مهندسی عمران شریف، (زمستان ۱۳۹۹)
دوره‌ی ۲ - ۳۶، شماره‌ی ۱/۴، ص. ۶۱-۶۹

Original Article

رابطه‌سازی نوین برای روش رهایی پویای جنبشی بر پایه‌ی درون‌یابی لاگرانژ

مرتضی عباسی (کارشناس ارشد)
دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد

امیرحسین نمدچی (کارشناس ارشد)
دانشکده‌ی مهندسی عمران، مؤسسه‌ی آموزش عالی اقبال لاهوری

جواد علامتیان * (دانشیار)
دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد

در نوشتار حاضر، الگوریتم نوینی برای روش رهایی پویا با میرایی جنبشی ارائه شده است. برای انجام این کار، از درون‌یابی لاگرانژ برای تعیین رابطه‌های تکراری رهایی پویا استفاده شده است. بنابراین، رابطه‌سازی روش رهایی پویا، بدون نیاز به محاسبه‌ی سرعت‌های گرهی و فقط بر اساس تغییرمکان‌های گام‌های پیاپی به دست می‌آید. همچنین، روش تکرارهای توانی برای تعیین کمیت نسبت گام زمانی بهینه به کار می‌رود. باید دانست، گام زمانی بهینه نیاز به بازآغازی تحلیل، که از دشواری‌های اصلی روش رهایی پویای جنبشی است، را از بین می‌برد. برای ارزیابی کارایی و عملکرد روش پیشنهادی از تحلیل غیرخطی چندین خرپا و قاب استفاده و نتایج با دیگر شیوه‌های متداول رهایی پویا مقایسه شده‌اند. نتایج عددی نشان می‌دهند نرخ هم‌گرایی روش رهایی پویای جنبشی پیشنهادی بیشتر از شیوه‌های متداول است.

واژگان کلیدی: روش رهایی پویای جنبشی، درون‌یابی لاگرانژ، شیوه‌ی تکرار توانی، تحلیل غیرخطی.

morteza.abbasi90@gmail.com
amir.hossein.nemadchi@gmail.com
alamatian@mshdiau.ac.ir

۱. مقدمه

روش‌های خانواده‌ی رهایی پویا برای دامنه‌ی گسترده‌یی از تحلیل‌ها، شامل تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی و برای حل دستگاه معادله‌های هم‌زمان به صورت رابطه‌ی ۱ به کار می‌روند:

$$[\mathbf{S}]\{\mathbf{D}\}=\{\mathbf{P}\} \tag{۱}$$

که در آن، $[S]$، $\{D\}$ و $\{P\}$ به ترتیب: ماتریس سختی سامانه، بردارهای تغییرمکان و بارهای گرهی خارجی هستند. فرایندهای رهایی پویا با اجرای چندین تکرار با الگوی سعی و خطا، پاسخ دستگاه ۱ را در دسترس قرار می‌دهند (بردار تغییرمکان‌های گرهی.) روش‌های مذکور صریح هستند و پاسخ، فقط با محاسبات برداری به دست می‌آید. به سخن دیگر، هیچ‌گونه عملیات ماتریسی شامل برپا کردن وارون ماتریس سختی مورد نیاز نیست. در ادبیات فنی روش رهایی پویا، منظور از بی‌نیازی به عملیات ماتریسی، اجرای گام‌ها بدون محاسبه‌ی وارون ماتریس سختی است. خاطر نشان می‌سازد برپا کردن وارون ماتریس سختی، که در روش‌های متداول مانند شیوه‌های نیوتن - رافسونی[1] انجام می‌شود، بسیار دشوار و پر هزینه است. در روش رهایی پویا، پاسخ بدون نیاز به برپا کردن وارون ماتریس سختی به دست می‌آید. متداول‌ترین الگوی رابطه‌سازی در روش رهایی پویا، انتقال سامانه‌ی استاتیکی ۱ به یک محیط دینامیکی مجازی است:[1]

$$[\mathbf{M}]\left\{\ddot{\mathbf{D}}\right\}+[\mathbf{C}]\left\{\dot{\mathbf{D}}\right\}+[\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\}=\{\mathbf{P}\} \tag{۲}$$

که در آن، $[M]$ و $[C]$ به ترتیب، ماتریس‌های جرم و میرایی سامانه‌ی دینامیکی مجازی هستند و برای سادگی و صریح شدن محاسبه‌ها، قطری فرض می‌شوند. در روش رهایی پویا، تغییرات بار خارجی در هر نمو ثابت پنداشته می‌شود. بر این اساس، طبق اصل بنیادی دینامیک سازه‌ها، پاسخ حالت پایدار سامانه‌ی پویای ساختگی معادله‌ی ۲ برابر پاسخ دستگاه معادله‌ی ۱ خواهد بود؛ چرا که میرایی مجازی به تدریج سبب از بین رفتن نیروهای نامیزان می‌شود. نیروی نامیزان کمیتی برابر با تفاوت حاصل از نیروهای خارجی و داخلی سیستم است. چالش‌های اصلی در این رویکرد، ارزیابی و تعیین عامل‌های میرایی و جرم ساختگی است؛ به گونه‌یی که با کمترین تعداد تکرار بتوان به پاسخ حالت پایدار دست یافت. بر پایه‌ی رابطه‌ی ۲، روش‌های رهایی پویا را می‌توان در دو دسته‌ی لزج و جنبشی دسته‌بندی کرد. با فرض میرایی مجازی برای سامانه‌ی ($[C]\neq[O]$)، روش رهایی پویای لزج[2] در دسترس قرار می‌گیرد. اگر سامانه‌ی دینامیکی مجازی بدون میرایی فرض شود ($[C]=[O]$)

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۸/۶/۱۰، اصلاحیه ۱۳۹۸/۱۰/۷، پذیرش ۱۳۹۸/۱۰/۲۹.
DOI:10.24200/J30.2020.53836.2603

، روش رهایی پویای جنبشی[۳] به دست می‌آید:

$$[\mathbf{M}]\left\{\ddot{\mathbf{D}}\right\}+[\mathbf{K}]\{\mathbf{D}\}=\{\mathbf{P}\} \qquad (۳)$$

در رویکرد جنبشی، با توجه به این‌که معادله‌ی ۳ یک سامانه‌ی پایستار را توصیف می‌کند، مجموع کارمایه‌ی نهفته[۴] و جنبشی[۵] سامانه ثابت است و از این رو، نقطه‌یی با بیشینه‌ی کارمایه‌ی جنبشی، بیانگر وضعیت تعادل پایدار سامانه‌ی استاتیکی خواهد بود؛ چراکه در این لحظه کارمایه‌ی نهفته‌ی سیستم کمینه می‌شود. بر این پایه، الگوریتم رهایی پویای جنبشی با دنبال کردن تغییرات کارمایه‌ی جنبشی سامانه در هر لحظه، پاسخ معادله‌ی ۱ را به دست می‌آورد. باید افزود، به دلیل حذف عامل میرایی از رابطه‌ی ۲، حجم محاسبات در رویکرد رهایی پویای جنبشی کمتر از شیوه‌ی لزج است. با این وجود، روش مزبور نیازمند بازآغازی[۶] در لحظه‌های زمانی با بیشینه‌ی کارمایه‌ی جنبشی است.

رابطه‌سازی روش رهایی پویا بر پایه‌ی قانون دوم ریچاردسون برای حل معادلات دیفرانسیلی، توسط فرانکل[۷] بنیان نهاده شد.[۲] روش مذکور نخستین بار توسط اتر[۸] (۱۹۶۵)، به کار رفت.[۳] یک سال بعد، برای تحلیل قاب پرتال به کار برده شد.[۴] در ادامه، این فرایند برای تحلیل استاتیکی شبکه‌های کابلی و مسائل شکل‌یابی[۹] استفاده شد.[۵] این روش محاسباتی با استفاده از کمیت‌های برداری و برنامه‌نویسی ساده، سبب به کارگیری حافظه‌ی کمتر نسبت به روش‌های مشابه می‌شود، همچنین سادگی و پایداری نتایج در روش مذکور، آن را به شیوه‌یی مؤثر برای حل مسائل غیرخطی تبدیل کرده است.

تحلیل صفحه‌های مستطیلی دارای تغییرشکل‌های کوچک، بزرگ و همچنین رفتار کمانشی از دیگر کاربردهای روش رهایی پویاست.[۶ و ۷] در ادامه، روش رهایی پویای جنبشی، بر مبنای عدم وجود میرایی، معرفی شده است.[۸] ارزیابی خطا در روش رهایی پویا به یک مسئله‌ی مقدار ویژه منجر شد، که با حل آن رابطه‌یی برای جرم ساختگی به دست آمد.[۹] همچنین، با بررسی تغییرات کارمایه‌ی جنبشی، رابطه‌یی برای گام زمانی ساختگی به دست آمد.[۱۰] از سوی دیگر، پژوهشگران با بررسی مسئله‌ی کمانش ستون‌ها ثابت کردند که روش رهایی پویا، یک ابزار قوی برای حل معادله‌ی دیفرانسیلی درجه دوم به شدت غیرخطی است.[۱۱] همچنین مقایسه‌یی بر روی تحلیل صفحات خمشی با تغییرشکل‌های بزرگ، توسط روش‌های مختلف رهایی پویا صورت گرفت.[۱۲]

برای افزایش نرخ همگرایی، گام زمانی ساختگی تصحیح شد.[۱۳] همچنین، روش رهایی پویا برای تحلیل‌های دینامیکی عددی صریح به کار رفته است.[۱۴] از سوی دیگر، بار کمانشی سازه‌های متقارن و نامتقارن، با روش رهایی پویا با محاسبات برداری به دست می‌آید.[۱۵] پیمایش ناحیه‌های بازگشتی در مسیر ایستایی سازه از دیگر توانایی‌های روش مذکور است.[۱۶] روشی نوین بدون نیاز به ماتریس میرایی و سرعت بر پایه‌ی رهایی پویا معمول ابداع شد، که این روش در بارهای متغیر و رفتار غیرخطی زیاد سامانه، عملکرد مؤثری به نمایش گذاشت.[۱۷] افزون بر این‌ها، می‌توان هسته‌ی الگوریتم رهایی پویا را بر روی پردازنده‌های گرافیکی اجرا کرد، که این نکته سبب عملکرد سریع‌تر روش مذکور برای مدل‌های بزرگ‌مقیاس می‌شود.[۱۸]

از سوی دیگر، در پژوهش رومبوتس[۱۰] و همکاران (۲۰۱۷)، روش نیوتن-رافسون با فن رهایی پویا مقایسه شده است.[۱۹] در پژوهش علی و همکاران (۲۰۱۷)، نیز فرض غیرواقعی حرکت بدون اصطکاک المان‌های کابلی به کمک رهایی پویا تصحیح شد.[۲۰] همچنین، نرخ همگرایی روش رهایی پویا با استفاده از الگوریتم لانکسوز[۱۱] بهبود یافت.[۲۱] با کمینه‌سازی نرخ خطا در دو گام متوالی، روشی به منظور کاهش زمان تحلیل و پایداری عددی، برای روش رهایی پویای لزج بررسی شد.[۲۲] باید دانست که در فرایندهای تکراری در هر گام، خطاهای عددی ناشی از گرد کردن پدید می‌آیند. در این‌جا منظور از پایداری عددی، کران‌دار بودن رشد خطاهای ذکر شده است، به گونه‌یی که از وقوع خطای سرریز عددی[۱۲] جلوگیری شود. در پژوهشی دیگر، از میرایی ادامه‌دار جنبشی برای ارزیابی نرخ همگرایی روش رهایی پویا استفاده شده است.[۲۳] همچنین، با تخمین بسامد طبیعی، گام زمانی مناسب برای بهبود نرخ همگرایی پیشنهاد شده است.[۲۴]

در نوشتار حاضر، یک شیوه‌ی نوین برای روش رهایی پویای جنبشی ارائه شده است. برای انجام این کار، نخست از توابع درون‌یاب لاگرانژی برای رابطه‌سازی تکرارهای روش رهایی پویا استفاده شده است. به سخن دیگر، درون‌یابی لاگرانژ[۱۳] سه‌نقطه‌یی جایگزین شیوه‌ی تفاوت‌های محدود شده است. باید دانست استفاده از شیوه‌ی تفاوت‌های محدود مرکزی سبب شده است سرعت و شتاب سازه در رابطه‌سازی وارد شوند. همچنین، استفاده از چنین روش‌هایی سبب پدید آمدن مرحله‌ی میان‌گام در رابطه‌سازی رهایی پویا می‌شود. برای برطرف کردن کاستی‌های ذکر شده، درون‌یابی لاگرانژ پیشنهاد شده است. با استفاده از درون‌یابی لاگرانژ، نیازی به محاسبه‌ی سرعت و شتاب سازه نیست. همچنین، مرحله‌ی میان‌گام در تکرارهای رهایی پویا حذف خواهد شد.

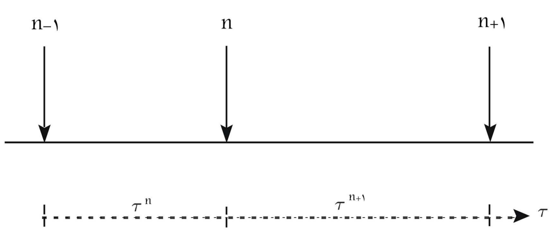
با تحلیل خطا در نموهای پیاپی، عامل جرم در دسترس قرار می‌گیرد. همچنین، با استفاده از راهکار نوین در تخمین کوچک‌ترین بسامد طبیعی سامانه‌ی دینامیکی مجازی و حل مستقیم معادله‌ی مشخصه‌ی خطا، نسبت گام زمانی بهینه در روش پیشنهادی محاسبه شده است. این گام زمانی، نیاز به بازآغازی تحلیل، که از دشواری‌های اصلی روش رهایی پویای جنبشی است، را از بین می‌برد. برای سنجش کارایی رابطه‌سازی پیشنهادی، سازه‌های خرپایی و قاب با رفتارهای خطی و ناخطی هندسی تحلیل و سپس نتایج با دیگر شیوه‌های متداول رهایی پویا مقایسه شده‌اند.

۲. رابطه‌سازی روش رهایی پویا با استفاده از درون‌یابی لاگرانژی

یکی از متداول‌ترین شیوه‌های مدل‌سازی عددی در مهندسی، روش درون‌یابی است. روش اجزاء محدود، یک نمونه‌ی بارز از کاربردهای ذکر شده است، که بر مبنای درون‌یابی استوار است. در پژوهش حاضر، از شیوه‌ی درون‌یابی لاگرانژ برای رابطه‌سازی روش رهایی پویا استفاده شده است. برای انجام این کار، دو گام پیاپی روش رهایی پویا به صورت شکل ۱ در نظر گرفته می‌شود:

مطابق شکل ۱، در دو تکرار پیاپی از روش رهایی پویا، سه گام n-۱، n و n+۱ وجود دارند. با استفاده از روش لاگرانژ می‌توان از سه نقطه‌ی اخیر برای درون‌یابی استفاده کرد. بنابراین، تابع درون‌یاب زمانی تغییرمکان از درجه‌ی است.

برای انجام این کار، گام n-۱ به عنوان مبدأ زمان ساختگی انتخاب می‌شود.



شکل ۱. دو تکرار پیاپی در روش رهایی پویا.

در نتیجه، تابع درون‌یاب برای عامل مجهول بردار تغییرمکان به صورت رابطه‌ی ۴ خواهد بود:

$$D(\tau)=b_1\tau^2+b_2\tau+b_3 \tag{4}$$

که در آن، b_1، b_2 و b_3 ثابت‌هایی هستند که برای تعیین آنها از نقاط ثابت درون‌یابی استفاده می‌شود شکل ۱ با استفاده از معادله‌های ۵ الی ۷، می‌توان ضریب‌های b_1، b_2 و b_3 را به دست آورد:

$$D(0)=D^{n-1} \tag{5}$$

$$D(\tau^n)=D^n \tag{6}$$

$$D\left(\tau^n+\tau^{n+1}\right)=D^{n+1} \tag{7}$$

با جایگزینی ضریب‌های مذکور در رابطه‌ی ۴، تابع درون‌یاب تغییرمکان به دست می‌آید:

$$D(\tau)=\frac{(\tau^n-\tau)\left(\tau^n+\tau^{n+1}-\tau\right)}{\tau^n\left(\tau^n+\tau^{n+1}\right)}D^{n-1}+\frac{\tau\left(\tau^n+\tau^{n+1}-\tau\right)}{\tau^n\tau^{n+1}}D^n-\frac{\tau(\tau^n-\tau)}{\tau^{n+1}\left(\tau^{n+1}+\tau^n\right)}D^{n+1} \tag{8}$$

در رابطه‌ی بنیادی روش رهایی پویای جنبشی معادله‌ی ۳، شتاب سامانه در محیط دینامیکی مجازی وجود دارد. برای به دست آوردن شتاب، باید از رابطه‌ی ۸ نسبت به عامل زمانی τ مشتق گرفت. دیگر کمیت‌های موجود در رابطه‌ی ۸، شامل τ^n، τ^{n+1}، D^{n-1}، D^n و D^{n+1} ثابت‌اند و مشتق‌های آنها صفر می‌شوند. از این رو، با ۲ بار مشتق‌گیری از رابطه‌ی ۸، شتاب سازه به صورت رابطه‌ی ۹ به دست می‌آید:

$$\ddot{D}^n=\frac{2}{\tau^n\left(\tau^n+\tau^{n+1}\right)}D^{n-1}-\frac{2}{\tau^n\tau^{n+1}}D^n+\frac{2}{\tau^{n+1}\left(\tau^n+\tau^{n+1}\right)}D^{n+1} \tag{9}$$

روشن است که در روش درون‌یابی با ۳ نقطه، شتاب سازه در ۲ تکرار پیاپی ثابت است. چنانچه، نسبت گام زمانی بین دو تکرار پیاپی، α، به صورت رابطه‌ی ۱۰ تعریف شود:

$$\tau^{n+1}=\alpha\tau^n \tag{10}$$

شتاب در گام زمانی n اُم از رابطه‌ی ۱۱ به دست می‌آید:

$$\ddot{D}^n=\frac{2}{(\tau^n)^2}\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}\left(\alpha D^{n-1}-(\alpha+1)D^n+D^{n+1}\right) \tag{11}$$

از سوی دیگر، معادله‌ی بنیادی روش رهایی پویای جنبشی برای درجه‌ی آزادی i، در گام n اُم به صورت رابطه‌ی ۱۲ است:

$$m_{ii}^n\ddot{D}_i^n=p_i^n-f_i^n=r_i^n \tag{12}$$

که در آن f_i^n و r_i^n به ترتیب، نیروی داخلی و نیروی نامیزان درجه‌ی i در تکرار n ام هستند. با جایگذاری شتاب از رابطه‌ی ۱۱ در معادله‌ی ۱۲، تغییرمکان گام n+۱ام بر حسب جابه‌جایی‌های دو مرحله‌ی پیشین (n و n-۱) به دست می آید:

$$D_i^{n+1}=(1+\alpha)D_i^n-\alpha D_i^{n-1}+\frac{(\tau^n)^2}{2\alpha(1+\alpha)}\frac{r_i^n}{m_{ii}} \tag{13}$$

رابطه‌ی ۱۳، معادله‌ی تکراری روش رهایی پویای جنبشی پیشنهادی را نشان می‌دهد. در شیوه‌ی مذکور، کمیت‌های دوگام پیشین به کار می‌روند. حال آن‌که در الگوریتم‌های متداول رهایی پویای جنبشی، کمیت‌ها در میان گام $(n+\frac{1}{2})$ استفاده می‌شوند. با استفاده از رابطه‌ی ۱۳، تکرارهای روش رهایی پویای جنبشی پیشنهادی اجرا می‌شود. در رابطه‌ی ۱۳، کمیت‌های جرم ساختگی و نسبت گام زمانی مجهول هستند. این کمیت‌ها به گونه‌یی تعیین می‌شوند که فرایند رهایی پویای پیشنهادی با کمترین تعداد تکرار هم‌گرا شود. برای انجام این کار، فرایند تحلیل خطا برای تکرارهای رهایی پویای پیشنهادی انجام می‌پذیرد. نخست، شکل نموی رابطه‌ی ۱۳ به صورت رابطه‌ی ۱۴ نوشته می‌شود:

$$dD_i^{n+1}=(1+\alpha)dD_i^n-\alpha dD_i^{n-1}+\frac{(\tau^n)^2}{2\alpha(1+\alpha)}\frac{dr_i^n}{m_{ii}} \tag{14}$$

برای سنجش خطا در تکرارهای رهایی پویا، رابطه‌ی خطی برای نمو تغییرمکان در تکرارهای پیاپی به صورت رابطه‌ی ۱۵ در نظر گرفته می‌شود:

$$dD_i^{n+1}=k\,dD_i^n,\; dD_i^{n-1}=\frac{1}{k}dD_i^n \tag{15}$$

که در آن، کمیت k عامل خطاست، که نرخ تغییرات نمو تغییرمکان را در دو تکرار پیاپی نشان می‌دهد.[1] شرط لازم برای هم‌گرایی تکرارهای روش رهایی پویا این است که عامل خطا بین ۰ و ۱ قرار گیرد. برای افزایش نرخ هم‌گرایی، باید عامل خطا به صفر نزدیک شود. بر این اساس، کمیت‌های جرم، میرایی و گام زمانی در روش رهایی پویا به گونه‌یی تعیین می‌شوند که عامل خطا بین ۰ و ۱ قرار گیرد.[۱ و ۹] از سوی دیگر، با استفاده از تعریف مقدار ویژه می‌توان نمو نیروی نامیزان را به صورت رابطه‌ی ۱۶ نوشت:

$$\frac{(\tau^n)^2dr_i^n}{m_{ii}}=-\frac{(\tau^n)^2df_i^n}{m_{ii}}=\lambda_i dD_i^n \tag{16}$$

که در آن λ_i مقدار ویژه‌ی iاُم سامانه‌ی دینامیکی مجازی است. با جایگذاری رابطه‌های ۱۵ و ۱۶ در معادله‌ی ۱۴، معادله‌ی ۱۷ به دست می‌آید:

$$\left(-k^2+\left(\alpha-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\lambda_i+1\right)k-\alpha\right)dD_i^n=0 \tag{17}$$

در نتیجه، معادله‌ی مشخصه‌ی روش رهایی پویای جنبشی پیشنهادی به صورت رابطه‌ی ۱۸ است:

$$-k^2+\left(\alpha-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\lambda_i+1\right)k-\alpha=0 \tag{18}$$

رابطه‌ی اخیر، معادله‌ی مشخصه‌ی روش رهایی پویا بر اساس درون‌یابی لاگرانژ را نشان می‌دهد، که همانند رابطه‌ی مشخصه‌ی روش رهایی پویای جنبشی است، که در نوشتار علامتیان (۲۰۱۲)،[1] ارائه شده است. بر این اساس، کمیت جرم ساختگی مطابق رابطه‌ی ۱۹ تعیین می‌شود:[1]

$$m_{ii}^n=\frac{(\tau^n)^2}{\lambda_{\max}}\sum_{j=1}^{q}|S_{ij}| \qquad i=1,2,...,q \tag{19}$$

که در آن، λ_{max} بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی سامانه‌ی دینامیکی ۳ است، که پیش‌تر به صورت رابطه‌ی ۲۰ رابطه‌سازی شده است:[1]

$$\lambda_{\max}=\frac{2(1+\sqrt{\alpha})^2}{\alpha(\alpha+1)} \tag{20}$$

برای تعیین مقدار گام زمانی بهینه، معادله‌ی ۱۸ در نظر گرفته می‌شود. در حالت کلی با توجه به مقدار مبین (Δ)، ریشه‌های معادله‌ی مذکور می‌توانند مقادیر مختلط و یا حقیقی اختیار کنند. برای مقدارهای کوچک‌تر از صفر Δ، ریشه‌های معادله به صورت اعداد مختلط هستند، که بیان‌گر رفتار هارمونیک است. این رفتار مطلوب نیست؛ زیرا به تکرارهای بیشتری برای میرا کردن دامنه‌ی نوسان و رسیدن به پاسخ حالت پایدار نیاز خواهد بود. از سوی دیگر، مقدارهای بزرگ‌تر از صفر Δ، نشان‌گر ریشه‌های متمایز حقیقی است و رفتار بیش‌میرا را شبیه‌سازی می‌کند. افزون بر این، دو مقدار حقیقی متمایز برای عامل خطا، سبب یکنواخت نبودن نرخ هم‌گرایی می‌شود و تعداد تکرارهای هم‌گرایی را افزایش می‌دهد. بر این پایه، حالت بهینه هنگامی است که مقدار مبین معادله‌ی ۱۸ برابر صفر باشد. در این حالت، به دلیل برابر بودن ریشه‌ها، نرخ هم‌گرایی یکنواخت است و از دیدگاه دینامیکی، رفتار میرایی بحرانی شبیه‌سازی می‌شود. خاطر نشان می‌سازد، در حالت میرایی بحرانی، در مقایسه با دیگر حالت‌ها، دامنه‌ی نوسان در سریع‌ترین زمان ممکن میرا می‌شود. ایده‌ی اصلی برای تعیین نسبت گام زمانی در روش پیشنهادی، بر پایه‌ی همین اصل استوار است. بنابراین، مقدار بهینه‌ی α را می‌توان با صفر قرار دادن مبین معادله‌ی ۱۸ به صورت رابطه‌ی ۲۱ به دست آورد:

$$\alpha^4 + 2\left(\frac{\lambda_{\min} - 2}{\lambda_{\min}}\right)\alpha^3 + \left(\frac{\lambda_{\min}^2 - 8\lambda_{\min} + 4}{\lambda_{\min}^2}\right)\alpha^2$$
$$-4\left(\frac{\lambda_{\min} + 2}{\lambda_{\min}^2}\right)\alpha + \frac{4}{\lambda_{\min}^2} = 0 \tag{۲۱}$$

بر اساس رابطه‌ی ۱۶، کوچک‌ترین مقدار ویژه‌ی سامانه‌ی دینامیکی مجازی با مجذور کوچک‌ترین بسامد طبیعی آن برابر است. بنابراین، مقدار $\lambda_{\min} = \tau_n^2\left(\frac{s_n}{m_n}\right)_{\min} =$ $\tau_n^2\omega_{\min}^2$ در نظر گرفته شده است، نسبت گام زمانی با تخمین مناسب ω_{min}^2 و حل معادله‌ی ۲۱ به دست می‌آید.

این کار با روش تکرارهای توانی انتقال‌یافته[۱۴] انجام می‌پذیرد،[۲۵] که راه‌کاری ساده و توانمند برای محاسبه‌ی مقدارها و بردارهای ویژه‌ی دستگاه دینامیکی است. الگوریتم مزبور، با انتخاب یک بردار نخستین دلخواه و عملیات ساده‌ی ضرب برداری، تخمین بسیار مناسبی از بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی سامانه را ارائه می‌دهد.[۲۱] با توجه به این‌که از نگره‌ی گرشگورین برای برپایی ماتریس جرم ساختگی استفاده شده است، بزرگ‌ترین مقدار ویژه‌ی سامانه از $\frac{2(1+\sqrt{\alpha})^2}{\alpha(1+\alpha)}$ تجاوز نخواهد کرد. باید دانست که نگره‌ی دایره‌های گرشگورین، شیوه‌ی تقریبی برای تخمین مقدارهای ویژه است. با استفاده از روش مذکور، تخمین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین مقدار ویژه‌ی سامانه‌ی دینامیکی مجازی، به سادگی به دست می‌آید. در ادامه، با برابر قرار دادن عامل انتقال در روش تکرارهای توانی انتقال‌یافته با مقدار بیشینه‌ی بسامد طبیعی سامانه‌ی ساختگی، می‌توان تکرارهای توانی را به هم‌گرایی به‌سوی کمترین مقدار ویژه‌ی سامانه سوق داد.[۲۱] برای این کار، نخست ماتریس جرم ساختگی تجزیه می‌شود:

$$[\mathbf{M}] = [\mathbf{L}]^T[\mathbf{L}] \tag{۲۲}$$

که در آن، $[\mathrm{L}]$ تجزیه‌ی چولسکی ماتریس $[\mathrm{M}]$ است. باید اشاره کرد که در روش رهایی پویا برای حفظ صریح بودن رابطه‌سازی، ماتریس جرم همواره قطری پنداشته می‌شود. از این رو، تجزیه‌ی چولسکی آن به سادگی محاسبه می‌شود و برابر جذر درایه‌های قطری آن است. همچنین، استفاده از تجزیه‌ی چولسکی سبب نگهداری تقارن ماتریس نهایی می‌شود، که کاهش فضای حافظه‌ی مورد نیاز برای ذخیره‌سازی را به دنبال دارد. در ادامه، ماتریس انتقال یافته‌ی $[\mathrm{T}]$، به صورت رابطه‌ی ۲۳ تعریف می‌شود:

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{L}]^{-T}[\mathbf{S}][\mathbf{L}]^{-1} - \sigma[\mathbf{I}] \tag{۲۳}$$

که در آن، σ عامل انتقال است و برابر $\frac{2(1+\sqrt{\alpha})^2}{\alpha(1+\alpha)}$ پنداشته می‌شود. با استفاده از روش تکرارهای توانی و اجرای آن بر روی ماتریس $[\mathrm{T}]$، می‌توان تخمین مناسبی از کمترین مقدار ویژه‌ی سامانه‌ی دینامیکی مجازی را به دست آورد. باید دانست که با افزایش تعداد تکرارهای روش توانی، دقت محاسبه‌ها افزایش می‌یابد و تخمین بهتری از کمترین مقدار ویژه‌ی سامانه‌ی دینامیکی مجازی به دست می‌آید. با وجود این، در روش پیشنهادی فقط یک گام تکرار توانی انجام شده است. دلیل این موضوع، کاهش حجم محاسبات و حفظ سادگی روش است.

۳. الگوریتم رهایی پویا با درون‌یابی لاگرانژ

با توجه به رابطه‌سازی انجام شده بر اساس درون‌یابی لاگرانژ و ترکیب آن با شیوه‌ی توانی انتقال‌یافته، می‌توان الگوریتم نوینی برای روش رهایی پویا پیشنهاد کرد. گام‌های الگوریتم پیشنهادی به این صورت هستند:

۱) در نظر گرفتن شرایط نخستین به صورت:

$$e_R \to 10e^{-4}, e_K \to 10e^{-12}, \tau_n \to 1, \alpha \to 1,$$
$$k \to 0, \{D\}^{-1} \to \{O\}, \{\nu\} \to \{I\}$$

۲) $k \to k+1, n \to 0, \{D\}^n\{D\}^{n-1}$

۳) برپایی ماتریس سختی و محاسبه نیروی نامیزان از رابطه‌ی ۱۲،

۴) تغییر $n \to n+1$

۵) اگر $\|R^n\| \le e_R$ به گام ۱۲ بروید،

۶) ساخت ماتریس جرم ساختگی با استفاده از رابطه‌ی: $m_{ii}^n = (\tau^n)^2 \frac{\alpha(1+\alpha)}{2(1+\sqrt{\alpha})^2}\sum_{j=1}^{q}|S_{ij}|$ ،

۷) درنظرگرفتن $\sigma \to \frac{2(1+\sqrt{\alpha})^2}{\alpha(1+\alpha)}$ و تنظیم $[\mathbf{T}] \to [\mathbf{L}]^{-T}[\mathbf{S}][\mathbf{L}]^{-1} - \sigma[\mathbf{I}]$ که در آن $[\mathrm{L}]$ تجزیه‌ی چولسکی $[\mathrm{M}]$ است:

۱. $\{\mathbf{y}\} \to [\mathbf{T}]\{\mathbf{v}\}, \{\mathbf{y}\} \to \{\mathbf{y}\}/\max(|\mathbf{y}|)$

۲. محاسبه‌ی مقدار $\omega_{\min}^2 \to \frac{\{\mathbf{y}\}^T[\mathbf{S}]\{\mathbf{y}\}}{\{\mathbf{y}\}^T\{\mathbf{y}\}}$ و تنظیم مجدد $\omega_{min}^2 \to \omega_{min+6}^2$ و $\{v\} \to \{y\}$،

۸) حل عددی معادله‌ی ۲۱ و به دست آوردن مقدار α،

۹) تنظیم کردن $\{\mathbf{D}\}^n \to \{\mathbf{D}\}^{n+1}$ و حل معادله‌ی ۱۳،

۱۰) اگر $\left(\{\mathbf{D}\}^{n+1} - \{\mathbf{D}\}^n\right)^T\left(\{\mathbf{D}\}^{n+1} - \{\mathbf{D}\}^n\right) \le e_k$ به گام ۱۲ بروید،

۱۱) تنظیم $\{\mathbf{D}\}^n \to \{\mathbf{D}\}^{n-1}$ و رفتن به گام ۳،

۱۲) چاپ نتایج و رفتن به گام ۲.

مقدار کارمایه‌ی جنبشی سامانه در هر تکرار را می‌توان بدون استفاده‌ی مستقیم از سرعت، به صورت رابطه‌ی ۲۴ محاسبه کرد:

$$KE = \left(\{\mathbf{D}\}^{n+1} - \{\mathbf{D}\}^n\right)^T\left(\{\mathbf{D}\}^{n+1} - \{\mathbf{D}\}^n\right) \tag{۲۴}$$

جدول ۱. شمار تکرارهای هم‌گرایی و زمان تحلیل در خرپای هاو.

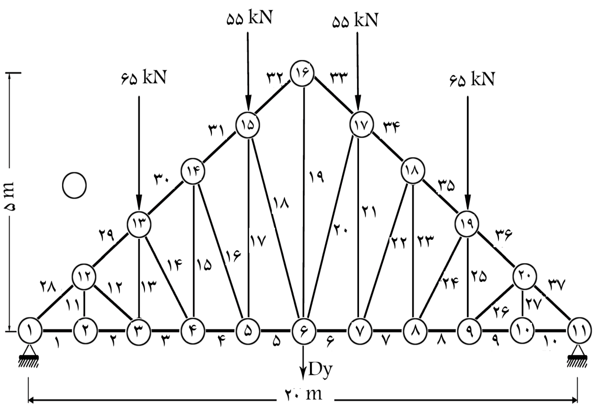
روش	گام بارگذاری										مجموع	زمان
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	تکرارها	(ثانیه)
MVDR	۱۸۰	۱۸۵	۲۰۱	۲۲۱	۲۴۳	۲۷۰	۳۰۲	۳۳۹	۳۸۰	۴۱۷	۲۷۳۸	۳٫۶
OVDR	۱۸۰	۱۸۵	۲۰۲	۲۲۱	۲۴۴	۲۷۰	۳۰۲	۳۳۹	۳۸۰	۴۱۷	۲۷۴۰	۳٫۵۳
ADR	۲۱۸	۱۶۹	۱۷۵	۱۸۳	۱۹۲	۲۰۳	۲۱۶	۲۳۲	۲۴۸	۲۶۴	۲۱۰۰	۳٫۰۸

جدول ۲. شمار تکرارهای هم‌گرایی و زمان تحلیل در گنبد شودلر.

روش	گام بارگذاری										مجموع	زمان
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	تکرارها	(ثانیه)
MVDR	۲۹۳	۲۸۹	۲۹۱	۲۹۵	۲۹۹	۳۰۵	۳۱۲	۳۲۲	۳۳۸	۳۶۶	۳۱۱۰	۳۷٫۳۴
OVDR	۲۹۴	۲۹۰	۲۹۲	۲۹۶	۳۰۰	۳۰۵	۳۱۳	۳۲۳	۳۳۹	۳۶۷	۳۱۱۹	۳۶٫۶۷
ADR	۱۸۶	۱۵۷	۱۴۴	۱۳۷	۱۳۸	۱۴۰	۱۴۸	۱۵۲	۱۵۳	۱۵۴	۱۵۰۹	۲۰٫۰۱

۴. نمونه‌های عددی

در بخش حاضر، برای راستی‌آزمایی و ارزیابی عملکرد روش پیشنهادی، از نمونه‌های عددی مختلف استفاده شده است. برای انجام این کار، یک برنامه‌ی رایانه‌یی در نرم‌افزار متلب[15] نوشته شده است، که با آن، عملکرد روش پیشنهادی (ADR)، با دو شیوه‌ی رهایی پویا لزج متداول (OVDR)[۲۶] و فرایند رهایی پویای لزج بهبودیافته (MVDR)،[۲۶] مقایسه شده است. به سخن دیگر، با حل نمونه‌های عددی، سه روش از نظر زمان تحلیل و تعداد تکرارهای هم‌گرایی بررسی شده‌اند. شایان توجه است همه‌ی نمونه‌های عددی با رفتار غیرخطی هندسی تحلیل شده‌اند.

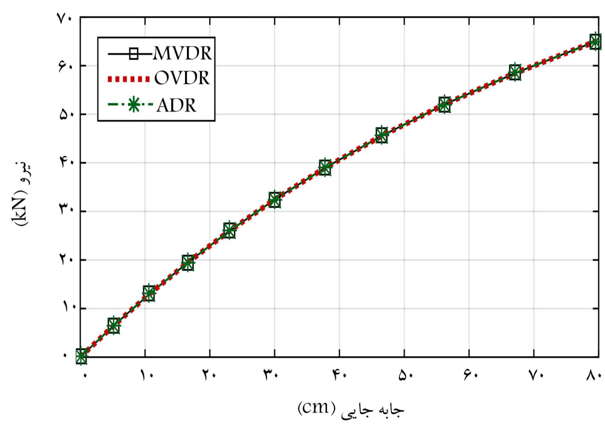


شکل ۲. خرپای هاو.

۱.۴. خرپای هاو

در شکل ۲، خرپای دوبُعدی،[۲۷] با ۳۷ عضو، ۲۰ گره و ۳۶ درجه‌ی آزادی مشاهده می‌شود. در بخش کنونی، ضریب کشسانی و سطح مقطع همه‌ی عضوها به ترتیب، ۴ گیگاپاسکال و ۳×۱۰^{-۳} مترمربع هستند. مسیر ایستایی بار - تغییرمکان برای راستای y از گره‌ی ۶، در شکل ۳ مشاهده می‌شود. بر این اساس، هر سه روش توانسته‌اند پاسخ را با دقت مناسب ارائه دهند. همچنین، شمار تکرارهای هم‌گرایی و زمان هر تحلیل برای روش‌های مختلف در جدول ۱ ارائه شده‌اند.

نتایج جدول ۱ نشان می‌دهد که تعداد تکرارهای هم‌گرایی در روش پیشنهادی (ADR) نسبت به روش‌های MVDR و OVDR به ترتیب ۲۳٫۳۰٪ و ۲۳٫۳۶٪ کاهش یافته است. همچنین، زمان تحلیل در الگوریتم درون‌یابی لاگرانژ (ADR) نسبت به شیوه‌های MVDR و OVDR به ترتیب: ۰٫۵۲ ثانیه و ۰٫۴۵ ثانیه کمتر شده است. از این رو، روش پیشنهادی، عملکرد مناسبی در افزایش نرخ هم‌گرایی فرایند رهایی پویا دارد.



شکل ۳. نمودار بار- تغییرمکان خرپای هاو.

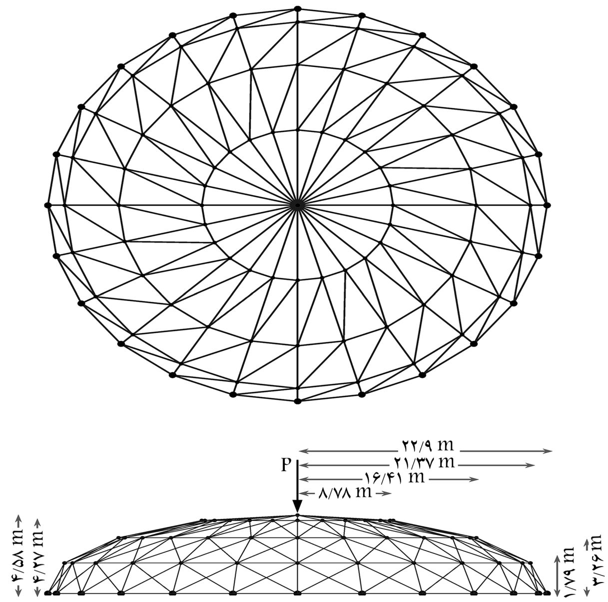
۲.۴. گنبد شودلر

شکل ۴، یک خرپای گنبدی،[۲۸] با ۲۶۴ عضو، ۹۷ گره و ۲۱۹ درجه‌ی آزادی را نشان می‌دهد. مقدارکمیت صلبیت محوری (AE) برابر ۶۴۰ مگانیوتن است. مسیر ایستایی بار - تغییرمکان برای راستای y بالای گنبد، که از تحلیل خرپا با برنامه‌ی رایانه‌یی به دست آمده است، در شکل ۵ مشاهده می‌شود، که مطابق آن سه روش مسیر ایستایی را با دقت مناسبی ارائه داده‌اند. همچنین، تعداد تکرارهای هم‌گرایی و زمان هر تحلیل نیز برای روش‌های مختلف در جدول ۲ ارائه شده است.

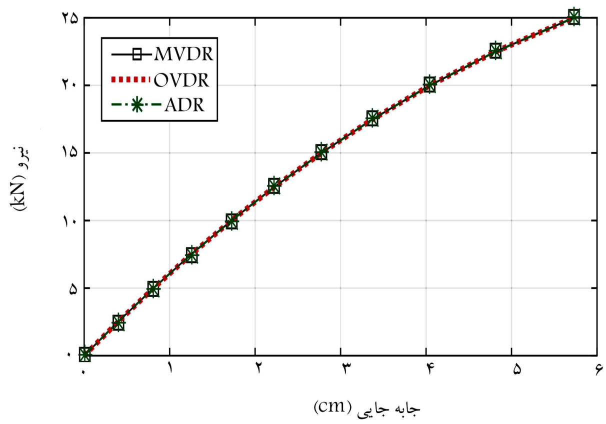
نتایج جدول ۲، نشان می‌دهند که تعداد تکرارهای هم‌گرایی در روش پیشنهادی (ADR) نسبت به روش‌های MVDR و OVDR به ترتیب ۵۱٫۴۸٪ و ۵۱٫۶۲٪ کاهش یافته است. همچنین، زمان تحلیل در الگوریتم درون‌یابی لاگرانژ (ADR) نسبت به شیوه‌های MVDR و OVDR به ترتیب ۱۷٫۳۳ ثانیه و۱۳٫۶۶ ثانیه

جدول ۳. شمار تکرارهای همگرایی و زمان تحلیل در قاب توگل.

روش	گام بارگذاری										مجموع تکرارها	زمان (ثانیه)
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰		
MVDR	۱۶۵۸	۱۵۹۹	۱۷۰۶	۱۸۵۰	۲۰۳۸	۲۲۹۵	۲۶۶۹	۳۲۸۸	۴۶۱۱	۱۳۸۸۲	۳۵۵۹۶	۷۵/۴۱
OVDR	۱۶۵۸	۱۵۹۹	۱۷۰۶	۱۸۴۹	۲۰۳۸	۲۲۹۴	۲۶۶۹	۳۲۸۸	۴۶۱۱	۱۳۸۸۰	۳۵۵۹۲	۷۴/۶۱
ADR	۲۴۲۶	۱۷۷۴	۱۷۰۱	۱۶۸۷	۱۷۱۹	۱۷۹۶	۱۹۳۴	۲۱۷۶	۲۶۸۶	۵۷۲۴	۲۳۶۲۳	۵۴/۸۳



شکل ۴. گنبد شودلر.

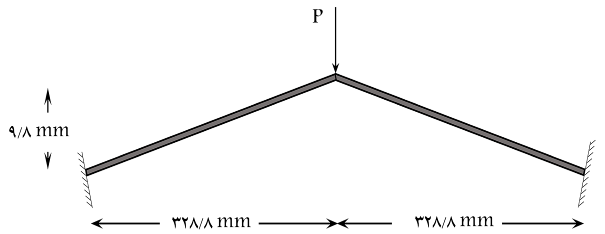


شکل ۵. نمودار بار - تغییرمکان رأس گنبد شودلر.

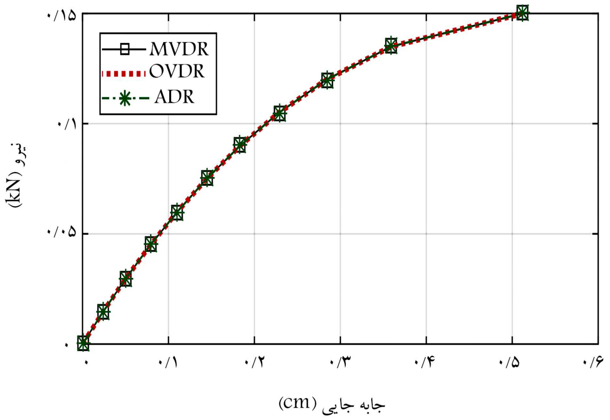
کمتر شده است. بنابراین، روش پیشنهادی عملکردی مناسب در افزایش نرخ همگرایی فرایند رهایی پویا دارد.

۳.۴. قاب تاگل

در شکل ۶، قاب تاگل،[۲۹] با ۲۰ عضو، ۲۱ گره و ۵۷ درجه‌ی آزادی مشاهده می‌شود. در قاب مذکور، ضریب کشسانی، سطح مقطع و ممان اینرسی همه‌ی عضوها به ترتیب: ۷۱ گیگاپاسکال، $۱۱۸/۰۶ \times ۱۰^{-۴}$ مترمربع و $۳۷۴/۶۱ \times ۱۰^{-۱۲}$ هستند. شکل ۷، نشان‌دهنده‌ی مسیر ایستایی بار تغییرمکان بالای قاب در راستای



شکل ۶. قاب تاگل.



شکل ۷. نمودار بار - تغییرمکان قاب توگل.

y است. بنابراین، هر سه روش پاسخ‌هایی با دقت مناسب ارائه داده‌اند. همچنین، شمار تکرارهای همگرایی و زمان هر تحلیل برای سه روش در جدول ۳ درج شده‌اند.

نتایج جدول ۳، نشان‌دهنده‌ی کاهش تعداد تکرارهای همگرایی در روش پیشنهادی (ADR) نسبت به روش‌های MVDR و OVDR به ترتیب: به مقدارهای ۳۳/۶۴٪ و ۳۳/۶۳٪ است. همچنین، زمان تحلیل در الگوریتم درون‌یابی لاگرانژ (ADR) نسبت به شیوه‌های MVDR و OVDR به ترتیب: ۲۰/۵۸ ثانیه و ۱۹/۷۸ ثانیه کاهش داشته است. با توجه به نتایج اخیر، روش پیشنهادی عملکرد مطلوبی در افزایش نرخ همگرایی روش رهایی پویا دارد.

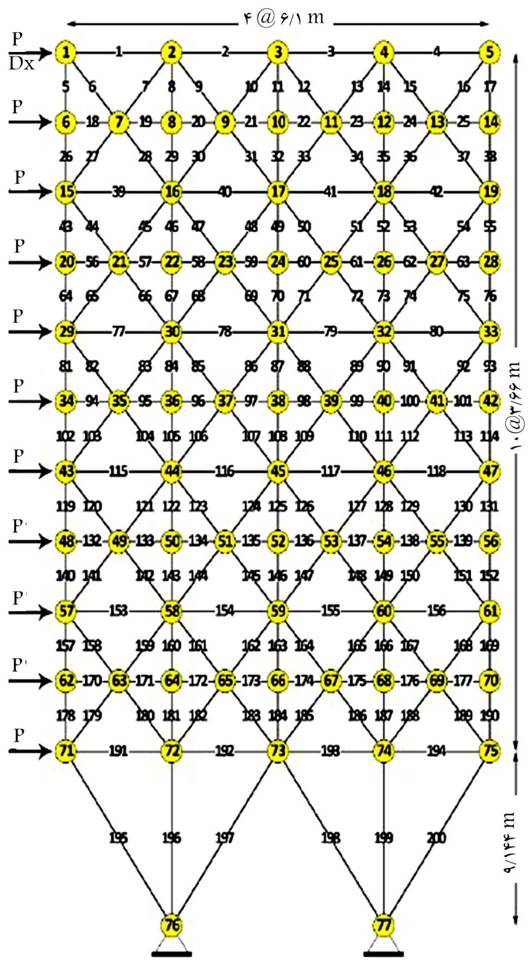
۴.۴. خرپای ۷۷ گره‌یی مسطح

شکل ۸، خرپای ۷۷ گره‌یی مسطح،[۳۰و۳۱] با ۲۰۰ عضو، ۷۷ گره و ۱۵۰ درجه‌ی آزادی را نمایش می‌دهد. مدول کشسانی اعضاء خرپای مذکور ۲۱۰ گیگاپاسکال است. مسیر ایستایی بار - تغییرمکان برای راستای y از گره‌ی ۱، در شکل ۹ نشان داده شده است. بر این اساس، هر سه روش توانسته‌اند پاسخ را با دقتی مناسب ارائه دهند. همچنین، شمار تکرارهای همگرایی و زمان هر تحلیل برای روش‌های مختلف در جدول ۴ ارائه شده‌اند.

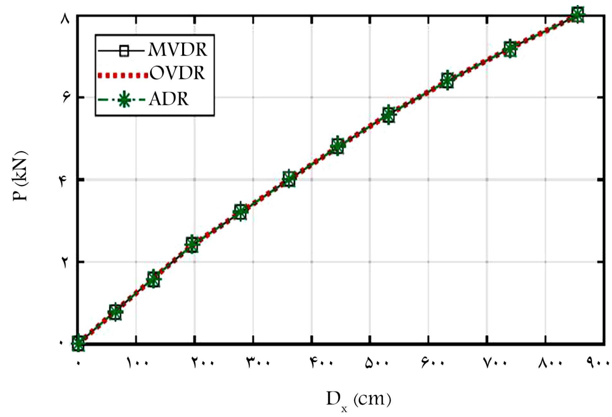
نتایج جدول ۴ نشان می‌دهد که تعداد تکرارهای همگرایی در روش پیشنهادی

جدول ۴. شمار تکرارهای هم‌گرایی و زمان تحلیل در خرپای ۷۷ گره‌یی مسطح.

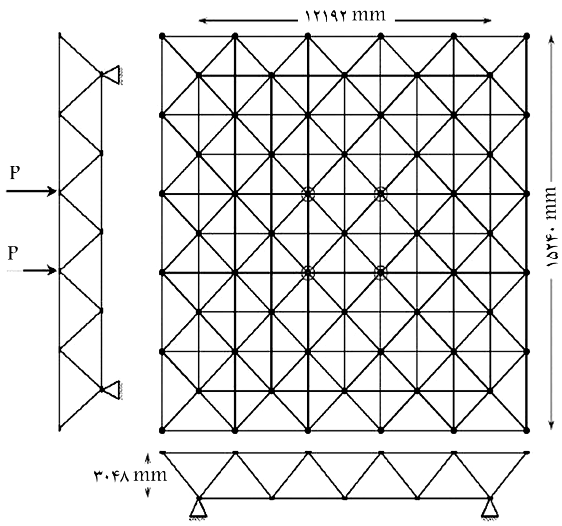
روش	گام بارگذاری										مجموع	زمان
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	تکرارها	(ثانیه)
MVDR	۲۶۲	۲۳۲	۲۳۴	۳۶۴	۳۲۲	۳۱۷	۳۳۲	۳۹۱	۴۴۷	۴۶۵	۳۳۶۶	۲۴/۱۷
OVDR	۲۶۳	۲۳۳	۲۳۴	۳۶۵	۳۲۳	۳۱۸	۳۳۲	۳۹۲	۴۴۷	۴۶۵	۳۳۷۲	۲۳/۴۶
ADR	۲۹۱	۱۸۲	۱۶۸	۲۶۰	۲۰۴	۲۰۰	۲۰۸	۲۴۱	۲۵۸	۲۵۵	۲۲۶۷	۱۹/۵۴



شکل ۸. خرپای ۷۷ گره‌یی مسطح.



شکل ۹. مسیر ایستایی بار - تغییرمکان خرپای ۷۷ گره‌یی مسطح.



شکل ۱۰. شبکه‌ی دو لایه.

(ADR) نسبت به روش‌های MVDR و OVDR به ترتیب: ۳۲/۶۵٪ و ۳۲/۷۷٪ کاهش یافته است. همچنین، زمان تحلیل در الگوریتم درون‌یابی لاگرانژ (ADR) نسبت به شیوه‌های MVDR و OVDR به ترتیب: ۱۹/۱۴ ثانیه و ۱۶/۷۱ ثانیه کمتر شده است. از این رو، روش پیشنهادی عملکرد مناسبی در افزایش نرخ هم‌گرایی فرایند رهایی پویا دارد.

۵.۴. شبکه‌ی دو لایه

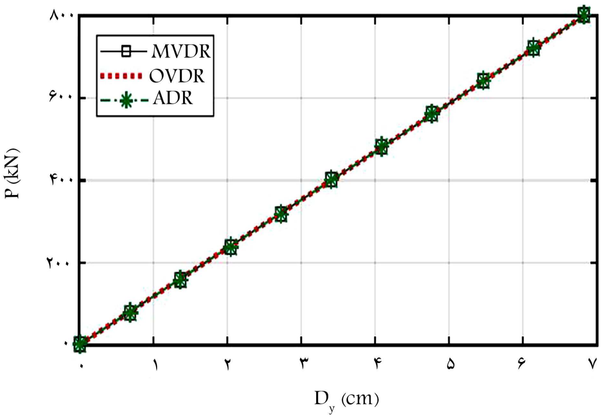
شکل ۱۰، یک شبکه‌ی دو لایه،[۳۲] با ۲۰۰ عضو، ۶۱ گره و ۱۷۱ درجه‌ی آزادی را نشان می‌دهد. مقدار مدول کشسانی ۲۰۶/۸۴۳۰ گیگاپاسکال، سطح مقطع اعضاء قطری و افقی به ترتیب: ۰/۰۰۰۷۷۱ مترمربع و ۰/۰۰۱۱۶۱ مترمربع هستند. مسیر ایستایی بار - تغییرمکان برای راستای y گره‌ی مرکزی، که از تحلیل خرپا با برنامه‌ی رایانه‌یی به دست آمده است، در شکل ۱۱ مشاهده می‌شود، که مطابق آن می‌توان دریافت سه روش مذکور، مسیر ایستایی را با دقت مناسبی ارائه داده‌اند. همچنین، تعداد تکرارهای هم‌گرایی و زمان هر تحلیل نیز برای روش‌های مختلف در جدول ۵ ارائه شده است.

نتایج جدول ۵ نشان می‌دهند تعداد تکرارهای هم‌گرایی در روش پیشنهادی (ADR) نسبت به روش‌های MVDR و OVDR به ترتیب: ۲۴/۱۳٪ و ۲۴/۶۹٪ کاهش یافته است. همچنین، زمان تحلیل در الگوریتم درون‌یابی لاگرانژ (ADR) نسبت به شیوه‌های MVDR و OVDR به ترتیب: ۱۷/۹۳ ثانیه و ۱۴/۲۴ ثانیه کمتر شده است. بنابراین، روش پیشنهادی عملکردی مناسب در افزایش نرخ هم‌گرایی فرایند رهایی پویا دارد.

باید افزود، یکسان بودن نتایج بار - تغییرمکان هر سازه با روش‌های مختلف،

جدول ۵. شمار تکرارهای هم‌گرایی و زمان تحلیل در شبکه‌ی دو لایه.

روش	گام بارگذاری										مجموع تکرارها	زمان (ثانیه)
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰		
MVDR	۸۸	۸۰	۷۹	۷۹	۷۹	۷۹	۷۹	۷۹	۷۹	۷۹	۸۰۰	۷٫۵۱
OVDR	۸۹	۸۱	۸۰	۷۹	۷۹	۷۹	۷۹	۸۰	۸۰	۸۰	۸۰۶	۷٫۱۹
ADR	۵۸	۶۱	۵۹	۵۸	۵۷	۵۷	۵۷	۵۷	۷۱	۷۲	۶۰۷	۶٫۱۷



شکل ۱۱. نمودار بار - تغییرمکان گره مرکزی شبکه‌ی دو لایه.

نشانه‌ی درستی محاسبات و اعتبار آنهاست؛ زیرا پاسخ استاتیکی هر سازه به بار اعمالی مشخص، یگانه است. از این رو، همه‌ی شیوه‌ها توانسته‌اند پاسخ استاتیکی را با دقتی مناسب ارائه دهند. با وجود این، تعداد تکرارهای هم‌گرایی و زمان محاسبات برای دست‌یابی به پاسخ یگانه، در روش‌های مختلف، متفاوت است. در مقایسه با دیگر شیوه‌ها، روش پیشنهادی توانسته است پاسخ استاتیکی را با تعداد تکرار کمتر ارائه دهد. این موضوع سبب کاهش زمان محاسبه‌ها شده است.

۵. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر، رابطه‌سازی رهایی پویای جنبشی با استفاده از درون‌یابی لاگرانژ ارائه شده است. این نگرش پایه‌گذار رابطه‌های نوینی برای تکرارهای رهایی پویا شده است. همچنین، الگوریتم حل جدیدی با کمک روش تکرارهای توانی و ترکیب آن با رابطه‌های درون‌یابی لاگرانژ پیشنهاد شده است. نمونه‌های عددی از نوع تحلیل‌های غیرخطی، برای راستی‌آزمایی روش پیشنهادی و مقایسه‌ی عملکرد آن از نظر تعداد تکرارها و زمان محاسبه‌ها به کار رفته‌اند. بر پایه‌ی نتایج عددی، تعداد تکرارها و زمان تحلیل در روش پیشنهادی ADR نسبت به شیوه‌های متداول MVDR و OVDR کاهش چشمگیری یافته‌اند. بنابراین، استفاده از درون‌یابی لاگرانژ و ترکیب آن با فرایند تکرارهای توانی، عملکرد روش رهایی پویای جنبشی را بهبود می‌بخشد.

پانوشت‌ها

1. Newton–Raphson method
2. viscous DR
3. kinetic DR
4. potential energy
5. kinetic energy
6. restart
7. Frankel
8. Otter
9. form-finding
10. Rombouts
11. Lanczos algorithm
12. overflow
13. Lagrangian interpolation
14. shifted power iteration method
15. MATLAB

منابع (References)

1. Alamatian, J. "A new formulation for fictitious mass of the dynamic relaxation method with kinetic damping", *Computers & Structures*, **90-91**, pp. 42-54 (2012).
2. Frankel, S.P. "Convergence rates of iterative treatments of partial differential equations", *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, **4**(30), pp. 65-75 (1950).
3. Otter, J. "Computations for prestressed concrete reactor pressure vessels using dynamic relaxation", *Nuclear Structural Engineering*, **1**(1), pp. 61-75 (1965).
4. Day, A. "Analysis of plates by dynamic relaxation with special reference to boundary conditions", *In Int. Symp. Use of Elect. Digital Computers in Struct. Engng.*, University of Newcastle-upon-Tyne (1966).
5. Day, A. and Bunce, J. "The analysis of hanging roofs", *Arup Journal*, **3**, pp. 30-31 (1969).
6. Rushton, K. "Dynamic-relaxation solutions of elastic-plate problems", *Journal of Strain Analysis*, **3**(1), pp. 23-32 (1968).
7. Rushton, K. "Buckling of laterally loaded plates having initial curvature", *International Journal of Mechanical Sciences*, **14**(10), pp. 667-680 (1972).
8. Cundall, P. "Explicit finite differnce method in geomechanics", *In Second Int. Conf. Numerical Methods in Geomechanics, Blacksburg*, **1**, pp. 132-150 (1976).

9. Papadrakakis, M. "A method for the automatic evaluation of the dynamic relaxation parameters", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **25**(1), pp. 35-48 (1981).

10. Rezaiee-Pajand, M., Kadkhodayan, M. and Alamatian, J. "Timestep selection for dynamic relaxation method", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, **40**(1), pp. 42-72 (2012).

11. Naicu, D.I. "The use of dynamic relaxation to solve the differential equation describing the shape of the tallest possible building", *In Textiles composites and inflatable structures VII: proceedings of the VII International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures, Barcelona*, Spain, CIMNE, pp. 34-45 (19-21 Oct., 2015).

12. Rezaiee-Pajand, M. and Estiri, H. "A comparison of large deflection analysis of bending plates by dynamic relaxation", *Periodica Polytechnica. Civil Engineering*, **60**(4), p. 619 (2016).

13. Rezaiee-Pajand, M. and Rezaee, H. "Fictitious time step for the kinetic dynamic relaxation method", *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, **21**(8), pp. 631-644 (2014).

14. Namadchi, A.H. and Alamatian, J. "Explicit dynamic analysis using dynamic relaxation method", *Computers & Structures*, **175**, pp. 91-99 (2016).

15. Alamatian, J. and Hosseini-Nejad Goshik, M. "An effcient explicit framework for determining the lowest structural buckling load using dynamic relaxation method", *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, **45**(4), pp. 451-462 (2017).

16. Rezaiee-Pajand, M. and Estiri, H. "Mixing dynamic relaxation method with load factor and displacement increments", *Computers & Structures*, **168**, pp. 78-91 (2016).

17. Rezaiee-Pajand, M. and Sarafrazi, S.R. "Nonlinear dynamic structural analysis using dynamic relaxation with zero damping", *Computers & Structures*, **89**(13-14), pp. 1274-1285 (2011).

18. Liew, A., VanMele, T. and Block, P. "Vectorised graphics processing unit accelerated dynamic relaxation for bar and beam elements", *Structures*, **8**, Elsevier, pp. 111-120 (2016).

19. Rombouts, J., Lombaert, G., Laet, L.D. and et al. "On the equivalence of dynamic relaxation and the newton-raphson method: application to the design and analysis of bending-active structures", *In Proceedings of IASS Annual Symposia, 2017(16), International Association for Shell and Spatial Structures (IASS)*, pp. 1-10 (2017).

20. Ali, N.B.H., Sychterz, A.C. and Smith, I.F. "A dynamic-relaxation formulation for analysis of cable structures with sliding-induced friction", *International Journal of Solids and Structures*, **126**, pp. 240-251 (2017).

21. Namadchi, A.H. and Alamatian, J. "Dynamic relaxation method based on Lanczos algorithm", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **112**(10), pp. 1473-1492 (2017).

22. Rezaiee-Pajand, M. and Mohammadi-Khatami, M. "A fast and accurate dynamic relaxation scheme", *Frontiers of Structural and Civil Engineering*, **13**(1), pp. 176-189 (2019).

23. Jung, S., Kim, T.-Y. and Yoo, W.-S. "Dynamic relaxation using continuous kinetic damping—part I: basic algorithm", *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, **13**(8), p. 081006 (2018).

24. Jung, S., Kim, T.-Y. and Yoo, W.-S. "Adaptive step-size control for dynamic relaxation using continuous kinetic damping", *Mathematical Problems in Engineering*, **28**, pp.1-10 (2018).

25. Meirovitch, L. "Computational methods in structural dynamics", *Springer Science & Business Media* (1980).

26. Rezaiee-Pajand, M. and Alamatian, J. "The dynamic relaxation method using new formulation for fictitious mass and damping", *Structural engineering & mechanics*, **11**(1), p. 109 (2010).

27. Wen, W., Wei, K., Lei, H. and et al. "A novel sub-step composite implicit time integration scheme for structural dynamics", *Computers & Structures*, **182**, pp. 176-186 (2017).

28. Greco, M., Gesualdo, F.A.R., Venturini, W.S. and et al. "Nonlinear positional formulation for space truss analysis", *Finite Elements In Analysis And Design*, **42**(12), pp. 1079-1086 (2006).

29. Wood, R.D. and Zienkiewicz, O. "Geometrically nonlinear finite element analysis of beams, frames, arches and axisymmetric shells", *Computers & Structures*, **7**(6), pp. 725-735 (1977).

30. Namadchi, A.H., Fattahi, F. and Alamatian, J. "Semiexplicit unconditionally stable time integration for dynamic analysis based on composite scheme", *Journal of Engineering Mechanics*, **143**(10), p. 04017119 (2017).

31. Kaveh, A. and Ghazaan, M.I. "Hybridized optimization algorithms for design of trusses with multiple natural frequency constraints", *Advances in Engineering Software*, **79**, pp. 137-147 (2015).

32. Ramalingam, R. and Jayachandran, S.A. "Postbuckling behavior of flexibly connected single layer steel domes", *Journal of Constructional Steel Research*, **114**, pp. 136-145 (2015).