

معادلات تنش در روش اجزای محدود توسعه یافته بر اساس انتگرال گیری عددی نیروهای داخلی ذخیره شده با استفاده از توابع چندجمله‌یی معادل

سید میثم آقا جانزاده (دکتری)

امید کاظمزاده (دانشجوی دکتری)

حسن میرزا بزرگ* (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران

مهندسی عمران شریف، پاییز ۱۴۰۰ (۱۳۰۰)
دوری ۲-۳۷، شماره ۱/۳، ص. ۸۵-۹۸، پژوهشی

در این مطالعه معادلات تنش در روش اجزای محدود توسعه یافته (XFEM) مورد بررسی قرار گرفتند. مؤلفه‌های تنش جدید برای درجات آزادی غنی شده توسعه پیدا کرده و مؤلفه‌های تنش کلاسیک برای درجات آزادی استاندارد اصلاح شدند. تنش‌های اصلاح شده برای درجات آزادی استاندارد دارای مقدار یکسان برای کل دامنه‌ی اجزای ترک خورده بوده در حالی که مؤلفه‌های تنش در هر سمت ترک مقادیری متفاوت دارند. معادلات جدید با استفاده از معادلات نیروهای داخلی ذخیره شده در المان محاسبه شدند. بدین منظور با استفاده از توابع چندجمله‌یی جدید که برای توابع هویساید اصلاح شده توسعه یافت، جداسازی تیغه‌ی جزء ترک خورده حذف شد. صحت فرمول‌های تنش پیشنهادی با استفاده از معیار همگرایی نیرو ارزیابی شد. همچنین، نیروهای داخلی محاسبه شده توسط معادلات تنش پیشنهادی با بارگذاری خارجی در تعادلند. نشان داده شد معادلات پیشنهادی برای درجات آزادی استاندارد با خصوصیات انتشار ترک در درون جسم دارای ترک انطباق بهتری دارند؛ همچنین مؤلفه‌های تنش برای درجات آزادی غنی شده نشان‌دهنده‌ی نیروهای سطحی روی سطوح ترک هستند.

واژگان کلیدی: اجزای محدود توسعه یافته، معادلات تنش، انتگرال گیری عددی، نیروی داخلی ذخیره شده.

agha.janzadehmeisam@gmail.com
o_kazemzadeh@yahoo.com
mirzabozorg@kntu.ac.ir

۱. مقدمه و تاریخچه تحقیقات

با وجود محبوبیت روش کلاسیک اجزای محدود، به منظور مدل‌سازی دقیق ناپیوستگی‌های متحرک، این روش دارای محدودیت‌هایی است زیرا لازم است مش‌های تولیدی در حین حل مسئله اصلاح شوند تا با هندسه‌ی جدید ناپیوستگی‌ها منطبق باشند. در این شرایط روش غالب، مش‌بندی مجدد دامنه‌ی مسئله است. ولی مش‌بندی مجدد مسئله امری سخت و زمان‌بر است، زیرا تعداد درجات آزادی مسئله ممکن است تغییر کند یا تولید مش‌های جدید امری پردردسر باشد.

در میان روش‌های متعدد ارائه شده برای حل این مشکل، روش اجزای محدود توسعه یافته (XFEM)^۱ یکی از قدرتمندترین و محبوب‌ترین روش‌هاست. ایده‌ی اصلی این روش، حل مشکل تجدید المان‌بندی هم‌زمان با گسترش ترک بوده به گونه‌ی که ناپیوستگی‌ها بدون توجه به هندسه‌ی ترک مدل می‌شوند. روش اجزای محدود توسعه یافته، تعمیم روش اجزای محدود کلاسیک است که در آن مش‌بندی فارغ از

در صورت استفاده از روش‌های عددی، همانند روش اجزای محدود توسعه یافته، به منظور اطمینان از نتایج حاصل لازم است نتایج به دست آمده همگرا شوند. معیارهای همگرایی در اغلب مسائل مهندسی را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد: ۱. معیار نیرو^۲؛ ۲. معیار جابه‌جایی^۳ و ۳. معیار تنش^۴.^[۸] در این مطالعه از معیار همگرایی نیرو برای توسعه‌ی تنش‌های جدید در روش اجزای محدود توسعه یافته استفاده شده است. بر مبنای معیار همگرایی نیرو، نیروهای داخلی ذخیره شده^۵ در المان که از انتگرال‌گیری مؤلفه‌های تنش در دامنه‌ی المان به دست می‌آیند باید با بارهای خارجی اعمالی در تعادل باشند. متعاقباً، تنش‌های صحیح محاسبه شده منجر به تعادل بین بارهای خارجی و داخلی می‌شود.

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۹/۸/۲۵، اصلاحیه ۱۳۹۹/۹/۱، پذیرش ۱۳۹۹/۹/۱۷

DOI:10.24200/J30.2020.56960.2872

مؤلفه‌های تنش کلاسیک برای درجات آزادی استاندارد با اضافه کردن ترم‌های جدید اصلاح شده‌اند در حالی که برای درجات آزادی غنی شده، فرمول‌های تنش جدید ارائه شده است. روابط جدید تنش پیشنهادی با بررسی نیروهای ذخیره شده در المان و حذف جداسازی دامنه المان ترک خورده برای انتگرال‌گیری عددی به دست آمده است. بدین منظور، با استفاده از توابع چندجمله‌یی معادل که از بسط روش و نتورا برای توابع پله‌یی اصلاح شده به دست آمده، انتگرال عددی نیروهای ذخیره شده محاسبه شد. به منظور صحت‌سنجی معادلات پیشنهادی برای تنش، تعادل بین نیروهای ذخیره شده در المان و نیروهای خارجی ارزیابی شد. در نهایت، فرمول‌های پیشنهادی تنش و نیروهای ذخیره شده را، که بر اساس توابع چندجمله‌یی توسعه یافته به دست آمده‌اند، برای یک تیر بتنی صحت‌سنجی کردیم.

۲. نیروی داخلی ذخیره شده در روش اجزای محدود کلاسیک

در روش اجزای محدود کلاسیک، نیروهای داخلی ذخیره شده در جسم در حالت دوعبده، با استفاده از معادلات ۱ و ۲ محاسبه می‌شوند: [۱۶-۱۷]

$$f = t \iint_{A^e} B^T \bar{\sigma} dA \quad (۱)$$

$$\bar{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (۲)$$

که در آنها، f نیروی داخلی ذخیره شده در المان، t ضخامت جسم در حال بررسی، B ماتریس مشتق توابع شکل، $\bar{\sigma}$ بردار تنش و A^e دامنه المان است. در معادلات ارائه شده بالاتر «-» (مد) نشان‌دهنده فرم ماتریسی معادلات است. با در نظر گرفتن شرایط تنش صفحه‌یی، نیروهای داخلی ذخیره شده گره‌یی برای درجات آزادی استاندارد و غنی شده با جایگذاری مؤلفه‌های متناظر تنش و ماتریس مشتق توابع شکل در معادله ۱ برابر است با:

$$f_{rx} = t \iint [B_{rx} \quad \circ \quad B_{ry}] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dA \quad (۳)$$

$$= t \iint (B_{rx} \sigma_x + B_{ry} \tau_{xy}) dA$$

$$f_{ry} = t \iint [\circ \quad B_{ry} \quad B_{rx}] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dA \quad (۴)$$

$$= t \iint (B_{ry} \sigma_y + B_{rx} \tau_{xy}) dA$$

$$f_{rx}^a = t \iint [H_r B_{rx} \quad \circ \quad H_r B_{ry}] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dA \quad (۵)$$

$$= t \iint (H_r B_{rx} \sigma_x + H_r B_{ry} \tau_{xy}) dA$$

در صورت استفاده از معیار نیرو در روش اجزای محدود توسعه یافته، میدان جابه‌جایی غنی شده در دامنه المان ترک خورده، ناپیوسته است و نمی‌توان از روش انتگرال‌گیری گاوس^۶ برای حل عددی انتگرال نیروهای داخلی ذخیره شده در المان استفاده کرد. دولبو^۷ روش‌های زیرمثلث^۸ و زیرمربع^۹ را برای حل عددی انتگرال‌های المان‌های دارای ترک در روش اجزای محدود توسعه یافته پیشنهاد داده است. در روش زیرمثلث، در دو سمت ترک زیرمثلث‌هایی ایجاد شده، به گونه‌یی که اضلاع زیرمثلث‌های تولیدی بر دو وجه ترک منطبق‌اند. در روش زیرمربع، المان‌های بریده شده توسط ترک به شبکه‌یی از اشکال چهارگوش تقسیم می‌شود.^[۹]

اگر چه از دو روش بالا می‌توان برای حل عددی انتگرال نیروهای ذخیره شده در المان استفاده کرد، ولی امکان محاسبه‌ی یک تنش واحد برای المان ترک خورده و درجات آزادی اضافه شده وجود ندارد، زیرا انتگرال در دو سمت ترک به صورت جداگانه محاسبه می‌شود. سوآلی که در این قسمت مطرح می‌شود انتخاب روش مناسب برای محاسبه‌ی مؤلفه‌های تنش برای المان ترک خورده و تعریف مؤلفه‌های تنش برای درجات آزادی غنی شده است، به گونه‌یی که استفاده از این تنش‌ها باعث برقراری تعادل بین نیروهای ذخیره شده در المان و بارهای خارجی خواهد شد. در نتیجه، مؤلفه‌های تنش، نشان‌دهنده‌ی شرایط رفتاری کل دامنه‌ی ترک خورده المان است. به منظور حل این مسئله، لازم است انتگرال عددی نیروهای ذخیره شده در المان، بدون تیغه‌ی جداسازی دامنه‌ی ترک خورده حل شود.

در مطالعات مختلف روش‌های عددی متنوعی برای حل انتگرال‌های عددی بدون تیغه‌ی جداسازی دامنه المان‌های ترک خورده پیشنهاد شده است. و نتورا^{۱۰} روش توابع معادل برای انتگرال‌گیری المان‌های ناپیوسته را معرفی کرد. این روش لزوم انتگرال‌گیری جداگانه در دو سمت ناپیوستگی را برطرف و به کارگیری انتگرال عددی گاوس استاندارد را در المان‌های ناپیوسته ممکن می‌سازد. و نتورا در این کار توابع معادل برای المان یک‌بعدی، المان دوعبده سه‌گره‌ی خطی^{۱۱} و چهارگره‌ی خطی و المان سه‌بعدی چهاروجهی خطی^{۱۲} با ناپیوستگی قوی، را با استفاده از تابع غنی‌ساز هوساید^{۱۳} و ناپیوستگی ضعیف ارائه کرد. روش پیشنهادی او برای المان‌های دوعبده چهارگره‌ی با اضلاع روبه‌رو موازی^{۱۴} دقیق بود، اما برای المان‌های دوعبده چهارگره‌ی نامنظم خط‌های قابل توجهی داشت.^[۱۰-۱۱] در ادامه، و نتورا روش پیشنهادی خود را برای المان‌های دارای اعوجاج توسعه داد.^[۱۱]

ناتاراجان^{۱۵} و همکاران با استفاده از نگاشت هم‌دیس شوارتز - کریستوفل^{۱۶} نحوه‌ی محاسبه‌ی انتگرال محیط‌های دارای ناپیوستگی قوی و ضعیف را بدون نیاز به زیرناحیه‌بندی ارائه کردند. نتایج کارهای آنها نشان می‌دهد روش پیشنهادی آنها دقت بالایی دارد.^[۱۳-۱۶] جولایان و همکاران بر اساس روش برازش لحظه‌یی^{۱۷} و با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس قواعد کوادراچر جدیدی برای محیط‌های ناپیوسته‌ی دوعبده و سه‌بعدی دلخواه ارائه کردند که برای هر نوع روش گسسته‌سازی قابل استفاده است.^[۱۴] موسوی و همکاران با به کارگیری بهینه‌سازی عددی، روش کوادراچر جدیدی را برای المان‌های چندضلعی دوعبده دارای ناپیوستگی ارائه کردند. در روش آنها از الگوریتم حذف نقاط^{۱۸} استفاده شده است. روش پیشنهادی آنها به ناحیه‌بندی المان ناپیوسته نیاز نداشته و به دلیل کاهش تعداد نقاط انتگرال‌گیری با حفظ دقت حل، هزینه‌ی محاسبات را کاهش می‌دهد. به عنوان مثال در محاسبه‌ی ماتریس سختی یک نمونه‌ی المان، به منظور کاهش خطا تا مرتبه‌ی 10^{-8} روش جزءبندی به ۱۹۸ نقطه و روش ارائه شده توسط آنها به ۸۵ نقطه نیاز دارد. آنها همچنین کوادراچر جدید را برای شش‌ضلعی‌ها ارائه کردند.^[۱۵]

در این مطالعه، برای المان‌های ترک خورده‌ی مدل شده با استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته، فرمول‌های تنش جدید پیشنهاد شده است. بدین منظور،

$$f_{ry} = t \iint B_{ry} \left\{ \begin{array}{l} d_{\tau} \left(\sum_{i=1}^n B_{ix} u_{ix} + \sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{ix} \right) + \\ d_{\lambda} \left(\sum_{i=1}^n B_{iy} u_{iy} + \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jy} \right) \end{array} \right\} + B_{rx} \left\{ d_{\tau} \left(\sum_{i=1}^n B_{ix} u_{ix} + \sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{ix} + \sum_{i=1}^n B_{iy} u_{iy} + \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jy} \right) \right\} dx dy \quad (8)$$

$$d_{\lambda} = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (9)$$

$$d_{\tau} = \frac{E\nu}{1 - \nu^2} \quad (10)$$

$$d_{\tau} = \frac{E}{1 - \nu^2} \times \frac{1 - \nu}{2} \quad (11)$$

با جایگذاری تنش‌های کلاسیک به جای فرمول‌های معادل‌شان، روابط ۷ و ۸ و چنین بازنویسی می‌شود: از مقایسه‌ی معادلات ۱۲ و ۱۳ با معادلات کلاسیک نیروهای داخلی ذخیره شده در المان، در این معادلات مؤلفه‌های جدیدی ظاهر شده‌اند که متناظر با درجات آزادی غنی شده هستند. بر این اساس، برای یک المان ترک‌خورده در روش اجزای محدود توسعه‌یافته، مؤلفه‌های اضافه شده که از ضرب توابع پایه‌ی در درجات آزادی اضافه شده به دست می‌آیند، به عنوان ترم‌های جدید مؤلفه‌های تنش برای درجات آزادی استاندارد در نظر گرفته می‌شوند. ترم‌های جدید را با σ_x^{hj} ، σ_y^{hj} و τ_{xy}^{hj} نشان می‌دهند (ز نشانگر میزان درجه آزادی است):

$$\sigma_x^{hj} = d_{\lambda} \sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{ix} + d_{\tau} \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jy} \quad (14)$$

$$\sigma_y^{hj} = d_{\tau} \sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{ix} + d_{\lambda} \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jy} \quad (15)$$

$$f_{rx}^a = t \iint \left[\begin{array}{ccc} 0 & H_{\tau} B_{ry} & H_{\tau} B_{rx} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{array} \right\} dA$$

$$= t \iint (H_{\tau} B_{ry} \sigma_y + H_{\tau} B_{rx} \tau_{xy}) dA \quad (6)$$

در معادلات ۳ تا ۶، f_{ry} و f_{rx} نیروهای داخلی ذخیره شده در المان برای درجات آزادی استاندارد، f_{ry}^a و f_{rx}^a نیروهای داخلی ذخیره شده در المان برای درجات آزادی غنی شده و زیرنویس τ نشان‌دهنده‌ی درجه آزادی است. بر اساس معادلات بالا، محاسبه‌ی دو نوع متفاوت از معادلات تنش الزامی است: ۱. معادلات تنش برای درجات آزادی استاندارد و ۲. معادلات تنش برای درجات آزادی غنی شده.

۱.۲. اصلاح فرمول‌های تنش برای درجات آزادی استاندارد

با جایگذاری مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی در مؤلفه‌های تنش معادلات ۳ و ۴، نیروهای داخلی ذخیره شده برای درجات آزادی استاندارد برابر با معادلات ۷ و ۸ است. در معادلات ۷ و ۸، E مدول الاستیسیته‌ی یانگ و ν ضریب پواسون است؛ همچنین مؤلفه‌های دارای میدان جابه‌جایی استاندارد همان تنش‌های کلاسیک در مقاومت مصالح‌اند.

$$f_{rx} = t \iint B_{rx} \left\{ \begin{array}{l} d_{\lambda} \left(\sum_{i=1}^n B_{ix} u_{ix} + \sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{ix} \right) + \\ d_{\tau} \left(\sum_{i=1}^n B_{iy} u_{iy} + \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jy} \right) \end{array} \right\} + B_{ry} \left\{ d_{\tau} \left(\sum_{i=1}^n B_{ix} u_{ix} + \sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{ix} + \sum_{i=1}^n B_{iy} u_{iy} + \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jy} \right) \right\} dx dy \quad (7)$$

$$f_{rx} = t \iint \left[\begin{array}{l} B_{rx} \left(\sigma_x + \left\{ d_{\lambda} \sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{ix} + d_{\tau} \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jy} \right\} \right) + \\ B_{ry} \left(\tau_{xy} + \left\{ d_{\tau} \left(\sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{ix} + \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jy} \right) \right\} \right) \end{array} \right] dx dy \quad (12)$$

$$f_{ry} = t \iint \left[\begin{array}{l} B_{ry} \left(\sigma_y + \left\{ d_{\tau} \sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{ix} + d_{\lambda} \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jy} \right\} \right) + \\ B_{rx} \left(\tau_{xy} + \left\{ d_{\tau} \left(\sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{ix} + \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jy} \right) \right\} \right) \end{array} \right] dx dy \quad (13)$$

تنش در معادلات ۱۹ تا ۲۱ لازم است انتگرال‌های عددی معادلات ۱۷ و ۱۸ بدون جداسازی دامنه المان ترک خورده حل شود. بدین منظور، روش پیشنهادی و تئورا برای انتگرال‌گیری عددی نیروهای داخلی ذخیره شده در المان معادلات ۱۷ و ۱۸ برای حالت توابع پله‌یی اصلاح شده توسعه یافته و روش پیشنهادی برای تعیین ضرایب توابع چندجمله‌یی در بخش ۳ توضیح داده خواهد شد.

۲.۲. معادلات تنش برای درجات آزادی غنی شده

همانند بخش قبلی، در معادلات ۵ و ۶ مؤلفه‌های تنش با معادلات‌شان بر حسب میدان جابه‌جایی جایگزین می‌شود. در این صورت خواهیم داشت (معادلات ۲۲ و ۲۳): بر خلاف نیروهای داخلی ذخیره شده در المان ترک خورده برای درجات آزادی استاندارد، دو دسته‌ی متفاوت از توابع پله‌یی (H_j و H_r) در معادلات ۲۲ و ۲۳ مشاهده می‌شود. دسته‌ی اول از توابع پله‌یی که با زیرنویس «I» (I نشانگر میزان درجه آزادی است که در آن نیروی داخلی ذخیره شده محاسبه می‌شود) مشخص شده‌اند، در درجات آزادی استاندارد و غنی شده ضرب می‌شوند در حالی که دسته دوم از توابع پله‌یی با زیرنویس «J» (J نشانگر میزان درجه آزادی غنی شده است) تنها در درجات آزادی غنی شده ضرب می‌شوند. ترم‌هایی که در تابع H_r ضرب می‌شوند بر اساس موقعیت درجه آزادی «I» نسبت به سطوح ترک مقدار می‌گیرند در حالی که مؤلفه‌هایی که در هر دو تابع پله‌یی H_r و H_j ضرب می‌شوند بر اساس موقعیت هر دو درجه آزادی «I» و «J» مقدار می‌گیرند. در ادامه، بر اساس ایده و روش استفاده شده در محاسبات بخش قبل، مؤلفه‌های متعلق به درجات آزادی استاندارد و غنی شده به صورت جداگانه در نظر گرفته می‌شوند (معادلات ۲۴ و ۲۵): بر اساس معادلات ۲۴ و ۲۵، هم درجات آزادی استاندارد و هم درجات آزادی غنی شده در فرایند محاسبه‌ی

$$\tau_{xy}^{hj} = d_r \left(\sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{iy} + \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jx} \right) \quad (16)$$

در معادلات ۱۴ تا ۱۶، H_j تابع پله‌یی اصلاح شده است و مقدار آن برابر است با $[H(\xi_j) - H(\xi)]$. این معادلات نشانگر تأثیرات ناپوستگی بر تغییرات میدان تنش در درجات آزادی استاندارد پس از آغاز ترک در روش اجزای محدود توسعه یافته هستند. با جایگذاری مؤلفه‌های σ_x^{hj} ، σ_y^{hj} و τ_{xy}^{hj} به جای روابط معادل‌شان، معادلات ۱۲ و ۱۳ چنین بازنویسی می‌شود:

$$f_{rx} = t \iint \left[B_{rx} (\sigma_x + \sigma_x^{hj}) + B_{ry} (\tau_{xy} + \tau_{xy}^{hj}) \right] dx dy \quad (17)$$

$$f_{ry} = t \iint \left[B_{ry} (\sigma_y + \sigma_y^{hj}) + B_{rx} (\tau_{xy} + \tau_{xy}^{hj}) \right] dx dy \quad (18)$$

از مقایسه‌ی معادلات ۱۷ و ۱۸ با معادله‌ی ۱ در می‌یابیم که با عبور ترک از یک المان، پارامتر $\bar{\sigma}$ را می‌توان با پارامتر $\bar{\sigma}^{eq-std}$ جایگزین کرد که مؤلفه‌های آن چنین محاسبه می‌شوند:

$$\sigma_x^{eq-std} = \sigma_x + \sigma_x^{hj} \quad (19)$$

$$\sigma_y^{eq-std} = \sigma_y + \sigma_y^{hj} \quad (20)$$

$$\tau_{xy}^{eq-std} = \tau_{xy} + \tau_{xy}^{hj} \quad (21)$$

معادلات ۱۹ تا ۲۱ نشان‌دهنده‌ی مؤلفه‌های تنش درجات آزادی استاندارد برای یک جسم دارای ترک در روش اجزای محدود توسعه یافته است. چنان‌که اشاره شد، ترم‌های جدید اضافه شده تأثیرات وجود ناپوستگی روی میدان تنش در روش اجزای محدود توسعه یافته را نشان می‌دهد. ولی به منظور محاسبه‌ی معادلات مؤلفه‌های

$$f_{rx}^a = t \iint B_{rx} \left\{ \begin{aligned} & d_r H_r \left(\sum_{i=1}^n B_{ix} u_{ix} + \sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{ix} \right) + \\ & d_r H_r \left(\sum_{i=1}^n B_{iy} u_{iy} + \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jy} \right) \end{aligned} \right\} + B_{ry} \left\{ \begin{aligned} & d_r H_r \left(\sum_{i=1}^n B_{ix} u_{iy} + \sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{iy} + \sum_{i=1}^n B_{iy} u_{ix} + \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jx} \right) \end{aligned} \right\} dx dy \quad (22)$$

$$f_{ry}^a = t \iint B_{ry} \left\{ \begin{aligned} & d_r H_r \left(\sum_{i=1}^n B_{ix} u_{ix} + \sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{ix} \right) + \\ & d_r H_r \left(\sum_{i=1}^n B_{iy} u_{iy} + \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jy} \right) \end{aligned} \right\} + B_{rx} \left\{ \begin{aligned} & d_r H_r \left(\sum_{i=1}^n B_{ix} u_{iy} + \sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{iy} + \sum_{i=1}^n B_{iy} u_{ix} + \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jx} \right) \end{aligned} \right\} dx dy \quad (23)$$

$$f_{rx}^a = t \iint \left[\begin{array}{l} B_{rx} \left(\left\{ d_{\setminus} H_r \sum_{i=1}^n B_{ix} u_{ix} + d_{\top} H_r \sum_{i=1}^n B_{iy} u_{iy} \right\} \right. \\ \left. + \left\{ d_{\setminus} H_r \sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{ix} + d_{\top} H_r \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jy} \right\} \right) \\ B_{ry} \left(\left\{ d_{\top} H_r \sum_{i=1}^n B_{ix} u_{iy} + d_{\setminus} H_r \sum_{i=1}^n B_{iy} u_{ix} \right\} + \right. \\ \left. \left\{ d_{\setminus} H_r \sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{iy} + d_{\top} H_r \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jx} \right\} \right) \end{array} \right] dx dy \quad (24)$$

$$f_{ry}^a = t \iint \left[\begin{array}{l} B_{ry} \left(\left\{ d_{\top} H_r \sum_{i=1}^n B_{ix} u_{ix} + d_{\setminus} H_r \sum_{i=1}^n B_{iy} u_{iy} \right\} + \right. \\ \left. \left\{ d_{\top} H_r \sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{ix} + d_{\setminus} H_r \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jy} \right\} \right) \\ B_{rx} \left(\left\{ d_{\top} H_r \sum_{i=1}^n B_{ix} u_{iy} + d_{\setminus} H_r \sum_{i=1}^n B_{iy} u_{ix} \right\} + \right. \\ \left. \left\{ d_{\top} H_r \sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{iy} + d_{\setminus} H_r \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jx} \right\} \right) \end{array} \right] dx dy \quad (25)$$

با جایگذاری پارامترهای $\sigma_x^{h_r}, \sigma_y^{h_r}, \tau_{xy}^{h_r}$ آن با $\sigma_x^{h_r, h_j}, \sigma_y^{h_r, h_j}$ و $\tau_{xy}^{h_r, h_j}$ در معادلات ۲۴ و ۲۵، این معادلات به صورت معادلات ۳۲ و ۳۳ بازنویسی می‌شود:

$$f_{rx}^a = t \iint \left[B_{rx} \left(\sigma_x^{h_r} + \sigma_x^{h_r, h_j} \right) + B_{ry} \left(\tau_{xy}^{h_r} + \tau_{xy}^{h_r, h_j} \right) \right] dx dy \quad (32)$$

$$f_{ry}^a = t \iint \left[B_{ry} \left(\sigma_y^{h_r} + \sigma_y^{h_r, h_j} \right) + B_{rx} \left(\tau_{xy}^{h_r} + \tau_{xy}^{h_r, h_j} \right) \right] dx dy \quad (33)$$

از مقایسه معادلات ۳۲ و ۳۳ با معادله ۱، پارامتر تنش $\bar{\sigma}$ را می‌توان با پارامتر تنش $\bar{\sigma}^{eq-add}$ جایگزین کرد که مؤلفه‌های آن عبارت‌اند از:

$$\sigma_x^{eq-add} = \sigma_x^{h_r} + \sigma_x^{h_r, h_j} \quad (34)$$

$$\sigma_y^{eq-add} = \sigma_y^{h_r} + \sigma_y^{h_r, h_j} \quad (35)$$

$$\tau_{xy}^{eq-add} = \tau_{xy}^{h_r} + \tau_{xy}^{h_r, h_j} \quad (36)$$

مؤلفه‌های جدید تنش، نشان‌دهنده شرایط تنش برای درجات آزادی غنی شده در روش اجزای محدود توسعه یافته هستند. مقادیر توابع پله‌یی اصلاح شده H_j در مؤلفه‌های آن با $\sigma_x^{h_r, h_j}, \sigma_y^{h_r, h_j}, \tau_{xy}^{h_r, h_j}$ بستگی به مکان درجات آزادی در نظر گرفته شده نسبت به وجوه ترک دارد. در نتیجه مقادیر مؤلفه‌های تنش آن با $\sigma_x^{h_r, h_j}, \sigma_y^{h_r, h_j}$ و $\tau_{xy}^{h_r, h_j}$ در هر سمت ترک متفاوت است. چنین نابرابری در دو سمت ترک می‌تواند نشان‌دهنده موقعیت نیروهای سطحی روی وجوه ترک باشد. همانند حالت قبیل، به منظور محاسبه مؤلفه‌های تنش برای درجات آزادی غنی شده با استفاده از روش

نیروهای داخلی ذخیره شده در المان برای درجات آزادی غنی شده مشارکت دارند. با توجه به تفاوت‌های موجود بین ترم‌های موجود در معادلات ۲۴ و ۲۵ و در نظر گرفتن روابط محاسبه شده در بخش قبیل، مؤلفه‌های تنش برای درجات آزادی غنی شده به دو بخش تقسیم می‌شود. بخش اول منعکس‌کننده تأثیرات درجات آزادی استاندارد است که مؤلفه‌های آن با $\sigma_x^{h_r}, \sigma_y^{h_r}, \tau_{xy}^{h_r}$ نشان داده می‌شود:

$$\sigma_x^{h_r} = d_{\setminus} H_r \sum_{i=1}^n B_{ix} u_{ix} + d_{\top} H_r \sum_{i=1}^n B_{iy} u_{iy} \quad (26)$$

$$\sigma_y^{h_r} = d_{\top} H_r \sum_{i=1}^n B_{ix} u_{ix} + d_{\setminus} H_r \sum_{i=1}^n B_{iy} u_{iy} \quad (27)$$

$$\tau_{xy}^{h_r} = d_{\top} H_r \sum_{i=1}^n B_{ix} u_{iy} + d_{\setminus} H_r \sum_{i=1}^n B_{iy} u_{ix} \quad (28)$$

و بخش دوم نشان‌دهنده تأثیرات درجات آزادی غنی شده بوده که مؤلفه‌های آن با $\sigma_x^{h_r, h_j}, \sigma_y^{h_r, h_j}$ و $\tau_{xy}^{h_r, h_j}$ نشان داده می‌شوند:

$$\sigma_x^{h_r, h_j} = d_{\setminus} H_r \sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{ix} + d_{\top} H_r \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jy} \quad (29)$$

$$\sigma_y^{h_r, h_j} = d_{\top} H_r \sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{ix} + d_{\setminus} H_r \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jy} \quad (30)$$

$$\tau_{xy}^{h_r, h_j} = d_{\top} H_r \sum_{j=1}^h H_j B_{jx} a_{iy} + d_{\setminus} H_r \sum_{j=1}^h H_j B_{jy} a_{jx} \quad (31)$$

پیشنهادی، لازم است معادلات ۳۲ و ۳۳ در کل دامنه‌ی المان ترک خورده به صورت یکپارچه و بدون جداسازی دامنه المان ترک خورده حل شود. در غیر این صورت و با استفاده از روش‌های معمول، از معادلات ۳۲ و ۳۳ در هروجه ترک به صورت جداگانه انتگرال می‌گیرند. در چنین شرایطی به توابع هویساید مقداری اختصاص داده می‌شود.

۳. توسعه‌ی معادلات پیشنهادی و نتورا

در این بخش توابع چندجمله‌یی پیشنهادی توسط و نتورا^[۱۰]، به منظور حل عددی انتگرال‌های روابط ۷، ۸، ۲۲ و ۲۳ بدون نیاز به جداسازی دامنه‌ی المان ترک خورده بسط داده می‌شود. با بسط توابع چندجمله‌یی پیشنهادی توسط و نتورا، می‌توان مؤلفه‌های تنش پیشنهادی σ^{eq-std} و σ^{eq-enr} در بخش قبلی را محاسبه کرد. و نتورا در محاسبات خود از توابع هویساید استاندارد استفاده کرده^[۱۰] در حالی که استفاده از این نوع توابع، باعث ناپیوستگی در میدان جابه‌جایی مسئله خواهد شد. ایجاد ناپیوستگی، دقت حل و صحت معادلات پیشنهادی برای تنش در روش اجزای محدود توسعه یافته را تحت تأثیر قرار می‌دهد. برای حل این مشکل، در این مطالعه از توابع هویساید اصلاح شده در تخمین میدان جابه‌جایی درجات آزادی یک المان دارای ترک استفاده می‌شود. به همین دلیل، لازم است توابع چندجمله‌یی پیشنهادی توسط و نتورا اصلاح شود تا بتوان تیغه‌ی جداسازی دامنه المان ترک خورده در حل عددی انتگرال‌ها را در صورت استفاده از توابع هویساید اصلاح شده حذف کرد.

۱.۳. توسعه‌ی روش و نتورا برای تابع غنی‌کننده $H(x) - H(x_1)$

در صورت استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته به منظور مدل‌سازی ناپیوستگی و استفاده از توابع هویساید اصلاح شده به عنوان توابع غنی‌ساز، ماتریس سختی المان ترک خورده به چهار زیرماتریس تقسیم می‌شود:

$$K^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ua} \\ K_{au} & K_{aa} \end{bmatrix} = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} B_u^T DB_u & H_j B_u^T DB_u \\ H_i B_u^T DB_u & H_i H_j B_u^T DB_u \end{bmatrix} d\Omega \quad (37)$$

در معادله‌ی ۳۷، i نشانگر شماره سطر و j نشانگر شماره ستون ماتریس سختی است. همچنین به منظور خلاصه‌سازی، توابع غنی‌کننده $H(x) - H(x_i)$ و $H(x) - H(x_j)$ با پارامترهای H_i و H_j نشان داده می‌شود. در ماتریس K^e ، زیرماتریس K_{uu} پیوسته است و با استفاده از قاعده‌ی گاوس استاندارد به دقت محاسبه می‌شود. ولی زیرماتریس‌های K_{aa} ، K_{au} و K_{ua} ناپیوسته‌اند و لازم است توابع معادل مناسب برای آنها محاسبه شود. بدین منظور، ماتریس سختی معادله‌ی ۳۷ به طور جداگانه برای هر زیرماتریس بازنویسی می‌شود:

$$K^e = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} K_{uu} & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ H_i K_{uu} & \circ \end{bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \circ & H_j K_{uu} \\ \circ & \circ \end{bmatrix} d\Omega + \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & H_i H_j K_{uu} \end{bmatrix} d\Omega \quad (38)$$

با استفاده از ایده‌ی پیشنهادی و نتورا، لازم است یک تابع چندجمله‌یی جدید \hat{H} محاسبه شود تا تیغه‌ی جداسازی دامنه المان ترک خورده ماتریس سختی المان ترک خورده حذف شود. خلاف روش و نتورا، با توجه به استفاده از توابع پله‌یی اصلاح شده، ضرایب چندجمله‌یی زیرماتریس‌های $H_i B_u^T DB_u$ و $H_j B_u^T DB_u$ با یکدیگر متفاوت‌اند و لازم است توابع چندجمله‌یی جدیدی نیز برای $H_i H_j B_u^T DB_u$ محاسبه شود. همچنین هرکدام از مؤلفه‌های $H_i B_u^T DB_u$ ، $H_j B_u^T DB_u$ و $H_i H_j B_u^T DB_u$ دارای مقادیر متفاوتی در دو سمت ترک هستند. به همین دلیل، تعریف و محاسبه‌ی سه دسته چندجمله‌یی متفاوت ضروری است:

$$\int_{\Omega^e} \hat{H}_{au} K_{uu} d\Omega = \int_{\Omega^-} H_i K_{uu} d\Omega + \int_{\Omega^+} H_j K_{uu} d\Omega \quad (39)$$

$$\int_{\Omega^e} \hat{H}_{ua} K_{uu} d\Omega = \int_{\Omega^-} H_j K_{uu} d\Omega + \int_{\Omega^+} H_i K_{uu} d\Omega \quad (40)$$

$$\int_{\Omega^e} \hat{H}_{aa} K_{uu} d\Omega = \int_{\Omega^-} H_{ij} K_{uu} d\Omega + \int_{\Omega^+} H_{ij} K_{uu} d\Omega \quad (41)$$

در معادلات ۳۹ تا ۴۱، \hat{H}_{aa} ، \hat{H}_{ua} و \hat{H}_{au} توابع چندجمله‌یی هستند که به ترتیب برای زیرماتریس‌های K_{aa} ، K_{ua} و K_{au} محاسبه می‌شود. به دلیل موازی بودن اضلاع در المان‌های مرتبه دوم دوخطی^[۹]، ماتریس ژاکوبین عددی ثابت بوده و در نتیجه هرکدام از مؤلفه‌های زیرماتریس K_{uu} در معادلات ۳۹ تا ۴۱ به صورت یک چندجمله‌یی مرتبه‌ی دو به شکل $c_0 + c_1\xi + c_2\eta + c_3\xi\eta$ با جایگذاری این چندجمله‌یی‌ها در هر کدام از معادلات ۳۹ تا ۴۱، شش معادله‌ی مستقل به دست می‌آید. در نتیجه برای هر کدام از سه تابع چندجمله‌یی معادل، می‌توان یک چندجمله‌یی با شش ثابت در نظر گرفت:

$$\hat{H}_{au} = a_{au} + b_{au}\xi + c_{au}\eta + d_{au}\xi\eta + e_{au}\xi^2 + f_{au}\eta^2 \quad (42)$$

$$\hat{H}_{ua} = a_{ua} + b_{ua}\xi + c_{ua}\eta + d_{ua}\xi\eta + e_{ua}\xi^2 + f_{ua}\eta^2 \quad (43)$$

$$\hat{H}_{aa} = a_{aa} + b_{aa}\xi + c_{aa}\eta + d_{aa}\xi\eta + e_{aa}\xi^2 + f_{aa}\eta^2 \quad (44)$$

۲.۳. ضرایب توابع چندجمله‌یی برای ترک عبوری از دو ضلع مقابل المان، حالت قائم

در این مطالعه، ۶ مسیر ممکن متفاوت برای یک ترک مستقیم در المان ترک خورده در نظر گرفته می‌شود (شکل ۱). در این قسمت، ضرایب توابع چندجمله‌یی مرتبه دو برای ترک عبوری از دو ضلع مقابل المان (حالت قائم) محاسبه شده و ضرایب توابع چندجمله‌یی برای مسیرهای دیگر ترک در پیوست ارائه شده است. در ادامه، ضرایب توابع چندجمله‌یی مرتبه دوم برای زیرماتریس‌های K_{aa} و K_{ua} ، K_{au} برای حالت ترک قائم محاسبه می‌شود.

۱.۲.۳. محاسبه‌ی زیرماتریس K_{au}

به منظور محاسبه‌ی زیرماتریس K_{au} ، تابع چندجمله‌یی مرتبه دوم $c_0 + c_1\xi + c_2\eta + c_3\xi\eta + c_4\xi^2 + c_5\eta^2$ جایگزین شد؛ شش معادله‌ی مستقل به دست آمده عبارت‌اند از:

$$\int_{\Omega^e} \hat{H}_{au} d\Omega = \int_{\Omega^-} H_i d\Omega + \int_{\Omega^+} H_j d\Omega \quad (45)$$

برای وجه مثبت ترک برابر است با:

$$a_{au}^+ = \frac{1}{32} \left(5(\xi_1 + \xi_2)^2 + 5(\xi_1 + \xi_2)(\xi_1 - \xi_2)^2 - 36\xi_1 - 36\xi_2 - 32 \right) \quad (57)$$

$$b_{au}^+ = \frac{1}{8} \left(12 - 3(\xi_1 + \xi_2)^2 - (\xi_1 - \xi_2)^2 \right) \quad (58)$$

$$c_{au}^+ = \frac{1}{4} (\xi_1 - \xi_2) \quad (59)$$

$$d_{au}^+ = \frac{3}{4} (\xi_1^2 - \xi_2^2) \quad (60)$$

$$e_{au}^+ = \frac{1}{32} \quad (61)$$

$$f_{au}^+ = 0 \quad (62)$$

در معادلات ۵۷ تا ۶۲، ξ_1 و ξ_2 مؤلفه‌های افقی نقاط P_1 و P_2 شکل ۱ - الف هستند. علامت مثبت «+» نیز نشانگر وجه مثبت ترک است.

۲.۲.۳. محاسبه‌ی زیرماتریس K_{ua}

به عنوان راه جایگزین و ساده‌تر، به جای استفاده از روش بخش قبل، زیرماتریس K_{ua} با استفاده از مؤلفه‌های زیرماتریس K_{au} محاسبه می‌شود. زیرماتریس K_{ua} ترانزپوز K_{au} است. در نتیجه، ضرایب محاسبه شده برای i امین سطر از زیرماتریس K_{ua} برابر است با ضرایب چندجمله‌یی برای i امین ستون از زیرماتریس K_{au} است.

۳.۲.۳. محاسبه‌ی زیرماتریس K_{aa}

اگر مؤلفه‌های سطر i ام و ستون j ام از زیرماتریس K_{aa} به دو وجه متفاوت ترک تعلق داشته باشند، مقادیر آنها برابر با صفر است. سایر مؤلفه‌های غیرصفر زیرماتریس K_{aa} نیز بر اساس مؤلفه‌های زیرماتریس K_{au} محاسبه می‌شود. بدین منظور مؤلفه‌های سطر i ام و ستون j ام از زیرماتریس K_{aa} (که درجات آزادی i و j در وجه یکسانی از ترک قرار دارند) از ضرب ضرایب محاسبه شده برای سطر i ام زیرماتریس K_{au} در مقادیر $[H(\xi_j) - H(\xi_i)]$ به دست می‌آید:

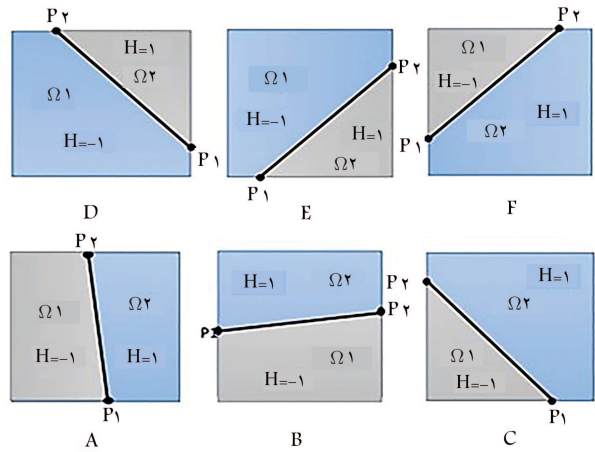
$$\hat{H}_{aa}^- = \hat{H}_{au}^- \times (2) \quad (12)$$

$$\hat{H}_{aa}^+ = \hat{H}_{au}^+ \times (-2) \quad (13)$$

در معادلات فوق، \hat{H}_{aa}^- و \hat{H}_{aa}^+ چندجمله‌یی‌های محاسبه شده برای مؤلفه‌های غیرصفر زیرماتریس K_{aa} هستند که بر حسب مؤلفه‌های زیرماتریس K_{au} محاسبه می‌شود.

۳.۳. انتگرال‌گیری عددی از نیروی داخلی ذخیره شده در المان

در این مطالعه، لازم است برای استفاده از معادلات تنش پیشنهادی، نیروهای داخلی ذخیره شده در المان با استفاده از حل عدد انتگرال‌های متناظرشان به صورت یکپارچه و بدون تیغه‌ی جداسازی دامنه المان ترک حل شود. چنان که مشاهده می‌شود در بخش‌های قبلی، ضرایب چندجمله‌یی برای ماتریس سختی محاسبه شده است. بر اساس فرضیات و نتور (ماتریس ژاکوبین ثابت) مؤلفه‌های ماتریس $B^T DB$ توابع چندجمله‌یی از مرتبه‌ی دوم بوده و مؤلفه‌های $B^T \sigma$ را نیز می‌توان بر حسب توابع چندجمله‌یی مرتبه دوم بیان کرد. در نتیجه می‌توان ضرایب توابع چندجمله‌یی معادل



شکل ۱. شش حالت ترک در نظر گرفته در مختصات دو بعدی.

$$\int_{\Omega^e} \hat{H}_{au} \xi d\Omega = \int_{\Omega^-} H_i \xi d\Omega + \int_{\Omega^+} H_i \xi d\Omega \quad (46)$$

$$\int_{\Omega^e} \hat{H}_{au} \eta d\Omega = \int_{\Omega^-} H_i \eta d\Omega + \int_{\Omega^+} H_i \eta d\Omega \quad (47)$$

$$\int_{\Omega^e} \hat{H}_{au} \xi \eta d\Omega = \int_{\Omega^-} H_i \xi \eta d\Omega + \int_{\Omega^+} H_i \xi \eta d\Omega \quad (48)$$

$$\int_{\Omega^e} \hat{H}_{au} \xi^2 d\Omega = \int_{\Omega^-} H_i \xi^2 d\Omega + \int_{\Omega^+} H_i \xi^2 d\Omega \quad (49)$$

$$\int_{\Omega^e} \hat{H}_{au} \eta^2 d\Omega = \int_{\Omega^-} H_i \eta^2 d\Omega + \int_{\Omega^+} H_i \eta^2 d\Omega \quad (50)$$

که در آنها، برای هر وجه از ترک در المان ترک خورده (وجه مثبت و منفی در شکل ۱)، ضرایب تابع \hat{H}_{au} متفاوت است. به همین دلیل، لازم است معادلات خطی ۴۵ تا ۵۰ برای هر وجه از ترک به صورت جداگانه محاسبه شود. بر این اساس، ضرایب چندجمله‌یی \hat{H}_{au} برای i امین سطر (متعلق به وجه منفی ترک است) از ماتریس سختی برابر است با:

$$a_{au}^- = \frac{1}{32} \left(5(\xi_1 + \xi_2)^2 + 5(\xi_1 + \xi_2)(\xi_1 - \xi_2)^2 - 36\xi_1 - 36\xi_2 + 32 \right) \quad (51)$$

$$b_{au}^- = \frac{1}{8} \left(12 - 3(\xi_1 + \xi_2)^2 - (\xi_1 - \xi_2)^2 \right) \quad (52)$$

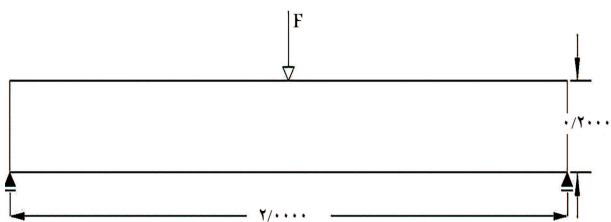
$$c_{au}^- = \frac{1}{4} (\xi_1 - \xi_2) \quad (53)$$

$$d_{au}^- = \frac{3}{4} (\xi_1^2 - \xi_2^2) \quad (54)$$

$$e_{au}^- = \frac{1}{32} \quad (55)$$

$$f_{au}^- = 0 \quad (56)$$

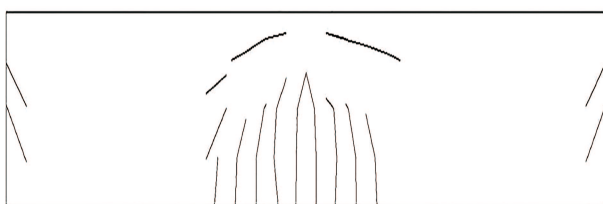
در معادلات ۵۱ تا ۵۶، ξ_1 و ξ_2 مؤلفه‌های افقی نقاط P_1 و P_2 مؤلفه‌های شکل ۱ - الف هستند. علامت منفی «-» نشانگر وجه منفی ترک است. همچنین برای i امین سطر (متعلق به وجه مثبت ترک است) از زیرماتریس K_{au} ، ضرایب چندجمله‌یی



شکل ۲. خصوصیات هندسی تیر در نظر گرفته شده توسط رتز و همکاران [۱۸].

91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

شکل ۳. مش بندی و شماره المان های اختصاص داده شده به تیر بتنی.



شکل ۴. پروفیل نهایی ترک در تیر در گام بارگذاری ۱۹۲.

در المان های ایزوپارامتریک ۴ گره بی استفاده شده است. آنالیزها به صورت تحلیل استاتیکی با کنترل مستقیم بار بوده و در هر گام بارگذاری، مقدار 5000 نیوتن نیرو بر تیر اعمال می شود. مدل اجزای محدود و ترتیب شماره گذاری المان ها در شکل ۳ نشان داده شده است.

تحت بارگذاری اعمالی، ترک ها از قسمت میانی دهانه تیر (المان ها ۱۵ و ۱۶ در شکل ۳) آغاز شده و به سمت بالا توسعه می یابند. در انتهای آنالیز، ترک ها در کناره های تیر گسترش می یابند. اولین ترک در گام ۲۷ در تیر ایجاد شده و در گام ۱۹۲، تیر توانایی تحمل بار خود را از دست می دهد (شکل ۴).

در شکل ۵ مولفه X نیروهای داخلی ذخیره شده برای درجه آزادی استاندارد گره ۱۶ که بر روی محور میانی تیر قرار دارد نشان داده شده است. گره ۱۶ گره مشترک بین المان ها ۱۵ و ۱۶ می باشد. در محاسبه نیروهای ذخیره شده از معادلات تنش پیشنهادی و روش توسعه یافته در این مطالعه استفاده شده است. چنان که مشاهده می شود هیچ گونه مشکل همگرایی مشاهده در پاسخ ها وجود ندارد. چنین شرایطی نشان دهنده صحت فرمول های پیشنهادی برای مؤلفه های تنش است. چنان که در شکل ۵ مشاهده می شود، قبل از شروع ترک، مؤلفه X نیروهای ذخیره شده در المان افزایش می یابد. همزمان با آغاز ترک، نیروهای ذخیره شده در المان کاهش می یابد. در ادامه و با افزایش بارهای وارده، نیروهای ذخیره شده در المان مجدداً افزایش می یابد ولی با شیبی کمتر. می توان نتیجه گرفت تغییرات شیب نیروهای ذخیره شده در المان نشان دهنده توانایی جسم در تحمل بارهای وارده است. هرچه روند تغییرات شیب نمودار تندتر باشد، توانایی تحمل بارهای وارده توسط جسم بیشتر بوده و آسیب کمتری به آن وارد شده است. پس از کاهش اولیه در نمودار تغییرات ناگهانی در نیروهای ذخیره شده در المان مشاهده می شود. این تغییرات ناگهانی به واسطه ترک خوردگی در المان های کناری است. با ترک خوردن المان های کناری،

را با استفاده از شش معادله به منظور حل عددی انتگرال نیروهای داخلی ذخیره شده بدون تیغه بندی به دست آورد. همچنین، ضرایب چندجمله ای های معادل بر مبنای مقادیر توابع پله ای اصلاح شده در هر سمت ترک و مستقل از مقادیر ماتریس B^TDB محاسبه شده است. لذا، توابع چندجمله ای که در بخش قبل برای محاسبه ی ماتریس سختی به دست آمد را، می توان به منظور حل عددی معادلات انتگرالی نیروی داخلی ذخیره شده در المان استفاده کرد.

۴. همگرایی آنالیز

به منظور اطمینان از صحت نتایج به دست آمده، لازم است معیار همگرایی در نظر گرفته شده ارضا شود. در این مطالعه، از معیار همگرایی نیرو استفاده شده است. بدین منظور، در هر تکرار k ، مقدار نیروی غیرمتعاد 21 برای هر درجه آزادی مطابق رابطه ی ۶۵ محاسبه می شود:

$$\Delta f_{i,k} = f_i^{ext} - f_{i,k}^{res} \quad (14)$$

که در آن، k تعداد تکرارهای انجام شده در هر گام بارگذاری، i شماره گام بارگذاری، $\Delta f_{i,k}$ اختلاف بین نیروهای ذخیره شده و بارگذاری خارجی، f_i^{ext} بارخارجی اعمالی و $f_{i,k}^{res}$ نیروی ذخیره محاسبه شده هستند. بیشترین مقدار نیروی غیرمتعاد در میان تمام درجات آزادی تعیین شده و مقدار باقیمانده ی نرمال شده f_{norm}^{22} چنین تعریف می شود: [۱۷]

$$f_{norm} = \frac{\max |\Delta f_{i,k}|}{\max |f_{i,k}^{res}|} \quad (15)$$

که در آن، $\max |\Delta f_{i,k}|$ بیشترین نیروی غیرمتعاد محاسبه شده در بین تمام درجات آزادی استاندارد و غنی شده و $\max |f_{i,k}^{res}|$ بیشترین نیروی ذخیره شده در بین تمام درجات آزادی استاندارد و اضافه شده است. اگر f_{norm} کمتر از تئورانس همگرایی باشد یا تکرار در هر گام بارگذاری از یک مقدار از قبل تعیین شده بیشتر باشد، آنالیز وارد گام بعدی بارگذاری می شود. در این مطالعه، تئورانس همگرایی 0.01 در نظر گرفته شد و بیشترین حد مجاز تکرار در هر گام بارگذاری 150 تعیین شد.

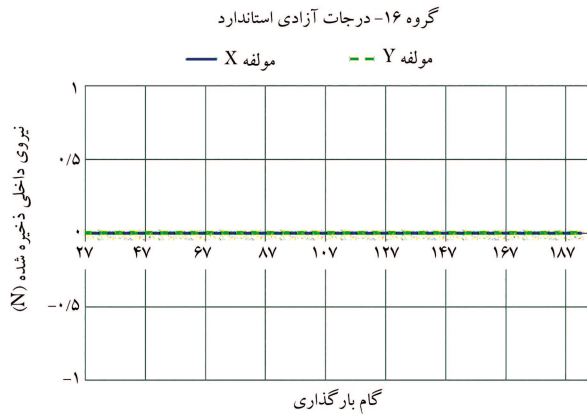
۵. نتایج عددی

به منظور صحت سنجی فرمول های پیشنهادی برای تنش و توابع چندجمله ای توسعه یافته برای محاسبه ی عددی انتگرال نیروی داخلی ذخیره شده در المان، یک تیر بتنی با ابعاد نشان داده شده در شکل ۲ در نظر گرفته شد. هندسه و خصوصیات تیر مورد نظر، منطبق با تیر بتنی مدل شده توسط رتز و همکاران [۱۸] است. در جدول ۱ خصوصیات بتن مورد استفاده نشان داده شده است. مدل اجزای محدود شامل 120 المان ایزوپارامتریک و 150 گره است.

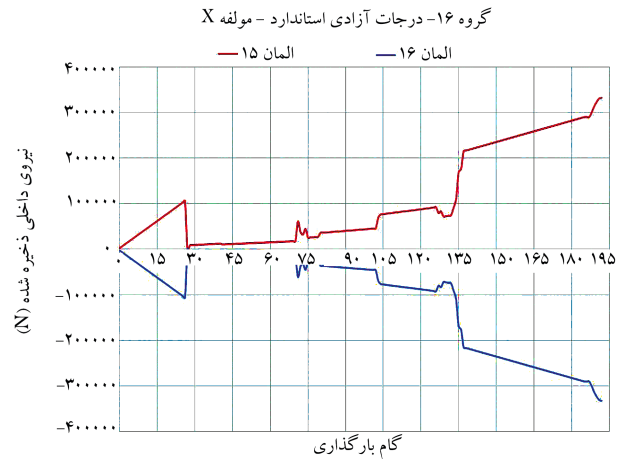
در صورت استفاده از توابع چندجمله ای توسعه یافته، مرتبه ی چندجمله ای ها تغییر کرده و به همین دلیل از سه نقطه ی گاوس در هر جهت، برای حل عددی انتگرال

جدول ۱. اسامی مقاطع اعضای تخصیص یافته سازه مورد بررسی.

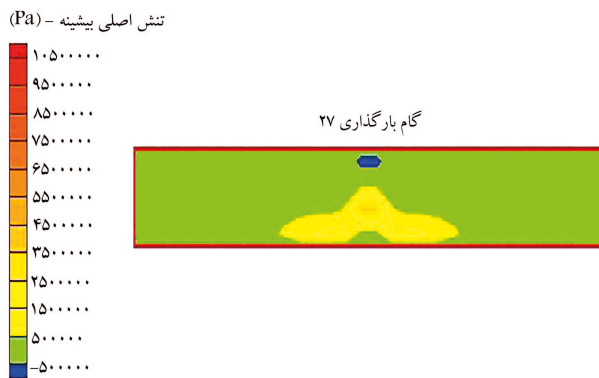
مقاومت کششی	وزن مخصوص	مدول یانگ	ضریب پواسون
$3/3 MPa$	$23520 N/M^3$	$30 GPa$	0.2



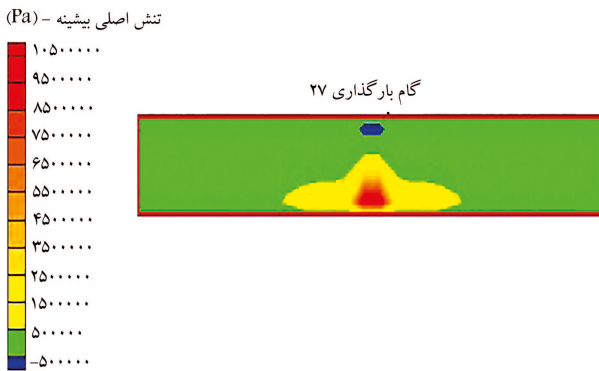
شکل ۷. برآیند نیروهای داخلی محاسبه شده در گره ۱۶ بر اساس $\bar{\sigma}^{eq}$ برای درجات آزادی اضافه شده.



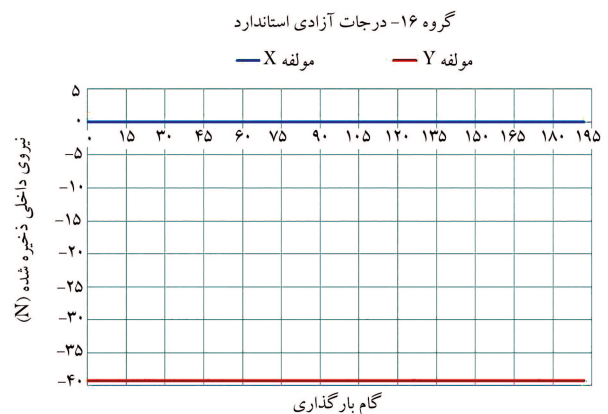
شکل ۵. مؤلفه‌ی X از نیروی ذخیره شده در گره ۱۶ بر اساس $\bar{\sigma}^{eq-std}$.



شکل ۸. کانتور تنش اصلی بیشینه محاسبه شده با $\bar{\sigma}^{eq-std}$ ، گام بارگذاری ۲۷.



شکل ۹. کانتور تنش اصلی بیشینه محاسبه شده با $\bar{\sigma}$ ، گام بارگذاری ۲۷.



شکل ۶. برآیند نیروهای داخلی محاسبه شده در گره ۱۶ بر اساس $\bar{\sigma}^{eq-std}$ برای درجات آزادی استاندارد.

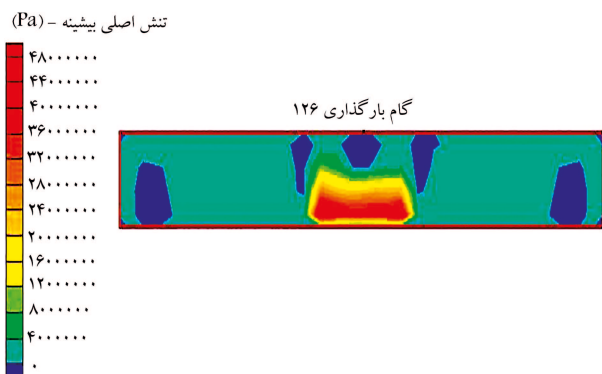
توانایی آنها برای تحمل بارهای وارده کاهش می‌یابد و در نتیجه المان‌های مجاور باید این کاهش باربری را جبران کنند.

نیروهای داخلی ذخیره شده محاسبه شده بر اساس فرمول‌های پیشنهادی برای درجات آزادی اضافه شده و غنی شده باید با بارگذاری خارجی وارده در تعادل باشند. چنان که پیشتر اشاره شد، چنین شرایطی با استفاده از معیار همگرایی نیرو بررسی می‌شود. در شکل‌های ۶ و ۷، نیروهای داخلی ذخیره شده در هر المان بر اساس روابط پیشنهادی محاسبه شدند. چنان که مشاهده می‌شود، نیروهای داخلی ذخیره شده با بارگذاری خارجی در تعادل هستند. باید به این نکته توجه داشت که مؤلفه‌ی نیرو در جهت Y برای گره ۱۶ نشان‌دهنده‌ی وزن المان است.

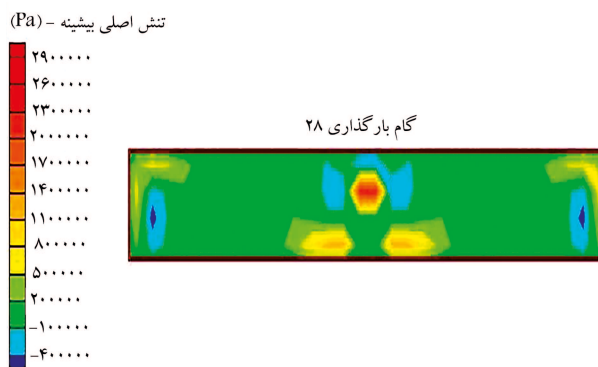
در ادامه، کانتورهای تنش پیشنهادی ($\bar{\sigma}^{eq-std}$) تنش کلاسیک ($\bar{\sigma}$) و در آغاز رشد ترک در تیر (گام بارگذاری ۲۷) در شکل‌های ۸ و ۹ مقایسه شده است. چنان که مشاهده می‌شود، در صورت استفاده از تنش کلاسیک ($\bar{\sigma}$) (شکل ۹)، تنش‌های اصلی بیشینه از مقاومت کششی جسم در ناحیه‌ی ترک خورده بیشتر است. ولی انتظار می‌رود با توسعه‌ی ترک در جسم، انرژی ذخیره شده در آن آزاد شود و در نتیجه مقادیر تنش ناحیه‌ی ترک خورده کاهش یابد. چنین الگوریتم کاهش در شکل ۸ مشاهده می‌شود. در شکل ۸، کانتورهای تنش اصلی بیشینه با استفاده از معادلات پیشنهادی محاسبه شده‌اند. بر این اساس، با انتشار ترک، کانتورهای تنش در ناحیه‌ی ترک خورده کاهش پیدا می‌کند. همچنین، نواحی با تنش بالا در نوک

ترک، مستعد ترک در گام‌های بعدی بارگذاری هستند. چنین شرایطی را می‌توان در گام‌های بعدی بارگذاری شکل‌های ۱۰ تا ۱۲ مشاهده کرد. در این اشکال تنش‌های بیشینه با استفاده از معادلات پیشنهادی برای $\bar{\sigma}^{eq-std}$ محاسبه شده‌اند.

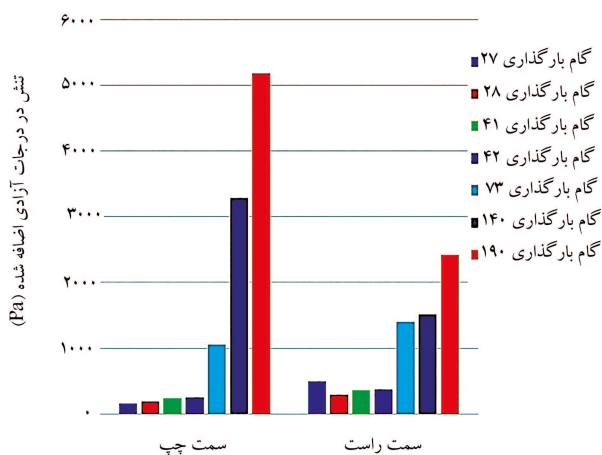
در شکل ۱۲، نواحی با تنش بالا بدون هیچ گونه ترک خوردگی در کناره‌های تیر مشاهده می‌شود. این نواحی با تنش بالا کاندیدای ترک خوردگی در گام بعدی بارگذاری هستند. همچنین، با توسعه‌ی ترک، از شدت تنش‌ها در نواحی ترک خورده کاسته می‌شود. چنین توزیع تنشی می‌تواند تأییدی باشد بر صحت فرمول‌بندی توسعه یافته در این مطالعه، که برای محاسبه‌ی تنش در ناحیه‌ی ترک خورده در روش اجزای محدود توسعه یافته^{۲۳} پیشنهاد شده است. در شکل ۱۳ کانتور تنش اصلی بیشینه



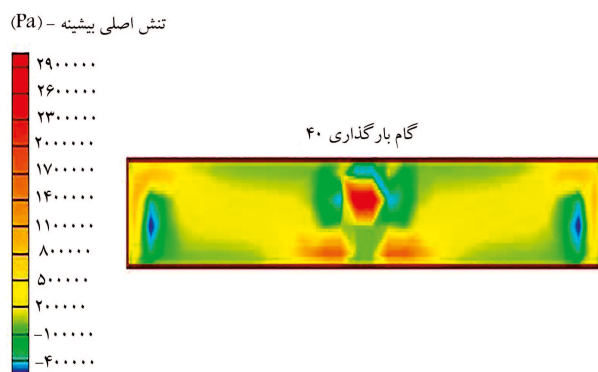
شکل ۱۳. کانتور تنش اصلی بیشینه، محاسبه شده توسط $\bar{\sigma}$ ، گام بارگذاری ۱۲۶.



شکل ۱۰. کانتور تنش اصلی بیشینه، محاسبه شده توسط $\bar{\sigma}^{eq-std}$ ، گام بارگذاری ۲۸.



شکل ۱۴. تنش اصلی بیشینه، در المان شماره ۱۵، بر اساس $\bar{\sigma}^{eq-ent}$ ، در گام‌های بارگذاری متفاوت.



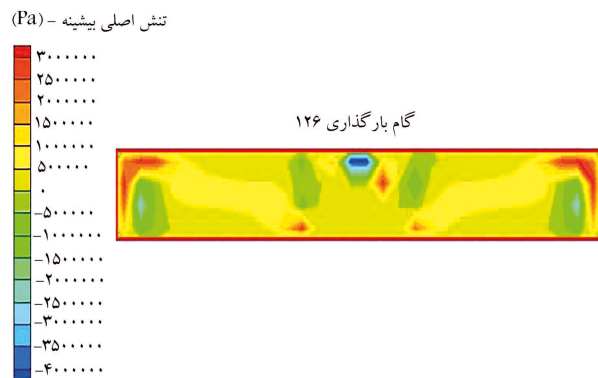
شکل ۱۱. کانتور تنش اصلی بیشینه، محاسبه شده توسط $\bar{\sigma}^{eq-std}$ ، گام بارگذاری ۴۰.

ترک دارای مقادیر متفاوتی هستند. با توجه به آن که جابه‌جایی بازشدگی ترک برابر با $u^+ - u^- = 2\sqrt{\lambda} j(x, y) \bar{a} z$ نشان‌دهنده نیروهای موجود بر روی سطوح ترک است. ولی تنش $\bar{\sigma}^{eq-std}$ نشان‌دهنده وضعیت جسم است.

۶. نتیجه‌گیری

بررسی صحت مؤلفه‌های تنش در درون جسم دارای ترک، با استفاده از روش اجزای محدود توسعه‌یافته هدف اصلی این مطالعه است. با در نظر گرفتن نیروهای داخلی ذخیره شده در المان، مؤلفه‌های تنش برای درجات آزادی استاندارد اصلاح شده و برای درجات آزادی غنی شده، معادلات جدید تنش ارائه شده است. صحت روابط ارائه شده با استفاده از معیار همگرایی نیرو بررسی شده است. نشان داده شد با استفاده از فرمولاسیون جدید پیشنهادی برای مؤلفه‌های تنش، تعادل بین بارگذاری خارجی و نیروهای ذخیره شده در المان برقرار بوده و مشکل همگرایی بین نیروهای داخلی و خارجی مشاهده نشد.

به منظور تعیین فرمولاسیون پیشنهادی، لازم است معادلات انتگرالی نیروهای ذخیره شده بدون تیغی جداسازی دامنه المان ترک خورده محاسبه شود. بدین منظور روش ویتورا برای توابع پله‌ی اصلاح شده توسعه یافت تا بتوان نیروهای ذخیره شده در درجات آزادی استاندارد و غنی شده را محاسبه کرد. با استفاده از توابع



شکل ۱۲. کانتور تنش اصلی بیشینه، محاسبه شده توسط $\bar{\sigma}^{eq-std}$ ، گام بارگذاری ۱۲۶.

که با استفاده از معادلات تنش کلاسیک $\bar{\sigma}$ محاسبه شده است را در گام بارگذاری ۱۲۶ نشان می‌دهد. در شکل ۱۳ نواحی با تنش بالا در نواحی ترک خورده توسعه پیدا کرده است. چنین توزیع تنشی در این گام از بارگذاری انتظار نمی‌رود.

نهایتاً، در شکل ۱۴ تنش‌های اصلی بیشینه محاسبه شده با معادلات پیشنهادی $\bar{\sigma}^{eq-ent}$ برای درجات آزادی غنی شده در المان شماره ۱۵ در گام‌های زمانی متفاوت نشان داده شده است.

چنان که مشاهده می‌شود، بر اساس معادلات ۳۰ و ۳۱، تنش‌های محاسبه شده برای درجات آزادی غنی شده با استفاده از معادلات $\bar{\sigma}^{eq-ent}$ ، در هر وجه

برای درجات آزادی استاندارد، معادلات اصلاح شده برای تنش‌های درجات آزادی استاندارد با اضافه شدن ترم‌های جدید به معادلات کلاسیک به دست می‌آید. به نظر می‌رسد ترم‌های اضافه شده مدل‌کننده تأثیرات ناپیوستگی‌ها در داخل جسم ترک خورده است. تنش‌های پیشنهادی برای درجات آزادی استاندارد دارای مقادیر یکسان در کل دامنه‌ی ترک خورده است که نشان‌دهنده‌ی وضعیت کل المان ترک خورده است. در صورت استفاده از معادلات پیشنهادی تنش برای محاسبه‌ی تنش درجات آزادی استاندارد، کانتور تنش در المان‌های ترک خورده کاهش می‌یابد و نواحی با تنش‌های بالا نشان‌دهنده‌ی نواحی کاندید ترک در گام‌های بعدی بارگذاری هستند. اگر از معادلات تنش کلاسیک در محاسبات استفاده شود، تنش‌ها در نواحی ترک خورده همچنان بیشتر از مقاومت کششی بتن است. الگوریتم انتشار ترک محاسبه شده با استفاده از تنش کلاسیک با پروسه توسعه ترک در داخل جسم منطبق نیست. در نهایت مؤلفه‌های تنش برای درجات آزادی غنی شده نیز ارائه شده است. مؤلفه‌های تنش محاسبه شده به مراتب کمتر از مقاومت کششی بتن است و مقادیر متفاوتی در هر سمت ترک دارند. به نظر می‌رسد مؤلفه‌های تنش برای درجات آزادی غنی شده نشان‌دهنده‌ی نیروهای روی وجوه ترک هستند.

چندجمله‌ی توسعه یافته، امکان محاسبه‌ی نیروهای ذخیره شده برای کل دامنه‌ی ترک خورده وجود دارد و فرمول‌های تنش جدید $\bar{\sigma}^{eq-std}$ و $\bar{\sigma}^{eq-enr}$ پیشنهاد شده است که نشان‌دهنده‌ی شرایط المان‌های ترک خورده در روش اجزای محدود توسعه یافته است.

همچنین نشان داده شد که ارزیابی نیروهای داخلی ذخیره شده در المان و شیب این نیروها قضاوت مناسبی ارائه می‌دهد از فرایندی که طی آن المان توانایی تحمل بار خود را از دست می‌دهد. هرچه شیب نیروهای ذخیره شده در المان بیشتر باشد، ماده سالم‌تر است و در نتیجه توانایی بیشتری برای تحمل بار وارد دارد. همچنین تغییرات ناگهانی در نیروهای ذخیره شده در المان نشان‌دهنده‌ی فرایند ترک خوردن در المان‌های مجاور است.

در صورت استفاده از معادلات تنش کلاسیک $\bar{\sigma}$ ، اگر دامنه جسم ترک خورده به طور صحیح تفکیک شود، انتگرال‌های عددی محاسبه‌ی نیروهای ذخیره شده در المان با دقت مناسبی محاسبه می‌شوند ولی نیروهای داخلی برای هر سمت ترک به صورت جداگانه حساب می‌شود که نمی‌توان بر اساس آن برای کل دامنه‌ی ترک خورده قضاوت کرد. با مقایسه‌ی مؤلفه‌های تنش کلاسیک و تنش‌های پیشنهادی

پانویس‌ها

1. extended finite element method
2. force criterion
3. displacement criterion
4. stress criterion
5. restoring force
6. standard gauss quadrature rule
7. Dolbow
8. sub-triangle
9. sub-quad
10. Ventura
11. triangular finite element
12. tetrahedral finite element
13. Heaviside
14. rectangular element
15. Natarajan
16. Schwarz-Christoffel Conformal Mapping
17. moment fitting
18. node elimination algorithm
19. bilinear quadratic
20. transpose
21. unbalance force
22. residual norm
23. XFEM

منابع (References)

1. Melenk, J.M. and Babuška, I. "The partition of unity finite element method: Basic theory and applications," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **139**1-4, pp. 289-314 (1996).
2. Belytschko, T. and Black, T. "Elastic crack growth in finite elements," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **620** July

1998, pp. 601-620 (1999).

3. Moës, N., Dolbow, J. and Belytschko, T. "A finite element method for crack growth without remeshing," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **46**1, pp. 131-150 (1999).
4. Zhao, L., Wang, Y., Zhang, J. and et al "XFEM-based model for simulating zigzag delamination growth in laminated composites under mode I loading," *Compos. Struct.*, **160**, pp. 1155-1162 (2017).
5. Nagashima, T. and Sawada, M. "Development of a damage propagation analysis system based on level set XFEM using the cohesive zone model," *Comput. Struct.* **174**, pp. 42-53 (2016).
6. Agathos, K., Ventura, G., Chatzi, E. and et al. "Stable 3D XFEM/vector-level sets for non-planar 3D crack propagation and comparison of enrichment schemes," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, pp. 1-31, (2017).
7. Shimbo, T. "Development and application of a dynamic XFEM for the seismic residual displacement analysis of an embankment," *Soils Found.*, **57**3, pp. 357-370 (2017).
8. BERGAN, P.G. and Clough, R.A.Y.W. "Convergence criteria for iterative processes," *AIAA*, **10**, August, pp. 1107-1108 (1972).
9. Dolbow, J.E. "An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics," *Northwestern University* (2000).
10. Ventura, G. "On the elimination of quadrature sub-cells for discontinuous functions in the eXtended finite-element method," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **66**5, pp. 761-795 (2006).
11. Ventura, G. and Benvenuti, E. "Equivalent polynomials for quadrature in Heaviside function enriched elements," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **102**3-4, pp. 688-710 (2014).

12. Natarajan, S., Bordas, S. and Mahapatra, D.R. "Numerical integration over arbitrary polygonal domains based on schwarz-christoffel conformal mapping," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **80** 1, pp. 103-134 (2009).

13. Natarajan, S., Mahapatra, D.R. and ephane, S. "Integrating strong and weak discontinuities without integration subcells and example applications in an XFEM/GFEM framework," *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **83** January, pp. 269-294 (2010).

14. Joulaian, M., Hubrich, S. and Düster, A. "Numerical integration of discontinuities on arbitrary domains based on moment fitting," *Comput. Mech.*, **57**6, pp. 979-999 2016Method", Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers (HUSCAP) (2013).

15. Mousavi, S.E. and Sukumar, N. "Generalized gaussian quadrature rules for discontinuities and crack singularities in the extended finite element method," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **199**49-52, pp. 3237-3249 (2010).

16. "Structural analysis with the finite element Oñate, Eugenio. method. linear statics", *Beams, Plates and Shells, Springer Science & Business Media*, **2**, pp.137-142(2013).

17. Bhattacharjee, S.S. "Smearred fracture analysis of concrete gravity dams for static and seismic loads," *McGill University*, pp.68-79 (1993).

18. Rots, J. G., Nauta, P., Kuster, G. M. A. and et al. (1985). "Smearred crack approach and fracture localization in concrete". *HERON*, **30**(1), pp.1-48 (1985).

پیوست

۲. ضرایب چندجمله‌یی برای ترک عبوری از دو ضلع مجاور المان (حالت ج در شکل ۱)

ضرایب مربوط به تابع معادل جهت محاسبه‌ی انتگرال‌های موجود در سطر ۱ و ۲ از زیرماتریس K_{au} برابرند با:

$$a_{au}^- = \frac{1}{32} \left(\begin{array}{l} \delta(\eta_r^T - \eta_r^T + \eta_r - \delta)(\xi_1 + 1) - \lambda(9\xi_1 - 5\xi_1^T) + \\ \delta(\xi_1 + 1)(\xi_1^T \eta_r - 2\xi_1 \eta_r - 7\xi_1^T + 6\xi_1 + 3\eta_r - \delta) - \\ 2\lambda(\xi_1 + 1)(\eta_r - 3) + 32 \end{array} \right) \quad (13 \text{ پ})$$

$$b_{au}^- = \frac{1}{6} \left((\delta\xi_1 + 2\eta_r - \xi_1 \eta_r - 4)(\xi_1 + 1) - 6(\xi_1^T - 1) \right) \quad (14 \text{ پ})$$

$$c_{au}^- = \frac{1}{6} (-\eta_r^T + \eta_r + 2)(\xi_1 + 1) \quad (15 \text{ پ})$$

$$d_{au}^- = \frac{3}{16} (3\xi_1 + 3\eta_r - \xi_1 \eta_r - \delta)(\xi_1 + 1)(\eta_r + 1) \quad (16 \text{ پ})$$

$$e_{au}^- = \frac{15}{32}$$

$$\left(\begin{array}{l} \lambda(\xi_1 - \xi_1^T) - (\xi_1^T \eta_r - 2\xi_1 \eta_r - 7\xi_1^T + 6\xi_1 + 3\eta_r - \delta) \\ (\xi_1 + 1) + 2(\xi_1 + 1)(\eta_r - 3) \end{array} \right) \quad (17 \text{ پ})$$

$$f_{au}^- = -\frac{15}{32} \left(\begin{array}{l} (\eta_r^T - \eta_r^T + \eta_r - \delta)(\xi_1 + 1) - \\ 2(\xi_1 + 1)(\eta_r - 3) \end{array} \right) \quad (18 \text{ پ})$$

و ضرایب مربوط به تابع معادل جهت انتگرال‌های موجود در سطر ۳، ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ از زیرماتریس K_{au} برابرند با:

$$a_{au}^+ = \frac{1}{32} \left(\begin{array}{l} \delta(\xi_1^T - \xi_1^T + \xi_1 + 3)(\eta_r + 1) + \\ \delta(\eta_r^T - \eta_r^T + \eta_r + 3)(\xi_1 + 1) - \\ 2\lambda(\xi_1 + 1)(\eta_r + 1) \end{array} \right) \quad (19 \text{ پ})$$

$$b_{au}^+ = -\frac{1}{6} (\xi_1 + 1)(\xi_1 - 2)(\eta_r + 1) \quad (20 \text{ پ})$$

$$c_{au}^+ = \frac{1}{6} (-\eta_r^T + \eta_r + 2)(\xi_1 + 1) \quad (21 \text{ پ})$$

۱. ضرایب چندجمله‌یی برای ترک عبوری از دو ضلع مقابل المان، افقی (حالت ب در شکل ۱)

ضرایب چندجمله‌یی معادل برای سطر نام از زیرماتریس K_{au} که درجه آزادی (i) متعلق به وجه منفی ترک است به صورت زیر هستند:

$$a_{au}^- = \frac{1}{32} \left(\begin{array}{l} \delta(\eta_1 + \eta_r)^T + \delta(\eta_1 + \eta_r)(\eta_1 - \eta_r)^T \\ -36\eta_1 - 36\eta_r + 32 \end{array} \right) \quad (1 \text{ پ})$$

$$b_{au}^- = \frac{1}{6} (\eta_1 - \eta_r) \quad (2 \text{ پ})$$

$$c_{au}^- = \frac{1}{8} (12 - 3(\eta_1 + \eta_r)^T - (\eta_1 - \eta_r)^T) \quad (3 \text{ پ})$$

$$d_{au}^- = \frac{3}{4} (\eta_1^T - \eta_r^T) \quad (4 \text{ پ})$$

$$e_{au}^- = 0 \quad (5 \text{ پ})$$

$$f_{au}^- = \frac{1}{32} \left(\begin{array}{l} 60(\eta_1 + \eta_r) - (15\eta_1 + 15\eta_r)(\eta_1 - \eta_r)^T \\ -15(\eta_1 + \eta_r)^T \end{array} \right) \quad (6 \text{ پ})$$

و برای درجات آزادی i متعلق به وجه مثبت ترک، ضرایب چندجمله‌یی برابرند با:

$$a_{au}^+ = \frac{1}{32} \left(\begin{array}{l} \delta(\eta_1 + \eta_r)^T + \delta(\eta_1 + \eta_r)(\eta_1 - \eta_r)^T \\ -36\eta_1 - 36\eta_r - 32 \end{array} \right) \quad (7 \text{ پ})$$

$$b_{au}^+ = \frac{1}{6} (\eta_1 - \eta_r) \quad (8 \text{ پ})$$

$$c_{au}^+ = \frac{1}{8} (12 - 3(\eta_1 + \eta_r)^T - (\eta_1 - \eta_r)^T) \quad (9 \text{ پ})$$

$$d_{au}^+ = \frac{3}{4} (3\eta_1^T - \eta_r^T) \quad (10 \text{ پ})$$

$$e_{au}^+ = 0 \quad (11 \text{ پ})$$

$$f_{au}^+ = \frac{1}{32} \left(\begin{array}{l} 60(\eta_1 + \eta_r) - (15\eta_1 + 15\eta_r)(\eta_1 - \eta_r)^T \\ -15(\eta_1 + \eta_r)^T \end{array} \right) \quad (12 \text{ پ})$$

۴. ضرایب چندجمله‌یی برای ترک عبوری از دو ضلع مجاور المان (حالت هـ در شکل ۱)

ضرایب مربوط به تابع معادل برای محاسبه‌ی انتگرال‌های موجود در سطر ۱، ۲، ۵، ۶، ۷ و ۸ از زیرماتریس K_{au} برابرند با:

$$a_{au}^- = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 5(\xi_1^2 + \xi_1^2 + \xi_1 - 3)(\eta_r + 1) + \\ 5(\eta_r^2 - \eta_r^2 + \eta_r + 3)(\xi_1 - 1) \\ -28(\xi_1 - 1)(\eta_r + 1) \end{pmatrix} \quad (37 \text{ پ})$$

$$b_{au}^- = -\frac{1}{4}(\xi_1^2 + \xi_1 - 2)(\eta_r + 1) \quad (38 \text{ پ})$$

$$c_{au}^- = \frac{1}{4}(-\eta_r^2 + \eta_r + 2)(\xi_1 - 1) \quad (39 \text{ پ})$$

$$d_{au}^- = \frac{3}{16}(-\xi_1 \eta_r + 3\xi_1 - 3\eta_r + 5)(\xi_1 - 1)(\eta_r + 1) \quad (40 \text{ پ})$$

$$e_{au}^- = -\frac{15}{32} \begin{pmatrix} (\xi_1^2 + \xi_1^2 + \xi_1 - 3)(\eta_r + 1) - \\ 2(\xi_1 - 1)(\eta_r + 1) \end{pmatrix} \quad (41 \text{ پ})$$

$$f_{au}^- = -\frac{15}{32} \begin{pmatrix} (\eta_r^2 - \eta_r^2 + \eta_r + 3)(\xi_1 - 1) - \\ 2(\xi_1 - 1)(\eta_r + 1) \end{pmatrix} \quad (42 \text{ پ})$$

و ضرایب مربوط به تابع معادل برای محاسبه‌ی انتگرال‌های موجود در سطر ۳ و ۴ زیرماتریس K_{au} برابرند با:

$$a_{au}^+ = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 5(\eta_r^2 - \eta_r^2 + \eta_r - 5)(\xi_1 - 1) + 8(5\xi_1^2 - 9\xi_1) - \\ 5(\xi_1 - 1)(-\xi_1^2 \eta_r + 7\xi_1^2 - 2\xi_1 \eta_r + 6\xi_1 - 3\eta_r + 5) \\ -28(\xi_1 - 1)(\eta_r - 3) + 32 \end{pmatrix} \quad (43 \text{ پ})$$

$$b_{au}^+ = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 6(\xi_1^2 + 1) - (-\xi_1 \eta_r + 5\xi_1 - 2\eta_r + 4)(\xi_1 - 1) \end{pmatrix} \quad (44 \text{ پ})$$

$$c_{au}^+ = \frac{1}{4}(-\eta_r^2 + \eta_r + 2)(\xi_1 - 1) \quad (45 \text{ پ})$$

$$d_{au}^+ = \frac{3}{16}(3\xi_1 - 3\eta_r - \xi_1 \eta_r + 5)(\xi_1 - 1)(\eta_r + 1) \quad (46 \text{ پ})$$

$$e_{au}^+ = \frac{15}{32} \begin{pmatrix} 8(\xi_1 - \xi_1^2) + 2(\xi_1 - 1)(\eta_r - 3) + \\ (\xi_1 - 1)(-\xi_1^2 \eta_r + 7\xi_1^2 - 2\xi_1 \eta_r + 6\xi_1 - 3\eta_r + 5) \end{pmatrix} \quad (47 \text{ پ})$$

$$f_{au}^+ = -\frac{15}{32} \begin{pmatrix} (\eta_r^2 - \eta_r^2 + \eta_r - 5)(\xi_1 - 1) - \\ 2(\xi_1 - 1)(\eta_r - 3) \end{pmatrix} \quad (48 \text{ پ})$$

۵. ضرایب چندجمله‌یی برای ترک عبوری از دو ضلع مجاور المان (حالت ی در شکل ۱)

ضرایب مربوط به تابع معادل برای محاسبه‌ی انتگرال‌های موجود در سطر ۷ و ۸ از

$$d_{au}^+ = \frac{3}{16}(3\xi_1 + 3\eta_r - \xi_1 \eta_r - 5)(\xi_1 + 1)(\eta_r + 1) \quad (22 \text{ پ})$$

$$e_{au}^+ = -\frac{15}{32} \begin{pmatrix} (\xi_1^2 - \xi_1^2 + \xi_1 + 3)(\eta_r + 1) - \\ 2(\xi_1 + 1)(\eta_r + 1) \end{pmatrix} \quad (23 \text{ پ})$$

$$f_{au}^+ = -\frac{15}{32} \begin{pmatrix} (\eta_r^2 - \eta_r^2 + \eta_r + 3)(\xi_1 + 1) - \\ 2(\xi_1 + 1)(\eta_r + 1) \end{pmatrix} \quad (24 \text{ پ})$$

۳. ضرایب چندجمله‌یی برای ترک عبوری از دو ضلع مقابل المان، افقی (حالت د در شکل ۱)

ضرایب مربوط به تابع معادل برای محاسبه‌ی انتگرال‌های موجود در سطر ۱، ۲، ۳، ۴، ۷ و ۸ از زیرماتریس K_{au} برابرند با:

$$a_{au}^- = -\frac{1}{32} \begin{pmatrix} 5(\xi_r^2 + \xi_r^2 + \xi_r - 3)(\eta_l - 1) + \\ 5(\eta_l^2 + \eta_l^2 + \eta_l - 3)(\xi_r - 1) - \\ 28(\xi_r - 1)(\eta_l - 1) \end{pmatrix} \quad (25 \text{ پ})$$

$$b_{au}^- = \frac{1}{4}(\xi_r^2 + \xi_r - 2)(\eta_l - 1) \quad (26 \text{ پ})$$

$$c_{au}^- = \frac{1}{4}(\eta_l^2 + \eta_l - 2)(\xi_r - 1) \quad (27 \text{ پ})$$

$$d_{au}^- = \frac{3}{16}(\xi_r \eta_l + 3\xi_r + 3\eta_l + 5)(\xi_r - 1)(\eta_l - 1) \quad (28 \text{ پ})$$

$$e_{au}^- = \frac{15}{32} \begin{pmatrix} (\xi_r^2 + \xi_r^2 + \xi_r - 3)(\eta_l - 1) - \\ 2(\xi_r - 1)(\eta_l - 1) \end{pmatrix} \quad (29 \text{ پ})$$

$$f_{au}^- = \frac{15}{32} \begin{pmatrix} (\eta_l^2 + \eta_l^2 + \eta_l - 3)(\xi_r - 1) - \\ 2(\xi_r - 1)(\eta_l - 1) \end{pmatrix} \quad (30 \text{ پ})$$

و ضرایب مربوط به تابع معادل برای محاسبه‌ی انتگرال‌های موجود در سطر ۵ و ۶ از زیرماتریس K_{au} برابرند با:

$$a_{au}^+ = -\frac{1}{32} \begin{pmatrix} 5(\eta_l^2 + \eta_l^2 + \eta_l + 5)(\xi_r - 1) - 8(5\xi_r^2 - 9\xi_r) + \\ 5(\xi_r^2 \eta_l + 7\xi_r^2 + 2\xi_r \eta_l + 6\xi_r + 3\eta_l + 5)(\xi_r - 1) - \\ 28(\xi_r - 1)(\eta_l + 3) + 32 \end{pmatrix} \quad (31 \text{ پ})$$

$$b_{au}^+ = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (5\xi_r + 2\eta_l + \xi_r \eta_l + 4)(\xi_r - 1) \\ -6(\xi_r^2 - 1) \end{pmatrix} \quad (32 \text{ پ})$$

$$c_{au}^+ = \frac{1}{4}(\eta_l^2 + \eta_l - 2)(\xi_r - 1) \quad (33 \text{ پ})$$

$$d_{au}^+ = \frac{3}{16}(\xi_r \eta_l + 3\xi_r + 3\eta_l + 5)(\xi_r - 1)(\eta_l - 1) \quad (34 \text{ پ})$$

$$e_{au}^+ = \frac{15}{32} \begin{pmatrix} 8(\xi_r - \xi_r^2) + \\ (\xi_r^2 \eta_l + 7\xi_r^2 + 2\xi_r \eta_l + 6\xi_r + 3\eta_l + 5)(\xi_r - 1) \\ -2(\xi_r - 1)(\eta_l + 3) \end{pmatrix} \quad (35 \text{ پ})$$

$$f_{au}^+ = \frac{15}{32} \begin{pmatrix} (\eta_l^2 + \eta_l^2 + \eta_l + 5)(\xi_r - 1) \\ -2(\xi_r - 1)(\eta_l + 3) \end{pmatrix} \quad (36 \text{ پ})$$

زیرماتریس K_{au} برابر است با:

و ضرایب مربوط به تابع معادل برای محاسبه ی انتگرال های موجود در سطر ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ از زیرماتریس K_{au} برابر است با:

$$a_{au}^+ = -\frac{1}{32} \begin{pmatrix} 5(\xi_r^2 - \xi_r^2 + \xi_r + 3)(\eta_1 - 1) \\ +5(\eta_1^2 + \eta_1^2 + \eta_1 - 3)(\xi_r + 1) \\ -28(\xi_r + 1)(\eta_1 - 1) \end{pmatrix} \quad (\text{پ ۵۵})$$

$$b_{au}^+ = \frac{1}{6} (\xi_r + 1)(\xi_r - 2)(\eta_1 - 1) \quad (\text{پ ۵۶})$$

$$c_{au}^+ = \frac{1}{6} (\eta_1^2 + \eta_1 - 2)(\xi_r + 1) \quad (\text{پ ۵۷})$$

$$d_{au}^+ = \frac{3}{16} (\xi_r \eta_1 + 3\xi_r - 3\eta_1 - 5)(\xi_r + 1)(\eta_1 - 1) \quad (\text{پ ۵۸})$$

$$e_{au}^+ = \frac{15}{32} \begin{pmatrix} (\xi_r^2 - \xi_r^2 + \xi_r + 3)(\eta_1 - 1) \\ -2(\xi_r + 1)(\eta_1 - 1) \end{pmatrix} \quad (\text{پ ۵۹})$$

$$f_{au}^+ = \frac{15}{32} \begin{pmatrix} (\eta_1^2 + \eta_1^2 + \eta_1 - 3)(\xi_r + 1) \\ -2(\xi_r + 1)(\eta_1 - 1) \end{pmatrix} \quad (\text{پ ۶۰})$$

$$a_{au}^- = -\frac{1}{32} \begin{pmatrix} 5(\eta_1^2 + \eta_1^2 + \eta_1 + 5)(\xi_r + 1) - 8(5\xi_r^2 - 9\xi_r) \\ +5(\xi_r^2 \eta_1 + 7\xi_r^2 - 2\xi_r \eta_1 + 3\eta_1 - 6\xi_r + 5)(\xi_r + 1) \\ -28(\xi_r + 1)(\eta_1 + 3) - 32 \end{pmatrix} \quad (\text{پ ۴۹})$$

$$b_{au}^- = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} (5\xi_r - 2\eta_1 + \xi_r \eta_1 - 4)(\xi_r + 1) \\ -6(\xi_r^2 - 1) \end{pmatrix} \quad (\text{پ ۵۰})$$

$$c_{au}^- = \frac{1}{6} (\eta_1^2 + \eta_1 - 2)(\xi_r + 1) \quad (\text{پ ۵۱})$$

$$d_{au}^- = \frac{3}{16} (\xi_r \eta_1 + 3\xi_r - 3\eta_1 - 5)(\xi_r + 1)(\eta_1 - 1) \quad (\text{پ ۵۲})$$

$$e_{au}^- = \frac{15}{32} \begin{pmatrix} 8(\xi_r - \xi_r^2) \\ +(\xi_r^2 \eta_1 + 7\xi_r^2 - 2\xi_r \eta_1 + 3\eta_1 - 6\xi_r + 5)(\xi_r + 1) \\ -2(\xi_r + 1)(\eta_1 + 3) \end{pmatrix} \quad (\text{پ ۵۳})$$

$$f_{au}^- = \frac{15}{32} \begin{pmatrix} (\eta_1^2 + \eta_1^2 + \eta_1 + 5)(\xi_r + 1) \\ -2(\xi_r + 1)(\eta_1 + 3) \end{pmatrix} \quad (\text{پ ۵۴})$$