

تحلیل استاتیکی پوسته‌ی استوانه‌یی ایزوتروپ جانبی چندلایه‌ی سه‌بُعدی متقارن با استفاده از توابع پتانسیل تغییر مکان

زهرا محمدی (دانشجوی دکتری)

بهرام نوائی‌نیا* (استاد)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

عزیزالله اردشیر بهرستاقی (استادیار)

گروه مهندسی عمران، دانشگاه علوم و فنون مازندران

مهندسی عمران شریف، پاییز ۱۴۰۱ (دوره‌ی ۲ - ۳۸، شماره‌ی ۳/۱، ص. ۳-۱۳، پژوهشی)

در نوشتار حاضر، روش تحلیلی ساده و مؤثر براساس تابع پتانسیل جابه‌جایی به منظور حل مسائل استاتیکی سه‌بُعدی پوسته‌ی استوانه‌یی ضخیم و چندلایه با مصالح کشسان خطی ایزوتروپ جانبی ارائه شده است. شرایط مرزی انتهایی پوسته از نوع تکیه‌گاه ساده انتخاب شده و پوسته تحت بارگذاری شعاعی متقارن محوری در سطوح داخلی و خارجی خود قرار گرفته است. معادلات کشسانی سه‌بُعدی به کمک تابع پتانسیل تغییر مکان ساده‌سازی شده و معادله‌ی دیفرانسیل جزئی مرتبه‌ی چهار بر حسب تابع پتانسیل را به‌وجود آورده‌اند. معادله‌ی حاکم به‌دست آمده به کمک روش جداسازی متغیرها و با ارضاء دقیق شرایط مرزی در دو انتها، تنش در سطوح داخلی و خارجی استوانه و نیز پیوستگی تنش و جابه‌جایی در فصل مشترک لایه‌ها حل و پس از تعیین تابع پتانسیل، کلیه‌ی تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها در هر نقطه از استوانه قابل محاسبه است. مقایسه‌ی نتایج با دیگر نتایج تحلیلی موجود، توافق بسیار خوب نتایج برای نسبت‌های ابعادی مختلف را نشان داده است. سپس تحلیل پارامتری صورت پذیرفته و اثر جنس، ضخامت و تعداد لایه‌ها بررسی شده است.

واژگان کلیدی: تابع پتانسیل جابه‌جایی، حل تحلیلی، مصالح ایزوتروپ جانبی، پوسته‌ی استوانه‌یی چندلایه.

۱. مقدمه

پوسته‌ها از عناصر سازه‌یی معمول در سازه‌های مهندسی، شامل: مخازن تحت فشار، لوله‌ها، سازه‌های نگهدارنده‌ی مایعات و دیگر سازه‌ها هستند^[۱] تئوری‌های مختلفی برای تحلیل پوسته‌های ایزوتروپ و غیرایزوتروپ وجود دارند که تعدادی از آن‌ها برای پوسته‌های نازک توسعه یافته‌اند و براساس فرضیات سینماتیک کیرشهوف - لاو^[۱]، که در آن خطوط مستقیم عمود به سطح میانی در پوسته تغییرشکل نیافته‌اند، بعد از تغییرشکل نیز مستقیم و عمود به سطح میانی باقی می‌مانند، بنا شده است.^[۱] با استفاده از فرضیات لاو، تئوری‌های پوسته‌ی متفاوتی توسط پژوهشگران مختلف گسترش یافته است که تعدادی از آن‌ها حالت کلی‌تری از تئوری لاو هستند. تئوری‌های پوسته‌ی تیموشنکو^[۲]، دائل^[۳]، ساندرس^[۴]، فلاگ^[۵] و ریسنر-نقدی^[۶] برخی از تئوری‌های مذکور هستند. تئوری‌های پوسته در فرضیات روابط کرنش - جابه‌جایی با یکدیگر متفاوت هستند، برخی از آن‌ها به دلیل داشتن ترم‌های مرتبه‌ی بالا و یا تغییرشکل‌های برشی و کرنش شعاعی از بقیه دقیق‌تر هستند.^[۱]

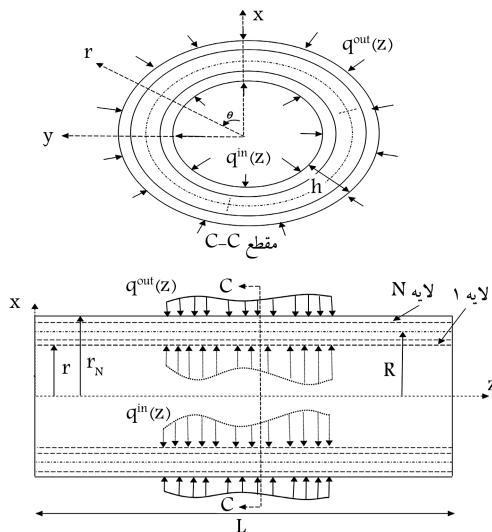
* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴۰۰/۸/۸، اصلاحیه ۱۴۰۱/۲/۴، پذیرش ۱۴۰۱/۲/۲۱.

DOI:10.24200/J30.2022.59265.3039

آینگار^[۷] و همکاران (۱۹۲۷)،^[۱] پوسته‌ی استوانه‌یی تحت بار فشاری یکنواخت را با به کارگیری تئوری کشسانی و با استفاده از تابع لاو و تئوری‌های کلاسیک تیموشنکو - دائل و فلاگ که قابلیت کاربرد برای مسائل متقارن محوری در محیط ایزوتروپ را دارند، بررسی کرده‌اند. چاندراشخارا^[۸] و همکاران (۱۹۸۲)،^[۲] مسئله‌ی پوسته‌ی استوانه‌یی ایزوتروپ جانبی با طول نامحدود تحت بار متقارن محوری را با استفاده از تابع تنش لخنیتسکی حل کرده‌اند. در ادامه، چاندراشخارا و کومار^[۹] (۱۹۹۳)،^[۵] حل دقیقی برای پوسته‌ی استوانه‌یی ایزوتروپ جانبی با طول محدود تحت بار متقارن محوری با استفاده از روش تابع جابه‌جایی ارائه شده توسط الیبوت^[۱۰] توسعه داده‌اند. شیانگ^[۱۱] و همکاران (۲۰۰۶)،^[۶] تحلیل کشسان سیلندر چندلایه‌ی توخالی دو بُعدی با مصالح ایزوتروپ را براساس حل لایه در حالت کرنش مسطح مطالعه کردند. تعدادی از مشهورترین توابع در مسائل استاتیکی تابع لایه^[۱۲] و توابع لاو برای محیط ایزوتروپ، لخنیتسکی - هو - نوواکی^[۱۳] و الیبوت برای محیط ایزوتروپ جانبی هستند. تابع پتانسیل لخنیتسکی - هو - نوواکی برای مصالح ایزوتروپ جانبی که در آن محور z عمود بر صفحه‌ی ایزوتروپی فرض می‌شود، استفاده می‌شود.^[۱۷]

mohamadi.zahraa@gmail.com
navayi@nit.ac.ir
ardeshir@ustmb.ac.ir



شکل ۱. الف) پوسته‌ی استوانه‌یی چندلایه با خواص ایزوتروپ جانبی تحت بار شعاعی متقارن محوری، ب) مقطع عرضی پوسته‌ی استوانه‌یی چندلایه.

۳. معادلات حاکم

قانون هوک تعمیم‌یافته برای مصالح ایزوتروپ جانبی در سیستم مختصات استوانه‌یی به صورت رابطه‌ی ۱ بیان می‌شود: [۱۰]

$$\begin{aligned} \sigma_{rr,i} &= A_{11,i} \frac{\partial u_i}{\partial r} + A_{12,i} \frac{u_i}{r} + A_{13,i} \frac{\partial w_i}{\partial z} \\ \sigma_{\theta\theta,i} &= A_{12,i} \frac{\partial u_i}{\partial r} + A_{11,i} \frac{u_i}{r} + A_{13,i} \frac{\partial w_i}{\partial z} \\ \sigma_{zz,i} &= A_{13,i} \frac{\partial u_i}{\partial r} + A_{13,i} \frac{u_i}{r} + A_{33,i} \frac{\partial w_i}{\partial z} \\ \sigma_{rz,i} &= A_{23,i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial z} + \frac{\partial w_i}{\partial r} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن، u_i و w_i به ترتیب مؤلفه‌های تغییرمکان در جهت‌های r و z همچنین $\sigma_{rr,i}$ ، $\sigma_{\theta\theta,i}$ ، $\sigma_{zz,i}$ و $\sigma_{rz,i}$ مؤلفه‌های تانسور تنش هستند. ضرایب $A_{11,i}$ ، $A_{12,i}$ ، $A_{13,i}$ ، $A_{23,i}$ ، $A_{33,i}$ و $A_{\alpha\beta,i}$ ثابت‌های کشسانی مصالح ایزوتروپ جانبی لایه‌ی i ام هستند که برای توصیف خواص کشسان مصالح موردنیاز هستند. ثابت‌های مذکور به ثابت‌های مهندسی E_i ، ν_i ، E_i^* ، ν_i^* و G_i^* مرتبط هستند: [۱۰]

$$\begin{aligned} A_{11,i} &= \frac{E_i \left(1 - \frac{E_i^* \nu_i^{*2}}{E_i^2} \right)}{\left(1 + \nu_i \right) \left(1 - \nu_i - 2 \frac{E_i^* \nu_i^{*2}}{E_i^2} \right)} \\ A_{12,i} &= \frac{E_i \nu_i^*}{1 - \nu_i - 2 \frac{E_i^* \nu_i^{*2}}{E_i^2}}, \quad A_{23,i} = G_i^* \\ A_{33,i} &= \frac{E_i^* (1 - \nu_i)}{1 - \nu_i - 2 \frac{E_i^* \nu_i^{*2}}{E_i^2}}, \\ A_{13,i} &= A_{11,i} - 2A_{\alpha\beta,i}, \quad A_{\alpha\beta,i} = \frac{E_i}{2(1 + \nu_i)} \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن‌ها، E_i و E_i^* به ترتیب معرف مدول یانگ در صفحه‌ی ایزوتروپی و در جهت عمود بر آن، ν_i و ν_i^* به ترتیب معرف نسبت پواسون در صفحه‌ی ایزوتروپی و در جهت عمود بر آن و G_i^* مدول برشی در صفحه‌ی عمود بر صفحه‌ی ایزوتروپی هستند. معادلات حرکت بر حسب مؤلفه‌های جابه‌جایی در محیط ایزوتروپ جانبی و

اسکندری قادی (۲۰۰۵) [۸] توابع پتانسیل لخنیتسکی - هو - نوواکی را از مسائل کشسان استاتیک به کشسان دینامیک توسعه داد. ایشان مسائل استاتیکی (۲۰۰۹) [۹] و دینامیکی (۲۰۰۸-۲۰۱۰) [۱۰-۱۲] مختلف را برای نیم‌فضا و فضای ایزوتروپ جانبی با استفاده از روش تابع پتانسیل معرفی شده در نوشتاری در سال ۲۰۰۵ [۸] حل کردند. نعمت‌زاده و همکاران (۲۰۱۱) [۱۳] توابع پتانسیل لخنیتسکی - هو - نوواکی را با موفقیت برای تحلیل صفحات ایزوتروپ جانبی نازک، نسبتاً ضخیم و ضخیم تحت بار استاتیکی دلخواه استفاده کردند. نوآنی‌نیا و همکاران (۲۰۱۷) [۱۴] راه حل سه‌بعدی برای صفحات مستطیلی ضخیم تحت بار متحرک [۱۳] و حل سه‌بعدی دقیقی برای خمش صفحات مستطیلی ضخیم FGM [۱۵] با استفاده از توابع پتانسیل توسعه داده شده در نوشتار اسکندری قادی (۲۰۰۵) [۸] ارائه داده‌اند. چندین کار مرتبط در زمینه تحلیل سه‌بعدی ارتعاش آزاد و کمانش صفحات مستطیلی توسط نوآنی‌نیا و همکاران انجام شده است. [۱۶-۱۹]

در حالی که مطالعات متعددی برای تحلیل سه‌بعدی ورق، فضا و نیم‌فضا با استفاده از تابع پتانسیل ارائه شده است؛ فقط تعداد محدودی مطالعه در ادبیات مربوط به تحلیل سه‌بعدی پوسته‌ی استوانه‌یی جدار ضخیم چندلایه‌ی ایزوتروپ و ایزوتروپ جانبی بدون فرضیات ساده‌سازی برای توزیع تنش و کرنش در راستای ضخامت وجود دارد. در نوشتار حاضر، با استفاده از تابع پتانسیل لخنیتسکی - هو - نوواکی و تئوری کشسانی سه‌بعدی، پوسته‌ی استوانه‌یی ایزوتروپ جانبی تک‌لایه و چندلایه تحت بارگذاری متقارن محوری تجزیه و تحلیل شده است. برای این منظور، با استفاده از معادلات کشسانی سه‌بعدی و تابع پتانسیل جابه‌جایی [۹] معادله‌ی دیفرانسیل حاکم پارهی مرتبه‌ی چهار به دست آمده است که به روش جداسازی متغیرها حل و براساس آن پاسخ‌های مسئله، شامل: جابه‌جایی‌ها، تنش‌ها و کرنش‌ها در هر نقطه از پوسته‌ی مورد بررسی به دست آمده است. برخلاف سایر پژوهش‌ها، یکی از مزیت‌های روش ارائه شده در پژوهش حاضر این است که نتایج حاصل بدون هرگونه محدودیتی در ضخامت پوسته و با اعمال دقیق شرایط مرزی قابل استفاده است. علاوه بر آن، تحلیل حاضر به سیلندر چندلایه در راستای ضخامت با اعمال شرایط مرزی مناسب در سطوح بین لایه‌ها قابل تعمیم است. مقایسه‌ی نتایج با دیگر نتایج تحلیلی موجود تطبیق عالی نتایج روش ارائه شده را نشان می‌دهد. در ادامه، همچنین انواع مختلف مصالح و تعدادی مسائل عملی برای پوسته‌ی استوانه‌یی تک‌لایه و چندلایه تحت بار استاتیکی تعریف شده و تأثیر پارامترهای مختلف، نظیر میزان غیرایزوتروپی و ناهمگنی پوسته و همچنین نسبت ابعادی در توزیع تنش‌ها و جابه‌جایی‌ها بررسی شده‌اند.

۲. بیان مسئله

پوسته‌ی استوانه‌یی با طول L متشکل از N لایه با خصوصیات مصالح ایزوتروپ جانبی کشسان خطی در نظر گرفته شده است. سیلندر استوانه‌یی دارای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در دو انتهای پوسته بوده و بار شعاعی متقارن محوری در سطوح داخلی و خارجی پوسته اعمال شده است. ضخامت هر لایه و ضخامت کل پوسته به ترتیب به صورت $h = \sum_{i=1}^N h_i$ و $h_i (i = 1, 2, \dots, N)$ تعریف شده است. همان‌طور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، مسئله در سیستم مختصات استوانه‌یی (r, θ, z) است که در آن محور z عمود بر صفحه‌ی ایزوتروپی، موازی مرز لایه‌ها و محور تقارن رفتاری لایه‌ها فرض شده است.

استوانه را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۱۰ نوشت:

$$\begin{aligned} u_i(r, z) &= \sigma_{zz,i}(r, z) = 0, \text{ at } z = 0, L \quad r_0 \leq r \leq r_N \\ \sigma_{rz,i}(r_0, z) &= \sigma_{rz,i}(r_N, z) = 0, \quad 0 < z < L \\ \sigma_{rr,i}(r_0, z) &= -q^{in}(z), \quad 0 \leq z \leq L \\ \sigma_{rr,i}(r_N, z) &= -q^{out}(z), \quad 0 \leq z \leq L \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن، q^{out} و q^{in} به ترتیب بارگسترده در سطوح داخلی و خارجی هستند. همچنین شرایط مرزی جابه‌جایی و تنش در سطح مشترک بین لایه‌های i و $i+1$ به صورت رابطه‌ی ۱۱ بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} u_{i+1}(r_i, z) - u_i(r_i, z) &= 0, \\ w_{i+1}(r_i, z) - w_i(r_i, z) &= 0, \\ \sigma_{rz,i+1}(r_i, z) - \sigma_{rz,i}(r_i, z) &= 0, \\ \sigma_{rr,i+1}(r_i, z) - \sigma_{rr,i}(r_i, z) &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن، برای $0 < z < L$ و $i = 1, 2, \dots, N$ برقرار است و همچنین $\sigma_{rz,i}$ و $\sigma_{rr,i}$ مؤلفه‌های تانسور تنش هستند.

۵. حل معادله‌ی حاکم

برای حل معادله‌ی ۷، از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌شود. بدین منظور تابع پتانسیل F_i به صورت رابطه‌ی ۱۲ فرض می‌شود:

$$F_i(r, z) = R_i(r) Z_i(z) \quad (12)$$

که در آن، $R_i(r)$ و $Z_i(z)$ توابع مجهول هستند. با توجه به شرایط مرزی مسئله در جهت طولی استوانه و براساس رابطه‌ی ۵، تابع ۱۳ قابل قبول است:

$$F_i(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} R_{m,i}(r) \cos \gamma_m z \quad (13)$$

با جایگذاری رابطه‌ی ۱۳ در معادله‌ی حاکم، معادله‌ی دیفرانسیل مستقل بر حسب r به صورت رابطه‌ی ۱۴ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R_{m,i}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d R_{m,i}}{dr} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 R_{m,i}}{dr^2} \\ - \gamma_m^2 \left(\frac{1}{s_{1,i}^2} + \frac{1}{s_{2,i}^2} \right) \frac{d R_{m,i}}{dr} + \frac{1}{r^2} \frac{d R_{m,i}}{dr} \\ - \frac{\gamma_m^2}{r} \left(\frac{1}{s_{1,i}^2} + \frac{1}{s_{2,i}^2} \right) \frac{d R_{m,i}}{dr} + \frac{\gamma_m^2}{s_{1,i}^2 s_{2,i}^2} R_{m,i} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

معادله‌ی دیفرانسیل حاصل دارای ۴ پاسخ مستقل است که با حل آن، رابطه‌ی (۱۵ الف و ب) برای $R_{m,i}$ به دست می‌آید:

اگر: $s_{2,i} \neq s_{1,i}$

$$\begin{aligned} R_{m,i} = c_{1,i} I(0, \gamma_m r / s_{1,i}) + c_{2,i} K(0, \gamma_m r / s_{1,i}) \\ + c_{3,i} I(0, \gamma_m r / s_{2,i}) + c_{4,i} K(0, \gamma_m r / s_{2,i}) \end{aligned} \quad (15 \text{ الف})$$

در غیاب نیروی حجمی برای هر لایه از پوسته‌ی چندلایه به صورت رابطه‌های ۳ و ۴ بیان می‌شوند: [۱۰]

$$\begin{aligned} A_{11,i} \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial r} - \frac{u_i}{r^2} \right) + (A_{12,i} + A_{22,i}) \frac{\partial^2 w_i}{\partial r \partial z} \\ + A_{22,i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial z^2} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} A_{22,i} \left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_i}{\partial r} \right) + (A_{12,i} + A_{22,i}) \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial z} \right) \\ + A_{22,i} \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

معادلات اخیر، معرف دستگاه معادلات درگیر با مشتق‌های جزئی هستند، که برای حل آن‌ها از روش توابع پتانسیل استفاده می‌شود. برای این منظور، مؤلفه‌های بردار تغییرمکان در دستگاه مختصات استوانه‌یی بر حسب تابع پتانسیل F_i که توسط لکینتسکی - هو - نوواکی معرفی شده است، به صورت رابطه‌ی ۵ بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} u_i(r, z) &= -\alpha_{2,i} \frac{\partial^2 F_i}{\partial r \partial z} \\ w_i(r, z) &= (1 + \alpha_{1,i}) \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_i \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) F_i \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن، مطابق رابطه‌ی ۶ محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,i} &= \frac{A_{\phi\phi,i} + A_{12,i}}{A_{\phi\phi,i}}, \quad \alpha_{2,i} = \frac{A_{22,i}}{A_{\phi\phi,i}}, \\ \alpha_{3,i} &= \frac{A_{22,i} + A_{12,i}}{A_{\phi\phi,i}}, \quad \beta_i = \frac{\alpha_{2,i}}{1 + \alpha_{1,i}}, \end{aligned} \quad (6)$$

با قرار دادن روابط ۵ در معادله‌های ۳ و ۴، معادله‌ی حاکم بر تابع پتانسیل برای هر یک از لایه‌ها به صورت رابطه‌ی ۷ به دست می‌آید:

$$(\pi_{1,i}, \pi_{2,i}) F_i(r, z) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (7)$$

که در آن، $\pi_{j,i}$ از رابطه‌ی ۸ به دست می‌آید:

$$\pi_{j,i} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{s_{j,i}^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad j = 1, 2 \quad (8)$$

در واقع پارامترهای $s_{1,j}$ ، $s_{2,j}$ ریشه‌های معادله‌ی ۹ هستند که در حالت کلی می‌توانند مقادیر حقیقی یا مختلط باشند، اما موهومی خالص نیستند.

$$\begin{aligned} A_{22,i} A_{22,i} s_i^2 + (A_{12,i} + 2A_{12,i} A_{22,i} - A_{11,i} A_{22,i}) s_i^2 \\ + A_{11,i} A_{22,i} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

۴. شرایط مرزی

در پژوهش حاضر، پوسته‌ی استوانه‌یی دارای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده بوده و همچنین پوسته تحت بارگذاری شعاعی در سطوح داخل و خارج قرار گرفته است؛ لذا شرایط مرزی در دو انتهای پوسته و نیز در سطح داخلی و خارجی پوسته‌ی

اگر: $s_{r,i} = s_{\nu,i}$

۶. ارضاء شرایط مرزی و پیوستگی

تابع بارگذاری شعاعی پوسته $q(z)$ می‌تواند به شکل بسط سری فوری در جهت z مطابق رابطه‌ی ۲۴ توصیف شود:

$$q(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{q}_m = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \frac{m\pi z}{L}$$

$$q_m = \frac{2}{L} \int_0^L q(z) \sin \frac{m\pi z}{L} dz \quad (24)$$

که در آن، q_m ضریب بارگذاری در فضای فوریه است. در ادامه، به منظور راحتی در نوشتن معادله‌ها و اعمال شرایط مرزی، بردار x_i به صورت رابطه‌ی ۲۵ تعریف شده است:

$$\underline{x}_i = \{U_{m,i}(r, z) W_{m,i}(r, z) S_{rz, m,i}(r, z) S_{rr, m,i}(r, z)\}^T \quad (25)$$

که در آن، بالاترین T معرف ترانهاده است. بنابراین بردار x_i در سطوح داخلی و خارجی پوسته مطابق با شرایط مرزی (رابطه‌ی ۱۰) به صورت رابطه‌های ۲۶ و ۲۷ نوشته می‌شوند:

$$\underline{x}_i^{in} = \{U_{m,1}(r_0, z) W_{m,1}(r_0, z) - \tilde{q}^{in}\}^T \quad (26)$$

$$\underline{x}_i^{out} = \{U_{m,N}(r_N, z) W_{m,N}(r_N, z) - \tilde{q}^{out}\}^T \quad (27)$$

رابطه‌ی ۲۵ که شامل مؤلفه‌های جابه‌جایی و تنش است، را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۲۸ بیان کرد:

$$\underline{x}_i = \underline{M}_i(r, z) \{c_{\nu,i} \quad c_{r,i} \quad c_{\theta,i} \quad c_{z,i}\}^T \quad (28)$$

که در آن، $M_i(r, z)$ ماتریسی 4×4 است که اعضاء آن از روابط ۱۸ الی ۲۳ قابل استخراج است. بنابراین، بردار x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) در سطوح داخلی و خارجی لایه‌ی i به صورت رابطه‌های ۲۹ و ۳۰ بیان می‌شود:

$$\underline{x}_i^{in} = \underline{M}_i(r_{i-1}, z) \{c_{\nu,i} \quad c_{r,i} \quad c_{\theta,i} \quad c_{z,i}\}^T \quad (29)$$

$$\underline{x}_i^{out} = \underline{M}_i(r_i, z) \{c_{\nu,i} \quad c_{r,i} \quad c_{\theta,i} \quad c_{z,i}\}^T \quad (30)$$

از رابطه‌ی ۳۰، بردار مجهولات $\{c_{\nu,i} \quad c_{r,i} \quad c_{\theta,i} \quad c_{z,i}\}^T$ به صورت رابطه‌ی ۳۱ به دست می‌آید:

$$\{c_{\nu,i} \quad c_{r,i} \quad c_{\theta,i} \quad c_{z,i}\}^T = \underline{M}_i^{-1}(r_i, z) \underline{x}_i^{out} \quad (31)$$

با جایگذاری ضرایب مجهول اخیر در رابطه‌ی ۲۹، به صورت رابطه‌ی ۳۲ به دست می‌آید:

$$\underline{x}_i^{in} = \underline{M}_i(r_{i-1}, z) \underline{M}_i^{-1}(r_i, z) \underline{x}_i^{out} \quad (32)$$

اگر ماتریس \underline{T}_i به صورت رابطه‌ی ۳۳ تعریف شود:

$$\underline{T}_i = \underline{M}_i(r_{i-1}, z) \underline{M}_i^{-1}(r_i, z), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (33)$$

بنابراین رابطه‌ی ۳۲ به صورت رابطه‌ی ۳۴ بیان می‌شود:

$$\underline{x}_i^{in} = \underline{T}_i \underline{x}_i^{out} \quad (34)$$

$$R_{m,i} = c_{\nu,i} I(\circ, \gamma_m r / s_{\nu,i}) + c_{r,i} K(\circ, \gamma_m r / s_{\nu,i}) + c_{\theta,i} r I(\nu, \gamma_m r / s_{\nu,i}) + c_{z,i} r K(\nu, \gamma_m r / s_{\nu,i}) \quad (15)$$

با جایگذاری رابطه‌ی ۱۵ در معادله‌ی ۱۳، رابطه‌ی ۱۶ (الف و ب) برای تابع پتانسیل F_i به دست می‌آید:

اگر $s_{r,i} \neq s_{\nu,i}$

$$F_i(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \cos \gamma_m z (c_{\nu,i} I(\circ, \gamma_m r / s_{\nu,i}) + c_{r,i} K(\circ, \gamma_m r / s_{\nu,i}) + c_{\theta,i} I(\circ, \gamma_m r / s_{r,i}) + c_{z,i} K(\circ, \gamma_m r / s_{r,i})) \quad (16 \text{ الف})$$

اگر: $s_{r,i} = s_{\nu,i}$

$$F_i(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \cos \gamma_m z (c_{\nu,i} I(\circ, \gamma_m r / s_{\nu,i}) + c_{r,i} K(\circ, \gamma_m r / s_{\nu,i}) + c_{\theta,i} r I(\nu, \gamma_m r / s_{\nu,i}) + c_{z,i} r K(\nu, \gamma_m r / s_{\nu,i})) \quad (16 \text{ ب})$$

که در آن‌ها، $c_{\nu,i}$ ، $c_{r,i}$ ، $c_{\theta,i}$ ، $c_{z,i}$ ، $c_{\nu,i}$ ، $c_{r,i}$ ، $c_{\theta,i}$ ، $c_{z,i}$ ثابت‌های مجهول هستند که با اعمال شرایط مرزی تعیین می‌شوند و $I(p, \gamma_m r / s_{j,i})$ و $K(p, \gamma_m r / s_{j,i})$ به اِزاء $j = 0, 1, 2$ به ترتیب توابع بسط اصلاح شده‌ی نوع اول و دوم از مرتبه‌ی p هستند. با جایگذاری رابطه‌ی ۱۶ در رابطه‌ی ۵ و ارضاء شرط مرزی اول (رابطه‌ی ۱۰)، رابطه‌ی ۱۷ به دست می‌آید:

$$u_i(r_i, L) = 0 \rightarrow \gamma_m = \frac{m\pi}{L}, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (17)$$

با توجه به رابطه‌ی اخیر، ضریب γ_m با تغییر مقدار پارامتر m (اعداد طبیعی)، مقادیر متفاوتی دارد. مطابق با رابطه‌ی ۱۶ و با جایگذاری در معادله‌های ۵ و ۱، مؤلفه‌های جابه‌جایی و تنش به صورت رابطه‌های ۱۸ الی ۲۳ به دست می‌آیند:

$$u_i = \sum_{m=1}^{\infty} U_{m,i}(r, z) \quad (18)$$

$$w_i = \sum_{m=1}^{\infty} W_{m,i}(r, z) \quad (19)$$

$$\sigma_{rr,i} = \sum_{m=1}^{\infty} S_{rr, m,i}(r, z) \quad (20)$$

$$\sigma_{\theta\theta,i} = \sum_{m=1}^{\infty} S_{\theta\theta, m,i}(r, z) \quad (21)$$

$$\sigma_{zz,i} = \sum_{m=1}^{\infty} S_{zz, m,i}(r, z) \quad (22)$$

$$\sigma_{rz,i} = \sum_{m=1}^{\infty} S_{rz, m,i}(r, z) \quad (23)$$

که در آن‌ها، ضرایب $S_{\theta\theta, m,i}(r, z)$ ، $S_{rr, m,i}(r, z)$ ، $W_{m,i}(r, z)$ ، $U_{m,i}(r, z)$ ، $S_{zz, m,i}(r, z)$ و $S_{rz, m,i}(r, z)$ روابطی هستند که در پیوست ارائه شده‌اند.

با استفاده از رابطه‌ی ۴۳ می‌توان ضرایب مجهول لایه‌ی آخر از پوسته‌ی استوانه‌یی چندلایه را به دست آورد و سپس به کمک رابطه‌ی بازگشتی ۴۴ که از رابطه‌ی پیوستگی ۳۵ به دست آمده است، ثابت‌های مجهول لایه‌های دیگر از پوسته‌ی چندلایه نیز تعیین می‌شوند.

$$\{c_{1,i} \quad c_{2,i} \quad c_{3,i} \quad c_{4,i}\}^T = M_i^{-1}(r_i, z) M_{i+1}(r_i, z) \{c_{1,i+1} \quad c_{2,i+1} \quad c_{3,i+1} \quad c_{4,i+1}\}^T \quad (44)$$

که در آن، $i = 1, \dots, N - 1$ با جایگذاری ضرایب مجهول در معادله‌های ۱۸ الی ۲۳، مؤلفه‌های جابه‌جایی و تنش پوسته‌ی استوانه‌یی ایزوتروپ جانبی ناهمگن با شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده به دست می‌آید. در پژوهش حاضر، به منظور حل معادله‌ها از نرم‌افزار Mathematica ۱۱/۱ استفاده شده است.

۷. نتایج عددی

۱.۷. راستی آزمایی

به منظور راستی‌آزمایی روابط به دست آمده در پژوهش حاضر و نیز کنترل محاسبات، نتایج عددی حاصل از روش استفاده شده در پژوهش حاضر، با نتایج منتشر شده در نوشتار چاندراشخارا و همکاران (۱۹۹۳)^[۵] برای پوسته‌ی استوانه‌یی تک‌لایه و سه‌لایه با مصالح ایزوتروپ جانبی تعریف شده در نوشتار اخیر و تحت بارگذاری سینوسی متقارن محوری در سطح خارجی با شدت q مقایسه شده است. در بخش حاضر، به منظور مقایسه‌ی نتایج از رابطه‌ی ۴۵ برای بی‌بعدکردن مؤلفه‌ی جابه‌جایی و تنش استفاده شده است.

$$\bar{u} = \frac{100 \times 10^{-1}}{q_0 h \left(\frac{R}{h}\right)^2}, \quad (\bar{\sigma}_{ZZ}, \bar{\sigma}_{\theta\theta}) = \frac{1}{q_0 \left(\frac{R}{h}\right)^2} (\sigma_{ZZ}, \sigma_{\theta\theta}) \quad (45)$$

در جدول ۱، نتایج پوسته‌ی استوانه‌یی تک‌لایه برای نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع میانی و $L = R$ در محدوده‌ی پوسته‌ی استوانه‌یی جدار ضخیم تا خیلی نازک مشاهده می‌شود که مطابق آن، حدوداً ۰/۲ درصد اختلاف بین نتایج برای $h/R = 0/5$ وجود دارد و هنگامی که نسبت ضخامت پوسته کاهش می‌یابد، از درصد اخیر اختلاف کاسته شده است. همچنین در جدول ۲، نتایج پوسته‌ی استوانه‌یی سه‌لایه با ضخامت متفاوت لایه‌ها $h_1 = 2h_2 = 3h_3$ برای نسبت‌های مختلف ضخامت کل به شعاع میانی پوسته ارائه شده است. مقایسه نتایج به دست آمده با نوشتار چاندراشخارا و همکاران (۱۹۹۳)^[۵] اختلاف حدود ۰/۱ درصد بین نتایج را برای $h/R = 0/2$ نشان می‌دهد و هنگامی که نسبت ضخامت به شعاع میانی پوسته کاهش یافته است، از درصد ذکر شده‌ی اختلاف کاسته شده است.

علاوه بر این، به منظور راستی‌آزمایی، نتایج حاصل از پژوهش حاضر با روش عددی اجزاء محدود به کمک نرم‌افزار ABAQUS-implicit نسخه ۲۰۲۰ مقایسه شده است. برای این منظور، در مدل‌سازی اجزاء محدود از جزء C3D۸R، که جزء ۸ گره‌یی است، استفاده شده است. شرایط تکیه‌گاهی، بارگذاری و هندسه‌ی مدل اجزاء محدود، دقیقاً با آنچه که در پژوهش حاضر به صورت تحلیلی استفاده شده است، مطابقت دارد. به منظور تعیین ابعاد مناسب برای مش‌بندی، آنالیز حساس صورت گرفته است، که به عنوان مثال، نمونه‌ی پوسته‌ی استوانه‌یی تک‌لایه با $h/R = 0/01$ شامل ۱۷۲۰۰۰ جزء است که در نمونه‌های دیگر به تناسب ابعاد

همچنین شرایط پیوستگی در مرز لایه‌ها مطابق با معادلات ۱۱ به صورت رابطه‌ی ۳۵ بیان می‌شود:

$$x_i^{out} = x_{i+1}^{in} \quad (35)$$

در نتیجه رابطه‌ی ۳۴ به صورت رابطه‌ی ۳۶ گسترش می‌یابد:

$$x_1^{in} = T_1 x_1^{out} = T_1 x_2^{in} = \dots = T_1 \dots T_N x_N^{out} \quad (36)$$

با جایگذاری x_N^{out} و x_1^{in} از روابط ۲۶ و ۳۰ در رابطه‌ی ۳۶، رابطه‌ی ۳۷ به دست می‌آید:

$$\left\{ U_{m,1}(r_0, z) W_{m,1}(r_0, z) \circ - \tilde{q}^{in} \right\}^T = T_1 \dots T_N M_N(r_N, z) \{c_{1,N} \quad c_{2,N} \quad c_{3,N} \quad c_{4,N}\}^T \quad (37)$$

اگر ماتریس $G(z)$ به صورت رابطه‌ی ۳۸ تعریف شود:

$$G(z) = T_1 \dots T_N \bar{M}_N \quad (38)$$

که در آن، \bar{M}_N مطابق رابطه‌ی ۳۹ تعیین می‌شود:

$$\bar{M}_N = M_N(r_N, z) \quad (39)$$

بنابراین معادله‌ی ۳۷ به صورت رابطه‌ی ۴۰ بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,N} \\ c_{2,N} \\ c_{3,N} \\ c_{4,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{m,1}(r_0, z) \\ W_{m,1}(r_0, z) \\ \circ \\ -\tilde{q}^{in} \end{bmatrix} \quad (40)$$

همچنین با تلفیق روابط ۲۷ و ۳۰، رابطه‌ی ۴۱ به دست می‌آید:

$$x_N^{out} = \{U_{m,N}(r_N, z) W_{m,N}(r_N, z) \circ - \tilde{q}^{out}\}^T = \bar{M}_N \{c_{1,N} \quad c_{2,N} \quad c_{3,N} \quad c_{4,N}\}^T \quad (41)$$

که می‌تواند به صورت رابطه‌ی ۴۲ نیز بیان شود:

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_{N,11} & \bar{M}_{N,12} & \bar{M}_{N,13} & \bar{M}_{N,14} \\ \bar{M}_{N,21} & \bar{M}_{N,22} & \bar{M}_{N,23} & \bar{M}_{N,24} \\ \bar{M}_{N,31} & \bar{M}_{N,32} & \bar{M}_{N,33} & \bar{M}_{N,34} \\ \bar{M}_{N,41} & \bar{M}_{N,42} & \bar{M}_{N,43} & \bar{M}_{N,44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,N} \\ c_{2,N} \\ c_{3,N} \\ c_{4,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{m,N}(r_N, z) \\ W_{m,N}(r_N, z) \\ \circ \\ -\tilde{q}^{out} \end{bmatrix} \quad (42)$$

بنابراین معادلات ۴۳ به فرم ماتریس از روابط ۴۰ و ۴۲ به دست می‌آید.

$$\begin{bmatrix} G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ \bar{M}_{N,31} & \bar{M}_{N,32} & \bar{M}_{N,33} & \bar{M}_{N,34} \\ \bar{M}_{N,41} & \bar{M}_{N,42} & \bar{M}_{N,43} & \bar{M}_{N,44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1,N} \\ c_{2,N} \\ c_{3,N} \\ c_{4,N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ \\ -\tilde{q}^{in} \\ \circ \\ -\tilde{q}^{out} \end{bmatrix} \quad (43)$$

جدول ۱. مقایسه‌ی تنش‌ها و جابه‌جایی‌های بی‌بُعد در وسط دهانه برای پوسته‌ی استوانه‌ی تک‌لایه‌ی ایزوتروپ جانبی تحت بارگذاری فشار سینوسی خارجی.

$\bar{\sigma}_{\theta\theta} _{n=r_1}$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta} _{n=r_2}$	$\bar{\sigma}_{zz} _{n=r_1}$	$\bar{\sigma}_{zz} _{n=r_2}$	$\bar{u} _{n=R}$	مرجع	h/R
-۰/۲۲۱۶	-۰/۱۱۷۲	-۱/۰۶۷۳	۰/۸۸۵۸	-۷/۶۱۲۵	[۵]	
-۰/۲۱۴۵	-۰/۱۲۳۶	-۰/۹۲۴۸	۰/۷۸۸۲	-۷/۵۹۵۱	المان محدود	۰/۵
-۰/۲۲۴۲	-۰/۱۱۷۱	-۱/۰۶۰۹	۰/۸۸۶۱	-۷/۵۹۰۴	کار حاضر	
-۰/۰۸۷۶	-۰/۰۶۴۲	-۰/۴۸۳۹	۰/۵۱۱۵	-۱/۸۸۳۰	[۵]	
-۰/۰۸۴۸	-۰/۰۶۷۸	-۰/۴۴۵۴	۰/۴۷۳۳	-۱/۸۸۳۹	المان محدود	۰/۲
-۰/۰۸۸۰	-۰/۰۶۴۰	-۰/۴۸۳۰	۰/۵۱۱۲	-۱/۸۸۰۴	کار حاضر	
-۰/۰۶۴۸	-۰/۰۵۴۲	-۰/۲۸۰۴	۰/۲۹۱۸	-۰/۷۹۴۲	[۵]	
-۰/۰۶۳۱	-۰/۰۵۶۳	-۰/۲۵۷۴	۰/۲۶۸۳	-۰/۷۹۳۷	المان محدود	۰/۱
-۰/۰۶۴۹	-۰/۰۵۴۱	-۰/۲۸۰۲	۰/۲۹۱۷	-۰/۷۹۱۸	کار حاضر	
-۰/۰۴۳۹	-۰/۰۳۹۹	-۰/۱۱۳۲	۰/۱۱۵۶	-۰/۲۸۳۹	[۵]	
-۰/۰۴۳۲	-۰/۰۴۰۷	-۰/۱۰۴۵	۰/۱۰۶۸	-۰/۲۸۴۱	المان محدود	۰/۰۵
-۰/۰۴۳۹	-۰/۰۳۹۹	-۰/۱۱۳۱	۰/۱۱۵۶	-۰/۲۸۳۸	کار حاضر	
-۰/۰۱۹۹	-۰/۰۱۹۱	۰/۰۲۲۰	۰/۰۲۲۲	-۰/۰۵۳۰	[۵]	
-۰/۰۱۹۶	-۰/۰۱۹۲	۰/۰۲۰۶	۰/۰۲۰۷	-۰/۰۵۳۰	المان محدود	۰/۰۲
-۰/۰۱۹۹	-۰/۰۱۹۱	۰/۰۲۲۰	۰/۰۲۲۲	-۰/۰۵۳۰	کار حاضر	
-۰/۰۱۰۰	-۰/۰۰۹۹	-۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۵۷	-۰/۰۱۳۶	[۵]	
-۰/۰۱۰۰	-۰/۰۰۹۹	-۰/۰۰۵۱	۰/۰۰۵۰	-۰/۰۱۳۵	المان محدود	۰/۰۱
-۰/۰۱۰۰	-۰/۰۰۹۹	-۰/۰۰۵۷	۰/۰۰۵۷	-۰/۰۱۳۶	کار حاضر	

در شکل‌های ۲ و ۳، تغییرات توابع تنش بی‌بُعد $\sigma_{rr}(r, z)$ بر حسب فاصله‌ی شعاعی بی‌بُعد $(\bar{r} = \frac{r-r_1}{r_2-r_1})$ را برای نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع میانی پوسته‌ی استوانه‌ی بی به ترتیب برای مصالح گرافیت اپوکسی و زینک در $z = L/2$ مشاهده می‌شوند. مقادیر عددی نسبت‌های h/R و R/L بر روی نمودارهای مرتبط مشخص شده است. در شکل‌های مذکور، ارضاء شرایط مرزی تنش در سطوح داخلی و خارجی پوسته در همه‌ی منحنی‌ها به خوبی مشهود است.

در شکل‌های ۴ و ۵، تغییرات توابع تنش بی‌بُعد $\sigma_{\theta\theta}(r, z)$ بر حسب فاصله‌ی شعاعی بی‌بُعد برای نسبت‌های مختلف ضخامت به شعاع میانی پوسته‌ی استوانه‌ی بی به ترتیب برای مصالح گرافیت اپوکسی و زینک مشاهده می‌شود؛ که مطابق آن‌ها، بزرگی تابع تنش $\sigma_{\theta\theta}(r, z)$ رابطه‌ی معکوس با افزایش ضخامت پوسته دارد. در شکل ۶، تغییرات توابع تنش بی‌بُعد $\sigma_{zz}(r, z)$ بر حسب فاصله‌ی شعاعی بی‌بُعد برای مصالح جدول ۳ مشاهده می‌شود؛ که مطابق آن، بیشترین و کمترین تنش $\sigma_{zz}(r, z)$ به ترتیب مربوط به گرافیت اپوکسی و زینک بوده و برای همه‌ی مصالح معرفی شده، مقدار تابع در حوالی $\bar{r} = 0/55$ تغییر علامت داده است.

در شکل ۷، تغییرات تابع جابه‌جایی شعاعی بی‌بُعد $u(r, z)$ بر حسب فاصله‌ی شعاعی بی‌بُعد برای مصالح مختلف بررسی شده مشاهده می‌شود که مطابق آن، بیشترین و کمترین جابه‌جایی شعاعی به ترتیب مربوط به گرافیت اپوکسی و زینک است. با بررسی رابطه‌ی ۵، دلیل اصلی آن را در تأثیر معکوس ضریب کشسانی

نمونه افزایش یافته است. نتایج حاصل از تحلیل در جدول‌های ۱ و ۲ ارائه شده است، که نشان‌دهنده‌ی تطابق خوب روش تحلیلی استفاده شده با روش عددی اجزاء محدود است.

۲.۷. نتایج و بحث

• پوسته‌ی استوانه‌ی تک‌لایه: مقادیر بی‌بُعد مؤلفه‌های تنش و جابه‌جایی برای ماده‌ی ایزوتروپ جانبی، شامل: گرافیت اپوکسی و زینک و همچنین ماده‌ی ایزوتروپ آلومینیوم محاسبه شده است. ثابت‌های کشسان مصالح ذکر شده در جدول ۳ ارائه شده‌اند. در بخش حاضر، توابع بی‌بُعد ذکر شده برای پوسته‌ی استوانه‌ی بی تحت بارگذاری فشار خارجی یکنواخت متقارن محوری برای مصالح فهرست شده در جدول ۳ به‌طور عددی ارزیابی شده است. برای حالتی که پوسته تحت بار فشاری یکنواخت در سطح خارجی خود قرار دارد، تابع بارگذاری به صورت رابطه‌ی ۴۶ بیان می‌شود:

$$q^{out}(z) = q_0^{out}, \quad 0 < z < l \quad (46)$$

با استفاده از رابطه‌ی ۲۴، بار شعاعی در پوسته‌ی استوانه‌ی بی را می‌توان به‌صورت بسط سری فوریه مطابق رابطه‌ی ۴۷ بیان کرد:

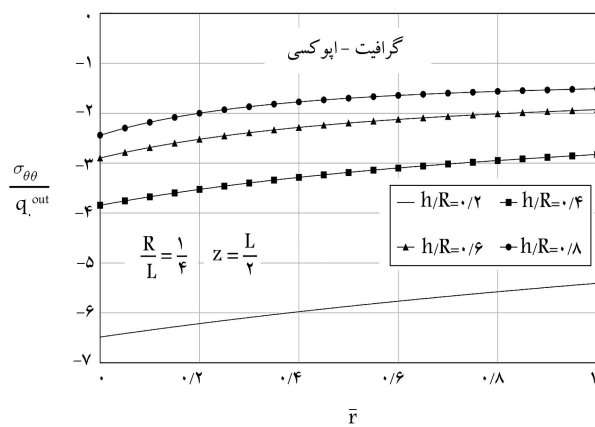
$$q^{out}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_0^{out}}{m\pi} \sin \frac{m\pi z}{L} \quad (47)$$

جدول ۲. مقایسه‌ی تنش‌ها و جابجایی‌های بی‌بعد در وسط دهانه برای پوسته‌ی استوانه‌یی سه لایه‌ی ایزوتروپ جانبی و تحت بارگذاری فشار سینوسی خارجی.

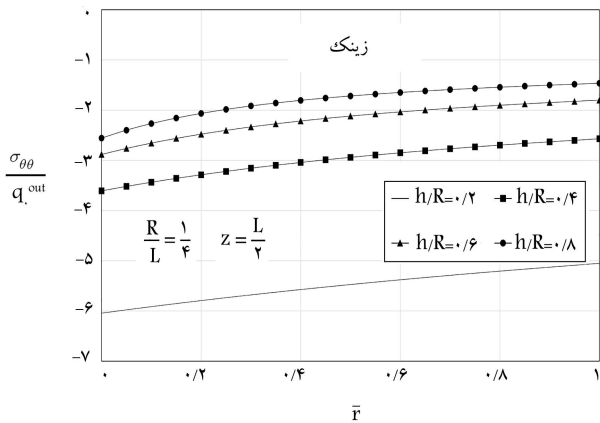
$\bar{\sigma}_{\theta\theta} _{r=r_3}$	$\bar{\sigma}_{\theta\theta} _{r=r_2}$	$\bar{\sigma}_{zz} _{r=r_3}$	$\bar{\sigma}_{zz} _{r=r_2}$	$\bar{u} _{r=R}$	مرجع	h/R
-۰/۰۸۱۹	-۰/۰۵۹۶	-۰/۴۷۵۸	۰/۴۷۲۸	-۱/۷۴۹۸	[۵]	۰/۲
-۰/۰۸۰۲	-۰/۰۶۳۷	-۰/۴۴۳۹	۰/۴۵۴۵	-۱/۷۷۰۴	المان محدود	۰/۲
-۰/۰۸۲۶	-۰/۰۵۹۵	-۰/۴۷۶۶	۰/۴۷۲۹	-۱/۷۴۷۴	کار حاضر	۰/۲
-۰/۰۵۸۲	-۰/۰۴۸۴	-۰/۲۶۲۷	۰/۲۵۴۱	-۰/۷۰۶۲	[۵]	۰/۱
-۰/۰۵۷۷	-۰/۰۵۱۰	-۰/۲۵۱۶	۰/۲۴۵۴	-۰/۷۱۹۹	المان محدود	۰/۱
-۰/۰۵۸۵	-۰/۰۴۸۴	-۰/۲۶۳۲	۰/۲۵۴۰	-۰/۷۰۶۵	کار حاضر	۰/۱
-۰/۰۳۷۰	-۰/۰۳۳۴	-۰/۰۹۷۶	۰/۹۵۳	-۰/۲۳۸۵	[۵]	۰/۰۵
-۰/۰۳۷۴	-۰/۰۳۵۲	-۰/۰۹۳۶	۰/۰۹۱۸	-۰/۲۵۵۴	المان محدود	۰/۰۵
-۰/۰۳۷۱	-۰/۰۳۳۶	-۰/۰۹۷۹	۰/۰۹۵۲	-۰/۲۳۸۶	کار حاضر	۰/۰۵

جدول ۳. ثابت‌های کشسانی مصالح (GPa).

مصالح	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{33}	A_{44}
گرافیت - اپوکسی	۱۳/۹۲	۶/۹۲	۶/۴۴	۱۶۰/۷	۷/۰۷
زینک	۱۵۸/۳۵	۳۱/۵۱	۴۷/۴۴	۶۱/۶	۴۰
آلومینیوم	۱۰۲/۲۳	۵۰/۳۵۴	۵۰/۳۵۴	۱۰۲/۲۳	۲۵/۹۴

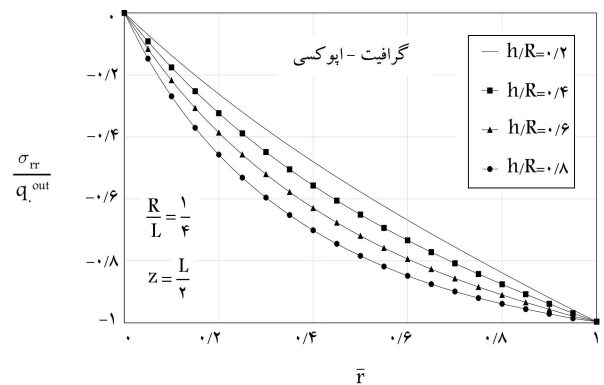


شکل ۴. تغییرات تنش محیطی بی‌بعد پوسته‌ی استوانه‌یی بر حسب فاصله‌ی شعاعی برای نسبت‌های مختلف ضخامت.

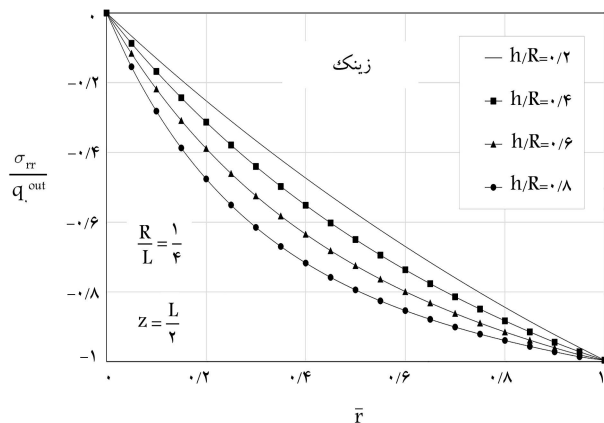


شکل ۵. تغییرات تنش محیطی بی‌بعد پوسته‌ی استوانه‌یی بر حسب فاصله‌ی شعاعی برای نسبت‌های مختلف ضخامت.

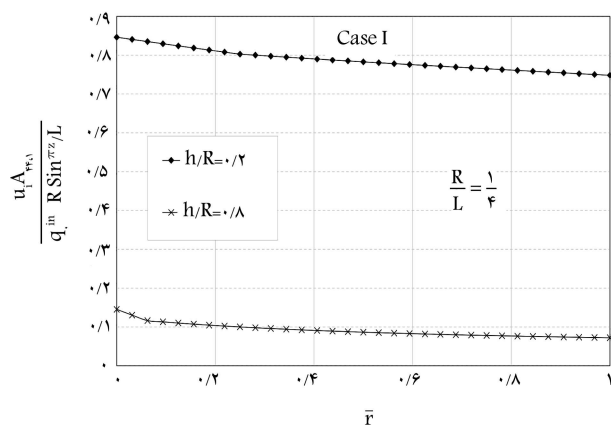
در جابه‌جایی شعاعی می‌توان یافت. همان‌طور که در جدول ۳ مشاهده می‌شود، بیشترین مقدار ضریب کشسانی A_{11} مربوط به زینک و کمترین مقدار آن مربوط به گرافیت اپوکسی بوده است. در شکل ۸، تغییرات تابع جابه‌جایی محوری بی‌بعد $w(r, z)$ در امتداد محور z



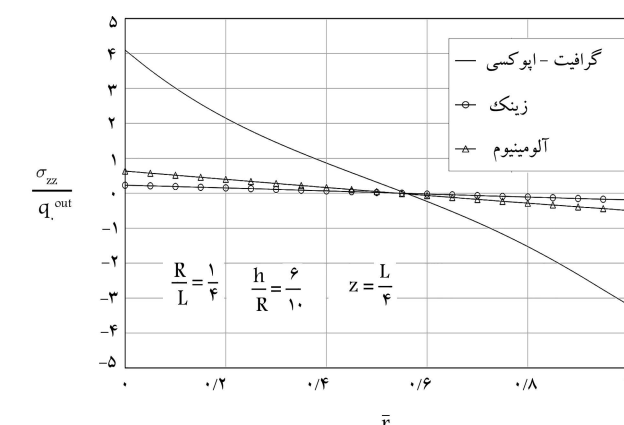
شکل ۶. تغییرات تنش شعاعی بی‌بعد پوسته‌ی استوانه‌یی بر حسب فاصله‌ی شعاعی برای نسبت‌های مختلف ضخامت.



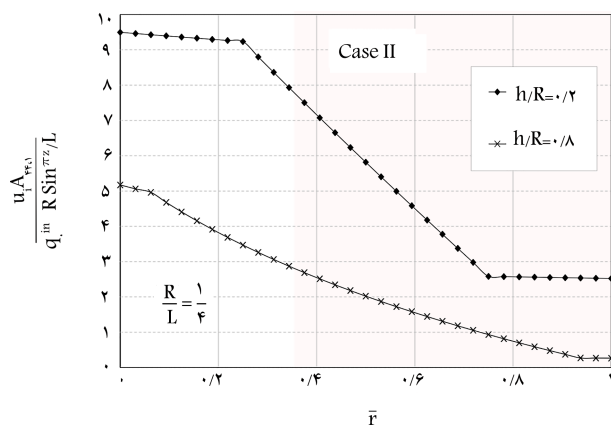
شکل ۷. تغییرات تنش شعاعی بی‌بعد پوسته‌ی استوانه‌یی بر حسب فاصله‌ی شعاعی برای نسبت‌های مختلف ضخامت.



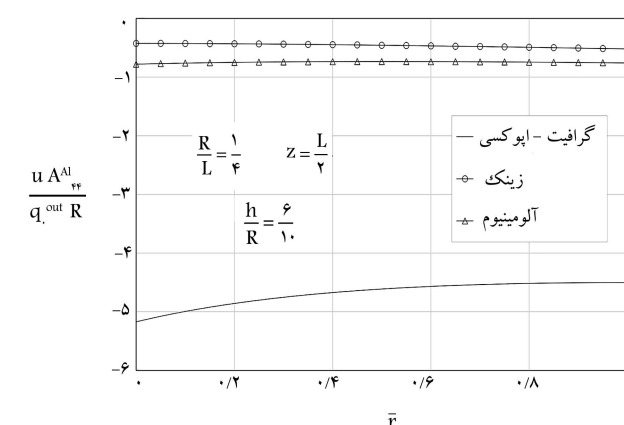
شکل ۹. تغییرات جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد بر حسب فاصله‌ی شعاعی بی‌بعد پوسته‌ی استوانه‌یی سه‌لایه.



شکل ۶. تغییرات تنش طولی بی‌بعد پوسته‌ی استوانه‌یی بر حسب فاصله‌ی شعاعی برای مصالح مختلف.



شکل ۱۰. تغییرات جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد بر حسب فاصله‌ی شعاعی بی‌بعد پوسته‌ی استوانه‌یی سه‌لایه.



شکل ۷. تغییرات جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد بر حسب فاصله‌ی شعاعی بی‌بعد پوسته‌ی استوانه‌یی برای مصالح مختلف.

استوانه‌یی سه‌لایه ارائه شده است، که در آن لایه‌های داخلی و خارجی پوسته از ماده‌ی ایزوتروپ جانبی گرافیت اپوکسی و لایه‌ی میانی آن یک بار از ماده‌ی ایزوتروپ آلومینیوم و بار دیگر از ماده‌ی ایزوتروپ فوم که ماده‌ی بسیار ضعیف است، ساخته شده باشد. لایه‌ها به گونه‌ی بی‌هم قرار گرفته‌اند که نسبت ضخامت لایه‌ی داخلی و خارجی یکسان و برابر با $h_1/R = h_2/R = 1/2$ است و نسبت ضخامت لایه‌ی میانی متغیر است، به طوری که نسبت ضخامت کلی پوسته نیز متغیر است.

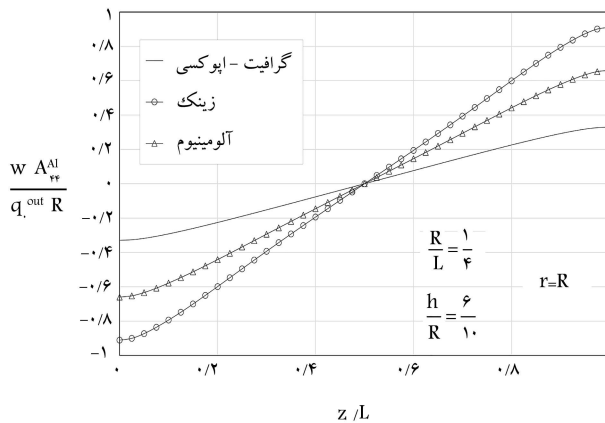
پوسته‌ی استوانه‌یی سه‌لایه تحت بارگذاری شعاعی سینوسی متقارن محوری در کل سطح داخلی خود قرار دارد و بنابراین تابع بارگذاری را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۴۸ بیان کرد:

$$q^{in}(z) = q_0^{in} \sin \frac{\pi z}{L} \quad 0 < z < l \quad (48)$$

با استفاده از معادله‌ی ۲۷، ضریب بارگذاری در فضای فوریه به فرم رابطه‌ی ۴۹ به‌دست می‌آید:

$$q_m^{in} = q_0^{in} \quad \text{for } m = 1 \quad (49)$$

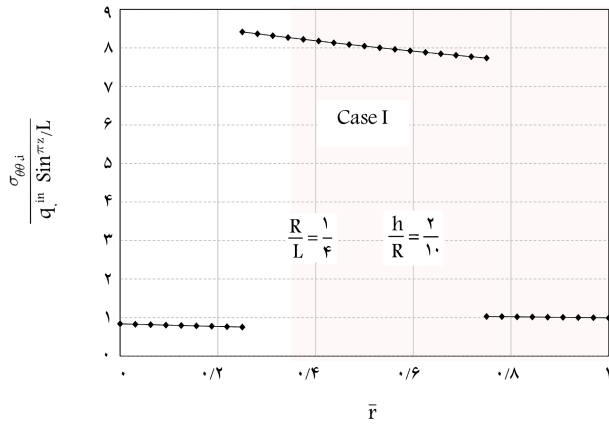
در شکل‌های ۹ و ۱۰، تغییرات تابع جابه‌جایی شعاعی بی‌بعد بر حسب فاصله‌ی شعاعی بی‌بعد پوسته به ترتیب برای حالت‌های Case I و Case II مشاهده



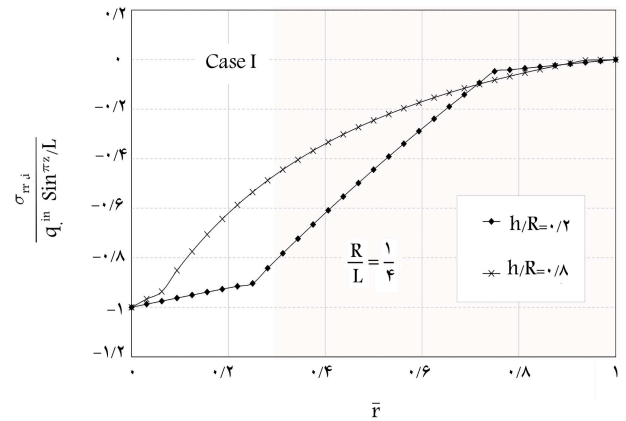
شکل ۸. تغییرات جابه‌جایی محوری بی‌بعد بر حسب فاصله‌ی طولی بی‌بعد پوسته‌ی استوانه‌یی برای مصالح مختلف.

مشاهده می‌شود. همان‌طور که در معادله‌ی ۵ مشاهده می‌شود، تابع جابه‌جایی $w(r, z)$ رابطه‌ی مستقیم با ضرایب $(1 + \alpha_1)$ و β دارد که با توجه به رابطه بین ضرایب مذکور و ضرایب کشسانی مواد، تغییرات در منحنی‌های شکل ۸ قابل انتظار است.

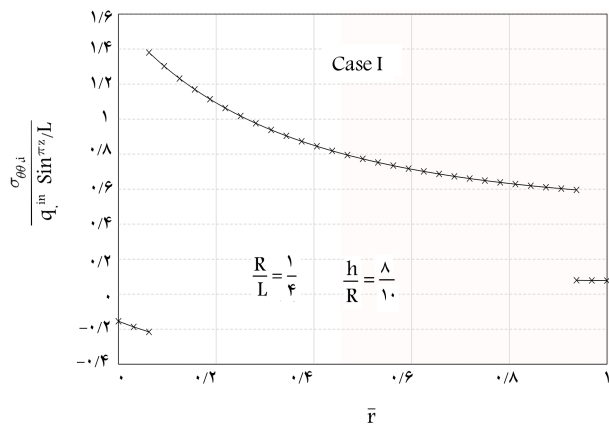
• پوسته‌ی استوانه‌یی سه‌لایه: در بخش حاضر، نتایج حاصل از پژوهش برای پوسته‌ی



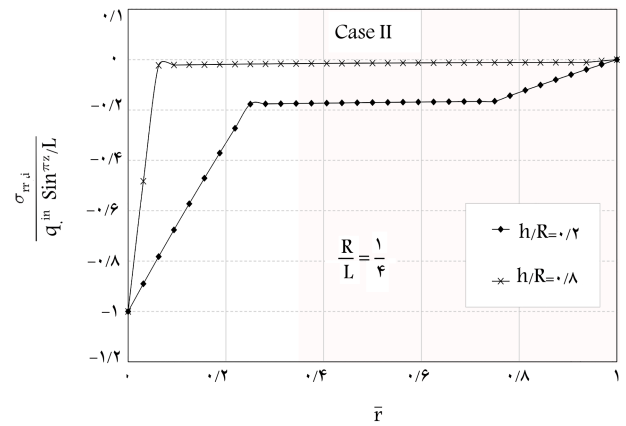
شکل ۱۳. تغییرات تنش محیطی بی بُعد بر حسب فاصله‌ی شعاعی بی بُعد پوسته‌ی استوانه‌یی سه لایه.



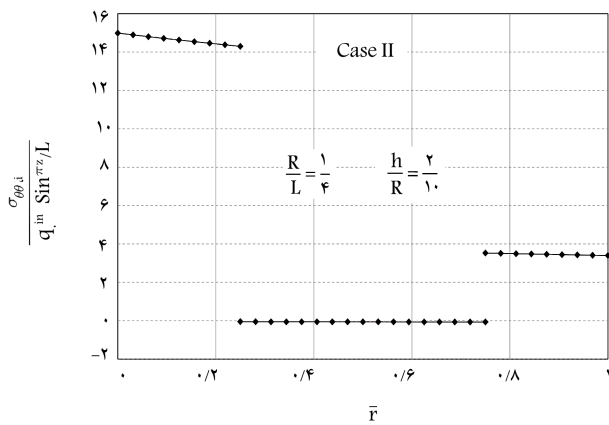
شکل ۱۱. تغییرات تنش شعاعی بی بُعد بر حسب فاصله‌ی شعاعی بی بُعد پوسته‌ی استوانه‌یی سه لایه.



شکل ۱۴. تغییرات تنش محیطی بی بُعد بر حسب فاصله‌ی شعاعی بی بُعد پوسته‌ی استوانه‌یی سه لایه.



شکل ۱۲. تغییرات تنش شعاعی بی بُعد بر حسب فاصله‌ی شعاعی بی بُعد پوسته‌ی استوانه‌یی سه لایه.



شکل ۱۵. تغییرات تنش محیطی بی بُعد بر حسب فاصله‌ی شعاعی بی بُعد پوسته‌ی استوانه‌یی سه لایه.

ارضاء شده است. در شکل‌های ۱۳ الی ۱۶، تغییرات تابع تنش محیطی بی بُعد برای پوسته با ضخامت‌های مختلف بر حسب فاصله‌ی شعاعی بی بُعد پوسته برای Case I و Case II مشاهده می‌شوند. همان‌طور که انتظار می‌رود، مقادیر تنش $\sigma_{\theta\theta}$ در مرز لایه‌ها، فاقد پیوستگی است و در همه‌ی منحنی‌ها، پرش در مقدار تنش مذکور در سطوح بین لایه‌ها مشاهده می‌شود.

جدول ۴. ترکیب مصالح در لایه‌های مختلف پوسته سه لایه.

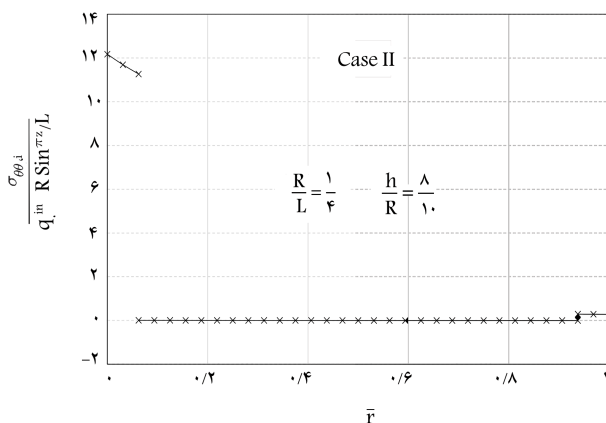
نوع	لایه	
	۳	۲
Case I	گرافیت - اپوکسی	آلومینیوم
Case II	گرافیت - اپوکسی	فوم پلی‌اورتان*

* $A_{11} = A_{22} = 117846 MPa$, $A_{12} = A_{13} = 17.77 MPa$,
 $A_{44} = A_{66} = 5385 MPa$, $\rho = 75 kg/m^3$

می‌شود که مطابق منحنی‌ها با افزایش ضخامت پوسته، مقدار جابه‌جایی کاهش یافته است. همچنین در Case I، بزرگی جابه‌جایی شعاعی در امتداد ضخامت پوسته تقریباً ثابت است و تغییر شیب غیرقابل توجهی در محل تغییر لایه مشاهده می‌شود؛ در حالی که در Case II، تغییر شیب قابل توجهی در محل تغییر لایه اتفاق افتاده است. مقایسه‌ی منحنی‌های مشابه در شکل‌های ۹ و ۱۰، تأثیر زیاد جنس لایه‌ی میانی را در جابه‌جایی شعاعی پوسته نشان می‌دهد؛ به طوری که در Case II، بزرگی جابه‌جایی در بعضی نقاط حدوداً ۵۰ برابر نقاط مرتبط در Case I بوده است.

در شکل‌های ۱۱ و ۱۲، تغییرات تابع تنش شعاعی بی بُعد σ_{rr} بر حسب فاصله‌ی شعاعی بی بُعد پوسته برای Case I و Case II در جدول ۴ مشاهده می‌شود؛ که مطابق آن‌ها، در همه‌ی منحنی‌ها، شرایط مرزی تنش و شرایط پیوستگی به خوبی

حل دقیق پوسته‌ی استوانه‌یی با تکیه‌گاه ساده با مصالح ایزوتروپ جانبی کشسان خطی ارائه شده است. پوسته‌ی استوانه‌یی تحت فشار استاتیکی قرار داشته و با ارضاء شرایط مرزی به‌طور دقیق و حل معادله‌ی دیفرانسیل حاکم، تابع پتانسیل و سپس جابه‌جایی‌ها و تنش‌ها از طریق رابطه با تابع پتانسیل به دست آمده‌اند. در ادامه، با اعمال کلیه‌ی شرایط حاکم بین لایه‌ها، شامل پیوستگی تنش و جابه‌جایی، تحلیل برای پوسته‌ی استوانه‌یی چندلایه گسترش داده شده است. در پژوهش حاضر، هیچ فرضیات ساده‌شونده‌یی در رابطه با توزیع تنش و کرنش در راستای ضخامت وجود نداشته است و بنابراین از آن می‌توان برای پوسته‌های جدار نازک تا جدار ضخیم با دقت یکسان در نتایج استفاده کرد. مقایسه‌ی نتایج با دیگر نتایج تحلیلی و همچنین نتایج اجزاء محدود، توافق بسیار عالی نتایج حاصل از روش ارائه شده را برای پارامترهای مصالح مختلف، نسبت ضخامت و نسبت ابعادی مختلف پوسته نشان می‌دهد. همچنین تأثیر تغییر در هندسه، مصالح، و نوع بارگذاری به‌طور عددی برای چند نوع مصالح پوسته‌ی ایزوتروپ و ایزوتروپ جانبی با مقادیر متفاوت و برای پوسته‌ی استوانه‌یی یک و سه لایه‌ی غیرایزوتروپ محاسبه و به شکل نمودارهایی ظاهر شده است، که در کلیه‌ی نتایج شرایط مرزی در دو انتها، سطوح بیرونی و داخلی پوسته و فصل مشترک بین لایه‌ها به‌طور کامل و دقیق ارضاء شده است.



شکل ۱۶. تغییرات تنش محیطی بی‌بعد بر حسب فاصله‌ی شعاعی بی‌بعد پوسته‌ی استوانه‌یی سه لایه.

۸. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر، با استفاده از معادلات کشسانی سه‌بعدی و تابع پتانسیل جابه‌جایی،

پانویس‌ها

1. Kirchhoff-Love
2. Timoshenko
3. Donnell
4. Sanders
5. Flugge
6. Reissner-Naghdi
7. Iyengar
8. Chandrashekhar
9. Kumar
10. Elliott
11. Xiang
12. Lamé
13. Lekhnitskii-Hu-Nowackii

منابع (References)

1. Reddy, J.N. "Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis", CRC Press (2003).
2. Iyengar, K.S. and Sebastian, V.K. "Comparison of elasticity and shell-theory solutions for finite circular cylindrical shells", *Nuclear Engineering and Design*, **21**(1), pp. 137-157 (1972).
3. Chandrashekhar, K. and Gopalakrishnan, P. "Transversely isotropic infinite cylindrical shell subjected to a radial axisymmetric line load", *Fibre Science and Technology*, **16**(4), pp. 275-293 (1982).
4. Chandrashekhar, K. and Gopalakrishnan, P. "Elasticity solution for a multilayered transversely isotropic circular cylindrical shell", *Journal of Applied Mechanics*, **49**(1), pp. 108-114 (1982).
5. Chandrashekhar, K. and Kumar, B.S. "Static analysis of a thick laminated circular cylindrical shell subjected to axisymmetric load", *Composite Structures*, **23**(1), pp. 1-9 (1993).
6. Xiang, H., Shi, Z. and Zhang, T. "Elastic analyses of heterogeneous hollow cylinders", *Mechanics Research Communications*, **33**(5), pp. 681-691 (2006).
7. Wang, M.Z. and Wang, W. "Completeness and nonuniqueness of general solutions of transversely isotropic elasticity", *International Journal of Solids and Structures*, **32**(3-4), pp. 501-513 (1995).
8. Eskandari-Ghadi, M. "A complete solution of the wave equations for transversely isotropic media", *Journal of Elasticity*, **81**(1), pp. 1-19 (2005).
9. Eskandari-Ghadi, M., Pak, R.Y. and Ardeshir-Behrestaghi, A. "Elastostatic Green's functions for an arbitrary internal load in a transversely isotropic bi-material full-space", *International Journal of Engineering Science*, **47**(4), pp. 631-641 (2009).
10. Eskandari-Ghadi, M., Pak, R.Y. and Ardeshir-Behrestaghi, A. "Transversely isotropic elastodynamic solution of a finite layer on an infinite subgrade under surface loads", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **28**(12), pp. 986-1003 (2008).
11. Eskandari-Ghadi, M. and Sattar, S. "Axisymmetric transient waves in transversely isotropic half-space", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **29**(2), pp. 347-355 (2009).

12. Eskandari-Ghadi, M., Fallahi, M. and Ardeshtir-Behrestaghi, A. "Forced vertical vibration of rigid circular disc on a transversely isotropic half-space", *Journal of Engineering Mechanics*, **136**(7), pp. 913-922 (2010).
13. Nematzadeh, M., Eskandari-Ghadi, M. and Navayi Neya, B. "An analytical solution for transversely isotropic simply supported thick rectangular plates using displacement potential functions", *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, **46**(2), pp. 121-142 (2011).
14. Nateghi Babagi, P., Navayi Neya, B. and Dehestani, M. "Three dimensional solution of thick rectangular simply supported plates under a moving load", *Meccanica*, **52**(15), pp. 3675-3692 (2017).
15. Vafakhah, Z. and Navayi Neya, B. "An exact three dimensional solution for bending of thick rectangular FGM plate", *Composites Part B: Engineering*, **156**, pp. 72-87 (2019).
16. Bakhshandeh, A., Navayi Neya, B. and Nateghi-Babagi, P. "Benchmark solution for free vibration analysis of transversely isotropic thick rectangular plates", *Acta Mechanica*, **228**(11), pp. 3977-3995 (2017).
17. Roshanbakhsh, M.Z., Tavakkoli, S.M. and Navayi Neya, B. "Free vibration of functionally graded thick circular plates: An exact and three-dimensional solution", *International Journal of Mechanical Sciences*, **188** (2020).
18. Moslemi, A., Navayi Neya, B. and Vaseghi-Amiri, J. "3-D elasticity buckling solution for simply supported thick rectangular plates using displacement potential functions", *Applied Mathematical Modelling*, **40**(11-12), pp. 5717-5730 (2016).
19. Moslemi, A., Navayi Neya, B. and Vaseghi Amiri, J. "Benchmark solution for buckling of thick rectangular transversely isotropic plates under biaxial load", *International Journal of Mechanical Sciences*, **131**, pp. 356-367 (2017).

که در آنها:

$$\kappa_{j,i} = \gamma_m A_{11,i} \alpha_{r,i} \frac{\gamma_m^\tau}{s_{j,i}^\tau} + \gamma_m^\tau A_{1r,i} \alpha_{r,i}, \quad j = 1, 2$$

$$\begin{aligned} S_{\theta\theta m,i}(r, z) = & \sin \gamma_m z \left[\xi_{1,i} (c_{1,i} I(\circ, \gamma_m r/s_{1,i}) \right. \\ & \left. + c_{r,i} K(\circ, \gamma_m r/s_{1,i})) \right. \\ & \left. + \xi_{r,i} (c_{r,i} I(\circ, \gamma_m r/s_{r,i}) + c_{\tau,i} K(\circ, \gamma_m r/s_{r,i})) \right. \\ & \left. + \frac{\gamma}{r} A_{\phi\phi,i} \alpha_{r,i} \gamma_m (c_{1,i} I'(\circ, \gamma_m r/s_{1,i}) \right. \\ & \left. + c_{r,i} K'(\circ, \gamma_m r/s_{1,i}) \right. \\ & \left. + c_{r,i} I'(\circ, \gamma_m r/s_{r,i}) + c_{\tau,i} K'(\circ, \gamma_m r/s_{r,i})) \right] \end{aligned}$$

که در آنها:

$$\begin{aligned} \xi_{j,i} = & (A_{1r,i} \alpha_{r,i} - A_{1r,i} (\lambda + \alpha_{1,i})) \\ & + \frac{\gamma_m^\tau}{s_{j,i}^\tau} + \gamma_m^\tau A_{1r,i} \alpha_{r,i}, \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{zz m,i}(r, z) = & \sin \gamma_m z \left[\varphi_{1,i} (c_{1,i} I(\circ, \gamma_m r/s_{1,i}) \right. \\ & \left. + c_{r,i} K(\circ, \gamma_m r/s_{1,i})) \right. \\ & \left. + \varphi_{r,i} (c_{r,i} I(\circ, \gamma_m r/s_{r,i}) + c_{\tau,i} K(\circ, \gamma_m r/s_{r,i})) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{j,i} = & A_{1r,i} \alpha_{r,i} \frac{\gamma_m^\tau}{s_{j,i}^\tau} - A_{rr,i} \gamma_m^\tau \\ & (\lambda + \alpha_{1,i}) \left(\frac{\lambda}{s_{j,i}^\tau} - \beta_i \right), \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{rz m,i}(r, z) = & A_{rr,i} \cos \gamma_m z \left[\varsigma_{1,i} \left(c_{1,i} I'(\circ, \gamma_m r/s_{1,i}) \right. \right. \\ & \left. \left. + c_{r,i} K'(\circ, \gamma_m r/s_{1,i}) \right) \right. \\ & \left. + \varsigma_{r,i} \left(c_{r,i} I'(\circ, \gamma_m r/s_{r,i}) \right. \right. \end{aligned}$$

پیوست

در بخش حاضر، ضرایب $S_{zz m,i}(r, z)$ ، $S_{\theta\theta m,i}(r, z)$ ، $W_{m,i}(r, z)$ ، $U_{m,i}(r, z)$ و $S_{rz m,i}(r, z)$ در رابطه‌های ۱۸ الی ۲۳، ارائه شده‌اند. اگر $s_{r,i} \neq s_{1,i}$:

$$U_{m,i}(r, z) = \alpha_{r,i} \gamma_m \sin \gamma_m z.$$

$$\begin{aligned} & \left[c_{1,i} I'(\circ, \gamma_m r/s_{1,i}) + c_{r,i} K'(\circ, \gamma_m r/s_{1,i}) \right. \\ & \left. + c_{r,i} I'(\circ, \gamma_m r/s_{r,i}) + c_{\tau,i} K'(\circ, \gamma_m r/s_{r,i}) \right] \end{aligned}$$

$$W_{m,i}(r, z) = (\lambda + \alpha_{1,i}) \cos \gamma_m z \left[\left(\frac{\gamma_m^\tau}{s_{1,i}^\tau} - \beta_i \gamma_m^\tau \right) \right.$$

$$(c_{1,i} I(\circ, \gamma_m r/s_{1,i})$$

$$\left. + c_{r,i} K(\circ, \gamma_m r/s_{1,i}) \right) \left(\frac{\gamma_m^\tau}{s_{r,i}^\tau} - \beta_i \gamma_m^\tau \right)$$

$$(c_{r,i} I(\circ, \gamma_m r/s_{r,i}) + c_{\tau,i} K(\circ, \gamma_m r/s_{r,i}))]$$

$$S_{rr m,i}(r, z) = \sin \gamma_m z \left[\kappa_{1,i} (c_{1,i} I(\circ, \gamma_m r/s_{1,i}) \right.$$

$$\left. + c_{r,i} K(\circ, \gamma_m r/s_{1,i})) \right.$$

$$\left. + \kappa_{r,i} (c_{r,i} I(\circ, \gamma_m r/s_{r,i}) + c_{\tau,i} K(\circ, \gamma_m r/s_{r,i})) \right.$$

$$\left. - \frac{\gamma}{r} A_{\phi\phi,i} \alpha_{r,i} \gamma_m (c_{1,i} I'(\circ, \gamma_m r/s_{1,i}) \right.$$

$$\left. + c_{r,i} K'(\circ, \gamma_m r/s_{1,i}) + c_{r,i} I'(\circ, \gamma_m r/s_{r,i}) \right.$$

$$\left. (c_{r,i} K'(\circ, \gamma_m r/s_{r,i})) \right]$$

که در آن: $\left. + c_{\tau,i} K'(\circ, \gamma_m r / s_{\tau,i}) \right]$

$$\kappa_{\tau,i} = r \kappa_{\lambda,i} + \frac{\nu}{r} \gamma_m (A_{\varphi\varphi,i} \alpha_{\lambda,i} - A_{\lambda\tau,i})$$

$$\begin{aligned} S_{\theta\theta m,i}(r, z) = & \sin \gamma_m z \left[\xi_{\lambda,i} (c_{\lambda,i} I(\circ, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) \right. \\ & + c_{\tau,i} K(\circ, \gamma_m r / s_{\lambda,i})) \\ & + \xi_{\tau,i} (c_{\tau,i} I(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) + c_{\tau,i} K(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i})) \\ & + \frac{\nu}{r} \gamma_m A_{\varphi\varphi,i} \alpha_{\tau,i} (c_{\lambda,i} I'(\circ, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) + c_{\tau,i} K' \\ & (\circ, \gamma_m r / s_{\lambda,i})) + \gamma_m ((A_{\lambda\tau,i} + A_{\lambda\lambda,i}) \alpha_{\tau,i} \\ & - \nu A_{\lambda\tau,i} (\lambda + \alpha_{\lambda,i})) \\ & \left. (c_{\tau,i} I'(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) + c_{\tau,i} K'(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i})) \right] \end{aligned}$$

که در آنها:

$$\varsigma_{j,i} = \frac{A_{\lambda\tau,i}}{A_{\varphi\varphi,i}} \gamma_m^\tau + (\lambda + \alpha_{\lambda,i}) \frac{\gamma_m^\tau}{s_{j,i}^\tau} \quad j = \lambda, \tau$$

اگر $s_{\tau,i} = s_{\lambda,i}$:

$$\xi_{\tau,i} = r \xi_{\lambda,i} + \frac{\nu}{r} \gamma_m (A_{\lambda\lambda,i} + A_{\lambda\tau,i}) \alpha_{\tau,i} - \frac{\nu}{r} \gamma_m A_{\lambda\tau,i}$$

$$\begin{aligned} S_{zz m,i}(r, z) = & \sin \gamma_m z \left[\varphi_{\lambda,i} (c_{\lambda,i} I(\circ, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) \right. \\ & + c_{\tau,i} K(\circ, \gamma_m r / s_{\lambda,i})) \\ & + \varphi_{\tau,i} (c_{\tau,i} I(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) + c_{\tau,i} K(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i})) \\ & + \nu \gamma_m (A_{\lambda\tau,i} \alpha_{\tau,i} - A_{\tau\tau,i} (\lambda + \alpha_{\lambda,i})) \\ & \left. (c_{\tau,i} I'(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) + c_{\tau,i} K'(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i})) \right] \end{aligned}$$

که در آن: $U_{m,i}(r, z) = \gamma_m \alpha_{\tau,i} \sin \gamma_m z \left[c_{\lambda,i} I'(\circ, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) \right.$

$$\begin{aligned} & \left. + c_{\tau,i} K'(\circ, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) \right. \\ & \left. + c_{\tau,i} (I(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) + r I'(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i})) \right. \\ & \left. + c_{\tau,i} (K(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) + r K'(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i})) \right] \\ W_{m,i}(r, z) = & (\lambda + \alpha_{\lambda,i}) \cos \gamma_m z \left[\left(\frac{\gamma_m^\tau}{s_{\lambda,i}^\tau} - \beta_i \gamma_m^\tau \right) \right. \\ & (c_{\lambda,i} I(\circ, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) \\ & + c_{\tau,i} K(\circ, \gamma_m r / s_{\lambda,i})) + \left(\frac{\gamma_m^\tau}{s_{\lambda,i}^\tau} - \beta_i \gamma_m^\tau + \frac{\nu}{r} \right) \\ & \left. (c_{\tau,i} r I(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) \right. \\ & \left. + c_{\tau,i} r K(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i})) + \nu c_{\tau,i} I'(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) \right. \\ & \left. + \nu c_{\tau,i} K'(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) \right] \end{aligned}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} \varphi_{\tau,i} = & r \varphi_{\lambda,i} + \frac{\nu}{r} \gamma_m (A_{\lambda\tau,i} \alpha_{\tau,i} - A_{\tau\tau,i} (\lambda + \alpha_{\lambda,i})) \\ S_{rz mn,i}(r, z) = & A_{\tau\tau,i} \cos \gamma_m z \left[\varsigma_{\lambda,i} (c_{\lambda,i} I'(\circ, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) \right. \\ & + c_{\tau,i} K'(\circ, \gamma_m r / s_{\lambda,i})) + \left(\gamma_m \frac{A_{\lambda\tau,i}}{A_{\varphi\varphi,i}} + \frac{\gamma_m^\tau}{s_{\lambda,i}^\tau} (\lambda + \alpha_{\lambda,i}) \right) \\ & (c_{\tau,i} r I'(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) + c_{\tau,i} r K'(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i})) \\ & \left. + \varsigma_{\tau,i} (c_{\tau,i} I(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) + c_{\tau,i} K(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i})) \right] \end{aligned}$$

$$\varsigma_{\tau,i} = \varsigma_{\lambda,i} + \frac{\nu \gamma_m^\tau}{s_{\lambda,i}^\tau} (\lambda + \alpha_{\lambda,i})$$

که

$$\begin{aligned} S_{rr m,i}(r, z) = & \sin \gamma_m z \left[\kappa_{\lambda,i} (c_{\lambda,i} I(\circ, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) \right. \\ & + c_{\tau,i} K(\circ, \gamma_m r / s_{\lambda,i})) \\ & + \kappa_{\tau,i} (c_{\tau,i} I(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) + c_{\tau,i} K(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i})) \\ & - \frac{\nu}{r} \gamma_m A_{\varphi\varphi,i} \alpha_{\tau,i} (c_{\lambda,i} I'(\circ, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) \\ & + c_{\tau,i} K'(\circ, \gamma_m r / s_{\lambda,i})) \\ & + \gamma_m (A_{\lambda\lambda,i} + A_{\lambda\tau,i}) \alpha_{\tau,i} - \nu A_{\lambda\tau,i} (\lambda + \alpha_{\lambda,i}) \\ & \left. (c_{\tau,i} I'(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i}) + c_{\tau,i} K'(\lambda, \gamma_m r / s_{\lambda,i})) \right] \end{aligned}$$