مذکور، استفاده از روش رایلی - ریتز برای به دست آوردن بسامدهای طبیعی در شرایط مرزی مختلف است.[۳۰] راهبررنجی و شهبازتبار (۲۰۱۷)، نیز با استفاده از روش رایلی - ریتز به تجزیه و تحلیل ارتعاش آزاد صفحات غیرهمگن ارتوتروپیک بر بستر پاسترناک پرداختند.[۳۱]

یکی از روش‌های حل معادلات سه‌بُعدی کشسانی، استفاده از توابع پتانسیل تنش یا تغییرمکان است، که در بسیاری از روش‌های تحلیلی، نیمه‌تحلیلی و عددی استفاده می‌شود. از مهم‌ترین توابع پتانسیل تغییرمکان می‌توان به بوسینسک، گالرکین[۲۱]، لاو[۲۲]، پاپکوویچ - نوبر[۲۳] و لخنیتسکی[۲۴] اشاره کرد، که به صورت گسترده در حل مسائل کشسانی و علی‌الخصوص در مسائل ارتعاش آزاد، خمش و کمانش کاربرد دارند. در این میان، استفاده از توابع پتانسیل هو - نواکی - لخنیسکی و اسکندری - قادی، که به ترتیب برای تحلیل محیط‌های همسانگرد عرضی در حالت استاتیکی و دینامیکی معرفی شده‌اند، قابلیت بسیار بالایی را برای تحلیل مسائل مختلف کشسانی و محیط‌های پیوسته امکان‌پذیر می‌سازد.[۳۲ و ۳۳] توابع هو - نواکی - لخنیسکی اولین بار توسط نعمت زاده و همکاران (۲۰۱۱) در تحلیل خمشی صفحات همسانگرد عرضی با موفقیت به کار گرفته شد.[۳۴] همچنین صمدی و همکاران (۲۰۱۳)، خمش صفحات مستطیلی همسانگرد عرضی و همسانگرد بر بستر کشسان و یک‌کلام و همکاران (۲۰۱۵)، نیز خمش صفحات مستطیلی همسانگرد با تغییرات خطی ضخامت را با توابع اخیر بررسی کردند.[۱۹ و ۳۵] در ادامه، روشن‌بخش و نوایی‌نیا (۱۳۹۶) و نیز بخشنده و همکاران (۲۰۱۳) برای اولین بار به ترتیب ارتعاش آزاد تیر و صفحه‌ی مستطیلی همسانگرد عرضی ضخیم را با توابع پتانسیل اسکندری - قادی به صورت سه‌بُعدی بررسی کردند.[۱ و ۲]

از آن‌جایی که پژوهش‌های انجام شده در حیطه‌ی ارتعاش آزاد صفحه بر بستر کشسان، عمدتاً مربوط به مصالح همسانگرد است و کارهای مربوط به صفحات همسانگرد عرضی بر بستر کشسان، بسیار محدود هستند، در پژوهش حاضر به بررسی حل دقیق سه‌بُعدی ارتعاش آزاد صفحات ضخیم مستطیلی همسانگرد عرضی و در حالت خاص، همسانگرد با تکیه‌گاه‌های ساده بر بستر کشسان دوپارامتری پاسترناک پرداخته شده است. بدین منظور از توابع پتانسیل تغییرمکان اسکندری - قادی، برای حل معادلات سه‌بُعدی کشسانی استفاده و با حل معادلات دیفرانسیل حاکم به روش تحلیلی و با اعمال دقیق شرایط مرزی، بسامد ارتعاش آزاد صفحه تعیین شده است. از ویژگی‌های بارز روش حاضر می‌توان به عدم استفاده از فرضیات ساده‌شونده در خصوص توزیع تنش، کرنش، یا تغییرمکان در ضخامت صفحه اشاره کرد. همچنین در روش مذکور محدودیتی برای محاسبه‌ی مودها در ضخامت‌های مختلف وجود نخواهد داشت. ضمناً پژوهش حاضر را می‌توان اولین مطالعه‌ی دقیق صورت گرفته در زمینه‌ی ارتعاش آزاد صفحات مستطیلی همسانگرد عرضی ضخیم بر بستر کشسان دانست.

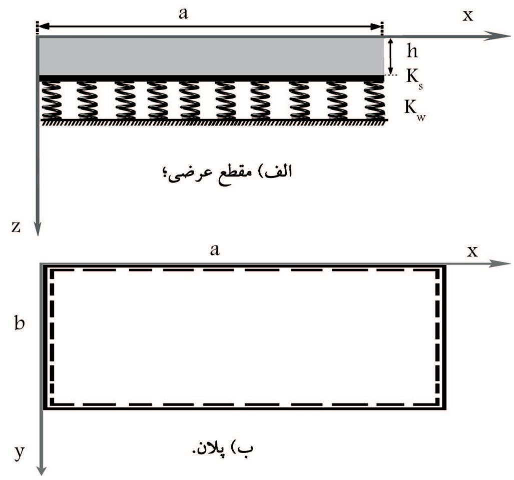
۲. تئوری

صفحه‌ی مستطیلی با رفتار کشسان خطی، به طول a، عرض b و ارتفاع h مطابق شکل ۱ الف و ب بر روی چهار لبه‌ی ساده، که در حال ارتعاش آزاد بر بستر ارتجاعی پاسترناک است، در نظر گرفته شده است، که در آن صفحه‌ی xy منطبق با صفحه‌ی همسانگرد و محور z عمود بر آن است.

در شکل ۱، K_w و K_s دو پارامتر ثابت کشسان هستند، که به ترتیب بیانگر سختی فنرهای وینکلر و سختی برشی بستر هستند.

در محیط سه‌بُعدی همسانگرد عرضی، برای حالتی که محور z عمود بر صفحه‌ی همسانگرد باشد، معادلات ناویر در غیاب نیروهای حجمی به فرم رابطه‌ی ۱ برقرار خواهند بود:[۳۳]

$$
\begin{aligned}
۱)\quad & A_{۱۱}\frac{\partial^{۲}\tilde{u}}{\partial x^{۲}}+\left(\frac{A_{۱۱}-A_{۱۲}}{۲}\right)\frac{\partial^{۲}\tilde{u}}{\partial y^{۲}}+A_{۴۴}\frac{\partial^{۲}\tilde{u}}{\partial z^{۲}}\\
&+\left(\frac{A_{۱۱}+A_{۱۲}}{۲}\right)\frac{\partial^{۲}\tilde{v}}{\partial x\partial y}+(A_{۱۳}+A_{۴۴})\frac{\partial^{۲}\tilde{w}}{\partial x\partial z}=\rho\frac{\partial^{۲}\tilde{u}}{\partial t^{۲}}
\end{aligned}
$$



شکل ۱. صفحه‌ی همسانگرد عرضی بر بستر پاسترناک.

$$
\begin{aligned}
&2)\quad \left(\frac{A_{11}-A_{12}}{2}\right)\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial x^2}+A_{11}\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial y^2}+A_{44}\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial z^2}\\
&+\left(\frac{A_{11}+A_{12}}{2}\right)\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x\partial y}+(A_{13}+A_{44})\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial y\partial z}=\rho\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial t^2}\\
&3)\quad A_{44}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial x^2}+A_{44}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial y^2}+A_{33}\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial z^2}\\
&+(A_{13}+A_{44})\frac{\partial^2\tilde{u}}{\partial x\partial z}+(A_{13}+A_{44})\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial y\partial z}=\rho\frac{\partial^2\tilde{w}}{\partial t^2}
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

که در آنها، $\tilde{u}$، $\tilde{v}$ و $\tilde{w}$ جابه‌جایی‌ها به ترتیب در راستای محورهای x، y، z و ρ جرم حجمی مواد و A_{ij} ضرایب کشسان مستقل هستند که برحسب مدول کشسانی، مدول برشی و نیز ضریب پواسون مطابق روابط ۲ تعریف می‌شوند:[۲]

$$
\begin{aligned}
&A_{11}=\frac{E(1-\frac{E}{E'}\nu'^2)}{(1+\nu)(1-\nu-2\frac{E}{E'}\nu'^2)}\\
&A_{13}=\frac{E\nu'}{(1-\nu-2\frac{E}{E'}\nu'^2)}\\
&A_{33}=\frac{E'(1-\nu)}{(1-\nu-2\frac{E}{E'}\nu'^2)}\\
&A_{44}=G'\\
&A_{66}=\frac{E}{2(1+\nu)}=G
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

که در آنها، E، v و G به ترتیب معرف مدول کشسانی، ضریب پواسون و مدول برشی در صفحه‌ی همسانگرد و پارامترهای E'، v' و G' به ترتیب بیانگر مدول کشسانی، ضریب پواسون و مدول برشی در صفحات عمود بر صفحه‌ی همسانگرد هستند.

مواد همسانگرد نیز حالت خاصی از مواد همسانگرد عرضی هستند، که در آنها روابط ۳ برقرار است:[۲]

$$
\begin{aligned}
&A_{11}=A_{33}=\lambda+2\mu,\\
&A_{12}=A_{13}=\lambda,\\
&A_{44}=A_{66}=\mu.
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

که در آنها، λ و μ ضرایب لامه هستند و به صورت رابطه‌ی ۴ تعریف می‌شوند:[۲]

$$
\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\quad,\quad \mu=\frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (4)
$$

تغییرمکان‌های یک محیط دلخواه همسانگرد عرضی بر حسب توابع پتانسیل اسکندری - قادی $\bar{F}$ $\bar{X}(x,y,z,t)$، در غیاب نیروهای جسمی بر پایه‌ی روابط ۵ استوار است:[۳۳]

$$
\begin{cases}
\tilde{u}(x,y,z,t)=-\alpha_3\frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial x\partial z}-\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial y}\\
\tilde{v}(x,y,z,t)=-\alpha_3\frac{\partial^2\tilde{F}}{\partial y\partial z}-\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial x}\\
\tilde{w}(x,y,z,t)=(1+\alpha_1)\left(\nabla^2_{xy}+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{\rho_0}{1+\alpha_1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\tilde{F}
\end{cases}
\qquad (5)
$$

که در آنها، پارامترها از روابط ۶ به دست می‌آیند:

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2_{xy}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\quad,\quad \rho_0=\frac{\rho}{A_{66}}\quad,\quad \alpha_1=\frac{A_{66}+A_{12}}{A_{66}}\\
&\alpha_2=\frac{A_{44}}{A_{66}}\quad,\quad \alpha_3=\frac{A_{13}+A_{44}}{A_{66}}\quad,\quad \alpha_4=\frac{A_{33}}{A_{66}}
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

۱.۲. معادلات حاکم

با جایگذاری روابط ۵ در معادلات ناویر رابطه‌ی ۱، روابط حاکم بر محیط مورد بررسی برحسب تابع پتانسیل به فرم روابط ۷ به دست می‌آیند:[۳۳]

$$
\begin{aligned}
&\left[\nabla_1^2\nabla_2^2-\delta\frac{\partial^4}{\partial z^2\partial t^2}\right]\tilde{F}(x,y,z,t)=0\\
&\nabla_0^2\,\tilde{\chi}\,(x,y,z,t)=0
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

که در آن عملگر موج و پارامتر δ به صورت رابطه‌ی ۸ بیان می‌شوند:[۳۳]

$$
\begin{aligned}
&\nabla_i^2=\nabla^2_{xy}+\frac{1}{s_i^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{C_i^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ ,\qquad (i=0,1,2)\\
&\delta=\frac{1}{C_1^2}\left(1-\frac{1}{s_2^2}\right)+\frac{1}{C_2^2}\left(\frac{A_{33}}{A_{11}}-\frac{1}{s_1^2}\right)
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

که در آنها، s_iو C_i به صورت رابطه‌ی ۹ تعریف می‌شوند:[۳۳]

$$
\begin{aligned}
&s_0^2=\frac{1}{\alpha_2}=\frac{A_{66}}{A_{44}}\\
&C_0^2=\frac{A_{66}}{\rho}\quad,\quad C_1^2=\frac{A_{11}}{\rho}\quad,\quad C_2^2=\frac{A_{44}}{\rho}
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

که در آنها، C_0 و C_1 سرعت موج می‌باشد.

۲.۲. حل معادلات حاکم

به منظور تعیین بسامد طبیعی صفحه، با فرض هارمونیک بودن حرکت، می‌توان برای تبدیل معادلات از محدوده‌ی زمان به بسامد رابطه‌ی تغییرمکان‌ها و توابع پتانسیل را به صورت رابطه ۱۰ نشان داد:

$$
\begin{aligned}
&[\tilde{\chi},\tilde{F}(x,y,z,t)]=[\chi,F(x,y,z)]\,e^{i\omega t}\\
&[\tilde{u},\tilde{v},\tilde{w}(x,y,z,t)]=[u,v,w(x,y,z)]e^{i\omega t}
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

که در آن، $\bar{\omega}$ بسامد زاویه‌یی حرکت و $i=\sqrt{-1}$ است. با جایگذاری رابطه‌ی ۱۰

در معادلات ۵ و ۷، به ترتیب روابط ۱۱ الی ۱۳ حاصل می‌شوند:[۳۳]

$$\left\{\begin{array}{l} u(x,y,z) = -\alpha_3 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial y} \\ v(x,y,z) = -\alpha_3 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial x} \\ w(x,y,z) = (1+\alpha_1)\left(\nabla^2_{xy} + \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\rho_0}{1+\alpha_1}\omega^2\right) F \end{array}\right. \tag{۱۱}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + \frac{1}{s_1^2 s_2^2}\frac{\partial^4 F}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} \\ &+\left(\frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{s_2^2}\right)\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^2 \partial z^2}\right) \\ &+(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right) \\ &+\left(\frac{\lambda_1^2}{s_2^2} + \frac{\lambda_2^2}{s_1^2} + \delta\omega^2\right)\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \lambda_1^2\lambda_2^2 F = 0 \end{aligned} \tag{۱۲}$$

$$\left[\nabla^2_{xy} + \frac{1}{s_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \lambda_0^2\right]\chi = 0 \tag{۱۳}$$

که در روابط اخیر، λ_i^2 را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۱۴ نشان داد:

$$\lambda_0^2 = \frac{\omega^2}{C_0^2} \quad , \quad \lambda_1^2 = \frac{\omega^2}{C_1^2} \quad , \quad \lambda_2^2 = \frac{\omega^2}{C_2^2} \tag{۱۴}$$

معادلات ۱۲ و ۱۳، معادلات دیفرانسیل حاکم هستند، که در پژوهش حاضر به منظور حل آن از روش جداسازی متغیرها استفاده شده است. بدین منظور می‌توان تابع پتانسیل F و X را بر حسب ضرب سه تابع مستقل از یکدیگر مطابق رابطه‌های ۱۵ و ۱۶ بیان کرد:

$$F(x,y,z) = f(x).g(y).h(z) \tag{۱۵}$$

$$\chi(x,y,z) = f_1(x).g_1(y).h_1(z) \tag{۱۶}$$

با جایگذاری رابطه‌ی ۱۵ در معادله‌ی ۱۲ و تقسیم دو طرف معادله بر $f(x)g(y)h(z)$، از بین پاسخ‌های ممکن، فقط رابطه‌ی ۱۷، که در جهت x و y مثلثاتی و در جهت z هیپربولیک است و امکان اقناع شرایط مرزی را فراهم می‌آورد، قابل قبول است.

$$\begin{aligned} F(x,y,z) = &[c_1 \cos(\alpha x) + c_2 \sin(\alpha x)] \\ &[c_3 \cos(\beta y) + c_4 \sin(\beta y)] \\ &[c_5 \cosh(\zeta_1 z) + c_6 \sinh(\zeta_1 z)] \\ &+c_7 \cosh(\zeta_2 z) + c_8 \sinh(\zeta_2 z)] \end{aligned} \tag{۱۷}$$

که ضرایب c_1 الی c_8 با اقناع شرایط مرزی و ضریب زاویه‌یی ζ_1 و ζ_2 مطابق روابط ۱۸ و ۱۹ قابل محاسبه‌است:

$$\zeta_1^2 = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} (s_1\gamma_1)^2 + (s_2\gamma_2)^2 - \delta\,\omega^2 s_1^2 s_2^2 \\ +\sqrt{\left[(s_1\gamma_1)^2 + (s_2\gamma_2)^2 - \delta\,\omega^2 s_1^2 s_2^2\right]^2 - 4 s_1^2\gamma_1^2 s_2^2\gamma_2^2} \end{array}\right\} \tag{۱۸}$$

$$\zeta_2^2 = \frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l} (s_1\gamma_1)^2 + (s_2\gamma_2)^2 - \delta\,\omega^2 s_1^2 s_2^2 \\ -\sqrt{\left[(s_1\gamma_1)^2 + (s_2\gamma_2)^2 - \delta\,\omega^2 s_1^2 s_2^2\right]^2 - 4 s_1^2\gamma_1^2 s_2^2\gamma_2^2} \end{array}\right\} \tag{۱۹}$$

که در آنها، پارامترهای γ_1 و γ_2 به صورت رابطه‌ی ۲۰ تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= \alpha_{mn}^2 - \lambda_1^2 \\ \gamma_2^2 &= \alpha_{mn}^2 - \lambda_2^2 \end{aligned} \tag{۲۰}$$

که در آن، a_{mm}^2 به صورت رابطه‌ی ۲۱ بیان می‌شود:

$$\alpha_{mn}^2 = \alpha^2 + \beta^2 \tag{۲۱}$$

همچنین α و β نیز، از رابطه‌ی ۲۲ حاصل می‌شوند:

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}, \beta = \frac{n\pi}{b} \tag{۲۲}$$

که در آن، m و n بیانگر نیم موج‌های ارتعاش در جهت‌های x و y هستند.

چنانچه مشابه روند اخیر، برای تابع χ نیز طی شود، فقط رابطه‌ی ۲۳ جواب ممکن خواهد شد:

$$\begin{aligned} \chi(x,y,z) = &[c_9 \cos(\alpha' x) + c_{10} \sin(\alpha' x)] \\ &[c_{11} \cos(\beta' y) + c_{12} \sin(\beta' y)] \\ &[c_{13} \cosh(s_0\gamma_0 z) + c_{14} \sinh(s_0\gamma_0 z)] \end{aligned} \tag{۲۳}$$

که در آن، ضرایب c_9 الی c_{14} به کمک شرایط مرزی باید تعیین شوند.

شرایط حاکم بر معادله ایجاب می‌کند که رابطه‌ی ۲۴ برقرار باشد:

$$\gamma_0^2 = \alpha'^2_{mn} - \lambda_0^2 \tag{۲۴}$$

که در آن، α'^2_{mn} از رابطه‌ی ۲۵ به دست می‌آید:

$$\alpha'^2_{mn} = \alpha'^2 + \beta'^2 \tag{۲۵}$$

که در آن α' و β' از رابطه‌ی ۲۶ حاصل می‌شوند:

$$\alpha' = \frac{m\pi}{a}, \beta' = \frac{n\pi}{b} \tag{۲۶}$$

۳.۲. شرایط مرزی

به منظور تعیین ضرایب و پارامترهای معادلات ۱۷ و ۲۲، لازم است از برقراری شرایط مرزی کمک گرفته شود. بدین منظور و با توجه به این فرض که صفحه بر روی ۴ لبه‌ی ساده قرار دارد، چهار شرط مرزی هندسی مربوط به تغییرمکان در راستای قائم (w) مطابق رابطه‌ی ۲۷ است:

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0\ ,\ a \\ y = 0\ ,\ b \end{array}\right. \quad : \quad w = 0 \tag{۲۷}$$

چهار شرط مرزی استاتیکی، مربوط به لنگرها در لبه‌های صفحه خواهد بود که با توجه به ساده بودن تکیه‌گاه‌ها، مطابق روابط ۲۸ لحاظ می‌شود:

$$\left\{\begin{array}{ll} x = 0\ ,\ a & : M_x = 0 \\ y = 0\ ,\ b & : M_y = 0 \end{array}\right. \tag{۲۸}$$

با اعمال شرایط مرزی هندسی و استاتیکی و همچنین تعریف ضرایب جدید c_{15} الی c_{20}، در نهایت توابع F و X به شکل روابط ۲۹ و ۳۰ به دست می‌آیند:

$$F(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right).\ \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ \left[c_1\cosh(\zeta_1 z) + c_2\sinh(\zeta_1 z) + c_3\cosh(\zeta_2 z) + c_4\sinh(\zeta_2 z)\right] \tag{29}$$

$$\chi(x,y,z) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right).\ \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \\ \left[c_5\cosh(s_0\gamma_0 z) + c_6\sinh(s_0\gamma_0 z)\right] \tag{30}$$

با اقناع شرایط مرزی تنش در سطوح بالایی و پایینی صفحه‌ی مورد بررسی، ضرایب جدید c_1 الی c_6 تعیین می‌شوند. در پژوهش حاضر، به دلیل عدم حضور بار خارجی، مقدار تنش‌های برشی در بالا و پایین صفحه و تنش نرمال در بالای صفحه به صورت رابطه‌ی ۳۱ است:

$$\begin{cases} \tau_{xz}\left(z = \pm\frac{h}{2}\right) = 0 \\ \tau_{yz}\left(z = \pm\frac{h}{2}\right) = 0 \\ \sigma_z\left(z = -\frac{h}{2}\right) = 0 \end{cases} \tag{31}$$

شرط مرزی تنش نرمال در صفحه‌ی تحتانی به دلیل وجود بستر ارتجاعی دو پارامتری پاسترناک مطابق رابطه‌ی ۳۲ اعمال می‌شود:[1]

$$\sigma_z\left(z = +\frac{h}{2}\right) = -K_w w + K_s\nabla_{xy}^2 w \tag{32}$$

که در آن، K_w و K_s دو پارامتر ثابت کشسان هستند، که به ترتیب معرف سختی فنرهای وینکلر و سختی برشی بستر هستند.

دو شرط مرزی اول رابطه‌ی ۳۱ ایجاب می‌کند که مقدار تابع X صفر شود و بر اساس آن ضرایب مجهول به چهار عدد کاهش می‌یابد. در ادامه، با استفاده‌ی توأم از ۴ رابطه‌ی $(z = \pm\frac{h}{2})\tau_{xz}$ یا $\tau_{xz}(z = \pm\frac{h}{2})$ با $\sigma_z(z = \pm\frac{h}{2})$، چهار معادله حاصل می‌شود و برای رسیدن به جواب غیربدیهی لازم است دترمینان ضرایب ماتریس مطابق رابطه‌ی ۳۳ برابر صفر قرار داده شود، که در نهایت معادله‌ی مشخصه‌ی ارتعاش آزاد صفحه‌ی همسانگرد عرضی بر بستر پاسترناک تعیین و با حل آن توسط نرم‌افزار متلب، بسامد زاویه‌یی صفحه تعیین خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{11} & -f_{12} & f_{13} & -f_{14} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{14} & f_{24} & f_{34} & f_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = 0 \tag{33}$$

که در آن، f_{ij} به صورت رابطه‌های ۳۴ بیان می‌شود:

$$\begin{aligned}
f_{11} &= D_{11}\cosh(\zeta_1 h/2), \\
f_{12} &= D_{11}\sinh(\zeta_1 h/2), \\
f_{13} &= D_{12}\cosh(\zeta_2 h/2), \\
f_{14} &= D_{12}\sinh(\zeta_2 h/2), \\
f_{31} &= -D_{21}\sinh(\zeta_1 h/2), \\
f_{32} &= D_{21}\cosh(\zeta_1 h/2), \\
f_{33} &= -D_{22}\sinh(\zeta_2 h/2), \\
f_{34} &= -D_{22}\cosh(\zeta_2 h/2), \\
f_{41} &= f_{31} + \left(k_t q\cosh(\zeta_1 h/2) + \zeta_1^2 k_t\alpha_2\cosh(\zeta_1 h/2)\right), \\
f_{42} &= f_{32} + \left(k_t q\sinh(\zeta_1 h/2) + \zeta_1^2 k_t\alpha_2\sinh(\zeta_1 h/2)\right), \\
f_{43} &= -f_{33} + \left(k_t q\cosh(\zeta_2 h/2) + \zeta_2^2 k_t\alpha_2\cosh(\zeta_2 h/2)\right), \\
f_{44} &= -f_{34} + \left(k_t q\sinh(\zeta_2 h/2) + \zeta_2^2 k_t\alpha_2\sinh(\zeta_2 h/2)\right).
\end{aligned} \tag{34}$$

که در آن، ضرایب $D_{ij}(ij = 1, 2)$، q و k_t به صورت رابطه‌ی ۳۵ تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
D_{11} &= \zeta_1^2(\alpha_2 - \alpha_3) - \alpha_{mn}^2(1 + \alpha_1) + \rho_0\bar{\omega}^2, \\
D_{12} &= \zeta_2^2(\alpha_2 - \alpha_3) - \alpha_{mn}^2(1 + \alpha_1) + \rho_0\bar{\omega}^2, \\
D_{21} &= \zeta_1^3 A_{33}\alpha_2 + \zeta_1 \\
&\left(A_{13}\alpha_3\alpha_{mn}^2 - A_{33}\alpha_{mn}^2(1 + \alpha_1) + A_{33}\rho_0\bar{\omega}^2\right), \\
D_{22} &= \zeta_2^3 A_{33}\alpha_2 + \zeta_2 \\
&\left(A_{13}\alpha_3\alpha_{mn}^2 - A_{33}\alpha_{mn}^2(1 + \alpha_1) + A_{33}\rho_0\bar{\omega}^2\right), \\
q &= -\alpha_{mn}^2(1 + \alpha_1) + \rho_0\bar{\omega}^2, \\
k_t &= K_w + \alpha_{mn}^2 K_s.
\end{aligned} \tag{35}$$

۳. نتایج عددی

نتایج به دست آمده در پژوهش حاضر برای تمام نمودارها و جداول به صورت بی‌بُعد محاسبه شده است، تا بررسی‌ها مستقل از ابعاد صفحه صورت پذیرند. همچنین به منظور کوتاه شدن عبارت‌ها، پارامتر δ برابر نسبت ضخامت به عرض صفحه و η بیان‌گر نسبت منظر هستند، که به صورت رابطه‌ی ۳۶ تعریف می‌شوند:

$$\delta = \frac{h}{a}, \eta = \frac{a}{b} \tag{36}$$

مقادیر عددی نسبت ثابت‌های کشسان جهت بررسی تأثیر خواص مکانیکی مصالح در کلیه‌ی تحلیل‌ها جز بررسی تأثیر تغییرات خواص ذکر شده، به صورت رابطه‌ی ۳۷ در نظر گرفته شده است:

$$\bar{G} = \frac{G_1}{G_2} = 2.5, \bar{E} = \frac{E_1}{E_2} = 1, \bar{\nu} = \frac{\nu_1}{\nu_2} = 1 \tag{37}$$

همچنین مقادیر بی‌بُعد بسامد زاویه‌یی صفحه، سختی فنرهای وینکلر و سختی برشی بستر ارتجاعی مطابق رابطه‌ی ۳۸ لحاظ می‌شوند:[24]

$$\bar{K_w} = \left(K_w a^2\right)/D, \bar{K_s} = \left(K_s a^2\right)/D, \\ \omega_{mn} = \left(\bar{\omega}_{mn} a^2(\rho h/D)^{(0.5)}\right)/\pi^2 \tag{38}$$

مشخصات مکانیکی مصالح، شامل مدول کشسانی و ضریب پواسون در کلیه‌ی تحلیل‌ها برابر $E_1 = E_2 = 210\,MPa$ و $v = 0.3$ فرض می‌شوند. همچنین D، سختی خمشی صفحه است و به صورت رابطه‌ی ۳۹ تعریف می‌شود:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \tag{39}$$

۱.۳. صحت‌سنجی

به منظور اعتبارسنجی و اطمینان از صحت روش به کار گرفته شده در پژوهش حاضر، نتایج به دست آمده برای بسامد بی‌بُعد صفحه‌ی مربعی و به ازاء سه مود نخست ارتعاشی، برای حالت خاص صفحه‌ی همسانگرد با برخی منابع[۲۲،۲۱ و ۲۴] و صفحه‌ی همسانگرد عرضی با نتایج ارائه شده توسط برخی منابع دیگر،[۲، ۲۸ و ۲۹] مقایسه و در جدول‌های ۱ و ۲ ارائه شده‌اند.

جدول ۱. مقایسه‌ی بسامد صفحه‌ی مربعی همسانگرد به ازاء ۱۰ $= \bar{k}_s$.

δ	روش پژوهش	$\bar{k}_w$	ω_{11}	ω_{12}	ω_{22}
۰٫۰۱	پژوهش حاضر	۱۰۰	۲٫۶۶۵۰	۵٫۵۷۱۷	۵٫۵۴۰۶
	میندلین[۲۱]		۲٫۶۶۵۰	۵٫۵۷۱۷	۵٫۵۴۰۶
	رینتز[۲۲]		۲٫۶۶۵۱	۵٫۵۷۱۸	۵٫۵۴۰۶
	Exact3D [۲۴]		۲٫۶۶۵۰	۵٫۵۷۱۷	۵٫۵۴۰۶
	پژوهش حاضر	۵۰۰	۳٫۳۳۹۸	۵٫۹۲۸۵	۸٫۷۷۷۵
	میندلین[۲۱]		۳٫۳۴۰۰	۵٫۹۲۸۷	۸٫۷۷۷۵
	ریتز[۲۲]		۳٫۳۳۹۸	۵٫۹۲۸۵	۸٫۷۷۷۵
	Exact3D [۲۴]		۳٫۳۳۹۸	۵٫۹۲۸۵	۸٫۷۷۷۵
۰٫۱	پژوهش حاضر	۲۰۰	۲٫۷۷۵۶	۵٫۲۹۵۳	۷٫۷۲۷۲
	میندلین[۲۱]		۲٫۷۸۴۲	۵٫۳۰۴۳	۷٫۷۲۸۷
	ریتز[۲۲]		۲٫۷۷۵۶	۵٫۲۹۵۴	۷٫۷۲۷۹
	Exact3D [۲۴]		۲٫۷۷۵۶	۵٫۲۹۵۳	۷٫۷۲۷۲
	پژوهش حاضر	۱۰۰۰	۳٫۹۵۶۶	۵٫۹۷۵۶	۸٫۱۹۴۷
	میندلین[۲۱]		۳٫۹۸۰۵	۶٫۰۰۷۸	۸٫۲۲۱۴
	ریتز[۲۲]		۳٫۹۵۶۶	۵٫۹۷۵۷	۸٫۱۹۵۴
	Exact3D [۲۴]		۳٫۹۵۶۶	۵٫۹۷۵۶	۸٫۱۹۴۷

جدول ۲. مقایسه‌ی بسامد صفحه‌ی مربعی همسانگرد عرضی به ازاء ۰ $= \bar{k}_w = \bar{k}_s$.

δ	روش پژوهش	ω_{11}	ω_{12}	ω_{22}
۰٫۰۲	پژوهش حاضر	۱٫۹۹۳۴	۴٫۹۶۰۷	۷٫۹۰۱۳
	DPF[۲]	۱٫۹۹۳۴	۴٫۹۶۰۷	۷٫۹۰۱۳
	FSDT[۲۸]	۱٫۹۹۳۳	۴٫۹۶۰۰	۸٫۸۹۹۵
	TSDT[۲۹]	۱٫۹۹۳۳	۴٫۹۶۰۰	۸٫۸۹۹۶
۰٫۱	پژوهش حاضر	۱٫۸۶۲۶	۴٫۲۶۲۹	۶٫۳۳۷۰
	DPF[۲]	۱٫۸۶۲۶	۴٫۲۶۲۹	۶٫۳۳۷۰
	FSDT[۲۸]	۱٫۸۶۰۲	۴٫۲۵۰۵	۶٫۳۱۰۰
	TSDT[۲۹]	۱٫۸۶۰۴	۴٫۲۵۲۷	۶٫۳۱۶۹
۰٫۲	پژوهش حاضر	۱٫۵۸۴۳	۳٫۲۰۱۰	۴٫۴۲۷۷
	DPF[۲]	۱٫۵۸۴۳	۳٫۲۰۱۰	۴٫۴۲۷۷
	FSDT[۲۸]	۱٫۵۷۷۵	۳٫۱۷۳۷	۴٫۳۷۵۵
	TSDT[۲۹]	۱٫۵۷۹۲	۳٫۱۸۷۳	۴٫۴۱۰۵

جدول ۱ نشان می‌دهد که مقادیر بسامد زاویه‌یی بی‌بُعد شده با افزایش سختی وینکلر افزایش یافته است، که شدت آن در مودهای بالاتر بیشتر است. علاوه بر این، با مقایسه‌ی نتایج پژوهش حاضر با برخی منابع،[۲۲،۲۱ و ۲۴] مشخص می‌شود که مقدار بسامد بی‌بُعد برای تمام منابع در صفحات نازک ۰٫۰۱ $= \delta$ تقریباً با هم برابر است. با افزایش میزان δ و سختی بستر مشاهده می‌شود که اختلاف نتایجی میان پژوهش حاضر و برخی منابع دیگر،[۲۲ و ۲۴] که در آنها از روش تحلیلی استفاده شده است، وجود ندارد. اختلاف به وجود آمده بین نتایج پژوهش حاضر با مرجع[۲۱] را می‌توان به ضریب تصحیح برشی استفاده شده در روش میندلین ربط داد، که توزیع تنش‌ها در ضخامت را به صورت خطی در نظر می‌گیرد.

در جدول ۲ نیز ملاحظه می‌شود مقادیر بسامد زاویه‌یی بی‌بُعد با افزایش پارامتر δ کاهش پیدا کرده است، که شدت آن در مودهای بالاتر بیشتر نمود پیدا کرده است. با مقایسه‌ی نتایج پژوهش حاضر با برخی منابع مشخص شد که اختلافی بین نتایج پژوهش حاضر و مرجع[۲] به علت بهره‌مندی از روش واحد وجود ندارد. ضمناً اختلاف نتایج پژوهش حاضر با منابع دیگر،[۲۸ و ۲۹] که به ترتیب از تئوری برشی مرتبه‌های اول و سوم بهره برده‌اند، بسیار ناچیز است؛ که این اختلاف را می‌توان به فرض‌های ساده‌شونده در خصوص توزیع تنش برشی در ضخامت صفحه در مراجع ذکر شده نسبت داد و با افزایش ضخامت صفحه، اختلاف نتایج نیز قدری افزایش یافته است.

۲.۳. تحلیل پارامتری

در بخش کنونی تأثیر ضخامت، ابعاد، سختی فنرهای وینکلر، سختی برشی بستر ارتجاعی و مشخصات مکانیکی مصالح صفحه در بسامد بررسی شده است.

برای بررسی تأثیر ضخامت در بسامد صفحه‌ی مربعی همسانگرد عرضی و نیز همسانگرد در جدول‌های ۳ و ۴ به ترتیب بسامد زاویه‌یی بدون بُعد سه مود ارتعاشی صفحه به ازاء نسبت‌های مختلف δ بر حسب پارامترهای بستر پاسترناک ارائه شده است.

از نتایج ارائه شده در جدول‌های ۳ و ۴ می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش ضخامت صفحه، بسامد بی‌بُعد صفحه کاهش یافته است، به نحوی که مقدار کاهش مذکور در مودهای بالاتر با شدت بیشتری همراه بوده است. همچنین با افزایش پارامترهای سختی بستر وینکلر و سختی برشی پاسترناک، بسامد بی‌بُعد صفحه افزایش یافته است، تا جایی که به یک نقطه همگرا شده و افزایش بیشتر سختی بستر، تأثیر بسیار ناچیزی در افزایش بسامد داشته است. به عنوان نمونه در جدول ۳ برای مود اول و ($\delta =$ ۰٫۱) با افزایش مقدار $\bar{k}_w$ از ۱۰^{۴} به ۱۰^{۶} و $\bar{k}_s$ از ۱۰^{۳} به ۱۰^{۵}، بسامد به میزان ۲٪ افزایش یافته است؛ همچنین این نسبت برای ($\delta =$ ۰٫۵) برابر ۴٫۰٪ است. لازم به ذکر است که شدت افزایش بسامد در صورت افزایش سختی‌های بستر، با ضخیم‌تر شدن صفحه کاهش می‌یابد و در مودهای ارتعاشی بالاتر، بیشتر می‌شود. همچنین با مقایسه‌ی نتایج در جدول‌های ۳ و ۴ ملاحظه می‌شود که اختلاف زیادی بین نتایج صفحه‌ی همسانگرد عرضی و همسانگرد، به ویژه در صفحات نازک وجود ندارد و افزایش ضخامت و مودهای نوسان بر این میزان افزوده است.

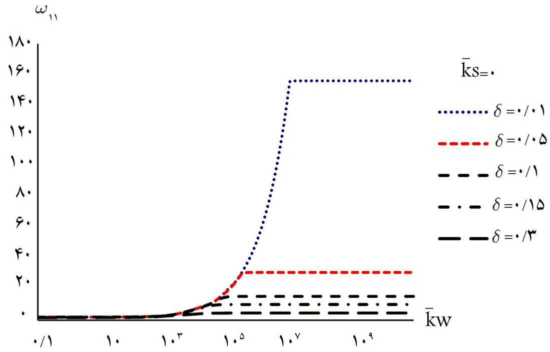
به منظور بررسی تأثیر بستر وینکلر در بسامد صفحه‌ی همسانگرد عرضی و همسانگرد، تغییرات بسامد بی‌بُعد مودهای اول، سوم و ششم برای صفحه‌ی همسانگرد عرضی و مود اول برای صفحه‌ی همسانگرد، برحسب سختی وینکلر در شکل‌های ۲ الی ۵ مشاهده می‌شود.

جدول ۳. بسامد بی‌بُعد صفحه‌ی همسانگرد عرضی به ازاء نسبت‌های مختلف δ.

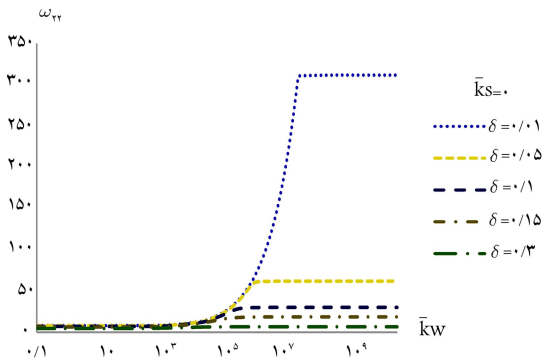
δ	$\bar{k}_w$	$\bar{k}_s$	$\omega_{۱۱}$	$\omega_{۱۲}$	$\omega_{۲۲}$
۰/۰۱	۰	۰	۱/۹۹۸۵	۴/۹۹۰۴	۷/۹۷۵۴
	$۱۰^{۲}$	۱۰	۲/۶۵۴۴	۵/۵۶۷۰	۸/۵۲۸۱
	$۱۰^{۳}$	$۱۰^{۲}$	۵/۸۷۴۹	۹/۲۶۲۰	۱۲/۴۴۲۶
	$۱۰^{۴}$	$۱۰^{۳}$	۱۷/۵۸۴۱	۲۵/۱۷۳۳	۳۱/۲۳۶۳
	$۱۰^{۶}$	$۱۰^{۵}$	۱۵۵/۹۰۲۲	۲۴۴/۷۳۸۰	۳۰۱/۰۶۳۱
	$۱۰^{۷}$	$۱۰^{۶}$	۱۵۵/۹۲۹۳	۲۴۶/۵۲۱۴	۳۱۱/۷۹۶۴
۰/۱	۰	۰	۱/۸۶۳۰	۴/۲۶۳۸	۶/۳۳۸۵
	$۱۰^{۲}$	۱۰	۲/۵۳۸۹	۴/۸۹۶۲	۶/۹۸۰۰
	$۱۰^{۳}$	$۱۰^{۲}$	۵/۷۴۴۲	۸/۶۷۱۵	۱۱/۱۱۷۶
	$۱۰^{۴}$	$۱۰^{۳}$	۱۵/۱۸۳۶	۲۰/۶۸۵۸	۲۵/۸۵۸۱
	$۱۰^{۶}$	$۱۰^{۵}$	۱۵/۴۹۲۴	۲۴/۲۰۶۸	۳۰/۱۶۸۳
	$۱۰^{۷}$	$۱۰^{۶}$	۱۵/۴۹۳۰	۲۴/۲۱۱۶	۳۰/۱۸۰۵
۰/۵	۰	۰	۰/۹۴۵۱	۱/۶۳۰۲	۲/۱۲۰۹
	$۱۰^{۲}$	۱۰	۱/۱۶۶۹	۲/۲۵۶۶	۲/۳۳۳۹
	$۱۰^{۳}$	$۱۰^{۲}$	۲/۰۵۰۲	۲/۵۲۱۴	۲/۷۹۰۷
	$۱۰^{۴}$	$۱۰^{۳}$	۲/۱۱۷۰	۲/۵۵۷۲	۲/۸۸۳۳
	$۱۰^{۶}$	$۱۰^{۵}$	۲/۱۲۴۶	۲/۵۶۱۲	۲/۹۰۷۳
	$۱۰^{۷}$	$۱۰^{۶}$	۲/۱۶۰۰	۲/۸۸۷۱	۳/۵۱۷۹

جدول ۴. بسامد بی‌بُعد صفحه‌ی همسانگرد به ازاء نسبت‌های مختلف δ.

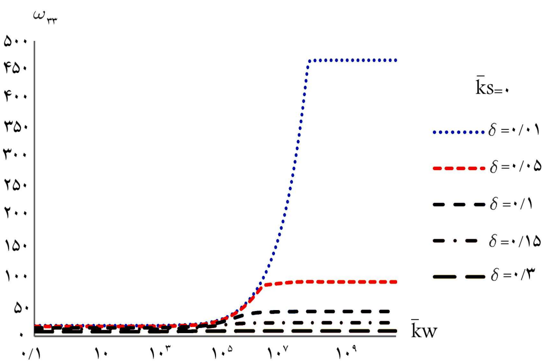
δ	$\bar{k}_w$	$\bar{k}_s$	$\omega_{۱۱}$	$\omega_{۱۲}$	$\omega_{۲۲}$
۰/۰۱	۰	۰	۱/۹۹۹۳	۴/۹۹۵۶	۷/۹۸۸۸
	$۱۰^{۲}$	۱۰	۲/۶۶۵۰	۵/۵۷۱۷	۸/۵۴۰۶
	$۱۰^{۳}$	$۱۰^{۲}$	۵/۸۷۵۲	۹/۲۶۴۸	۱۲/۴۵۱۲
	$۱۰^{۴}$	$۱۰^{۳}$	۱۷/۵۸۴۲	۲۵/۱۷۴۴	۳۱/۲۳۹۷
	$۱۰^{۶}$	$۱۰^{۵}$	۱۵۵/۹۰۲۲	۲۴۴/۷۳۸۰	۳۰۱/۰۶۳۱
	$۱۰^{۷}$	$۱۰^{۶}$	۱۵۵/۹۲۹۳	۲۴۶/۵۲۱۴	۳۱۱/۷۹۶۴
۰/۱	۰	۰	۱/۹۳۴۲	۴/۶۲۲۲	۷/۱۰۳۰
	$۱۰^{۲}$	۱۰	۲/۵۸۹۹	۵/۲۰۳۷	۷/۶۶۶۶
	$۱۰^{۳}$	$۱۰^{۲}$	۵/۷۶۰۵	۸/۸۱۱۵	۱۱/۴۷۹۲
	$۱۰^{۴}$	$۱۰^{۳}$	۱۵/۱۸۳۹	۲۱/۸۰۳۳	۲۵/۸۵۸۲
	$۱۰^{۶}$	$۱۰^{۵}$	۱۵/۴۹۲۴	۲۴/۲۰۸۰	۳۰/۱۷۱۲
	$۱۰^{۷}$	$۱۰^{۶}$	۱۵/۴۹۳۰	۲۴/۲۱۱۶	۳۰/۱۸۰۵
۰/۵	۰	۰	۱/۲۵۹۰	۲/۳۳۱۱	۳/۱۰۸۰
	$۱۰^{۲}$	۱۰	۱/۷۴۳۷	۲/۷۰۹۶	۳/۴۲۷۵
	$۱۰^{۳}$	$۱۰^{۲}$	۲/۰۹۷۴	۲/۸۶۴۱	۳/۵۰۷۳
	$۱۰^{۴}$	$۱۰^{۳}$	۲/۱۵۳۶	۲/۸۸۴۷	۳/۵۱۶۸
	$۱۰^{۶}$	$۱۰^{۵}$	۲/۱۶۰۰	۲/۸۸۷۱	۳/۵۱۷۶
	$۱۰^{۷}$	$۱۰^{۶}$	۲/۱۶۰۰	۲/۸۸۷۱	۳/۵۱۷۹



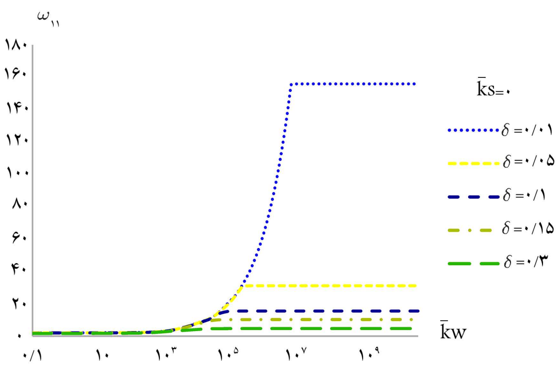
شکل ۲. بسامد بی‌بُعد مود اول صفحه‌ی مربعی همسانگرد عرضی به ازاء مقادیر مختلف $\bar{k}_w$.



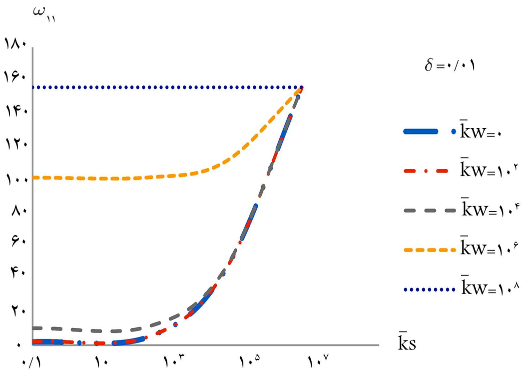
شکل ۳. بسامد بی‌بُعد مود سوم صفحه‌ی مربعی همسانگرد عرضی به ازاء مقادیر مختلف $\bar{k}_w$.



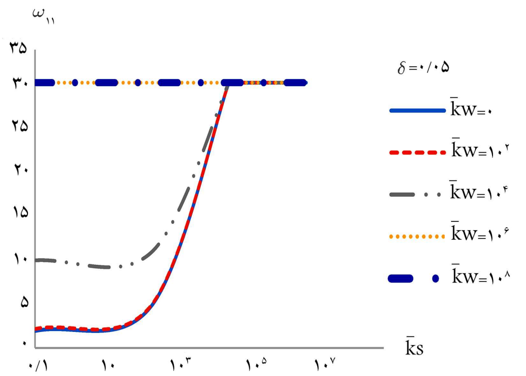
شکل ۴. بسامد بی‌بُعد مود ششم صفحه‌ی مربعی همسانگرد عرضی به ازاء مقادیر مختلف $\bar{k}_w$.



شکل ۵. بسامد بی‌بُعد مود اول صفحه‌ی مربعی همسانگرد به ازاء مقادیر مختلف $\bar{k}_w$.



شکل ۶. بسامد بی‌بُعد مود اول صفحه‌ی مربعی همسانگرد عرضی به ازاء مقادیر مختلف $\delta = ۰/۰۱$.

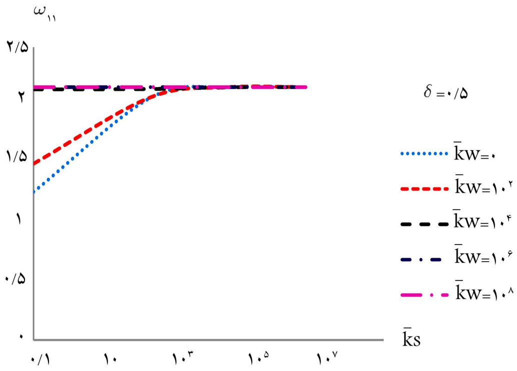


شکل ۷. بسامد بی‌بُعد مود اول صفحه‌ی مربعی همسانگرد عرضی به ازاء مقادیر مختلف $\delta = ۰/۰۵$.

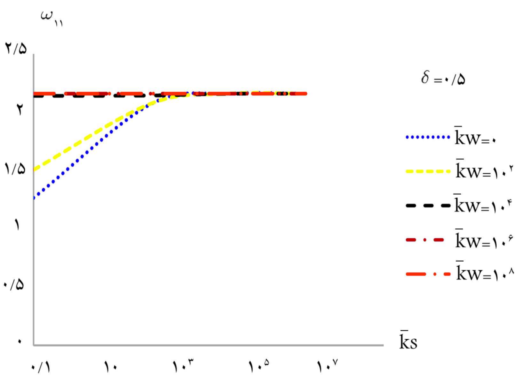
با توجه به نمودارهای ارائه شده در شکل‌های ۲ الی ۵ مشاهده می‌شود که با افزایش سختی وینکلر، بسامد بدون بُعد افزایش و شدت آن با افزایش ضخامت کاهش یافته است. ضمناً افزایش بیشتر سختی بستر از مقدار معینی، تأثیر بسیار ناچیزی در افزایش بسامد داشته است، به طوری که بسامد در این حالت به مقدار تقریباً ثابتی میل پیدا کرده است. لذا مقدار مذکور را می‌توان بیان‌گر حد بسامد برای نسبت‌های مختلف ضخامت به عرض صفحه در هر مود دانست. به عنوان نمونه، مقدار بی‌بُعد بسامد زاویه‌یی در صفحه‌ی همسانگرد عرضی برای مود اول و δ برابر ۰٫۰۱ به ۱۵۶ میل پیدا کرده است. با مقایسه‌ی نمودارها نیز می‌توان پی برد که افزایش بسامد بی‌بُعد به‌دلیل افزایش سختی وینکلر در مودهای بالاتر ارتعاشی، با شدت بیشتری همراه است. همچنین با مقایسه‌ی صفحه‌ی همسانگرد عرضی و همسانگرد ملاحظه می‌شود که اختلاف زیادی بین صفحه‌ی همسانگرد عرضی و همسانگرد وجود ندارد.

جهت بررسی اثر پارامتر برشی بستر پاسترناک ($\bar{k}_s$) در رفتار ارتعاشی صفحه، در شکل‌های ۶ الی ۹، بسامد زاویه‌یی بی‌بُعد مود اول صفحه به ازاء مقادیر مختلف سختی وینکلر و برای نسبت ضخامت‌های (δ)، ۰٫۰۱، ۰٫۰۵ و ۰٫۵ برای صفحه‌ی همسانگرد عرضی و به ازاء نسبت ضخامت‌های (δ)، ۰٫۵، برای صفحه‌ی همسانگرد، مشاهده می‌شود.

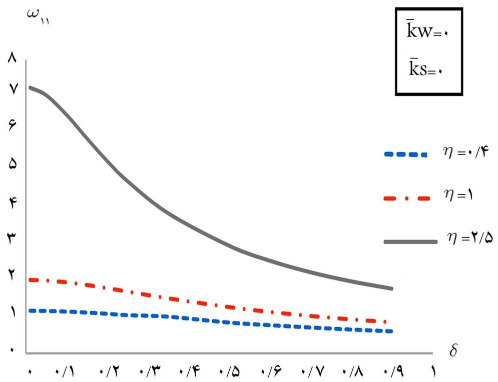
با توجه به شکل‌های ۶ الی ۹ می‌توان دریافت که با افزایش $\bar{k}_s$ بسامد بی‌بُعد افزایش یافته و شدت آن با افزایش ضخامت کاهش یافته است. همچنین با افزایش بیش از حد $\bar{k}_s$ که مقدار آن برای هر δ متفاوت است، تغییرناچیزی در بسامد روی



شکل ۸. بسامد بی‌بُعد مود اول صفحه‌ی مربعی همسانگرد عرضی به ازاء مقادیر مختلف $\delta = ۰/۵$.



شکل ۹. بسامد بی‌بُعد مود اول صفحه‌ی مربعی همسانگرد به ازاء مقادیر مختلف $\delta = ۰/۵$.

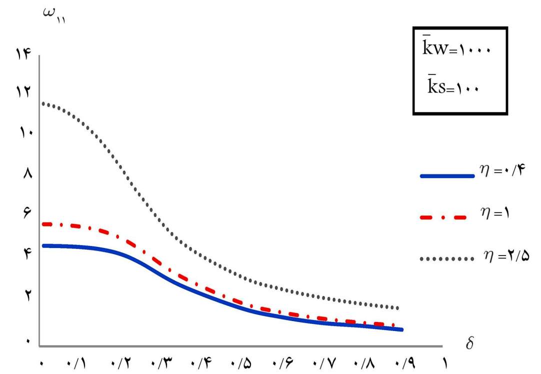


شکل ۱۰. بسامد بی‌بُعد مود اول صفحه‌ی همسانگرد عرضی به ازاء مقادیر مختلف η.

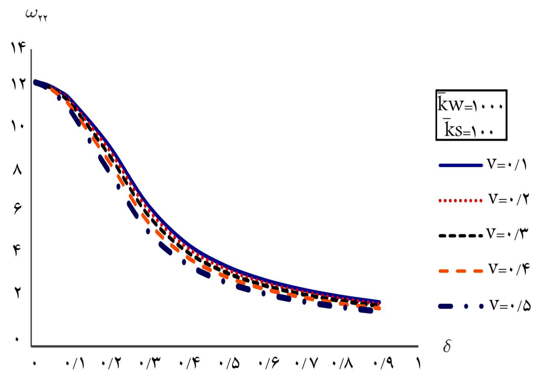
می‌دهد، که بیانگر حد بسامد بی‌بُعد است.

به منظور بررسی تأثیر ابعاد صفحه در بسامد بی‌بُعد مود اول، شکل‌های ۱۰الی ۱۲ به ازاء η برابر ۰٫۴، ۱، ۲٫۵برای مقادیر مختلف $\bar{k}_w$ و $\bar{k}_s$ بررسی شده است.

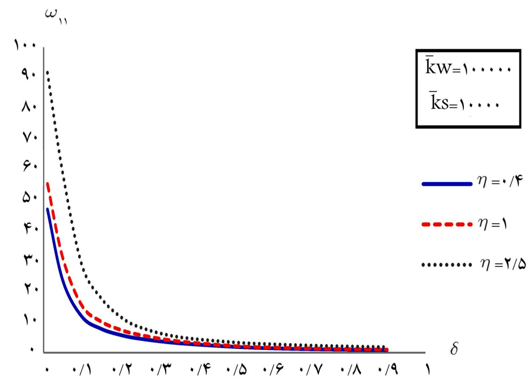
نتایج ارائه شده در شکل‌های مذکور نشان می‌دهد که با افزایش η، مقادیر بسامد بی‌بُعد افزایش و شدت آن با افزایش $\bar{k}_w$ و $\bar{k}_s$ بیشتر و با ضخیم‌تر شدن صفحه کاهش یافته است. ضمناً آهنگ تغییرات بسامد برای صفحات با η بالاتر، شدت بیشتری داشته است، که این شدت با افزایش سختی وینکلر و بستر برشی بیشتر هم می‌شود.



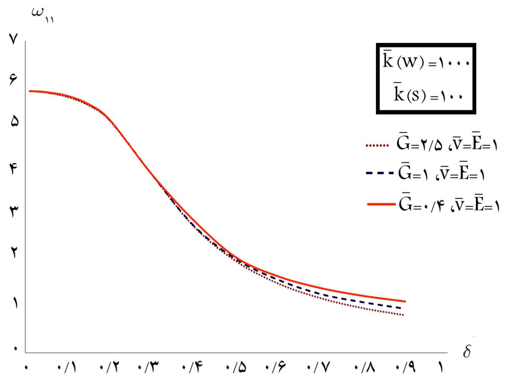
شکل ۱۱. بسامد بی‌بُعد مود اول صفحه‌ی همسانگرد عرضی به ازاء مقادیر مختلف η.



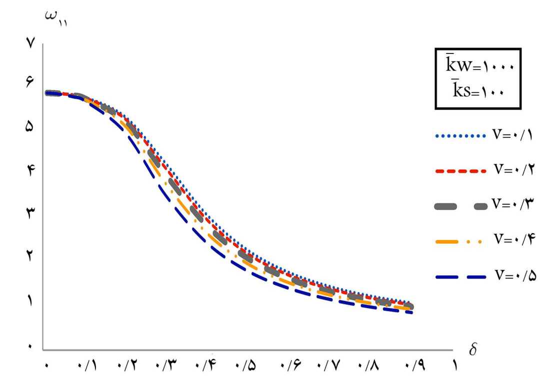
شکل ۱۴. بسامد بی‌بُعد مود سوم صفحه‌ی مربعی همسانگرد عرضی به ازاء مقادیر مختلف v.



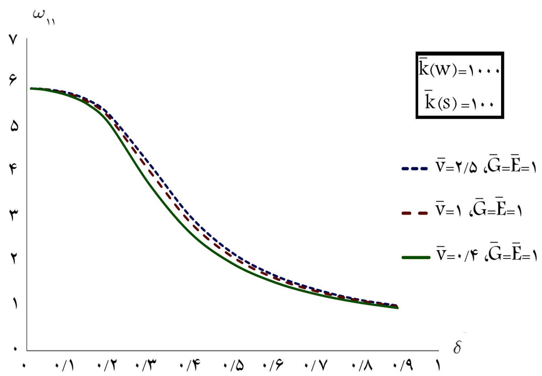
شکل ۱۲. بسامد بی‌بُعد مود اول صفحه‌ی همسانگرد عرضی به ازاء مقادیر مختلف η.



شکل ۱۵. تأثیر نسبت مدول برشی $\bar{G}$ در بسامد مود اول صفحه‌ی مربعی همسانگرد عرضی.



شکل ۱۳. بسامد بی‌بُعد مود اول صفحه‌ی مربعی همسانگرد عرضی به ازاء مقادیر مختلف v.



شکل ۱۶. تأثیر نسبت پواسیون $\bar{v}$ در بسامد مود اول صفحه‌ی مربعی همسانگرد عرضی.

جهت بررسی تأثیر ضریب پواسون در رفتار ارتعاشی صفحه، نتایج بسامد مودهای اول و سوم صفحه‌ی همسانگرد عرضی برحسب δ و به ازاء $\bar{k}_w$ و $\bar{k}_s$ ثابت در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ مشاهده می‌شود.

از شکل‌های مذکور پیداست که با افزایش ضریب پواسون، بسامد بی‌بُعد تقلیل یافته و شدت کاهش آن در مود سوم بیشتر شده و با ضخیم شدن صفحه کاهش یافته است، تا جایی که در صفحات خیلی ضخیم به سمت صفر میل کرده است. همچنین وابستگی تغییرات بسامد به ضرایب پواسون کمتر از سایر پارامترها، مانند: ضخامت، سختی وینکلر، سختی بستر ارتجاعی و ابعاد است.

جهت بررسی تأثیر تغییرات خواص مکانیکی ($\bar{G}$، $\bar{v}$ و $\bar{E}$) راستای ضخامت صفحه‌ی همسانگرد عرضی در مقادیر بسامدهای طبیعی، در جدول‌های ۵ الی ۷ و شکل‌های ۱۵ الی ۱۷، تغییرات بسامد بی‌بُعد مود اول صفحه‌ی مربعی به‌ازاء ($\bar{k}_w =$ ۱۰۰۰) و ($\bar{k}_s =$ ۱۰۰) بر حسب δ برای مقادیر مختلف ($\bar{G}$، $\bar{v}$ و $\bar{E}$) ارائه شده است.

با توجه به جدول ۵ و شکل ۱۷ مشاهده می‌شود که در حالت ($\bar{G} =$ ۰/۴)، به دلیل این‌که سختی برشی در راستای ضخامت از سختی برشی در صفحه‌ی همسانگرد بیشتر است، مقادیر بسامد بی‌بُعد در صفحه‌ی مذکور، بیشتر از مقادیر

جدول ۵. بررسی تأثیر $\bar{G}$ در بسامد مود اول صفحه $(\omega_{۱۱})$.

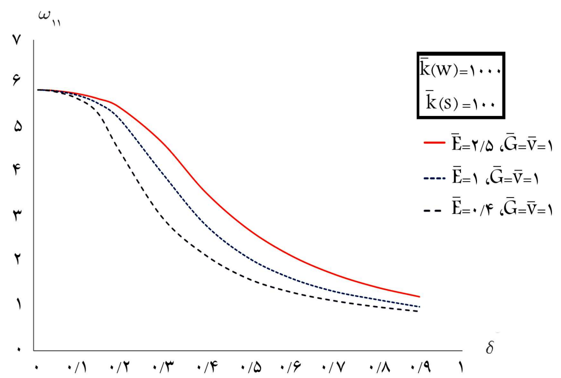
δ	$\bar{G} = ۲/۵, \bar{v} = \bar{E} = ۱$	$\bar{G} = ۱, \bar{v} = \bar{E} = ۱$	$\bar{G} = ۰/۴, \bar{v} = \bar{E} = ۱$
۰٫۰۱	۵٫۸۷۴۹	۵٫۸۷۵۲	۵٫۸۷۵۳
۰٫۰۵	۵٫۸۴۳۵	۵٫۸۴۹۷	۵٫۸۵۲۳
۰٫۱	۵٫۷۴۴۲	۵٫۷۶۰۵	۵٫۷۶۷۶
۰٫۲	۵٫۲۱۲۷	۵٫۲۲۴۱	۵٫۲۲۹۶
۰٫۳	۳٫۹۹۶۶	۴٫۰۰۰۸	۴٫۰۰۳۲
۰٫۴	۲٫۸۲۸۹	۲٫۸۴۵۲	۲٫۹۶۳۹
۰٫۵	۲٫۰۵۰۲	۲٫۰۹۷۴	۲٫۱۳۶۲
۰٫۶	۱٫۵۵۱۷	۱٫۶۳۵۳	۱٫۷۱۲۹
۰٫۷	۱٫۲۲۴۷	۱٫۳۱۷۹	۱٫۴۵۲۹
۰٫۸	۱٫۰۰۱۵	۱٫۱۳۵۶	۱٫۲۷۹۰
۰٫۹	۰٫۸۴۲۸	۰٫۹۸۹۵	۱٫۱۵۲۱

جدول ۶. بررسی تأثیر $\bar{v}$ در بسامد مود اول صفحه $(\omega_{۱۱})$.

δ	$\bar{v} = ۲/۵, \bar{G} = \bar{E} = ۱$	$\bar{v} = ۱, \bar{G} = \bar{E} = ۱$	$\bar{v} = ۰/۴, \bar{G} = \bar{E} = ۱$
۰٫۰۱	۵٫۸۷۵۴	۵٫۸۷۵۲	۵٫۸۷۴۷
۰٫۰۵	۵٫۸۵۴۸	۵٫۸۴۹۷	۵٫۸۳۷۵
۰٫۱	۵٫۷۷۸۷	۵٫۷۶۰۵	۵٫۷۲۲۴
۰٫۲	۵٫۲۹۰۵	۵٫۲۲۴۱	۵٫۰۱۹۷
۰٫۳	۴٫۱۵۸۳	۴٫۰۰۰۸	۳٫۶۹۷۲
۰٫۴	۲٫۹۷۹۷	۲٫۸۴۵۲	۲٫۶۱۲۹
۰٫۵	۲٫۱۸۵۵	۲٫۰۹۴۷	۱٫۹۴۹۳
۰٫۶	۱٫۶۹۳۰	۱٫۶۳۵۳	۱٫۵۳۸۵
۰٫۷	۱٫۳۷۷۰	۱٫۳۱۷۹	۱٫۲۷۲۴
۰٫۸	۱٫۱۵۳۲	۱٫۱۳۵۶	۱٫۰۹۰۳
۰٫۹	۱٫۰۰۸۰	۰٫۹۸۹۵	۰٫۹۵۸۴

جدول ۷. بررسی تأثیر $\bar{E}$ در بسامد مود اول صفحه $(\omega_{۱۱})$.

δ	$\bar{E} = ۲/۵, \bar{G} = \bar{v} = ۱$	$\bar{E} = ۱, \bar{G} = \bar{v} = ۱$	$\bar{E} = ۰/۴, \bar{G} = \bar{v} = ۱$
۰٫۰۱	۵٫۸۷۴۷	۵٫۸۷۵۲	۵٫۸۷۵۴
۰٫۰۵	۵٫۸۳۵۳	۵٫۸۴۹۷	۵٫۸۵۵۷
۰٫۱	۵٫۶۸۸۵	۵٫۷۶۰۵	۵٫۷۹۲۶
۰٫۲	۴٫۵۰۸۰	۵٫۲۲۴۱	۵٫۴۸۴۵
۰٫۳	۳٫۰۰۵۳	۴٫۰۰۰۸	۴٫۶۸۹۸
۰٫۴	۲٫۱۵۹۵	۲٫۸۴۵۲	۳٫۵۸۱۰
۰٫۵	۱٫۶۲۴۰	۲٫۰۹۷۴	۲٫۷۴۰۴
۰٫۶	۱٫۳۲۰۴	۱٫۶۳۵۳	۲٫۱۴۴۷
۰٫۷	۱٫۱۲۶۸	۱٫۳۱۷۹	۱٫۷۲۶۹
۰٫۸	۰٫۹۸۹۷	۱٫۱۳۵۶	۱٫۴۳۰۸
۰٫۹	۰٫۸۸۴۸	۰٫۹۸۹۵	۱٫۲۱۵۵



شکل ۱۷. تأثیر نسبت مدول کشسانی $\bar{E}$ در بسامد مود اول صفحه‌ی مربعی همسانگرد عرضی.

جدول ۸. بسامد مود سوم صفحه‌ی مربعی همسانگرد عرضی بر بستر پاسترناک.

δ	$\bar{K}_w$	$\bar{K}_s$	$\bar{\omega}_{22}(rad/s)$
۰/۱			۱۷۲۲۹/۱۰۴۹
۰/۵	10^{3}	10^{2}	۲۲۳۴۱/۵۰۳۸
۰/۹			۱۹۱۸۳/۸۵۴۲
۰/۱			۴۰۰۷۲/۵۶۶۱
۰/۵	10^{4}	10^{3}	۲۲۵۱۰/۴۳۴۴
۰/۹			۱۹۱۸۹/۵۰۲۹

صفحه‌ی همسانگرد ($\bar{G} = ۱$) است و برای صفحه‌ی همسانگرد نیز بیشتر از صفحه با ($\bar{G} = ۲/۵$) است. همچنین در ورق‌های نازک به دلیل این‌که اثر تغییرات خواص در راستای ضخامت نسبت به خواص صفحه‌یی ناچیز است، بین مقادیر بسامد بدون بُعد صفحه‌ی همسانگرد عرضی و همسانگرد، اختلاف ناچیزی وجود دارد.

علاوه بر این، با بررسی جدول‌های ۶ و ۷ و شکل‌های ۱۶ و ۱۷ می‌توان پی برد که با افزایش تغییرات نسبت مدول کشسانی ($\bar{E}$) و نسبت ضریب پواسون ($\bar{v}$) بسامد بی‌بُعد صفحه‌ی همسانگرد عرضی به ترتیب کاهش و افزایش خواهند یافت. ضمناً تغییرات نسبت $\bar{v}$ و $\bar{G}$، تأثیر کمتری در مقدار بسامد بی‌بُعد، نسبت به $\bar{E}$ می‌گذارد، که تأثیر آنها در صفحات نازک قابل چشم‌پوشی است.

به منظور ارزیابی بسامد بُعددار صفحه‌ی همسانگرد عرضی و نیز همسانگرد، در جدول‌های ۸ و ۹، بسامد بُعددار مود سوم صفحه‌ی مربعی برای مقادیر مختلف سختی فنرهای وینکلر و سختی برشی بستر ارتجاعی، بر حسب نسبت ضخامت‌های گوناگون ارائه شده است.

با توجه به برقراری رابطه‌ی مستقیم بین بسامد صفحات با مقدار سختی آنها، انتظار می‌رفت با افزایش ضخامت، همواره بسامد بُعددار افزایش یابد، اما با مشاهده‌ی نتایج جدول‌های ۸ و ۹ می‌توان دریافت که به دلیل وجود بستر پاسترناک، چنین رابطه‌یی همواره صدق نمی‌کند و بسته به مقادیر سختی‌های بستر و صفحه، بسامد می‌تواند کاهش یابد.

جدول ۹. بسامد مود سوم صفحه‌ی مربعی همسانگرد بر بستر پاسترناک.

δ	$\bar{K}_w$	$\bar{K}_s$	$\bar{\omega}_{22}(rad/s)$
۰/۱			۱۷۷۸۹/۴۲۹۱۹
۰/۵	10^{3}	10^{2}	۲۷۱۷۶/۳۹۵۸
۰/۹			۲۶۵۵۷/۶۴۲۲
۰/۱			۴۰۰۷۲/۷۰۷۹
۰/۵	10^{4}	10^{3}	۲۷۲۵۰/۱۶۳۳
۰/۹			۲۶۵۵۸/۳۶۰۷

۴. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، حل دقیق ارتعاش آزاد صفحات همسانگرد عرضی مستطیلی بر بستر ارتجاعی پاسترناک با استفاده از توابع پتانسیل اسکندری - قادی به صورت تحلیلی ارائه شده است. بر این اساس، نتایج به دست آمده به این شرح هستند:

۱) روش مورد استفاده در پژوهش حاضر قابلیت تعیین بسامد ارتعاش آزاد هر مود نوسان از صفحه با ضخامت‌های مختلف و بدون استفاده از فرضیات ساده‌شونده‌یی نظیر توزیع تنش و کرنش در ضخامت صفحه را دارد.

۲) با افزایش نسبت ضخامت به عرض صفحه به دلیل افزایش میزان کرنش‌های برشی، بسامد زاویه‌یی بی‌بُعد شده کاهش یافته است، که میزان کاهش آن در مودهای بالاتر، بیشتر نمود پیدا کرده است.

۳) با افزایش سختی وینکلر و سختی برشی بستر برشی ارتجاعی بسامد زاویه‌یی بی‌بُعد شده افزایش یافته است، که شدت آن در مودهای بالاتر بیشتر شده است.

۴) با افزایش نسبت منظر، بسامد بی‌بُعد افزایش یافته است، که میزان افزایش آن در مودهای بالاتر بیشتر بوده است.

۵) با افزایش ضریب پواسون بسامد بی‌بُعد کاهش یافته است، که شدت آن در مودهای بالاتر بیشتر شده و با ضخیم‌تر شدن صفحه کاهش یافته است، تا جایی که در صفحات خیلی ضخیم این اختلاف به سمت صفر میل پیدا کرده است.

۶) با افزایش تغییرات مدول برشی ($\bar{G}$) و مدول کشسانی ($\bar{E}$)، بسامد بی‌بُعد صفحه‌ی همسانگرد عرضی، کاهش و با افزایش تغییرات ضریب پواسون ($\bar{v}$)، بسامد بدون بُعد، افزایش یافته است. ضمناً تأثیر تغییرات مدول کشسانی ($\bar{E}$)، در قیاس با ضریب پواسون ($\bar{v}$) و مدول برشی ($\bar{G}$)، در محاسبه‌ی مقادیر بسامد بدون بُعد و علی‌الخصوص در صفحه‌ی ضخیم بیشتر بوده است.

۷) با توجه به برقراری رابطه‌ی مستقیم بین بسامد صفحات با مقدار سختی آنها، انتظار می‌رفت با افزایش ضخامت، همواره بسامد بُعددار افزایش یابد، اما به دلیل وجود بستر پاسترناک، چنین رابطه‌یی همواره صدق نمی‌کند و بسته به سختی‌های بستر و صفحه، بسامد می‌تواند کاهش یابد.

پانوشت‌ها

1. Chladni
2. Leissa
3. Bert
4. Reissner- Mindlin
5. Winkler
6. Boussinesq
7. Pasternak
8. Vlasov
9. Leontiev
10. Horvath
11. Kerr
12. Xiang
13. Zhou
14. functionally graded material
15. Composite
16. Shi
17. Park
18. Choi
19. first-order shear deformation theory
20. third- order shear deformation theory
21. Galerkin
22. Love
23. Papkovich- neuber
24. Lekhnitskii

منابع (References)

1. Roshanbakhsh, M.Z. and Navayi Neya, B. "Free vibration of beam environments on the pasternak bed", *Journal of Modarres Civil Engineering*, **17**(1), pp. 89-100 (1396).
2. Bakhshandeh, A., Navayi Neya, B. and Nateghi Babagi, P. "Benchmark solution for free vibration analysis of trasversely isotropic thick rectangular plates", *Acta Mechanica*, **34**(5), pp.3977-3995 (2013).
3. Leissa, A.W. "Vibration of Plates", *NASA SP-160* (1969).
4. Leissa, A.W. "The free vibration of rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, **31**(3), pp. 257-293 (1973).
5. Leissa, A.W. "Recent research in plate vibrations: classicaltheory", *The Shock and Vibration Digest*, **9**(10), pp. 13-24 (1977).
6. Leissa, A.W. "Recent research in plate vibrations, 1973-1976: Complicating eects", *The Shock and Vibration Digest*, **10**(12), pp. 21-35 (1978).
7. Leissa, A.W. "Plate vibration research, 1976-1980: classical theory", *The Shock and Vibration Digest*, **13**(9), pp. 11-22 (1981).
8. Leissa, A.W. "Plate vibration research, 1976-1980: Complicating eects", *The Shock and Vibration Digest*, **13**(10) (1981).
9. Leissa, A.W. "Recent studies in plate vibrations, 1981-1985. Part I: classical theory", *The Shock and Vibration Digest*, **19**(2), pp. 11-18 (1987).
10. Leissa, A.W. "Recent studies in plate vibrations, 1981-1985. part II: Complicating eects", *The Shock and Vibration Digest*, **19**(3), pp. 10-24 (1987).
11. Bert, C.W. "Dynamics of composite and sandwich panels, parts I and II", *The Shock and Vibration Digest*, **8**(11), pp. 15-24 (1976).
12. Bert, C.W. "Recent research in composite and sandwich plate dynamics", *The Shock and Vibration Digest*, **11**(10), pp. 13-23 (1979).
13. Bert, C.W. "Research on dynamics of composite and sandwich plates", *The Shock and Vibration Digest*, **14**(10), pp. 17-34 (1982).
14. Bert, C.W. "Research on dynamic behavior of composite and sandwich plates, part IV", *The Shock and Vibration Digest*, **17**(11), pp. 3-25 (1985).
15. Bert, C.W. "Research on dynamicbehavior of composite and sandwich plates, V, partI", *The Shock and Vibration Digest*, **23**(6), pp. 3-14 (1991).
16. Bert, C.W. "Research on dynamic behavior of composite and sandwich plates, V, part II", *The Shock and Vibration Digest*, **23**(7), pp. 9-21 (1991).
17. Winkler, E. "Die Lehre Von der Elastizitat und Festigkeit", *Dominicus, Prague* (1867).
18. Pasternak, P.-L. "On a new method of analysis of an elastic foundation by means of two foundation constants", *Gps. Ize. Lit. Po Straitt i Arkh* (1954).
19. Samadi, GH., Navayi Neya, B. and Nategh, P. "Bending analysis of thick rectangular plates on pasternak bed", *8th National Civil Engineering Congress of Babol Noushirooni University of Technology* (1393) (in persion).
20. Xiang, Y., Wang, C.-M. and Kitipornchai, S. "Exact vibration solution for initially stressed mindlin plates on pasternak foundation", *International Journal of Mechanical Sciences*, **36**(4), pp. 311-316 (1994).
21. Xiang, Y., Liew, K.-M. and Kitipornchai, S. "Vibration analysis of retangular mindlin plates resting ON elastic edge supports", *Journal of Sound and Vibration*, **204**(1), pp. 1-16 (1997).
22. Zhou, D., Cheung, Y.-K., Lo, S.-H. and et al. "Three-dimensional vibration analysis of rectangular thick plates on pasternak foundation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **59**(10), pp. 1313-1334 (2004).
23. Hosseini Hashemi, S., Rokni Damavandi Taher, H. and Akhavan, H. "Free vibration of functionally graded Rectangular plates using first-order shear deformation plate theory", *Applied Mathematial Modelling*, **34**(5), pp. 1276-1291 (2010).
24. Dehghany, M. and Farajpour, A. "Free vibrations of simplay supported rectangular plates on pasternak foundation: An exect and three-dimensional solution", *Engineering Solid Mechanics*, **2**(1), pp. 29-42 (2013).
25. Rahbar Ranji, A. and Shahbaztabar, A. "Free vibration analysis of moderately thick rectangular plates on pasternak foundation with point supports and elastically restrained edges by using the rayleigh–ritz method", *Journal of Failure Analysis and Prevention*, **16**(6), pp. 1006-1023 (2016).
26. Shi, D., Zhang, H., Wang, Q. and Zha, S. "Free and forced vibration of the moderately thick laminated composite rectangular plate on various elastic winkler and

pasternak foundations", *Journal of Shoch and Vibration*, **2017**(2), pp. 1-23 (2017).

27. Park, M. and Choi, D-H. "A simplified first-order shear deformation theory for bending, buckling and free vibration analyses of isotropic plates on elastic foundations", *KSCE Journal of Civil Engineering*, **22**(4), pp. 1235-1249 (2018).

28. Saidi, A.-R. and Atashipour, S.-R. "Analytical solution of free vibration of thich transversely isotropic rectangular plates, based on first order shear deformation theory", *Aerospace Mecanics Journal*, **4**(3), pp. 9-21 (2008).

29. Hashemi, S.-H., Atashipour, S.-R. and Fadaee, M. "An exeact analytical approach for in-plane and out-of-plane free vibration analysis of thich laminated transversely isotropic plates", *Archive of Applied Mechanics*, **82**(5), pp. 677-698 (2012).

30. Fathi, M. and Rezayi, M. "Investigate vvibration of oorthotropic composite rectangular plates", *6th National Conference and 2nd International Conference on Civil Engineering Materials and Structures 3ed International Congress on Civil of Yazd University* (2016) (in persion).

31. Rahbar Ranji, A. and Shahbaztabar, A. "Free vibration analysis of non-homogeneous orthotropic plates resting on pasternak elastic foundation by rayleigh-ritz method", *Journal of Central South University*, **23**(2), pp. 413-420 (2016).

32. Navayi Neya, B. "Exact solution for free vibration of simply supported isotropic thick rectangular plates", *Journal of Sharif Civil Engineering*, **1**(2), pp.32-41 (2012) (in persion).

33. Eskandari-Ghadi, M. "A comlete solution of the wave equations for transversly isotropic media", *Journal of Elasticity*, **81**, pp. 1-19 (2005).

34. Nematzadeh, M., Eskandari-Ghadi, M. and Navayi Neya, B. "An analytical solution for transversely isotropic simply supported thick rectangular plates using displacement potential functions", *The Journal of Strain Analysis for Eengineering Desighn*, **46**, pp. 121-142 (2011).

35. Yekkalam, F. and Navayi Neya, B. "An analytical solution for bending of transversly isotropic thick rectangular plates with variable thickness", *Applied Mathematica Modelling* (2019).