

انتگرال گیری مستقیم نیمه صریح با پایداری نامشروط بر پایه‌ی روش آلفای تعمیم یافته

امیرحسین نمذچی (کارشناس ارشد)

حمید محمد الهی اوه کهر (کارشناس ارشد)

جواد علامتیان* (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد

مهندسی عمران شریف، زمستان ۱۴۰۰ (درداشت شرفی)
دردی ۲ - ۳۷، شمارهی ۱/۴، ص. ۱۳۵-۱۴۰، (پادداشت شرفی)

رویکردهای انتگرال گیری عددی برای تحلیل دینامیکی را می‌توان به دو دسته‌ی صریح و ضمنی تقسیم کرد. پایداری و دقت، دو ویژگی مهم روش‌های اخیر هستند. از دیدگاه پایداری عددی، روش‌های مذکور به دو گروه پایدار مشروط و نامشروط دسته‌بندی می‌شوند. با وجود سادگی، روش‌های صریح پایدار مشروط هستند و حجم محاسبات نیز در روش‌های ضمنی، علی‌رغم پایداری نامشروط، به طرز چشمگیری زیاد است. در نوشتار حاضر، با بهره‌گیری از برتری‌های هر دو دسته، یک روش انتگرال گیری نیمه صریح نوین با پایداری نامشروط بر پایه‌ی روش آلفای تعمیم یافته ارائه شده است. این کار با وابسته کردن عامل‌های وزنی الگوریتم پیشنهادی به مشخصات سازه و استفاده از مفهوم ماتریس بزرگ‌نمایی انجام شده است. بر این اساس، عامل‌های وزنی نامعلوم به‌گونه‌ی محاسبه شده‌اند که معادله‌ی مشخصه‌ی روش پیشنهادی با روش آلفای تعمیم یافته برابر شود. ویژگی مذکور، انطباق ویژگی‌های عددی روش نوین با روش آلفای تعمیم یافته را به دنبال خواهد داشت. درستی فرضیات و کارایی رابطه‌سازی پیشنهادی با تحلیل دقت، پایداری و حل پاره‌یی از نمونه‌های عددی انجام شده است. یافته‌ها، برتری روش پیشنهادی را نسبت به سایر روش‌های مشابه آشکار ساخته‌اند.

واژگان کلیدی: تحلیل دینامیکی، انتگرال گیری عددی، روش وابسته به سازه، پایداری نامشروط.

۱. مقدمه

در تحلیل‌های دینامیکی، مقدار بار یا جهت آن با زمان تغییر می‌کند. از این رو، پاسخ سامانه با زمان متغیر است. افزون بر این، نیروهای میرایی و لختی نیز پدید می‌آیند. اگر نیروهای مذکور وابسته به پاسخ دستگاه باشند، رفتار سیستم ناخطی است. به طور کلی، دو راهکار برای به دست آوردن پاسخ‌های دینامیکی وجود دارد: روش‌های تحلیلی و عددی.^[۱] روش‌های تحلیلی، پاسخ دقیق دستگاه را به دست می‌دهند. با این همه، کاربرد روش‌های اخیر به رفتارهای خطی محدود می‌شود و عموماً نیازمند فرضیات ساده‌کننده هستند. از سوی دیگر، روش‌های عددی، محدودیتی ندارند و به صورت گسترده در سامانه‌های خطی و ناخطی به‌کار می‌روند. با وجود این، دو نگرانی اصلی در روش‌های اخیر، دقت و پایداری عددی هستند.^[۲] روش‌های عددی که با شیوه‌های انتگرال گیری مستقیم نیز شناخته می‌شوند، با یک فرایند گام‌به‌گام، پاسخ معادله‌ی تعادل دینامیکی را به صورت عددی به دست می‌آورند. در روش‌های انتگرال گیری مستقیم، به جای برقراری تعادل در هر لحظه از زمان

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۹/۳/۲۵، اصلاحیه ۱۴۰۰/۳/۸، پذیرش ۱۴۰۰/۳/۲۳

DOI:10.24200/J30.2021.55958.2792

است.^[۳-۵] رویکردهای انتگرال گیری مستقیم عددی را می‌توان به دو دسته‌ی کلی ضمنی و صریح تقسیم کرد. روش‌های صریح، روش‌هایی هستند که در آنها کمیت‌های پاسخ سازه در گام جاری وابسته به پاسخ در گام یا گام‌های پیشین است.^[۶] این در حالی است که در روش‌های ضمنی، محاسبه‌ی پاسخ در گام جاری به صورت صریح ممکن نیست و عموماً نیازمند حل دستگاه معادلات هم‌زمان هستند. باید افزود که در رفتارهای ناخطی، دستگاه معادله‌ی حاصل نیز ناخطی است و به فرایندهای تکراری برای حل دستگاه نیاز خواهد بود. در سازه‌های بزرگ‌مقیاس، این ویژگی حجم محاسبات را به طرز چشمگیری افزایش می‌دهد.^[۷] در یک دسته‌بندی دیگر، روش‌های عددی را می‌توان در دو گروه پایدار مشروط و پایدار نامشروط نیز جای داد. در پایداری مشروط، گام زمانی انتخابی باید کمتر از یک گام زمانی

بحرانی باشد، تا از رشد مهارنشده خطا در پاسخ‌های عددی جلوگیری شود. این در حالی است که در حالت نامشروط، پایداری عددی از طریق گام زمانی محدود نمی‌شود و می‌توان گام بزرگ‌تری را بر پایه دقت مورد نیاز انتخاب کرد. در این میان، روش‌های صریح با وجود سادگی و حجم پایین محاسبات، از پایداری مشروط رنج می‌برند. متداول‌ترین روش صریح، راهکار تفاضل محدود مرکزی است، که به دلیل سادگی و دقت مناسب در بیشتر نرم‌افزارهای تجاری تحلیل سازه تعبیه شده است.^[۸] روش صریح بته^۱ با تقسیم هر گام زمانی به دو زیرگام مجزا، کمیت‌های پاسخ در انتهای گام زمانی را محاسبه می‌کند و از روش‌های پیشین پایدارتر و دقیق‌تر است.^[۹] رضایی پزند و کریمی راد (۲۰۱۶)، با بهره‌جویی از بسط تیلور، یک روش نوین صریح دوگامی برای تحلیل دینامیکی ناخطی ارائه دادند، که دقت بیشتری در مقایسه با روش تفاضل محدود نشان داده است؛ با وجود این، دامنه‌ی پایداری آن محدودتر بوده است.^[۱۰] روش مرتبه بالای دو مرحله‌یی نیز با استفاده از ایده‌ی تقسیم گام زمانی، گسترش یافته است. دقت مرتبه‌ی ۴، میرایی عددی مناسب و دامنه‌ی پایداری بهبود یافته‌ی ویژگی‌های بارز روش ذکر شده است.^[۱۱]

از سوی دیگر، روش‌های ضمنی عموماً مشکل پایداری ندارند، اما تلاش محاسباتی بیشتری را طلب می‌کنند. از شناخته‌شده‌ترین الگوریتم‌های ضمنی می‌توان به روش نیومارک^۲،^[۱۲] روش آلفای تعمیم یافته^۳،^[۱۳] و روش مرکب^۴،^[۱۴] اشاره کرد. الگوریتم مرتبه‌بالای چندگامی تعمیم یافته با بهره‌گیری دنباله‌ی تیلور و ترکیب نتایج به دست آمده از چند گام پیشین گسترش یافته است.^[۱۵] استفاده از توابع درون‌یاب بی اسپیلاین^۵ مرتبه ۳، راهکاری دیگر برای توسعه‌ی روش‌های انتگرال‌گیری عددی ضمنی با پایداری نامشروط است، که توسط رستمی و شجاعی (۲۰۱۸) ارائه شده است.^[۱۶] در ادامه، روش مرکب سه مرحله‌یی با ترکیب روش‌های ضمنی پیشین و بهره‌جویی از آنها در زیرگام‌های زمانی پیشنهاد شده است.^[۱۷] با وجود دقت و ویژگی‌های عددی مناسب، حجم و زمان محاسبات در راهکار اخیر در مقایسه با روش‌های متداول ضمنی، بیشتر است.

با ترکیب برتری‌های رویکردهای ضمنی و صریح، دسته‌ی نوینی از شیوه‌های انتگرال‌گیری عددی، که با عنوان روش‌های وابسته به سازه شناخته می‌شوند، معرفی شده‌اند.^[۱۸] در این راهکارها، برخلاف روش‌های متداول پیشین، عامل‌های وزنی الگوریتم، ثابت نیستند و متناسب با مسئله تغییر می‌کنند. با استفاده از ویژگی مذکور می‌توان روش‌هایی را خلق کرد که علاوه بر صراحت در رابطه‌سازی، پایداری عددی الگوریتم نیز تضمین شود. نخستین روش انتگرال‌گیری مستقیم وابسته به سازه توسط چانگ^۶ (۲۰۰۲) معرفی شده است.^[۱۹] این شیوه نخست با هدف استفاده در آزمایش‌های شبه‌دینامیکی گسترش یافت، اما به دلیل ویژگی‌های مناسب و کارایی بالا در رفتارهای ناخطی، رفته‌رفته در تحلیل‌های دینامیکی عددی نیز استفاده شده است.^[۲۰] با بهره‌گیری از مفهوم نگره‌ی کنترل، چن^۷ و ریکلز^۸ (۲۰۰۸) الگوریتم CR را پیشنهاد داده‌اند.^[۲۱] روش CR فقط یک عامل وزنی دارد و کمیت‌های تغییرمکان و سرعت در آن به صورت صریح قابل محاسبه هستند. در ادامه، چانگ (۲۰۱۴)، روشی دیگر از خانواده‌ی روش‌های وابسته به سازه ارائه کرد، که برخلاف روش‌های پیشین، امکان تنظیم میرایی عددی یا میرایی الگوریتمی را برای تحلیل‌گر فراهم می‌کرد، که این ویژگی موجب خنثی شدن مشارکت مودهای بالای نوسان در پاسخ کلی سامانه می‌شد و در عین حال، مودهای پایین نوسان را، که نقش مهم‌تری در پاسخ ایفا می‌کنند، بدون تغییر و با دقت مناسب حفظ می‌کردند.^[۲۲] با وجود این، روش چانگ یک روش چندگامی بود و برای انجام تحلیل دینامیکی، نیازمند فرایند آغازین بوده است. روش نوین کولای^۹ و ریکلز (۲۰۱۴)، با بهره‌گیری از

نگره‌ی کنترل^{۱۰} گسترش یافته است، که در آن، میرایی عددی با استفاده از یک عامل، قابل تنظیم بوده و فرایند انتخاب بهینه‌ی کمیت مذکور در پژوهش ایشان معرفی شده است.^[۲۳] روش چندگامی SNDSM را می‌توان تلاشی دیگر در راستای خلق الگوریتم‌های وابسته به سازه با میرایی عددی قابل کنترل به شمار آورد.^[۲۴] الگوریتم دوگامی پزند و هاشمیان (۲۰۱۶)، از دیگر روش‌های وابسته به سازه است، که بر پایه‌ی تابع تبدیل گسسته توسعه یافته است.^[۲۵] الگوریتم‌های وابسته به سازه‌یی که ویژگی میرایی عددی دارد، نیازمند انتخاب دست‌کم یک عامل برای تنظیم میرایی هستند. این کمیت، بر پایه‌ی قضاوت تحلیل‌گر، ویژگی‌های مسئله و ملاحظات دقت باید تعیین شود. برای رفع این دشواری، نم‌چی و همکاران (۲۰۲۰)، به تازگی یک روش وابسته به سازه‌ی مبتنی بر الگوریتم مرکب ارائه کرده‌اند.^[۲۶] در الگوریتم مرکب تک‌گامی، میرایی عددی به صورت بهینه در ساختار رابطه‌سازی تنظیم شده است و به هیچ عاملی برای آغاز تحلیل، نیاز ندارد. باید افزود که این دسته‌ی نوین از روش‌های انتگرال‌گیری مستقیم، در تحلیل دینامیکی ساختمان‌های بلندمرتبه‌ی بتن‌آرمه با رفتار ناکشسان استفاده شده‌اند و در مواردی که روش‌های ضمنی مشکل هم‌گرایی داشته‌اند، از راهکارهای مذکور با موفقیت استفاده شده است.^[۲۷]

در پژوهش حاضر تلاش شده است که یک روش وابسته به سازه‌ی نوین با پایداری نامشروط بر پایه‌ی روش شناخته‌شده‌ی آلفای تعمیم یافته $(G - \alpha)$ ،^[۱] ارائه شود. این شیوه که در بیشتر نرم‌افزارهای تجاری و متن‌باز تحلیل سازه تعبیه شده است، به دلیل داشتن میرایی عددی قابل کنترل، دقت و پایداری مناسب در رفتارهای ناخطی و حجم محاسبات کم، همواره مورد توجه تحلیل‌گران سازه قرار داشته است. از این رو، گسترش روشی نوین بر پایه‌ی روش $G - \alpha$ ، انگیزه‌ی اصلی پژوهش حاضر به شمار می‌رود. برخلاف رویکردهای پیشین، که بیشتر مبتنی بر نگره‌های کنترل برای گسترش روش‌های وابسته به سازه بوده‌اند، در پژوهش حاضر از مفهوم ماتریس بزرگ‌نمایی و معادله‌ی مشخصه بهره‌جویی می‌شود. به سخن دیگر، تلاش شده است که عامل‌های وزنی روش پیشنهادی به گونه‌یی محاسبه شوند که معادله‌ی مشخصه‌ی روش با شیوه‌ی آلفای تعمیم یافته یکسان شود. هم‌زمان، با استفاده از دنباله‌ی تیلور، رابطه‌های بنیادی روش طوری انتخاب شده‌اند که الگوریتم، ساختاری نیمه‌صریح داشته باشد؛ بدین معنا که معادله‌ی تغییرمکان، صریح و رابطه‌ی سرعت، ضمنی باشد. این ویژگی نیاز به حل دستگاه معادله‌های هم‌زمان در رفتارهای ناخطی وابسته به تغییرمکان را از بین می‌برد و زمان تحلیل را کاهش می‌دهد. فرایند گسترش رابطه‌سازی پیشنهادی برخلاف نگره‌ی کنترل، که بحثی میان‌رشته‌یی است، ساده و قابل فهم است و می‌تواند مبنایی برای توسعه‌ی روش‌های نوین وابسته به سازه با ویژگی‌های عددی دلخواه و موردنیاز قرار گیرد. در ادامه، رابطه‌سازی پیشنهادی و چگونگی استخراج عامل‌های وزنی در حالت یک درجه‌ی آزادی ارائه و سپس، با تحلیل پایداری و دقت، درستی فرضیات ارزیابی شده است. به دنبال آن، روش ارائه شده به حالت چند درجه‌ی آزادی تعمیم داده شده است. با ارائه‌ی گام‌های محاسباتی شیوه‌ی پیشنهادی، پاره‌یی از نمونه‌های عددی تحلیل و نتایج با دیگر روش‌های وابسته به سازه مقایسه شده‌اند.

۲. روش پیشنهادی

روش‌های متداول انتگرال‌گیری مستقیم عددی، از عامل‌های وزنی در روابط بنیادی خود برای کنترل دقت و پایداری استفاده می‌کنند، که عموماً کمیت‌هایی اسکالر و بر

$$\begin{Bmatrix} D^{n+1} \\ \Delta t \dot{D}^{n+1} \\ \Delta t^2 \ddot{D}^{n+1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{Q_{G-\alpha}} \times \begin{bmatrix} A_{11}^{G-\alpha} & A_{12}^{G-\alpha} & A_{13}^{G-\alpha} \\ A_{21}^{G-\alpha} & A_{22}^{G-\alpha} & A_{23}^{G-\alpha} \\ A_{31}^{G-\alpha} & A_{32}^{G-\alpha} & A_{33}^{G-\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D^n \\ \Delta t \dot{D}^n \\ \Delta t^2 \ddot{D}^n \end{Bmatrix} \quad (6)$$

که در آن، ماتریس ضرایب، نشان دهنده‌ی ماتریس بزرگ‌نمایی یا تقریب انتگرال‌گیری روش است، که درایه‌های آن در پیوست ارائه شده‌اند. ارزیابی پایداری، دقت و دیگر ویژگی‌های الگوریتمی یک روش انتگرال‌گیری عددی با بررسی ماتریس مزبور و چندجمله‌ی مشخصه‌ی متناظر آن امکان‌پذیر است.^[۱۸، ۱۹] این چندجمله‌ی برای روش $G - \alpha$ مطابق رابطه‌ی ۷ تعریف می‌شود:

$$\lambda^3 - (I_1^{G-\alpha}) \lambda^2 + (I_2^{G-\alpha}) \lambda - (I_3^{G-\alpha}) = 0 \quad (7)$$

که در آن، I_1 تا I_3 نامتغیرهای ماتریس بزرگ‌نمایی بوده و مقادیر آنها در پیوست ارائه شده‌اند.

۲.۲. رابطه سازی پیشنهادی

رابطه‌های بنیادی روش ارائه شده در پژوهش حاضر، که به اختصار با نشانه‌ی $SSG - \alpha$ نشان داده شده است، در حالت یک درجه‌ی آزادی با عامل‌های نامعلوم، به صورت روابط ۸ الی ۱۰ پیشنهاد شده‌اند:

$$D^{n+1} = D^n + \Delta t \dot{D}^n + \Delta t^2 \theta_1 \ddot{D}^n \quad (8)$$

$$\dot{D}^{n+1} = \dot{D}^n + \Delta t \dot{\theta}_1 \ddot{D}^{n+1} \quad (9)$$

$$\ddot{D}^{n+1-\theta_2} + 2\zeta\omega \dot{D}^{n+1-\alpha_f} + \omega^2 D^{n+1-\alpha_f} = 0 \quad (10)$$

که در آنها، θ_1 تا θ_3 عامل‌های وزنی روش پیشنهادی هستند. همچنین، α_f عامل وزنی روش $G - \alpha$ رابطه‌ی ۴ است. می‌توان، مقدار کمیت پاسخ بین دو گام زمانی را با درون‌یابی خطی به صورت رابطه‌ی ۱۱ تعریف کرد:

$$u^{n+1-\alpha} = (1 - \alpha) u^{n+1} + \alpha u^n \quad (11)$$

که در آن، u کمیت پاسخ یا بار و α عامل وزنی دلخواه هستند. با توجه به رابطه‌های ۸ و ۹ می‌توان دریافت که مقدار تغییرمکان در گام جاری وابسته به مقدارهای پاسخ در گام پیشین است (صریح) و کمیت سرعت افزون بر گام پیشین، به گام کنونی نیز وابسته است (ضمنی). از این رو، رابطه‌های پیشنهادی در دسته‌ی روش‌های نیمه صریح قرار می‌گیرد. ترکیب رابطه‌های ۸ الی ۱۰، معادله‌ی ماتریسی ۱۲ را به دست می‌دهد:

$$\begin{Bmatrix} D^{n+1} \\ \Delta t \dot{D}^{n+1} \\ \Delta t^2 \ddot{D}^{n+1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{Q_{SSG-\alpha}} \times \begin{bmatrix} A_{11}^{SSG-\alpha} & A_{12}^{SSG-\alpha} & A_{13}^{SSG-\alpha} \\ A_{21}^{SSG-\alpha} & A_{22}^{SSG-\alpha} & A_{23}^{SSG-\alpha} \\ A_{31}^{SSG-\alpha} & A_{32}^{SSG-\alpha} & A_{33}^{SSG-\alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D^n \\ \Delta t \dot{D}^n \\ \Delta t^2 \ddot{D}^n \end{Bmatrix} \quad (12)$$

پایه‌ی فرضیات ریاضی انتخاب می‌شوند. وابسته کردن عامل‌های وزنی الگوریتم‌های عددی به ویژگی‌های سازه، این امکان را در اختیار طراحان الگوریتم قرار می‌دهد تا بتوانند روش‌هایی صریح با پایداری نامشروط خلق کنند. در پژوهش حاضر، برای این‌که روش پیشنهادی ویژگی‌های یکسانی با روش $G - \alpha$ داشته باشد، تلاش شده است که معادله‌ی مشخصه‌ی هر دو روش یکسان شود.

۱.۲. روش $G - \alpha$

رابطه‌های بنیادی روش آلفای تعمیم‌یافته برای دستگاه یک درجه‌ی آزادی مطابق رابطه‌های ۱ الی ۳ تعریف می‌شوند:^[۱۳]

$$D^{n+1} = D^n + \Delta t \dot{D}^n + \left(\frac{1}{\gamma} - \beta\right) \Delta t^2 \ddot{D}^n + \beta \Delta t^2 \ddot{D}^{n+1} \quad (1)$$

$$\dot{D}^{n+1} = \dot{D}^n + (1 - \gamma) \Delta t \ddot{D}^n + \gamma \Delta t \ddot{D}^{n+1} \quad (2)$$

$$\ddot{D}^{n+1-\alpha_m} + 2\zeta\omega \dot{D}^{n+1-\alpha_f} + \omega^2 D^{n+1-\alpha_f} = P^{n+1-\alpha_f} \quad (3)$$

که در آنها، D و مشتق‌های زمانی آن بیان‌گر تغییرمکان، سرعت و شتاب سامانه‌ی یک درجه‌ی آزادی هستند، P مقدار بار خارجی وارده و بالاترین نشان دهنده‌ی گام تحلیل است. همچنین ω و ζ به ترتیب بسامد طبیعی نوسان و نسبت میرایی هستند. و نیز β ، γ ، α_m و α_f عامل‌های وزنی روش هستند، که مطابق رابطه‌ی ۴ به دست می‌آیند:

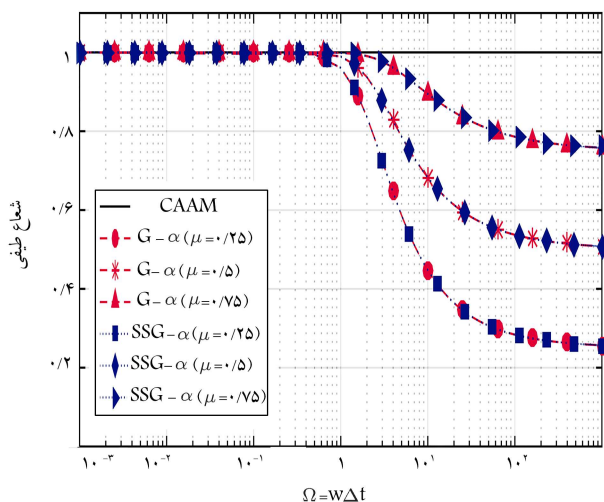
$$\gamma = \frac{1}{\gamma} - \alpha_m + \alpha_f, \quad \beta = \frac{1}{\gamma} (1 - \alpha_m + \alpha_f)^2$$

$$\alpha_m = \frac{2\mu - 1}{\mu + 1}, \quad \alpha_f = \frac{\mu}{\mu + 1} \quad (4)$$

که در آنها، μ عامل تنظیم‌کننده‌ی میرایی عددی است. تحلیل عددی در روش $G - \alpha$ با ترکیب معادله‌های ۱ الی ۳ آغاز می‌شود. در دیدگاه تغییرمکانی، می‌توان معادله‌ی ۱ را بر حسب شتاب در گام $n+1$ بازنویسی کرد. به دنبال آن، با جانشانی معادله‌ی حاصل در رابطه‌ی ۲، سرعت نیز بر حسب تغییرمکان قابل بیان است. جایگذاری معادله‌های به دست آمده در معادله‌ی تعادل ۳، منجر به یک سامانه‌ی ایستای معادله خواهد شد، که مجهول آن فقط بر حسب تغییرمکان در گام جاری خواهد بود. حل عددی سامانه‌ی مذکور، تغییرمکان در گام جاری را به دست می‌دهد و به دنبال آن سایر متغیرهای پاسخ قابل محاسبه خواهند بود. این فرایند تا پایان زمان تحلیل و در ایستگاه‌های زمانی گسسته، تکرار خواهد شد. بر این پایه، روش $G - \alpha$ یک شیوه‌ی تک‌گامی و تک‌عاملی است و با توجه به وابستگی کمیت‌های پاسخ به گام جاری، در دسته‌ی روش‌های ضمنی قرار می‌گیرد. باید افزود که عامل‌های وزنی در روش $G - \alpha$ به گونه‌ی تعیین شده‌اند که ویژگی‌های عددی الگوریتم، بهینه شوند. ویژگی‌های ذکر شده، شامل: دقت مرتبه‌ی دو، میرایی عددی ناچیز در بسامدهای پایین، و افزایش تدریجی آن در بسامدهای بالا هستند. همچنین شرط پایداری نامشروط در روش $G - \alpha$ ، برقراری نابرابری‌های ارائه شده در رابطه‌ی ۵ است:^[۱۳]

$$\alpha_m \leq \alpha_f \leq \frac{1}{\gamma}, \quad \beta \geq \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} (\alpha_f - \alpha_m) \quad (5)$$

با ترکیب معادله‌های ۱ الی ۳ و تغییر متغیر $\Omega = \omega \Delta t$ ، می‌توان رابطه‌ی بازگشتی ۶ را به دست آورد:



شکل ۱. مقایسه‌ی تغییرات شعاع طیفی روش پیشنهادی و آلفای تعمیم‌یافته.

کران‌دار بودن رشد خطا برقرار باشد، روش پایدار مشروط خواهد بود.^[۳۰] پایداری یک الگوریتم عددی را می‌توان با بررسی مقادیر ویژه‌ی ماتریس بزرگ‌نمایی آن مطابق رابطه‌ی ۱۷ بررسی کرد:

$$\rho([A]) = \max_{i=1,2,3} |\lambda_i| = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|) \quad (17)$$

که در آن، λ_i به ترتیب شعاع طیفی و i آمین مقدار ویژه‌ی ماتریس بزرگ‌نمایی $[A]$ هستند. ریشه‌های $\lambda_{1,2}$ ، که ریشه‌های اصلی نام دارند، مزدوج مختلط هستند و در فضای گسسته، رفتار هارمونیک را شبیه‌سازی می‌کنند. λ_3 ریشه‌ی ساختگی است و مقداری حقیقی دارد. بنا به تعریف، یک الگوریتم عددی پایدار نامشروط است، اگر شعاع طیفی آن به ازاء هر گام زمانی دلخواه، کوچک‌تر یا مساوی ۱ باشد. در روش $G - \alpha$ ، عامل‌های وزنی عددی به گونه‌ی طراحی شده‌اند که مقدار شعاع طیفی در بسامدهای پایین، نزدیک به ۱ و در بسامدهای بالا، قابل تنظیم باشد. شرط پایداری نامشروط که بیشتر در رابطه‌ی ۵ به آن اشاره شده است، در روش پیشنهادی نیز برقرار خواهد بود، چرا که دو روش از دیدگاه طیفی بر هم منطبق هستند. در شکل ۱، تغییرات شعاع طیفی روش پیشنهادی به ازاء مقادیر مختلف کمیت μ ، با روش آلفای تعمیم‌یافته و روش شتاب ثابت نیومارک (CAAM)^[۳۱] مقایسه شده است. شکل ۱ نشان می‌دهد که روش $SSG - \alpha$ به ازاء همه‌ی مقدارهای Ω ، شعاع طیفی کوچک‌تر یا مساوی ۱ دارد. از سوی دیگر، روش $SSG - \alpha$ کاملاً منطبق با روش $G - \alpha$ است. این ویژگی، درستی رابطه‌سازی پیشنهادی را نمایان می‌سازد. افزون بر این می‌توان دریافت که کمیت μ ، معرف شعاع طیفی روش در بی‌نهایت ($\Omega \rightarrow \infty$) است.

۴. دقت

پاسخ تقریبی که از انتگرال‌گیری مستقیم معادله‌ی حرکت به دست می‌آید، ممکن است با خطاهایی در تخمین دامنه و زمان تناوب حقیقی نوسان همراه باشد. خطای دامنه‌ی نوسان ممکن است سبب افزایش دامنه‌ی نوسان شود، که نتیجه‌ی آن ناپایداری عددی خواهد بود. از سوی دیگر، خطاب مذکور می‌تواند دامنه‌ی نوسان را کاهش دهد. از این پدیده به عنوان میرایی عددی یاد می‌شود.^[۳۲] کشیدگی یا فشردگی زمان تناوب، بیان‌گر خطای انتگرال‌گیری در تخمین زمان تناوب حقیقی نوسان است.

به دنبال آن، چند جمله‌ی مشخصه‌ی متناظر با ماتریس بزرگ‌نمایی روش پیشنهادی به صورت رابطه ۱۳ استخراج می‌شود:

$$\lambda^2 - (I_1^{SSG-\alpha}) \lambda + (I_2^{SSG-\alpha}) \lambda - (I_3^{SSG-\alpha}) = 0 \quad (13)$$

که در آن، I_1 تا I_3 نامتغیرهای ماتریس روش پیشنهادی $SSG - \alpha$ هستند. درایه‌های ماتریس و مقادیرهای مزبور در پیوست ارائه شده‌اند. با برابر قرار دادن چندجمله‌ی‌های مشخصه‌ی ۱۳ و ۷، یک دستگاه معادله‌ی ناخطی برپا خواهد شد، که مجهول‌های آن، عامل‌های وزنی $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ هستند. پاسخ این دستگاه را می‌توان به صورت تحلیلی به دست آورد. بر این اساس، عامل‌های وزنی مطابق روابط ۱۴ الی ۱۶ تعیین می‌شوند:

$$\theta_1 = \frac{\frac{1}{2} + \gamma - \zeta\Omega + \beta\Omega^2}{1 + 2(\gamma - 1)\zeta\Omega + \beta\Omega^2} \quad (14)$$

$$\theta_2 = -\frac{2\gamma\zeta\Omega + \beta\Omega^2}{1 + 2(\gamma - 1)\zeta\Omega + \beta\Omega^2} \quad (15)$$

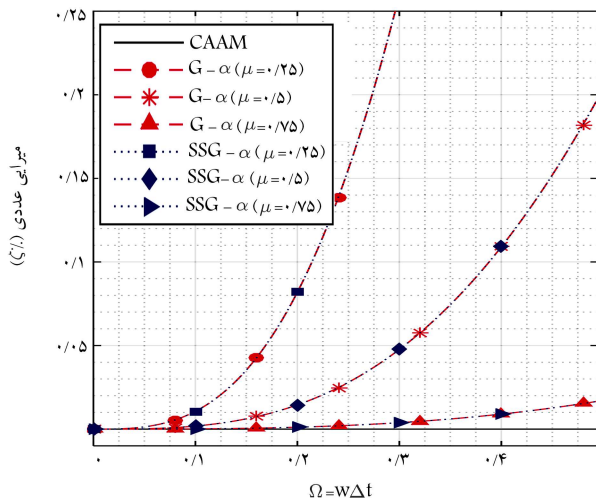
$$\theta_3 = \frac{\alpha_m + 2(\alpha_f\gamma - \alpha_m)\zeta\Omega + \alpha_f\beta\Omega^2}{1 + 2\zeta\Omega(\gamma - 1) + \beta\Omega^2} \quad (16)$$

می‌توان نشان داد که جایگذاری رابطه‌های ۱۴ الی ۱۶ در رابطه‌ی ۱۳، منجر به معادله‌ی مشخصه‌ی روش $G - \alpha$ رابطه‌ی ۷ می‌شود. از این رو، انتظار می‌رود که دو روش ویژگی‌های عددی یکسانی داشته باشند. درستی این فرض با بررسی‌های تحلیلی و عددی ارزیابی شده است.

باید اشاره کرد که فرایند توسعه‌ی رابطه‌سازی ارائه شده، استفاده از دنباله‌ی تیلور برای پیشنهاد روابط تغییرمکان و سرعت بوده است؛ با این تفاوت که در آن، عامل‌های وزنی نامعلوم θ_1 و θ_2 جای ضرایب تیلور را گرفته‌اند. هدف، تعیین عامل‌های مذکور است؛ به گونه‌ی که ویژگی‌های عددی روش پیشنهادی با روش آلفای تعمیم‌یافته یکسان شود. همچنان‌که پیشتر مشاهده شد، این پروسه منجر به یک دستگاه معادله‌ی غیرخطی می‌شود، که باید پاسخ پذیرفتنی داشته باشد. از سوی دیگر، صریح انتخاب کردن رابطه‌ی تغییرمکان ۸، موجب عدم نیاز به حل دستگاه معادله‌های هم‌زمان غیرخطی، که خود فرایندی دشوار و زمان‌بر است، در تحلیل‌های غیرخطی وابسته به تغییرمکان خواهد شد. بنابراین، دو معیار پاسخ پذیرفتنی برای عامل‌های وزنی و عدم نیاز به حل دستگاه معادلات غیرخطی در تحلیل‌های غیرخطی، پایه‌های اصلی ساختار روابط بنیادی روش پیشنهادی را تشکیل می‌دهند. باید افزود که انتخاب رابطه‌سازی صریح برای معادله‌ی سرعت ۹ منجر به پاسخ‌های ناپذیرفتنی برای عامل‌های وزنی می‌شود و به دنبال آن خطاهای عددی، به طرز چشمگیری افزایش می‌یابند.

۳. پایداری

هنگامی که از معادله‌های تفاضلی برای به دست آوردن پاسخ تقریبی معادله‌ی تعادل دینامیکی استفاده می‌شود، شرایط نخستین و فرایند محاسبات عددی در هر گام دقیق نخواهد بود؛ زیرا خطای گرد کردن و خطای برشی ناشی از تقریب کمیت‌های تغییرمکان و مشتق‌های آن، نتایج به دست آمده را دستخوش تغییر خواهد کرد.^[۳۳] این رخداد، رفته‌رفته موجب انباشتگی و رشد خطای در گام‌های فرایند انتگرال‌گیری و منجر به ناپایداری عددی می‌شود. یک الگوریتم انتگرال‌گیری، پایدار نامشروط است، اگر به ازاء شرایط نخستین و هر گام زمانی دلخواه، رشد خطای پاسخ، کران‌دار باقی بماند. از سوی دیگر، اگر به ازاء گام زمانی کوچک‌تر از یک حد معین (حد پایداری)، شرط



شکل ۳. مقایسه‌ی تغییرات میرایی عددی روش پیشنهادی و آلفای تعمیم یافته.

طیفی در بی نهایت μ ، افزایش میرایی عددی را برای روش های $G - \alpha$ و $SSG - \alpha$ به دنبال دارد و دور روش رفتار یکسانی ارائه می دهند.

۵. تعمیم به چند درجه‌ی آزادی

با توجه به وابستگی رابطه‌های بنیادی روش پیشنهادی به مشخصات سازه، که در حالت یک درجه‌ی آزادی شامل بسامد طبیعی و نسبت میرایی است، ممکن است این گونه به نظر برسد که تعمیم روش پیشنهادی به سامانه‌های چند درجه‌ی آزادی نیازمند حل مسئله‌ی مقدار ویژه و محاسبه‌ی بسامدهای طبیعی سامانه است. این رویکرد، به ویژه در مسائل بزرگ مقیاس، حجم و زمان، محاسبات چشمگیری را می طلبد؛ چرا که محاسبه‌ی مقدارهای ویژه در این گونه سامانه ها اغلب شامل فرایندهای تکراری است که ممکن است بسته به نوع مسئله، نرخ هم‌گرایی پایینی داشته و هزینه بر باشند. [۲۳] نمذچی و همکاران (۲۰۱۷)، [۱۸] با بهره‌گیری از اصل تعامد مودها نشان دادند عامل‌های مذکور را می توان فقط بر حسب ماتریس‌های سازه، یعنی جرم، سختی و میرایی بیان کرد. بر این اساس، رابطه‌های بازگشتی روش هیچ‌گونه وابستگی به مقدارها و بردارهای ویژه نخواهند داشت. با بهره‌جویی از این اصل، روابط بنیادی روش پیشنهادی در حالت چند درجه‌ی آزادی به صورت روابط ۲۰ الی ۲۲ ارائه می شوند:

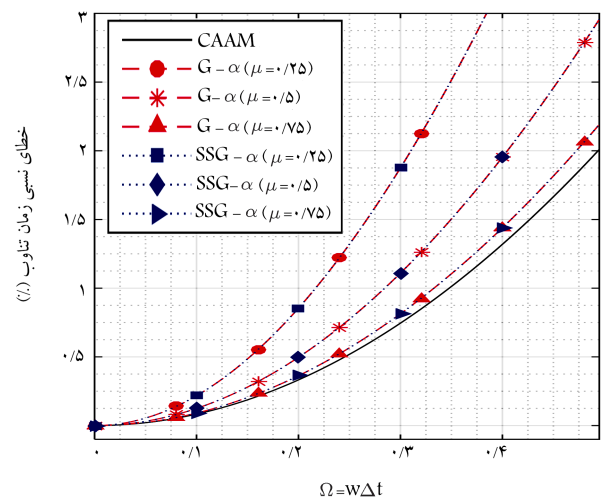
$$\{\mathbf{D}\}^{n+1} = \{\mathbf{D}\}^n + \Delta t \{\dot{\mathbf{D}}\}^n + \Delta t^2 [\Theta_1] \{\ddot{\mathbf{D}}\}^n \quad (20)$$

$$\{\dot{\mathbf{D}}\}^{n+1} = \{\dot{\mathbf{D}}\}^n + \Delta t \{\ddot{\mathbf{D}}\}^n + \Delta t [\Theta_2] \{\ddot{\mathbf{D}}\}^{n+1} \quad (21)$$

$$[\mathbf{M}] \left(([\mathbf{I}] - [\Theta_2]) \{\ddot{\mathbf{D}}\}^{n+1} + [\Theta_2] \{\ddot{\mathbf{D}}\}^n \right) + [\mathbf{C}] \{\dot{\mathbf{D}}\}^{n+1-\alpha_f} = \{\mathbf{R}\}^{n+1-\alpha_f} \quad (22)$$

که در رابطه ۲۲، $[\mathbf{I}]$ و $\{\mathbf{R}\}$ به ترتیب ماتریس همانی (واحد) و بردار نیروی نامیزان هستند. ماتریس‌های عوامل وزنی نیز مطابق روابط ۲۳ الی ۲۵ تعریف می شوند:

$$[\Theta_1] = \left([\mathbf{M}] + \Delta t (\gamma - 1) [\mathbf{C}] + \beta \Delta t^2 [\mathbf{K}] \right)^{-1} \times$$



شکل ۲. مقایسه‌ی تغییرات خطای زمان تناوب روش پیشنهادی و آلفای تعمیم یافته.

دقت شیوه‌های انتگرال‌گیری زمانی را می توان با دو معیار نسبت میرایی عددی و خطای زمان تناوب سنجید. [۲۸، ۳] نسبت میرایی عددی را می توان از رابطه‌ی ۱۸ به دست آورد: [۳۱]

$$\bar{\zeta} = - \frac{\ln(\rho([\mathbf{A}]))}{\varphi} \quad (18)$$

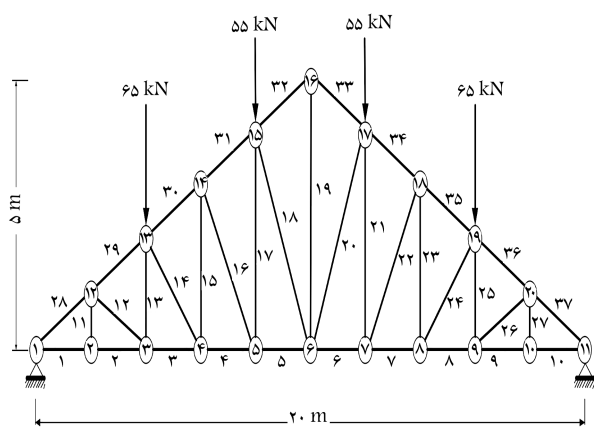
که در آن، φ آرگومان بزرگ‌ترین مقدار ویژه ماتریس بزرگ‌نمایی است. باید دانست رابطه‌ی ۱۸، که بیان‌گر میرایی عددی یا لگاریتمی است، تابعی از شعاع طیفی ماتریس بزرگ‌نمایی خواهد بود. طبق اصول دینامیک سازه، نسبت میرایی بزرگ‌تر از صفر، باعث کاهش یا فروافت تدریجی دامنه‌ی نوسان و نیز مقدارهای کمتر از صفر، سبب افزایش یا پرت‌شدگی دامنه‌ی نوسان می شود. اکنون با توجه به اینکه تابع لگاریتمی در محدوده‌ی بزرگ‌تر از ۱ همواره مثبت است، می توان گفت که نشانه‌ی دیگر ناپایداری عددی، نسبت میرایی کمتر از صفر خواهد بود.

از سوی دیگر، وجود میرایی عددی در بسامدهای پایین، می تواند خطای زیادی در پاسخ سامانه پدید آورد؛ چرا که مودهای پایین نقش برجسته‌ی در پاسخ کلی سامانه ایفا می کنند. از سوی دیگر، میرایی عددی در بسامدهای بالا می تواند سودمند باشد؛ زیرا توانایی میرا کردن نوسان‌های ساختگی ناشی از گسسته‌سازی، که بیشتر در مودهای بالا قرار دارند، را در اختیار می گذارد. [۳۲] از سوی دیگر، خطای نسبی در برآورد زمان تناوب نوسان PE، که از فرایند انتگرال‌گیری عددی ناشی می شود، از رابطه‌ی ۱۹ به دست می آید:

$$PE = \frac{\omega \Delta t}{\varphi} - 1 = \frac{\Omega}{\varphi} - 1 \quad (19)$$

اگر مقدار خطای PE کوچک‌تر از صفر باشد، فشردگی زمان تناوب و اگر بزرگ‌تر از صفر باشد، کشیدگی زمان تناوب، پاسخ عددی را از پاسخ دقیق دور خواهد کرد. در شکل ۲، تغییرات خطای زمان تناوب روش پیشنهادی، روش آلفای تعمیم یافته، و روش شتاب ثابت نیومارک (CAAM) مشاهده می شود، که مطابق آن کمترین خطای زمان تناوب مربوط به روش شتاب ثابت نیومارک بوده و با کاهش کمیت شعاع طیفی در بی نهایت در روش های $G - \alpha$ و $SSG - \alpha$ ، مقدار خطای مذکور افزایش یافته است. آشکار است که دور روش $G - \alpha$ و $SSG - \alpha$ رفتار یکسانی از خود نشان داده‌اند.

در شکل ۳، میرایی عددی روش پیشنهادی، روش آلفای تعمیم یافته و روش شتاب ثابت نیومارک (CAAM) مقایسه شده است. بر این اساس، کاهش شعاع



شکل ۴. خرپای مستوی تحت بار ضرب‌به‌ی.

- روش چانگ (SSDM):^[۲۲] که یک روش نیمه‌صریح دوگامی است و از عامل α برای تنظیم میرایی عددی بهره می‌گیرد. در پژوهش چانگ، مقدار بهینه‌ی کمیت مذکور برابر $\frac{1}{2}$ - توصیه شده است.

در همه‌ی مسائل، پاسخ دقیق یا شبه‌دقیق سامانه با استفاده از روش مرکب^[۱۴] و انتخاب گام زمانی کوچک محاسبه شده‌اند. علاوه بر این، عامل میرایی عددی در روش پیشنهادی $\mu = 0/5$ فرض شده است.

۱.۶. خرپای مستوی

در شکل ۴، پیکربندی و بارگذاری یک خرپای مستوی مشاهده می‌شود، که قبلاً توسط ون و همکارانش (۲۰۱۷)^[۲۴] تحلیل شده است.

سطح مقطع همه‌ی اعضا خرپا یکسان و برابر $0/03$ مترمربع و ضریب کشسانی مصالح برابر 4 گیگاپاسکال فرض شده است. جرم حجمی مواد نیز معادل 8000 کیلوگرم بر مترمکعب در نظر گرفته شده است. با فرضیات اخیر، کمترین زمان تناوب خرپا $0/08$ ثانیه و بیشترین آن $0/404$ ثانیه به دست آمده است. باید افزود، از روش اجزاء محدود برای مدل‌سازی فضایی سامانه استفاده و ماتریس جرم اعضا خرپا، سازگار فرض شده است.^[۸] همچنین، رفتار سازه خطی بوده و از اثرهای میرایی چشم‌پوشی شده است. با انتخاب گام زمانی $0/05$ ثانیه، تحلیل پویای عددی سامانه تحت اثر بار ضرب‌به‌ی انجام شده است. در شکل ۵، تاریخچه‌ی زمانی پاسخ قائم گره‌ی ۶ ام خرپا رسم شده است. در پژوهش حاضر مطابق نوشتار ون و همکارانش (۲۰۱۷)^[۲۴] پاسخ دقیق با استفاده از روش $G - \alpha$ و گام زمانی کوچک $0/004$ ثانیه محاسبه و مشاهده شده است که روش پیشنهادی و روش CR، پاسخ‌های بسیار نزدیکی به پاسخ دقیق ارائه داده‌اند. از سوی دیگر، روش SSDM کشیدگی بیشتری در زمان تناوب نوسان نشان داده است، که منجر به دور شدن تدریجی پاسخ از مقدار دقیق شده است. در این میان، روش Pajand دچار پرت‌شدگی از پاسخ دقیق شده است، که یکی از پدیده‌های نامطلوب در روش‌های انتگرال‌گیری عددی است.^[۲۵] اثر پدیده‌ی مذکور در پاسخ شتاب، که در شکل ۶ مشاهده می‌شود، بسیار چشمگیر است؛ به طوری که فقط روش پیشنهادی $G - \alpha$ و SSDM که میرایی عددی دارند، پاسخی پذیرفتنی نشان داده‌اند. عدم تطابق پاسخ دقیق شتاب با پاسخ روش پیشنهادی را می‌توان در این دلایل جستجو کرد:

نخست این‌که پاسخ به دست آمده با روش پیشنهادی با گام زمانی $0/05$ ثانیه محاسبه شده است، حال آن‌که پاسخ دقیق با گام کوچک $0/004$ ثانیه به دست آمده است (۱۲۵ برابر کوچک‌تر). بنابراین انباشتگی خطاها پررنگ‌تر و اختلاف

$$\left(\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma \right) [M] - \Delta t [C] + \beta \Delta t^2 [K] \right) \quad (23)$$

$$[\Theta_r] = - \left([M] + \Delta t (\gamma - 1) [C] + \beta \Delta t^2 [K] \right)^{-1} \times \left(\gamma \Delta t [C] + \beta \Delta t^2 [K] \right) \quad (24)$$

$$[\Theta_r] = \left([M] + \Delta t (\gamma - 1) [C] + \beta \Delta t^2 [K] \right)^{-1} \times \left(\alpha_m [M] + \Delta t (\alpha_f \gamma - \alpha_m) [C] + \Delta t^2 \alpha_f \beta [K] \right) \quad (25)$$

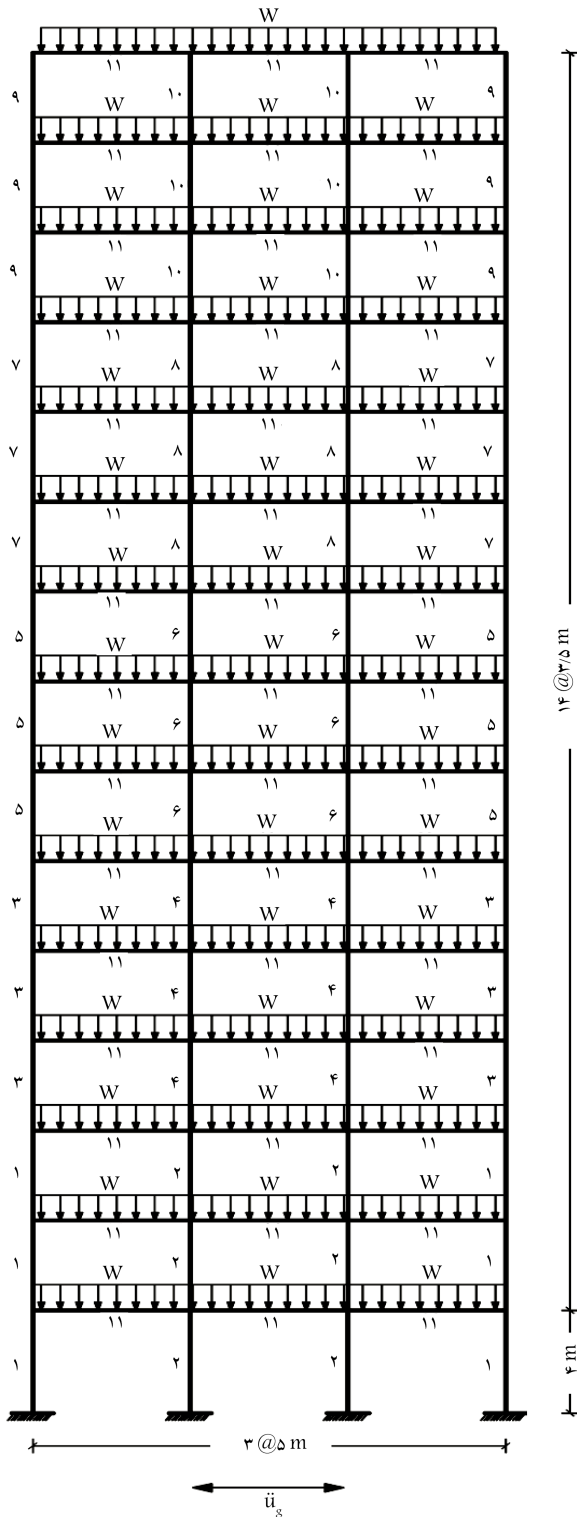
در پژوهش حاضر، ماتریس‌های $[M]$ ، $[C]$ و $[K]$ به ترتیب معرف جرم، میرایی و سختی اولیه‌ی سامانه‌ی چند درجه‌ی آزادی هستند. باید توجه داشت که در مدل‌های ناخطی، ماتریس عوامل وزنی براساس مقدارهای سختی و میرایی اولیه‌ی سامانه برپا و در طول تحلیل، در حافظه‌ی رایانه، ثابت فرض می‌شود. در غیر این صورت، با تغییر لحظه‌ی سختی وابسته به تغییر مکان یا میرایی وابسته به سرعت، عامل‌های وزنی نیز باید به‌هنگام شوند، که این فرایند، کارایی روش را کاهش می‌دهد. الگوریتم روش پیشنهادی $G - \alpha$ را می‌توان در این گام‌ها خلاصه کرد:

- ۱- محاسبه و برپایی ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی نخستین سازه؛
- ۲- انتخاب کمیت‌های گام زمانی Δt و میرایی عددی μ (شعاع طیفی در بی‌نهایت)؛
- ۳- محاسبه‌ی ماتریس عوامل وزنی از روابط ۲۳ الی ۲۵؛
- ۴- مقداردهی نخستین شمارنده‌ی گام تحلیل ($n \rightarrow 0$)؛
- ۵- محاسبه‌ی بردار تغییر مکان‌های گره‌ی بی از رابطه‌ی ۲۰؛
- ۶- صورت وجود رفتار ناخطی؛
- ۱-۶ محاسبه‌ی بردار تغییر مکان در گام $n + 1 - \alpha_f$ با استفاده از درون‌یابی خطی رابطه‌ی ۱۱؛
- ۲-۶ به‌روزرسانی بردار نیروی داخلی $\{F\}^{n+1-\alpha_f}$ با استفاده از معادلات حاکم اجزاء محدود یا ماتریس سختی $\{D\}^{n+1-\alpha_f} [K]^{n+1-\alpha_f} \{F\}^{n+1-\alpha_f}$ ؛
- ۳-۶ به‌روزرسانی بردار نیروی نامیزان: $\{R\}^{n+1-\alpha_f} = \{P\}^{n+1-\alpha_f} - \{F\}^{n+1-\alpha_f}$ ؛
- ۷- محاسبه‌ی بردار شتاب و سرعت با استفاده از روابط ۲۱ و ۲۲؛
- ۸- افزایش شمارنده‌ی گام تحلیل ($n \rightarrow n + 1$)؛
- ۹- تکرار از گام ۵، در صورتی که گام‌های تحلیل به پایان نرسیده باشند.

۶. نمونه‌های عددی

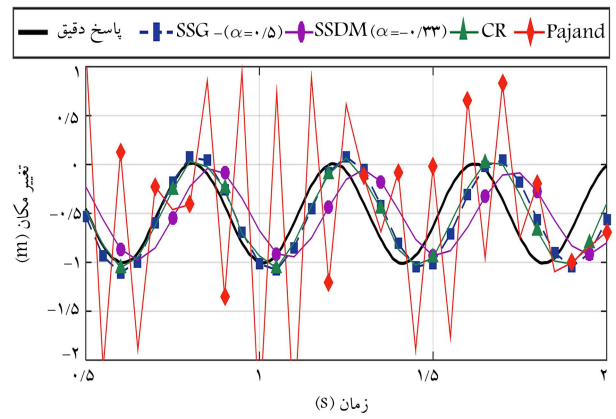
در بخش حاضر، با پیاده‌سازی الگوریتم پیشنهادی در نرم‌افزار متلب و تحلیل عددی چند مسئله، درستی رابطه‌سازی و فرضیات ارزیابی و عملکرد روش $G - \alpha$ با دیگر شیوه‌های وابسته به سازه مقایسه شده است. برای این کار، سه روش وابسته به سازه انتخاب شده‌اند:

- روش چن و ریکلز (CR):^[۲۱] که یک روش صریح تک‌گامی و فاقد هرگونه میرایی عددی است.
- روش پزند و هاشمیان (Pajand):^[۲۵] که یک روش صریح دوگامی و فاقد میرایی عددی است.

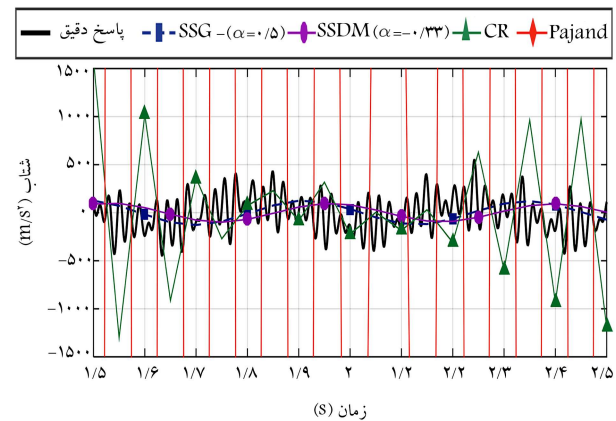


شکل ۷. هندسه و بارگذاری قاب خمشی فولادی.

شده است. بر این پایه، کمترین و بیشترین زمان تناوب سازه به ترتیب $0.15^\circ/0$ و $0.519^\circ/0$ ثانیه به دست آمده است. ماتریس میرایی لزج، متناسب با جرم و سختی و با فرض 1% نسبت میرایی برای مودهای اول و سوم، با پیروی از الگوی ریلی، برپا شده است. [۱] قاب مزبور، با اعمال شتاب پایه زلزلهی السنترو تحریک شده و پاسخ عددی آن با استفاده از روش‌های بررسی‌شده با گام زمانی $0.025^\circ/0$ ثانیه به دست



شکل ۵. تغییر مکان قائم گره ۶ خرپای مستوی با گام زمانی $0.05^\circ/0$ ثانیه.

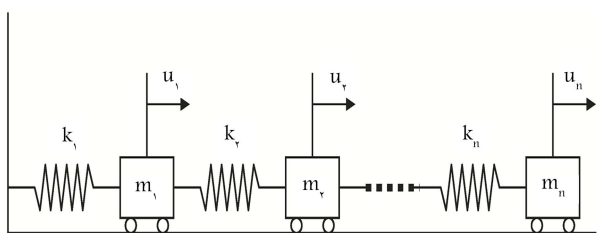


شکل ۶. شتاب قائم گره ۶ خرپای مستوی با گام زمانی $0.05^\circ/0$ ثانیه.

بیشتر نمایان است. اما دلیل مهم دیگر، مرتبه‌ی خطای رابطه‌های بنیادی روش آلفای تعمیم‌یافته است. بیشتر در تحلیل دقت و سازگاری الگوریتم آلفای تعمیم‌یافته نشان داده شده است که مرتبه‌ی خطای برشی رابطه‌ی بنیادی تغییر مکان، مساوی 2 $(O(\Delta t^2))$ بوده است؛ این در حالی است که مقدار پارامتر مزبور برای شتاب 1 $(O(\Delta t))$ بوده است. به سخن ساده‌تر و برای مثال، اگر گام زمانی در الگوریتم $G - \alpha$ نصف شود، خطای تغییر مکان $1/4$ خواهد شد؛ حال آن‌که خطای شتاب نصف می‌شود. این بدین معناست که در روش $G - \alpha$ ، رشد خطا در شتاب بیشتر از تغییر مکان است. بنابراین منطقی و قابل انتظار است که اختلاف پاسخ در شتاب بیشتر از تغییر مکان باشد. یادآوری می‌شود که دقت و پایداری با روش $G - \alpha$ یکسان شود.

۲.۶. قاب خمشی

در بخش کنونی، یک قاب خمشی فولادی ۱۵ طبقه، که توسط شتاب پایه زلزلهی السنترو تحریک شده تحلیل شده است. هندسه و بارگذاری قاب مذکور، که قبلاً توسط نم‌دچی و همکارانش (۲۰۱۷)، [۱۸] مطالعه شده است، مطابق شکل ۷ است. مقاطع تیرها و ستون‌های به کار رفته در سازهی اخیر، بر پایه‌ی شمارگذاری شکل ۷، مطابق نوشتار نم‌دچی و همکارانش (۲۰۱۷)، [۱۸] انتخاب شده‌اند. ضریب کشسانی و جرم حجمی مصالح قاب، به ترتیب 200 گیگاپاسکال و 7850 کیلوگرم بر مترمکعب فرض شده‌اند. شدت بار ثقلی w ، 50 کیلو نیوتن بر متر است. با استفاده از جزء محدود تیر ستون و ماتریس جرم سازگار، [۸] مدل اجزاء محدود قاب برپا



شکل ۱۱. دستگاه جرم و فنر n درجه‌ی آزادی.

جدول ۱. مقایسه‌ی زمان تحلیل دستگاه جرم و فنر.

روش	زمان محاسبه (ثانیه)
مرکب (شبه‌دقیق)	۳۴
$G - \alpha$	۴
$SSG - \alpha$	۱/۶

۳.۶. دستگاه جرم و فنر ناخطی

در آخرین نمونه‌ی عددی، یک مدل ساده‌ی غیرخطی از دستگاه جرم و فنر با n درجه‌ی آزادی در نظر گرفته شده است. این مدل که توسط چانگ (۲۰۱۰)، [۳۶] مطالعه شده است، در شکل ۱۱ مشاهده می‌شود.

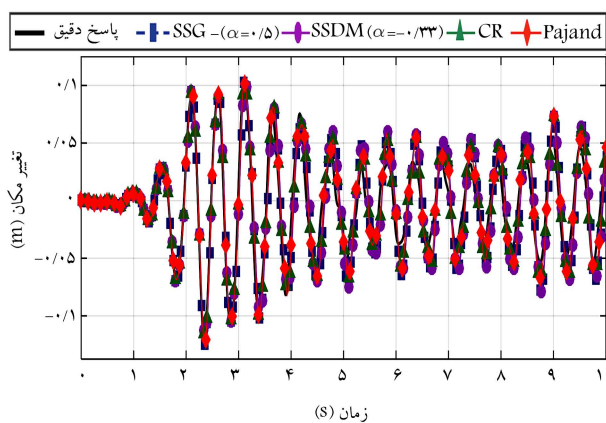
سختی فنرها در مدل کنونی، وابسته به تغییرمکان‌های گره‌ی است و از الگوی ارائه شده در رابطه‌ی ۲۶ پیروی می‌کند:

$$k_i = k_0 \left(1 - (D^{i+1} - D^i)^4 \right) \quad (26)$$

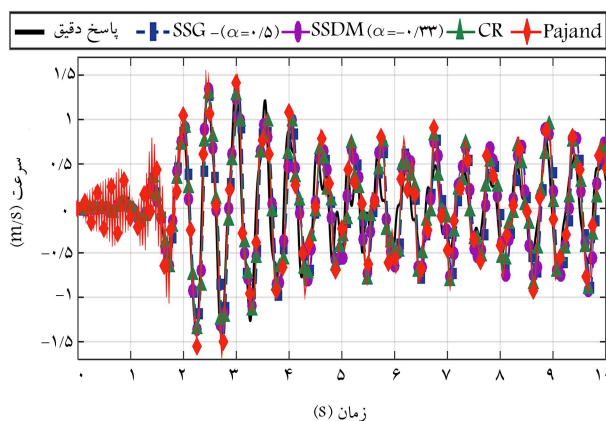
که در آن، k_i سختی لحظه‌ی فنر i ام، k_0 سختی اولیه‌ی فنرها و D_i تغییرمکان درجه‌ی آزادی i ام است. هدف از مطالعه‌ی حاضر، نمایش عملکرد و کارایی روش پیشنهادی در کاهش زمان تحلیل مسائل ناخطی چند درجه‌ی آزادی و نیز انطباق روش پیشنهادی $SSG - \alpha$ با شیوه‌ی ضمنی آلفای تعمیم‌یافته‌ی $G - \alpha$ است. با فرض مقدار جرم یکسان 100 کیلوگرم و سختی اولیه‌ی 100 مگانیوتن بر متر، دستگاه تحت شتاب تکیه‌گاهی سینوسی با دامنه‌ی نوسان 1 و بسامد π قرار گرفته است. به دلیل رفتار ناخطی، پاسخ تحلیلی وجود ندارد. از این رو، پاسخ شبه‌دقیق با استفاده از روش مرکب [۱۴] و با گام زمانی 0.1 ثانیه به دست آمده است. با گام زمانی 0.05 ثانیه، پاسخ سیستم 200 درجه‌ی آزادی توسط روش پیشنهادی و روش $G - \alpha$ محاسبه و نتایج در شکل‌های ۱۲ الی ۱۴ مشاهده می‌شوند، که مطابق آنها پاسخ عددی به دست آمده توسط دو روش اخیر منطبق بر پاسخ دقیق هستند و با یکدیگر هم‌خوانی دارند.

در جدول ۱، زمان مورد نیاز برای تحلیل سامانه‌ی جرم و فنر توسط روش‌های مختلف اندازه‌گیری شده است. براین اساس، روش پیشنهادی زمان تحلیل را به طور چشمگیری کاهش داده است، که دلیل اصلی چنین عملکرد مناسبی، صریح بودن رابطه‌سازی و عدم نیاز به فرایندهای تکراری برای حل دستگاه معادله‌ی غیرخطی در هر گام از تحلیل است.

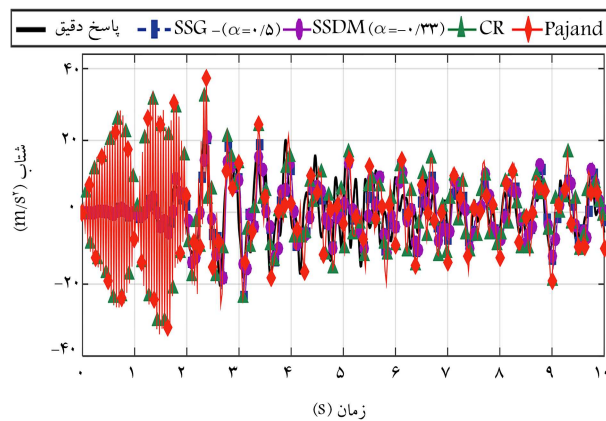
باید افزود که ویژگی نیمه صریح بودن به یک رابطه نسبت داده نمی‌شود، بلکه به مجموعه‌ی الگوریتم، شامل رابطه‌های بنیادی تغییرمکان و سرعت وابسته است. رابطه‌ی جابه‌جایی در روش پیشنهادی، یک رابطه‌ی کاملاً صریح است، که امتیاز و برتری روش پیشنهادی است؛ زیرا نیاز به استفاده از فنون تکراری برای حل دستگاه معادلات هم‌زمان ناخطی را برطرف می‌سازد. انتخاب رابطه‌سازی ضمنی برای



شکل ۸. تغییرمکان افقی بام قاب خمشی با گام زمانی 0.25 ثانیه.



شکل ۹. سرعت افقی بام قاب خمشی با گام زمانی 0.25 ثانیه.



شکل ۱۰. شتاب افقی بام قاب خمشی با گام زمانی 0.25 ثانیه.

آمده است. در شکل ۸، تاریخچه‌ی زمانی تغییرمکان افقی بام مشاهده می‌شود، که مطابق آن، همه‌ی روش‌ها عملاً به پاسخ شبه‌دقیق هم‌گرا شده‌اند و اختلاف چندانی با یکدیگر ندارند. با وجود این، شکل ۹ نشان می‌دهد که روش Pajand در گام‌های نخستین تحلیل از پاسخ دقیق دور شده است. بررسی شکل ۱۰ آشکار می‌کند که پرتشدگی اخیر از پاسخ دقیق در روش CR نیز نمود پیدا کرده و بیشتر شده است. این در حالی است که روش پیشنهادی و روش SSDM از پدیده‌ی پرتشدگی رنج نمی‌برند، که دلیل آن، داشتن میرایی عددی است.

تحلیلی استاندارد، بررسی ماتریس بزرگ‌نمایی^[۲۲ و ۳۰] است که در نوشتار حاضر کاملاً به آن پرداخته شده است. علاوه بر این، درستی تحلیل حاضر در نمونه‌های عددی نیز بررسی و ارزیابی شده است. با توجه به ساختار متفاوت روش پیشنهادی (روش نیمه صریح با عامل‌های وزنی وابسته به سازه) و روش چانگ (G-a) (روش ضمنی با عامل‌های اسکالر ثابت) تنها رویکرد مقایسه‌ی بررسی پایداری از دیدگاه تحلیلی در رژیم خطی، روش ماتریس بزرگ‌نمایی است و روش‌های مشابه مانند نگره‌ی کنترل^[۱۵] منجر به نتایجی یکسان می‌شوند، با این تفاوت که فقط پیچیدگی تحلیل را افزایش می‌دهند. باید اشاره کرد که هدف از پژوهش حاضر، گسترش یک چارچوب نوین برای خلق الگوریتم‌های تابع اولیه‌گیری عددی نیمه صریح بر پایه الگوریتم‌های ضمنی موجود بوده و از این منظر، همچنان‌که در نمونه‌های عددی نشان داده شده است، روش پیشنهادی در مقایسه با دیگر روش‌های هم‌جنس با خود (وابسته به سازه) برتری قابل توجهی داشته است. به عبارت دیگر، در کلاس الگوریتم‌های وابسته به سازه، روش ارائه شده بهتر عمل کرده است (در این جا روش چانگ یا G-a یک روش ضمنی با عامل‌های اسکالر ثابت است و نه وابسته به سازه).

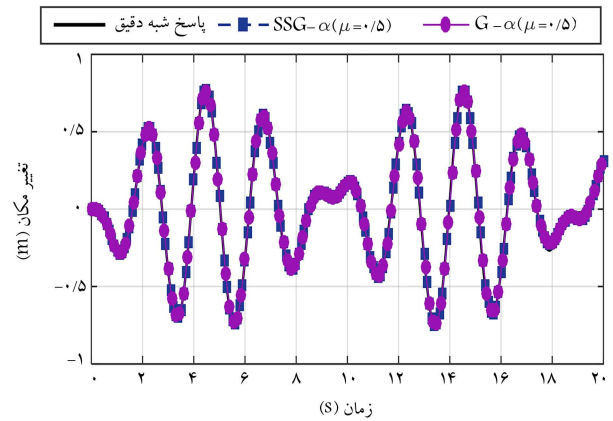
۷. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، یک روش نیمه صریح نوین بر پایه روش ضمنی آلفای تعمیم یافته $(G - \alpha)$ معرفی شده است. نخست، با فرض عامل‌های وزنی نامعلوم در ساختار رابطه‌سازی پیشنهادی، ماتریس بزرگ‌نمایی و به دنبال آن معادله‌ی مشخصه روش برپا شده است. از آن‌جا که ویژگی‌های الگوریتمی و پایداری یک روش انتگرال‌گیری عددی را می‌توان در ماتریس بزرگ‌نمایی و معادله‌ی مشخصه‌ی متناظر آن جستجو کرد، تلاش شد تا معادله‌های مشخصه‌ی دو روش یکسان شوند. فرض اخیر، منجر به تشکیل یک دستگاه معادله‌ی هم‌زمان شد؛ که با حل آن، عامل‌های وزنی نامعلوم به دست آمدند. درستی فرضیات مذکور با تحلیل پایداری و دقت و نیز حل عددی چند مدل ارزیابی شدند. در دو نمونه‌ی نخست با رفتار خطی، روش‌های مقایسه شده از دیدگاه حجم و زمان محاسبات، عملکرد مشابهی داشتند؛ با وجود این، الگوریتم‌های بدون میرایی عددی، دچار پرت‌شدگی از پاسخ دقیق و ناتوان از ارائه پاسخ دقیق بودند. در نمونه‌ی آخر، عملکرد روش پیشنهادی در تحلیل یک دستگاه ناخطی ارزیابی و با روش ضمنی متناظرش مقایسه شده است. با وجود انطباق پاسخ‌ها، روش پیشنهادی، برتری چشمگیری در مقایسه با روش ضمنی $G - \alpha$ ، از دیدگاه زمان محاسبات نشان داد؛ چرا که فن پیشنهادی ساختاری نیمه صریح دارد و نیازی به فرایندهای تکراری برای پیشبرد پاسخ به گام بعد ندارد. این در حالی است در رفتارهای ناخطی، در هر گام از تحلیل با روش‌های ضمنی، یک دستگاه معادله‌ی هم‌زمان ناخطی باید حل شود، که فرایندی زمان‌بر و پرهزینه است. بررسی نتایج، برتری روش پیشنهادی را در مقایسه با سایر روش‌های وابسته به سازه آشکار می‌کند و درستی فرضیات، رابطه‌سازی پیشنهادی را نمایان می‌سازد. پایداری نامشروط، دقت مناسب، میرایی عددی مؤثر، حجم پایین محاسبه‌ها و کاهش زمان تحلیل از ویژگی‌های بارز روش پیشنهادی است.

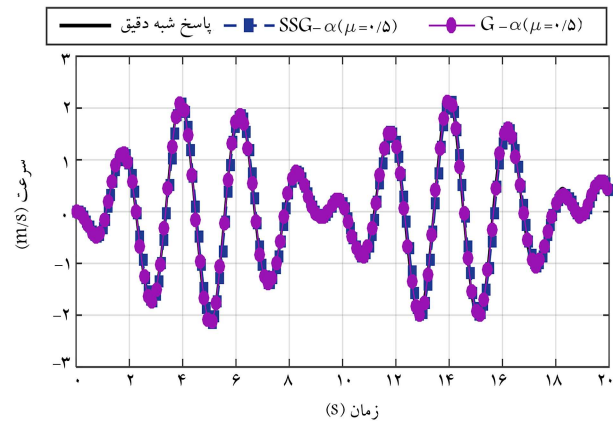
پانویس‌ها

1. Bathe

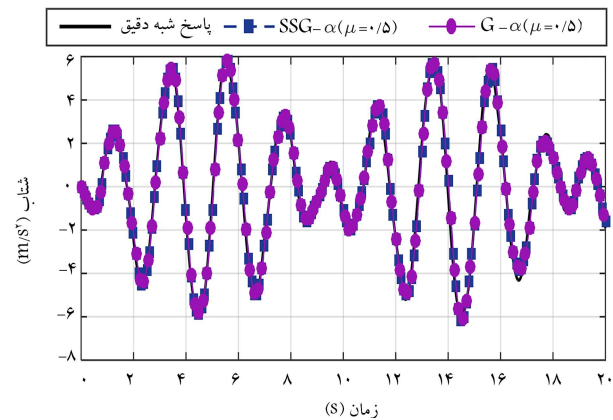
2. Newmark
3. generalized- α
4. composite
5. b-spline



شکل ۱۲. تغییر مکان درجه‌ی آزادی ۲۰° ام با گام زمانی ۰/۵ ثانیه.



شکل ۱۳. سرعت درجه‌ی آزادی ۲۰° ام با گام زمانی ۰/۵ ثانیه.



شکل ۱۴. شتاب درجه‌ی آزادی ۲۰° ام با گام زمانی ۰/۵ ثانیه.

تغییر مکان فقط باعث پیچیدگی هر چه بیشتر الگوریتم می‌شود و کارایی آن را کاهش می‌دهد. پیرامون پایداری روش پیشنهادی و روش چانگ، متداول‌ترین چارچوب

6. Chang
7. Chen
8. Ricles
9. Kolay
10. control theory

منابع (References)

1. Clough, R.W. and Penzien, J. "Dynamics of structures", *Copyright of Applied Mechanics & Materials* (1993).
2. Bathe, K.-J. "Finite element procedures", *Prentice Hall*, pp.824-829 (2006).
3. Belytschko, T. and Hughes, T.J.R. "Computational methods for transient analysis", *North-Holland (Computational Methods in Mechanics*, Amsterdam (1983).
4. Namadchi, A.H. and Alamatian, J. "Explicit dynamic analysis using Dynamic Relaxation method", *Computers & Structures*, **175**, pp. 91-99 (2016).
5. Alamatian, J. "New implicit higher order time integration for dynamic analysis", *Structural Engineering and Mechanics*, **48**(5), pp. 711-736 (2013).
6. Dokainish, M. and Subbaraj, K. "A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics—I: Explicit methods", *Computers & Structures*, **32**(6), pp. 1371-1386 (1989).
7. Subbaraj, K. and Dokainish, M. "A survey of direct time-integration methods in computational structural dynamics—II: Implicit methods", *Computers & Structures*, **32**(6), pp. 1387-1401 (1989).
8. Cook, R.D., Malkus, D.S., Plesha, M.E. and et al. "Concepts and applications of finite element analysis", *Wiley New York, 1st edition* (1974).
9. Noh, G. and Bathe, K.-J. "An explicit time integration scheme for the analysis of wave propagations", *Computers & structures*, **129**, pp. 178-193 (2013).
10. Rezaiee-Pajand, M. and Karimi-Rad, M. "A new explicit time integration scheme for nonlinear dynamic analysis", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **16**(09), pp.1-26 (2016).
11. Kim, W. "An accurate two-stage explicit time integration scheme for structural dynamics and various dynamic problems", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **120**(1), pp. 1-28 (2019).
12. Newmark, N.M. "A method of computation for structural dynamics", *Journal of the engineering mechanics division*, **85**(3), pp. 67-94 (1959).
13. Chung, J. and Hulbert, G. "A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- α method", *Journal of applied mechanics*, **60**(2), pp. 371-375 (1993).
14. Bathe, K.-J. and Baig, M.M.I. "On a composite implicit time integration procedure for nonlinear dynamics", *Computers & Structures*, **83**(31-32), pp. 2513-2524 (2005).
15. Alamatian, J. "Generalized implicit multi-time-step integration for nonlinear dynamic analysis", *Scientia Iranica, Transaction A, Civil Engineering*, **24**(6), pp. 2776-2792 (2017).
16. Rostami, S. and Shojaee, S. "A family of cubic B-spline direct integration algorithms with controllable numerical dissipation and dispersion for structural dynamics", *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*, **42**(1), pp. 17-32 (2018).
17. Ji, Y. and Xing, Y. "An optimized three-sub-step composite time integration method with controllable numerical dissipation", *Computers & Structures*, **231**, pp.1-15 (2020).
18. Namadchi, A.H., Fattahi, F. and Alamatian, J. "Semiexplicit unconditionally stable time integration for dynamic analysis based on composite scheme", *Journal of Engineering Mechanics*, **143**(10), pp.1-17 (2017).
19. Chang, S.-Y. "Explicit pseudodynamic algorithm with unconditional stability", *Journal of Engineering Mechanics*, **128**(9), pp. 935-947 (2002).
20. Chang, S.-Y. "Improved explicit method for structural dynamics", *Journal of Engineering Mechanics*, **133**(7), pp. 748-760 (2007).
21. Chen, C. and Ricles, J.M. "Development of direct integration algorithms for structural dynamics using discrete control theory", *Journal of Engineering Mechanics*, **134**(8), pp. 676-683 (2008).
22. Chang, S.Y. "A family of noniterative integration methods with desired numerical dissipation", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **100**(1), pp. 62-86 (2014).
23. Kolay, C. and Ricles, J.M. "Development of a family of unconditionally stable explicit direct integration algorithms with controllable numerical energy dissipation", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, **43**(9), pp. 1361-1380 (2014).
24. Chang, S.-Y. "Dissipative, noniterative integration algorithms with unconditional stability for mildly nonlinear structural dynamic problems", *Nonlinear Dynamics*, **79**(2), pp. 1625-1649 (2015).
25. Rezaiee-Pajand, M. and Hashemian, M. "Time integration method based on discrete transfer function", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, **16**(05), pp.1-22 (2016).
26. Namadchi, A.H., Jandaghi, E. and Alamatian, J. "A new model-dependent time integration scheme with effective numerical damping for dynamic analysis", *Engineering with Computers*, pp. 1-16 (2020).
27. Ren, Z., He, Z. and Qi, Z. "A temporal hybrid dynamic integration algorithm strategy for inelastic time history analysis of high-rise reinforced concrete structures under strong earthquakes", *The Structural Design of Tall and Special Buildings*, **29**(2), pp.1-19 (2019).
28. Bathe, K.J. and Wilson, E. "Stability and accuracy analysis of direct integration methods", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, **1**(3), pp. 283-291 (1972).
29. Burden, R. and Faires, J. "Numerical analysis", *Cengage Learning* (2004).
30. Hughes, T.J. "The finite element method: Linear static and dynamic finite element analysis", *Courier Corporation*, pp.465-468 (2012).
31. Paultre, P. "Dynamics of structures", *John Wiley & Sons* (2013).

32. Fung, T. "Numerical dissipation in time-step integration algorithms for structural dynamic analysis", *Progress in Structural Engineering and Materials*, **5**(3), pp. 167-180 (2003).
33. Namadchi, A.H. and Alamatian, J. "Dynamic relaxation method based on Lanczos algorithm", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **112**(10), pp. 1473-1492 (2017).
34. Wen, W., Wei, K., Lei, H.S. and et al. "A novel sub-step composite implicit time integration scheme for structural dynamics", *Computers & Structures*, **182**, pp. 176-186 (2017).
35. Hilber, H.M. and Hughes, T.J. "Collocation, dissipation and [overshoot] for time integration schemes in structural dynamics", *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, **6**(1), pp. 99-117 (1978).
36. Chang, S.-Y. "A new family of explicit methods for linear structural dynamics", *Computers & Structures*, **88**(11-12), pp. 755-772 (2010).

پیوست

• روش $G - \alpha$

• $SSG - \alpha$

$Q_{SSG-\alpha} = 2\zeta\Omega(\alpha_f - 1)\theta_r + \theta_r - 1 \quad (40)$	$Q_{G-\alpha} = 2(\alpha_m - 1) + 4\zeta\Omega(\alpha_f - 1)\gamma + 2(\alpha_f - 1)\beta\Omega^T \quad (27)$
$A_{11}^{SSG-\alpha} = A_{1r}^{SSG-\alpha} = Q_{SSG-\alpha} \quad (41)$	$A_{11}^{G-\alpha} = 2(\alpha_m - 1) + 4\zeta\Omega(\alpha_f - 1)\gamma + 2\alpha_f\beta\Omega^T \quad (28)$
$A_{1r}^{SSG-\alpha} = \theta_1(\theta_r - 1) + 2\zeta\Omega(\alpha_f - 1)\theta_1\theta_r \quad (42)$	$A_{1r}^{G-\alpha} = 2(\alpha_m - 1) + 4\zeta\Omega(\beta + (\alpha_f - 1)\gamma) \quad (29)$
$A_{r1}^{SSG-\alpha} = \theta_r\Omega^T \quad (43)$	$A_{r1}^{G-\alpha} = \alpha_m - 1 + 2\beta - 2\zeta\Omega(\alpha_f - 1)(2\beta - \gamma) \quad (30)$
$A_{rr}^{SSG-\alpha} = 2\zeta\Omega\theta_r\alpha_f + \theta_r(1 - \alpha_f)\Omega^T - 1 + \theta_r \quad (44)$	$A_{rr}^{G-\alpha} = 2\gamma\Omega^T \quad (31)$
$A_{rr}^{SSG-\alpha} = \theta_r(\theta_r + 1) - 1 - (\alpha_f - 1)\theta_1\theta_r\Omega^T \quad (45)$	$A_{rr}^{G-\alpha} = 2(\alpha_m - 1) + 4\zeta\Omega\alpha_f\gamma + 2(\alpha_f - 1)(\beta - \gamma)\Omega^T \quad (32)$
$A_{r1}^{SSG-\alpha} = \Omega^T \quad (46)$	$A_{r1}^{G-\alpha} = 2(\gamma - 1 + \alpha_m) + (\alpha_f - 1)(2\beta - \gamma)\Omega^T \quad (33)$
$A_{rr}^{SSG-\alpha} = 2\zeta\Omega + (1 - \alpha_f)\Omega^T \quad (47)$	$A_{r1}^{G-\alpha} = 2\Omega^T \quad (34)$
$A_{rr}^{SSG-\alpha} = \theta_r - 2\zeta\Omega(\alpha_f - 1) + \theta_1(1 - \alpha_f)\Omega^T \quad (48)$	$A_{rr}^{G-\alpha} = 4\zeta\Omega + 2(1 - \alpha_f)\Omega^T \quad (35)$
$I_1^{SSG-\alpha} = \frac{1}{Q_{SSG-\alpha}} \left(\begin{array}{l} 2\zeta\Omega(1 - \theta_r + \alpha_f(2\theta_r - 1)) + \\ (1 - \alpha_f)(\theta_1 + \theta_r)\Omega^T + \\ 2\theta_r - 2 \end{array} \right) \quad (49)$	$A_{rr}^{G-\alpha} = 2\alpha_m + 4\zeta\Omega(\alpha_f - 1)(\gamma - 1) + (\alpha_f - 1)(2\beta - 1)\Omega^T \quad (36)$
$I_r^{SSG-\alpha} = \frac{1}{Q_{SSG-\alpha}} \left(\begin{array}{l} 2\zeta\Omega(1 + \alpha_f(\theta_r - 2)) + \\ (\theta_1 - 1 - \alpha_f(2\theta_1 + \theta_r - 1))\Omega^T + \\ 2\theta_r - 1 \end{array} \right) \quad (50)$	$I_1^{G-\alpha} = \frac{1}{Q_{G-\alpha}} \left(\begin{array}{l} \Omega^T(4\beta - 2\gamma - 1 + (1 - \beta + 2\gamma)\alpha_f) + \\ 4 - 6\alpha_m - 4\zeta\Omega(1 - 2\gamma + (2\gamma - 1)\alpha_f) \end{array} \right) \quad (37)$
$I_r^{SSG-\alpha} = \frac{1}{Q_{SSG-\alpha}} \left(\begin{array}{l} \alpha_f(1 - \theta_1)\Omega^T + \theta_r - \\ 2\alpha_f\zeta\Omega \end{array} \right) \quad (51)$	$I_r^{G-\alpha} = \frac{1}{Q_{G-\alpha}} \left(\begin{array}{l} \Omega^T(2\gamma(1 - 2\alpha_f) + 2\beta(2\alpha_f - 1) - 1) + \\ 6\alpha_m - 2 + 4\zeta\Omega(1 - \gamma + (2\gamma - 2)\alpha_f) \end{array} \right) \quad (38)$
	$I_r^{G-\alpha} = \frac{1}{Q_{G-\alpha}} \left(\begin{array}{l} (1 + 2\beta - 2\gamma)\Omega^T\alpha_f + \\ 2\alpha_m + 4(\gamma - 1)\zeta\Omega\alpha_f \end{array} \right) \quad (39)$