مهندسی عمران شریف، (زمستان ۱۴۰۱)
دوره‌ی ۲ - ۳۸، شماره‌ی ۴/۲، ص. ۱۵-۲۴، (پژوهشی)

Original Article

تعیین توابع پتانسیل مسائل ترموالاستودینامیک برای محیط‌های مدرج تابعی همسانگرد جانبی

سیاوش پناهی (دانشجوی دکتری)
بهرام نوائی‌نیا * (استاد)
دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل

یکی از مؤثرترین روش‌های حل مسائل سه‌بُعدی کشسانی، استفاده از توابع پتانسیل تغییرمکان است. در پژوهش حاضر، به معرفی توابع پتانسیل تغییرمکان برای حل مسائل ترموالاستودینامیک در محیط همسانگرد جانبی با مصالح مدرج تابعی پرداخته شده است. بدین منظور، ابتدا معادلات سینماتیک سه‌بُعدی و ترمودینامیک برای مصالح مدرج تابعی در محیط همسانگرد جانبی شده است، سپس با استفاده از روشی نظام‌مند در نحوه‌ی جداسازی معادلات، توابع پتانسیل تغییرمکان برای حل مسائل ترموالاستودینامیک در محیط مذکور به دست آمده است، که قابل استفاده در حل مسائل تیرها، صفحات، پوسته‌ها و محیط‌های بی‌نهایت و نیمه بی‌نهایت است. توابع پتانسیل حاصل، شامل دو تابع اسکالر F و χ است، که به ترتیب معادلات دیفرانسیل جزئی مرتبه‌های شش و دو هستند. در ادامه، برای راستی‌آزمایی پژوهش حاضر، میدان تغییرمکان ـ حرارت بر حسب توابع پتانسیل برای حالت خاص محیط همسانگرد مدرج تابعی ارائه شده است.

واژگان کلیدی: مصالح مدرج تابعی، مصالح همسانگرد جانبی، توابع پتانسیل تغییرمکان، حل دقیق، مسائل ترموالاستودینامیک.

siavash.panahi88@yahoo.com
navayi@nit.ac.ir

۱. مقدمه

مصالح مدرج تابعی، گروه جدیدی از مصالح پیشرفته‌ی کامپوزیتی با خصوصیات متغیر در یک یا چند جهت هستند. خصوصیات مکانیکی مصالح مدرج تابعی، نظیر: ضریب پواسون، مدول یانگ (کشسانی)، چگالی و مدول برشی به‌تدریج و به‌صورت پیوسته بین دو سطح تغییر می‌کنند.[۱] تغییرات خواص کشسان مواد مدرج تابعی با توجه به کسر حجمی[۱] اجزاء متفاوت تشکیل‌دهنده به‌صورت توزیع توانی، نمایی و یا دیگر توابع تعریف شده توصیف می‌شوند.[۲] مصالح مدرج تابعی اغلب به‌صورت ترکیبی از سرامیک و فلز ساخته می‌شوند، که در آن مؤلفه‌ی فلزی استحکام و مقاومت در برابر ترک‌خوردگی و مؤلفه‌ی سرامیکی مقاومت در برابر تنش‌های حرارتی را ایجاد می‌کند.[۳] به‌دلیل خواص مطلوب مصالح مدرج تابعی، این مصالح در زمینه‌های مختلف مهندسی، مانند: پزشکی، اپتیک، الکترونیک، هوا و فضا، کشتی‌سازی، مکانیک، عمران و سایر گروه‌های مهندسی که تحت تنش‌های حرارتی و پسماند زیاد قرار دارند، استفاده می‌شود. بنابراین، بررسی تحلیلی مسائل ترموکشسان برای محیط ناهمگن مدرج تابعی، اهمیت بسیار زیادی دارد.[۴]

تاکنون، مطالعات بسیاری در زمینه‌ی تحلیل مسائل ترموکشسان با استفاده از ترکیب تئوری‌های یک و دو بُعدی محیط‌های پیوسته و قانون دوم ترمودینامیک برای مصالح مدرج تابعی انجام شده است. برای نمونه، چن[۲] و همکاران (۲۰۱۸)،[۵] ارتعاش حرارتی تیرهای مدرج تابعی را برای شرایط مرزی مختلف با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی بالاتر تیر مطالعه کرده‌اند. تئوری مرتبه‌ی بالاتر با معرفی یک تابع تنش برشی عرضی جدید در راستای ضخامت تیر پیشنهاد شده است. ایشان مشخص کردند که با افزایش پارامتر ناهمگنی، بسامد طبیعی تیر کاهش می‌یابد. ترینه[۳] و همکاران (۲۰۱۶)،[۶] یک روش تحلیلی برای بررسی رفتار ارتعاشی و کمانشی تیرهای مدرج تابعی تحت بارهای مکانیکی و حرارتی یکنواخت ارائه کرده‌اند. به‌منظور در نظر گرفتن آثار حرارتی، سه مدل توزیع حرارت در راستای ضخامت، شامل: یکنواخت، خطی و غیرخطی در نظر گرفته شده است. ایشان آثار توزیع دما را در بسامدهای طبیعی بررسی کرده و دریافته‌اند که نتایج به دست آمده از حل وابسته به دما، به‌طور قابل توجهی از حل مستقل از دما به‌ویژه برای تیرهای عمیق کمتر است. واتاناساکولپونگ[۴] (۲۰۱۱)،[۷] با استفاده از تئوری تغییرشکل برشی مرتبه‌ی سوم، بار کمانش حرارتی بحرانی و بسامد ارتعاش آزاد حرارتی تیرهای مدرج تابعی را محاسبه کرد.

در زمینه‌ی تحلیل محیط‌های دوبُعدی می‌توان به مطالعه‌ی چاکراورتی و پرادان[۵] (۲۰۱۴)،[۸] اشاره کرد. ایشان در پژوهش خود به بررسی ارتعاش آزاد صفحات مدرج تابعی مستطیلی با توزیع نمایی در راستای ضخامت در محیط حرارتی پرداخته‌اند. سپس، معادلات حاکم تئوری کلاسیک صفحات را با استفاده از روش رایلی ـ ریتز مشخص کردند و دریافتند که پارامترهای بسامد با افزایش ضخامت صفحه، افزایش و با افزایش شیب، توزیع دما برای هر شرایط مرزی

---

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴۰۱/۴/۲۰، اصلاحیه ۱۴۰۱/۶/۳۰، پذیرش ۱۴۰۱/۷/۱۶.
DOI:10.24200/J30.2022.60646.3114

کاهش می‌یابد. علاوه‌بر این، بر اساس تئوری برشی مرتبه‌ی اول صفحات، ردی و چن[۶](۱۹۹۸)،[۹] پاسخ دینامیکی حرارتی صفحات مدرج تابعی را به دست آوردند. یانگ و شن[۷](۲۰۰۲)،[۱۰] نیز پاسخ تنش‌های اصلی را برای حالت ارتعاش آزاد و اجباری صفحات مدرج تابعی در محیط حرارتی ارائه کرده‌اند. پاسخ خمش ترموکشسان صفحات ساندویچی مدرج تابعی با بهره‌گیری از تئوری برشی مثلثاتی اصلاح شده توسط تونسی و همکاران (۲۰۱۳)،[۱۱] بیان شده است. اغلب کارهای مطالعاتی صورت‌گرفته در زمینه‌ی تحلیل مسائل ترموالاستودینامیک برای محیط‌های سه‌بُعدی ناهمگن به‌دلیل پیچیدگی معادلات حاصل، پژوهش‌گران به آن‌ها کمتر توجه کرده‌اند. روش توابع پتانسیل برای حل سه‌بُعدی مسائل مختلف تئوری ارتجاعی، یکی از کارآمدترین و مؤثرترین روش‌هاست. از اولین مطالعاتی که در زمینه‌ی معرفی توابع پتانسیل برای محیط‌های ناهمسان‌گرد صورت گرفته است، تابع پتانسیل لیخنیستکی[۸] است. لیخنیستکی (۱۹۶۲)، گروهی از توابع پتانسیل را جهت حل عمومی محیط‌هایی با خاصیت همسانگرد جانبی و تقارن محوری ارائه کرده است.[۱۲] هو[۹] و نوواکی[۱۰] نیز با استفاده از توابع پتانسیل به بررسی مسائل کلی همسانگرد جانبی در فضای سه بعدی پرداختند.[۱۳و۱۴] وانگ[۱۱](۱۹۹۸)، با ارزیابی مسائل کشسانی برای محیط نیمه بی‌نهایت همسانگرد جانبی، نشان داد که توابع پتانسیل لیخنیستسکی، هو و نوواکی، مجموعه‌یی کامل برای حل مسائل استاتیکی در محیط‌های همسانگرد جانبی هستند.[۱۵] اسکندری قادی (۲۰۰۵)، توابع پتانسیل ارائه شده توسط لیخنیتسکی، هو، و نوواکی را از حالت استاتیکی به دینامیکی گسترش داد.[۱۶] همچنین وی در مجموعه‌ی مطالعاتی،[۱۷-۲۰] با به‌کارگیری توابع پتانسیل پیشنهادی خود به تحلیل دینامیکی محیط‌های نیمه‌بی‌نهایت و بی‌نهایت همسانگرد جانبی پرداخته است. نعمت‌زاده و همکاران (۲۰۱۱)،[۲۱] نیز با استفاده از توابع پتانسیل مذکور، تحلیل خمش صفحات ضخیم همسانگرد جانبی را تحت بار استاتیکی یکنواخت حل کردند. همچنین نوایی‌نیا (۲۰۱۴)،[۲۲] حل دقیق سه‌بُعدی ارتعاش آزاد صفحات همسانگرد مستطیلی ضخیم بر روی تکیه‌گاه ساده را با استفاده از توابع پتانسیل تغییرمکان ارائه شده توسط اسکندری قادی تعیین کرده است. توابع پتانسیل اسکندری قادی برای تحلیل سه‌بُعدی کمانش، خمش و ارتعاش آزاد ورق‌های همسانگرد و همسانگرد جانبی نیز به‌صورت موفقیت‌آمیزی استفاده شده است.[۲۳-۲۶] در ادامه، اسکندری قادی و امیری هزاوه (۲۰۱۴)،[۲۷] تابع پتانسیل پیشنهادی اسکندری قادی (۲۰۰۵)،[۱۶] را برای محیط همسانگرد جانبی ناهمگن با توزیع نمایی در راستای ضخامت ارائه کرده‌اند. وفاخواه و نوایی‌نیا (۲۰۱۹)،[۲۸] نیز به بررسی خمش صفحات مستطیلی همسانگرد ناهمگن ضخیم با استفاده از توابع پتانسیل اسکندری قادی و امیری هزاوه (۲۰۱۴)،[۲۷] پرداخته‌اند. برای مسائل ترموالاستودینامیک در محیط همسانگرد نیز توابعی ارائه شده است، که معادلات درگیر شده‌ی حرارت را به معادلات مجزا تبدیل می‌کند.[۲۹و۳۰] فراتی و همکاران (۲۰۱۳)،[۳۱] توابع پتانسیل خود را برای بررسی مسائل ترموالاستودینامیک در محیط همسانگرد جانبی ارائه کرده‌اند. تابع پتانسیل پیشنهادی فراتی و همکاران، توسط اسکندری و همکاران (۲۰۱۴ و ۲۰۱۵) برای بررسی مسائل مختلف ترموالاستودینامیک در محیط نیمه بی‌نهایت همسانگرد جانبی استفاده شده است.[۳۲-۳۵]

با توجه به اطلاعات موجود، تاکنون تابع پتانسیل تغییرمکان برای تحلیل مسائل ترموالاستودینامیک در محیط همسانگرد جانبی ناهمگن مدرج تابعی ارائه نشده است. در صورتی که فرض ناهمگن بودن مصالح ناهمسانگرد در یک فضای سه‌بُعدی در نظر گرفته شود، تحلیل مسئله، دشوار و طولانی خواهد شد. هدف از پژوهش حاضر، ارائه‌ی میدان جابه‌جایی و حرارت برای مسائل ترموالاستودینامیک در محیط همسانگرد جانبی است، که محور کشسان ماده، همان محور تقارن گرمایی است. همچنین در حالت خاص، راستی‌آزمایی لازم برای توابع پتانسیل به دست آمده انجام شده است.

۲. مصالح مدرج تابعی

همان‌طور که قبلاً اشاره شده است، مصالح مدرج تابعی، یک گروه جدید از مواد مرکب[۱۲] هستند، که در آن‌ها، ترکیب و ساختار ماده به‌تدریج تغییر می‌کند و در نتیجه، در خواص ماده نیز تغییرات تدریجی ایجاد می‌شود. به‌عبارت دیگر، ریزساختارهای تشکیل‌دهنده‌ی مواد مرکب در یک راستا به‌صورت پیوسته و تدریجی از یک ماده‌ی مشخص به سمت ماده‌یی کاملاً متفاوت میل می‌کنند. به‌عنوان نمونه، مدول کشسانی، چگالی و ضریب انبساط حرارتی در مواد مدرج تابعی، به‌صورت پیوسته از سطحی به سطح دیگر در حال تغییر است. به‌دلیل تغییرات پیوسته در خواص مواد مذکور، مشکل تغییرات ناگهانی خواص در سطح تماس مواد مرکب در مواد مدرج تابعی وجود ندارد و منجر به توزیع تنش پیوسته خواهد شد.[۳۶]

۱.۲. مدل‌های ریاضی توزیع مشخصات مواد مدرج تابعی

برای تحلیل محیط ناهمگن مدرج تابعی، باید چگونگی توزیع مشخصات ماده در آن تعیین شود. بدین منظور، مدل‌های ریاضی مختلفی توسط پژوهش‌گران برای توصیف تغییرات خصوصیات مواد مدرج تابعی مطرح شده است. در بیشتر مدل‌های ریاضی ذکر شده، فرض می‌شود که مشخصات ماده در یک جهت متغیر و در جهت‌های دیگر ثابت است. برای یک ماده‌ی مدرج تابعی، که بر پایه‌ی فلز و سرامیک تولید شده است، نحوه‌ی تغییر مشخصات دو فاز سرامیک و فلز توسط مدل‌های ریاضی مختلف بیان می‌شود. اگر حجم فاز سرامیک برابر با V_m و V_c حجم فاز فلزی در نظر گرفته شود، در نتیجه نسبت‌های حجمی دو فاز فلز f_m و سرامیک f_c به شکل روابط ۱ و ۲ تعریف می‌شوند:[۲۶]

$$f_m = \frac{V_m}{V_c + V_m} \tag{۱}$$

$$f_c = \frac{V_c}{V_c + V_m} \tag{۲}$$

که در آن‌ها، مجموع نسبت‌های حجمی فلز و سرامیک برابر واحد خواهد بود. یکی از روابط معرفی مشخصات ماده‌ی مدرج تابعی در هر نقطه، وابسته به نسبت‌های حجمی فازهای تشکیل‌دهنده در آن نقطه است (مطابق رابطه‌ی ۳):[۳۶]

$$P_{eff} = P_c f_c + P_m f_m \tag{۳}$$

که در آن، P_m، P_c و P_{eff} به ترتیب مشخصه‌ی مورد بررسی برای فلز، سرامیک و مشخصه‌ی ماده در نقطه‌ی مورد نظر هستند. مدل‌های ریاضی مختلفی برای توصیف رابطه‌ی نسبت‌های حجمی فازهای تشکیل‌دهنده و مشخصات مواد تاکنون ارائه شده است، که در ادامه، چند مدل معروف برای بیان توزیع مشخصات مواد مدرج تابعی در راستای ضخامت، به‌اختصار معرفی شده‌اند.

- **مدل تابع توانی[۱۳]**

یکی از مدل‌های ساده و پرکاربرد برای مدل‌سازی محیط مدرج تابعی، مدل تابع توانی است. در مدل تابع توانی فرض می‌شود که سطح ماده در یک مرز از فلز

خالص و در سطح دیگر مرز از سرامیک خالص تشکیل شده است و نسبت حجمی ریزساختارهای تشکیل‌دهنده‌ی آن در راستای ضخامت به‌صورت توانی تغییر می‌کند. در نتیجه، رابطه‌ی مشخصات ماده‌ی مدرج تابعی در هر نقطه از ضخامت به‌صورت رابطه‌ی ۴ تعریف می‌شود:[۱]

$$P(x_3) = P_m + (P_c - P_m) f_c \tag{4}$$

که در آن، نسبت حجمی سرامیک مطابق رابطه‌ی ۵ در نظر گرفته می‌شود:

$$f_c = \left(\frac{x_3}{h}\right)^p \tag{5}$$

که در آن، p و h به ترتیب معرف توان تابع توانی و ضخامت ماده هستند.[۱]

- **مدل تابع نمایی**[۱۴]

مدل تابع نمایی، یک مدل ایده‌آل برای تعریف مشخصات مواد مدرج تابعی محسوب می‌شود، که بیشتر برای تحلیل مسائل مکانیک شکست به‌کار می‌رود و در آن، تغییرات مشخصات در راستای ضخامت به‌صورت رابطه‌ی ۶ تعریف می‌شود:[۱]

$$P(x_3) = P_m e^{\left(\frac{x_3}{h}\right)\ln\left(\frac{P_c}{P_m}\right)} \tag{6}$$

در تعریف اخیر فرض شده است که ماده از یک جنس مشخص در سطح $x_3 = 0$ به‌صورت نمائی خواص آن در ارتفاع تغییر می‌کند. آنچه در سایر مطالعات استفاده می‌شود، تغییرات خطی، نمایی و توانی است، که در پژوهش حاضر به دلیل کاربرد بیشتر تغییرات نمایی و همچنین پیشینه‌ی پژوهشی که توابع نمایی برای به دست آوردن توابع پتانسیل تغییرمکان داشته‌اند، از مدل تابع نمایی برای تعریف مشخصات مصالح مدرج تابعی استفاده شده است.

۳. روابط ترموالاستودینامیک محیط همسانگرد جانبی ناهمگن

اگر تغییرشکل‌های محیط، کوچک در نظر گرفته شوند، آنگاه روابط پایه‌ی تئوری ترموالاستودینامیک خطی برای محیط مدرج تابعی به‌صورت روابط ۷ الی ۱۰ بیان می‌شوند:[۳۱]

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{ij,i}} + \mathbf{b_j} = \rho(x_3)\ddot{\mathbf{u}}_{\mathbf{j}} \tag{7}$$

$$-div\mathbf{q} + \theta_0 \mathbf{M}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{kl}} + \mathbf{r} = c\dot{\theta} \tag{8}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{ij}} = \mathbf{C_{ijkl}(x_3)}\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{kl}} + (\theta - \theta_0)\mathbf{M} \tag{9}$$

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K}\nabla\theta \tag{10}$$

که در آن‌ها، div نماد دیورژانس و بالانویس (.) بیانگر مشتق تابع نسبت به زمان هستند. همچنین، $\mathbf{u_j}$ بردار تغییرمکان و $\boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{ij}}$ تانسور تنش ترموکشسان هستند.[۲۹] همچنین، در رابطه‌ی ۷، $\rho(x_3)$ چگالی محیط و $\mathbf{b_j}$ بردار نیروهای حجمی هستند. $\mathbf{q}$ و $\mathbf{r}$ در رابطه‌ی ۸، به ترتیب بردار شار حرارتی و منبع گرمایی، θ درجه‌ی حرارت مطلق، c گرمای ویژه و $\mathbf{M}$ نیز تانسور مرتبه‌ی دوم تنش ـ درجه حرارت محیط هستند.[۳۱] تانسور مرتبه‌ی چهارم $\mathbf{C_{ijkl}(x_3)}$، تانسور ارتجاعی محیط است و از آن‌جایی که مواد همسانگرد جانبی دارای تقارن محوری هستند، ضرایب کشسان مستقل در تانسور تنش ـ کرنش محیط مدرج تابعی به شکل رابطه‌ی ۱۱ تعریف می‌شوند. ضرایب مذکور، همچنین با فرض تغییرات مشخصات مواد مدرج تابعی در راستای x_3 ارائه شده‌اند.[۲۷] که در آن، ضرایب $C_{1111}(x_3)$، $C_{1122}(x_3)$، $C_{1133}(x_3)$، $C_{3333}(x_3)$ و $C_{2323}(x_3)$ ضرایب مستقل کشسان و $C_{1212}(x_3)$ ضریب وابسته است، که از رابطه‌ی ۱۲ به دست می‌آید:[۲۷]

$$C_{1212}(x_3) = \frac{1}{2}\left(C_{1111}(x_3) - C_{1122}(x_3)\right) \tag{12}$$

از آن‌جایی که انرژی کرنشی، مثبت ـ معین است، روابط ۱۳ برقرار است:[۲۷]

$$\begin{aligned} &C_{1111}(x_3) \ge |C_{1122}(x_3)|, C_{3333}(x_3) \ge 0 \\ &C_{1111}(x_3) \le C_{3333}(x_3) - 2C^2_{1133}(x_3) \\ &+C_{3333}(x_3)C_{1212}(x_3) \ge 0 \end{aligned} \tag{13}$$

با فرض محیط ناهمگن و در نظر گرفتن مدل ریاضی تابع نمایی برای بیان مشخصات مصالح مدرج تابعی، می‌توان $\mathbf{C_{ijkl}(x_3)}$ و $\rho(\mathbf{x_3})$ را به‌صورت رابطه‌های ۱۴ و ۱۵ نوشت:[۲۷]

$$\mathbf{C_{ijkl}}(x_3) = \mathbf{C_{0ijkl}} e^{2\beta x_3} \tag{14}$$

$$\rho(\mathbf{x_3}) = \rho_0 \mathbf{e}^{2\beta \mathbf{x_3}} \tag{15}$$

که در آن‌ها، β ضریب درجه‌ی ناهمگنی مصالح مدرج تابعی است. همچنین، $C_{0ijkl} = C_{ijkl}(x_3 = 0)$ و $\rho_0 = \rho(x_3 = 0)$ به ترتیب ضرایب کشسان و چگالی ماده در سطح مبنا در نظر گرفته می‌شوند.

علاوه‌بر این، با فرض رفتار خطی برای محیط در رابطه‌ی ۹، رابطه‌ی کرنش‌ها بر اساس میدان تغییرمکان به شکل رابطه‌ی ۱۶ بیان می‌شود:[۳۱]

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{kl}} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) \tag{16}$$

که در آن، بالانویس T معرف عملگر ترانهاده و ∇ عملگر گرادیان است. پارامتر $\mathbf{K}$ در رابطه‌ی ۱۰، معرف تانسور رسانایی حرارتی است، که در حالت کلی به کرنش و

$$\mathbf{C_{ijkl}(x_3)} = \begin{bmatrix} C_{1111}(x_3) & C_{1122}(x_3) & C_{1133}(x_3) & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122}(x_3) & C_{1111}(x_3) & C_{1133}(x_3) & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133}(x_3) & C_{1133}(x_3) & C_{3333}(x_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323}(x_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{2323}(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212}(x_3) \end{bmatrix} \tag{11}$$

درجه‌ی حرارت وابسته است. همچنین، تانسور رسانایی حرارتی $\mathbf{K}$ و تانسور تنش ـ درجه‌ی حرارت $\mathbf{M}$ برای محیط همسانگرد جانبی به‌صورت رابطه‌ی ۱۷ در نظر گرفته می‌شود:[۲۹]

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{k}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{k}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \bar{m}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{m}_1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{m}_3 \end{bmatrix} \tag{۱۷}$$

برای محاسبه‌ی معادلات حاکم حرکت بر حسب میدان تغییرمکان ـ درجه‌ی حرارت، ابتدا رابطه‌ی تنش ترموکشسان (رابطه‌ی ۹) در رابطه‌ی ۷ جایگذاری می‌شود و بدین ترتیب بسط سه معادله‌ی حرکت ترموالاستودینامیک به‌دست می‌آید. در ادامه، با قرار دادن رابطه‌ی هدایت گرمایی (رابطه‌ی ۱۰) در معادله‌ی انرژی (رابطه‌ی ۸)، معادله‌ی چهارم تعادل ترموالاستودینامیک نیز به دست می‌آید. معادلات مذکور را می‌توان بر حسب توابع u_1، u_2، u_3 به‌صورت روابط ۱۸ الی ۲۱ بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} &\left(\nabla_{12}^2 + \alpha_2 \tfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\alpha_2 \tfrac{\partial}{\partial x_3} - \rho_0 \tfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha_1 \tfrac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right) u_1 \\ &+ \left(\alpha_1 \tfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) u_2 + \left(\alpha_3 \tfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + 2\beta \tfrac{\partial}{\partial x_1}\right) u_3 \\ &+ \left(m_1 \tfrac{\partial}{\partial x_1}\right) T = -\rho_0 \bar{b}_1 \end{aligned} \tag{۱۸}$$

$$\begin{aligned} &\left(\alpha_1 \tfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}\right) u_1 + \left(\begin{array}{c} \nabla_{12}^2 + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_3} \\ -\rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{array}\right) u_2 \\ &+ \left(\alpha_3 \tfrac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} + 2\beta x_2 \tfrac{\partial}{\partial x_2}\right) u_3 + \left(m_1 \tfrac{\partial}{\partial x_2}\right) T = -\rho_0 \bar{b}_2 \end{aligned} \tag{۱۹}$$

$$\begin{aligned} &\left(\alpha_3 \tfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + 2\beta(\alpha_3 - \alpha_2) \tfrac{\partial}{\partial x_1}\right) u_1 \\ &+ \left(\alpha_3 \tfrac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} + 2\beta(\alpha_3 - \alpha_2) \tfrac{\partial}{\partial x_2}\right) u_2 \\ &+ \left(\alpha_2 \nabla_{12}^2 + \alpha_4 \tfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\alpha_4 \tfrac{\partial}{\partial x_3} - \rho_0 \tfrac{\partial^2}{\partial t^2}\right) u_3 \\ &+ \left(2\beta m_3 + m_3 \tfrac{\partial}{\partial x_3}\right) T = -\rho_0 \bar{b}_3 \end{aligned} \tag{۲۰}$$

$$\begin{aligned} &\left(m_1 \tfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial t}\right) u_1 + \left(m_1 \tfrac{\partial^2}{\partial x_2 \partial t}\right) u_2 \\ &+ \left(m_3 \tfrac{\partial^2}{\partial x_3 \partial t}\right) u_3 + \left(\tfrac{k_1}{\theta_0} \left(\begin{array}{c} \nabla_{12}^2 + \frac{k_3}{k_1} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \\ +2\beta \frac{k_3}{k_1} \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{c_0}{k_1} \frac{\partial}{\partial t} \end{array}\right)\right) = -\tfrac{r_0}{\theta_0} \end{aligned} \tag{۲۱}$$

که در آن‌ها، پارامترهای α_1، تا α_4، m_1، m_3، k_1، k_3، c_0، r_0، ρ_0 و $\bar{b}$ به شکل رابطه‌ی ۲۲ در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \tfrac{C_{1212} + C_{1122}}{C_{1212}}, \alpha_2 = \tfrac{C_{2323}}{C_{1212}}, \\ &\alpha_3 = \tfrac{C_{1133} + C_{2323}}{C_{1212}}, \alpha_4 = \tfrac{C_{3333}}{C_{1212}}, \\ &m_1 = \tfrac{\bar{m}_1}{C_{1212}}, m_3 = \tfrac{\bar{m}_3}{C_{1212}}, \\ &k_1 = \tfrac{\bar{k}_1}{C_{1212}}, k_3 = \tfrac{\bar{k}_3}{C_{1212}}, \\ &c_0 = \tfrac{c}{C_{1212}}, r_0 = \tfrac{r}{C_{1212}}, \\ &\rho_0 = \tfrac{\rho}{C_{1212}}, \bar{b} = \tfrac{b}{C_{1212}}. \end{aligned} \tag{۲۲}$$

از حل دستگاه ۴ معادله ۴ مجهول مطابق روابط ۱۸ الی ۲۱، مجهولات u_1، u_2، u_3 و T به دست می‌آیند. دستگاه مذکور را می‌توان به شکل ماتریسی (رابطه‌ی ۲۳) نیز نوشت:

$$\mathbf{D}\mathbf{W} + \mathbf{b}' = 0 \tag{۲۳}$$

که در آن، $\mathbf{D}$، $\mathbf{W}$ و $\mathbf{b}'$ به ترتیب ماتریس عملگرهای دیفرانسیلی، بردار تغییرمکان ـ درجه حرارت و بردار نیروی حجمی هستند، که به‌صورت روابط ۲۴ تا ۲۶ بیان می‌شوند:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix} \tag{۲۴}$$

$$\mathbf{W} = [u_1\ u_2\ u_3\ T]^T \tag{۲۵}$$

$$\mathbf{b}' = [\rho_0 \bar{b}_1\ \rho_0 \bar{b}_2\ \rho_0 \bar{b}_3\ \frac{r_0}{\theta_0}]^T \tag{۲۶}$$

که درایه‌های ماتریس $\mathbf{D}$ به شکل روابط ۲۷ تا ۴۲ به‌دست می‌آیند:

$$D_{11} = (\nabla_{12}^2 + \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_3}) - \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{۲۷}$$

$$D_{12} = \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{۲۸}$$

$$D_{13} = \alpha_3 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + 2\beta\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \tag{۲۹}$$

$$D_{14} = m_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \tag{۳۰}$$

$$D_{21} = \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{۳۱}$$

$$D_{22} = \left(\nabla_{12}^2 + \alpha_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \alpha_2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) - \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{۳۲}$$

$$D_{23} = \alpha_3 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} + 2\beta\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{۳۳}$$

$$D_{24} = m_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{۳۴}$$

$$D_{31} = \alpha_3 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + 2\beta\,(\alpha_3 - \alpha_2)\, \frac{\partial}{\partial x_1} \tag{۳۵}$$

$$D_{32} = \alpha_3 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} + 2\beta\,(\alpha_3 - \alpha_2)\, \frac{\partial}{\partial x_2} \tag{۳۶}$$

$$D_{33} = \left(\alpha_2 \nabla_{12}^2 + \alpha_4 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\alpha_4 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) - \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{۳۷}$$

$$D_{34} = 2\beta m_3 + m_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \tag{۳۸}$$

$$D_{41} = m_1 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial t} \tag{۳۹}$$

$$D_{42} = m_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial t} \tag{۴۰}$$

$$D_{43} = m_3 \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial t} \tag{۴۱}$$

$$D_{44} = \frac{k_1}{\theta_0} \nabla_{12}^2 + \frac{k_3}{\theta_0} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{k_3}{\theta_0} 2\beta \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{c}{\theta_0} \frac{\partial}{\partial t} \tag{۴۲}$$

که در آن‌ها، ∇_{12}^2 برابر عملگر لاپلاس دوبُعدی در صفحه‌ی x_1x_2 فرض شده است. با حل دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی رابطه‌ی ۲۳، مجهولات مسئله یا همان بردار تغییرمکان ـ درجه حرارت قابل محاسبه می‌شوند.

۴. تابع پتانسیل

همان‌گونه که در بخش‌های قبل گفته شد، از حل ۴ معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی و درگیر شده‌ی تمامی مجهولات مسئله‌ی ترموالاستودینامیک در محیط ناهمگن همسانگرد جانبی، شامل اختلاف درجه حرارت و تغییرمکان به‌صورت توابعی بر حسب مکان و زمان به دست می‌آید. به‌علت پیچیدگی حل تحلیلی ۴ معادله‌ی دیفرانسیلی مذکور، روش توابع پتانسیل و نحوه‌ی محاسبه‌ی آن‌ها در بخش حاضر بیان شده است، تا به وسیله‌ی آن، معادلات دیفرانسیل مستقل شوند و با حل آن‌ها، مجهولات مسئله‌ی ترموالاستودینامیک محاسبه شوند. در ادامه، توابع پتانسیل مختص مسائل ترموالاستودینامیک در محیط ناهمگن همسانگرد جانبی ارائه شده‌اند.

پاسخ معادله‌ی دیفرانسیل ۲۳ در حالت کلی، از مجموع پاسخ قسمت‌های همگن و ناهمگن به‌دست می‌آید، که قسمت همگن آن مطابق رابطه‌ی ۴۳ است:[16]

$$\mathbf{DW} = 0 \qquad (43)$$

اگر $\mathbf{I}$ ماتریس واحد و $\mathbf{d}$ ترانهاده‌ی ماتریس کوفاکتور ماتریس $\mathbf{D}$ باشد، آنگاه با کمک گرفتن از جبر ماتریس‌ها می‌توان رابطه‌ی ۴۴ را نوشت:

$$\mathbf{Dd} = \det \mathbf{DI} \qquad (44)$$

که در آن، $det\mathbf{D}$ دترمینان ماتریس اپراتورهای دیفرانسیلی موجود است. با اثر دادن اپراتورهای رابطه‌ی ۴۴ در تابع برداری دلخواه و به اندازه‌ی کافی هموار $\mathbf{F}$، رابطه‌ی ۴۵ را خواهیم داشت:[37]

$$\mathbf{DdF} = \det \mathbf{DIF} \qquad (45)$$

و اگر بردار تغییرمکان ـ درجه‌ی حرارت برحسب تابع $\mathbf{F}$ به‌صورت رابطه‌ی ۴۶ نوشته شود:

$$\mathbf{W} = \mathbf{dF} \qquad (46)$$

آنگاه برطبق رابطه‌های ۴۳ و ۴۵، برقراری رابطه‌ی ۴۷ لازم است:[37]

$$\det \mathbf{DIF} = 0 \qquad (47)$$

با توجه به وجود ماتریس واحد در رابطه‌ی ۴۷، معادلات اشاره شده به صورت مستقل از هم هستند و از حل آن‌ها، تمام پارامترهای تابع $\mathbf{F}$ به دست می‌آیند. در این صورت با جایگذاری تابع $\mathbf{F}$ در رابطه‌ی ۴۶، مؤلفه‌های بردار تغییرمکان ـ درجه‌ی حرارت محاسبه می‌شوند. به‌منظور محاسبه‌ی تابع $\mathbf{F}$، در ابتدا باید دترمینان ماتریس اپراتورهای دیفرانسیلی محاسبه شود. دترمینان ماتریس اپراتور $\mathbf{D}$ بر حسب اپراتورهای موج، پارامتر ناهمگنی و انتقال حرارت به شکل رابطه‌ی ۴۸ محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned}\det \mathbf{D} = {} & \alpha_2 k_1 (1+\alpha_1)\Box_0^{*2}\Box_T^{*2} \\ & \left[\begin{array}{l} \Box_1^{*2}\Box_2^{*2} + 4\beta^2 \frac{(\alpha_3-\alpha_2)}{(1+\alpha_1)}\nabla_{12}^2 \\ +\delta \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta \frac{\partial}{\partial x_3}\right) \end{array}\right] \\ & -\alpha_2 m_1^2 \Box_0^{*2} \frac{\partial}{\partial t}\left[\begin{array}{l} \left(\nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta \frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\rho_0}{\alpha_2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \\ \left(\nabla_{12}^2 + \frac{m_3^2}{m_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta \frac{m_3^2}{m_1^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\ +\delta_m \left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta \frac{\partial}{\partial x_3}\right)\nabla_{12}^2 \end{array}\right]\end{aligned} \qquad (48)$$

که در آن، اپراتورهای $\Box_0^{*2}$، $\Box_1^{*2}$، $\Box_2^{*2}$ و $\Box_T^{*2}$ مطابق با روابط ۴۹ معرفی شده‌اند:

$$\begin{aligned}\Box_0^{*2} &= \nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{s_0^2 \partial x_3^2} + 2\beta \frac{\partial}{s_0^2 \partial x_3} - \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ \Box_1^{*2} &= \nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{s_1^2 \partial x_3^2} + 2\beta \frac{\partial}{s_1^2 \partial x_3} - \frac{\rho_0}{(1+\alpha_1)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ \Box_2^{*2} &= \nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{s_2^2 \partial x_3^2} + 2\beta \frac{\partial}{s_2^2 \partial x_3} - \frac{\rho_0}{\alpha_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ \Box_T^{*2} &= \nabla_{12}^2 + \frac{k_3}{k_1}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta \frac{k_3}{k_1}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{c_0}{k_1}\frac{\partial}{\partial t}\end{aligned} \qquad (49)$$

که در آن، پارامتر S_i^2 بیان‌گر رفتار همسانگرد جانبی محیط و ریشه‌های معادله‌ی ۵۰ است، که ریشه‌های اخیر می‌توانند اعداد حقیقی مثبت یا مختلط باشند:[21]

$$\left(\alpha_2\alpha_4 s^2 + \left(\alpha_3^2 - \alpha_2^2 - (1+\alpha_1)\alpha_4\right)s^2 + (1+\alpha_1)\alpha_2\right) = 0 \qquad (50)$$

همچنین، ماتریس $\mathbf{d}$ که بیان‌گر ترانهاده‌ی کوفاکتور ماتریس $\mathbf{D}$ است، به‌صورت رابطه‌ی ۵۱ است:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} \qquad (51)$$

اگر تمام مؤلفه‌های تابع $\mathbf{F}$ به غیر از مؤلفه‌ی سوم آن، صفر در نظر گرفته شوند، آنگاه فقط درایه‌های ستون سوم ماتریس $\mathbf{d}$ برای محاسبات موردنیاز است، که به‌صورت روابط ۵۲ تا ۵۵ بیان می‌شوند:

$$d_{13} = -\left(\begin{array}{l} \left(\frac{k_1}{\theta_0}\alpha_3 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} + 2\beta \frac{k_1}{\theta_0}\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_1}\right)\Box_T^{*2} \\ -m_1 m_3 \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_3 \partial t} \end{array}\right)\Box_0^{*2} \qquad (52)$$

$$d_{23} = -\left(\begin{array}{l} \left(\frac{k_1}{\theta_0}\alpha_3 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} + 2\beta \frac{k_1}{\theta_0}\alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\Box_T^{*2} \\ -m_1 m_3 \frac{\partial^3}{\partial x_2 \partial x_3 \partial t} \end{array}\right)\Box_0^{*2} \qquad (53)$$

$$d_{33} = \left(\begin{array}{l} \frac{k_1}{\theta_0}\Box_T^{*2}(1+\alpha_1)(\nabla_{12}^2 + \frac{\alpha_2}{(1+\alpha_1)}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \\ +2\beta \frac{\alpha_2}{(1+\alpha_1)}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\rho_0}{(1+\alpha_1)}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ -m_1 \nabla_{12}^2 \frac{\partial}{\partial t}) \end{array}\right)\Box_0^{*2} \qquad (54)$$

$$d_{43} = -\left(\begin{array}{l} (\alpha_1 m_3 - \alpha_3 m_1 + m_3)\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial t} \\ \left(\begin{array}{l} \nabla_{12}^2 + \frac{\alpha_2 m_3}{(\alpha_1 m_3 - \alpha_3 m_1 + m_3)}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \\ -\frac{\rho_0 m_3}{(\alpha_1 m_3 - \alpha_3 m_1 + m_3)}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ +2\beta\alpha_2 \frac{\partial}{\partial t}\left(m_3 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - m_1 \nabla_{12}^2\right) \end{array}\right) \end{array}\right)\Box_0^{*2} \qquad (55)$$

به‌منظور کاهش مرتبه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر تابع $\mathbf{F}$، روابط ۵۲ الی ۵۵ به‌گونه‌یی نوشته شده‌اند که بتوان از عملگر دیفرانسیلی $\Box_0^{*2}$ فاکتورگرفت؛ که این امر به‌سادگی و درک بهتر مسئله کمک می‌کند.

۵. میدان تغییرمکان بر حسب تابع پتانسیل در محیط همسانگرد جانبی ناهمگن

با در نظرگرفتن تابع برداری $\mathbf{F}$ مطابق با رابطه ۵۶ و فرض این‌که $\mathbf{F}$ فقط در امتداد x_3 دارای مؤلفه باشد و همچنین با قراردادن آن در رابطه‌ی ۴۶، بردار تغییرمکان ـ درجه

حرارت بر حسب تابع پتانسیل به‌صورت ماتریسی (رابطه‌ی ۵۷) حاصل می‌شود:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \bar{F} & 0 \end{bmatrix} \tag{۵۶}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{F} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۵۷}$$

از آن‌جایی که عملگر دیفرانسیلی $\square_0^{*2}$ قابل فاکتورگیری از روابط ۴۸ و نیز ۵۲ تا ۵۵ است، تابع اختیاری $\mathbf{F}$ را می‌توان به شکل رابطه‌ی ۵۸ در نظر گرفت:

$$\mathbf{F} = \square_0^{*2}\bar{\mathrm{F}} \tag{۵۸}$$

با استفاده از تابع پیشنهادی ۵۸، مؤلفه‌های میدان تغییرمکان ـ درجه حرارت برحسب تابع پتانسیل به‌صورت روابط ۵۹ به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
u_1 &= -\begin{pmatrix} \left(\frac{k_1}{\theta_0}\alpha_3\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} + 2\beta\frac{k_1}{\theta_0}\alpha_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\square_T^{*2} \\ -m_1m_3\frac{\partial^3}{\partial x_1\partial x_3\partial t} \end{pmatrix} F \\
u_2 &= -\begin{pmatrix} \left(\frac{k_1}{\theta_0}\alpha_3\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} + 2\beta\frac{k_1}{\theta_0}\alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\square_T^{*2} \\ -m_1m_3\frac{\partial^3}{\partial x_2\partial x_3\partial t} \end{pmatrix} F \\
u_3 &= \begin{pmatrix} \frac{k_1}{\theta_0}\square_T^{*2}(1+\alpha_1)(\nabla_{12}^2 + \frac{\alpha_2}{(1+\alpha_1)}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \\ +2\beta\frac{\alpha_2}{(1+\alpha_1)}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\rho_0}{(1+\alpha_1)}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ -m_1\nabla_{12}^2\frac{\partial}{\partial t}) \end{pmatrix} F \\
T &= -\begin{pmatrix} (\alpha_1m_3 - \alpha_3m_1 + m_3)\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial t} \\ \begin{pmatrix} \nabla_{12}^2 + \frac{\alpha_2m_3}{(\alpha_1m_3-\alpha_3m_1+m_3)}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \\ -\frac{\rho_0m_3}{(\alpha_1m_3-\alpha_3m_1+m_3)}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ +2\beta\alpha_2\frac{\partial}{\partial t}\left(m_3\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - m_1\nabla_{12}^2\right) \end{pmatrix} \end{pmatrix} F
\end{aligned} \tag{۵۹}$$

با استفاده از روابط ۵۹، معادلات حاکم بر تابع پتانسیل F به معادله‌ی دیفرانسیل جزئی مرتبه‌ی ۶ کاهش می‌یابد و به شکل رابطه‌ی ۶۰ محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\alpha_2k_1(1+\alpha_1)\square_T^{*2}\begin{bmatrix} \square_1^{*2}\square_2^{*2} + 4\beta^2\frac{(\alpha_3-\alpha_2)}{(1+\alpha_1)}\nabla_{12}^2 \\ +\delta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \end{bmatrix} F \\
&-\alpha_2m_1^2\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \left(\nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\rho_0}{\alpha_2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \\ \left(\nabla_{12}^2 + \frac{m_3^2}{m_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\frac{m_3^2}{m_1^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\ +\delta_m\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\nabla_{12}^2 \end{bmatrix} F = 0
\end{aligned} \tag{۶۰}$$

روابط ۵۹، جواب عمومی مسائل ترموالاستودینامیک برای مصالح مدرج تابعی در محیط همسانگرد جانبی است. با توجه به اینکه روابط فوق در شرط اضافه‌ی $e_3curl(\boldsymbol{u}) = 0$ صدق می‌کنند، می‌توان با اضافه کردن یک تابع پتانسیل دیگر، مانند χ به رابطه‌ی ۵۹، شرط اضافه‌ی اخیر را حذف کرد و شرایط لازم برای حل قسمت ناهمگن را نیز در صورت عدم حضور منبع حرارتی به‌صورت روابط ۶۱ مهیا کرد:[۱۶]

$$\begin{aligned}
u_1 &= -\begin{pmatrix} \left(\frac{k_1}{\theta_0}\alpha_3\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} + 2\beta\frac{k_1}{\theta_0}\alpha_2\frac{\partial}{\partial x_1}\right)\square_T^{*2} \\ -m_1m_3\frac{\partial^3}{\partial x_1\partial x_3\partial t} \end{pmatrix} F - \frac{\partial\chi}{\partial x_2} \\
u_2 &= -\begin{pmatrix} \left(\frac{k_1}{\theta_0}\alpha_3\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} + 2\beta\frac{k_1}{\theta_0}\alpha_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\square_T^{*2} \\ -m_1m_3\frac{\partial^3}{\partial x_2\partial x_3\partial t} \end{pmatrix} F + \frac{\partial\chi}{\partial x_1} \\
u_3 &= \begin{pmatrix} \frac{k_1}{\theta_0}\square_T^{*2}(1+\alpha_1)(\nabla_{12}^2 + \frac{\alpha_2}{(1+\alpha_1)}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \\ +2\beta\frac{\alpha_2}{(1+\alpha_1)}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\rho_0}{(1+\alpha_1)}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ -m_1\nabla_{12}^2\frac{\partial}{\partial t}) \end{pmatrix} F \\
T &= -\begin{pmatrix} (\alpha_1m_3 - \alpha_3m_1 + m_3)\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial t} \\ \begin{pmatrix} \nabla_{12}^2 + \frac{\alpha_2m_3}{(\alpha_1m_3-\alpha_3m_1+m_3)}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \\ -\frac{\rho_0m_3}{(\alpha_1m_3-\alpha_3m_1+m_3)}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ +2\beta\alpha_2\frac{\partial}{\partial t}\left(m_3\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - m_1\nabla_{12}^2\right) \end{pmatrix} \end{pmatrix} F
\end{aligned} \tag{۶۱}$$

با استفاده از روابط اخیر و جایگذاری آن‌ها در معادلات تعادل روابط دیفرانسیلی حاکم بر توابع پتانسیل، F و χ به‌صورت روابط ۶۲ و ۶۳ محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&\alpha_2k_1(1+\alpha_1)\square_T^{*2}\begin{bmatrix} \square_1^{*2}\square_2^{*2} + 4\beta^2\frac{(\alpha_3-\alpha_2)}{(1+\alpha_1)}\nabla_{12}^2 \\ +\delta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \end{bmatrix} F \\
&-\alpha_2m_1^2\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \left(\nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\rho_0}{\alpha_2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \\ \left(\nabla_{12}^2 + \frac{m_3^2}{m_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\frac{m_3^2}{m_1^2}\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\ +\delta_m\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\nabla_{12}^2 \end{bmatrix} F = b_3
\end{aligned} \tag{۶۲}$$

$$\square_0^{*2}\chi(x_1, x_2, x_3, t) = \zeta(x_1, x_2, x_3, t) \tag{۶۳}$$

که در آن، تابع اسکالر $\zeta(x_1, x_2, x_3, t)$ مطابق رابطه‌ی ۶۴ به‌دست می‌آید:[۱۶]

$$\nabla \times (\mathrm{X}e_3) = b_1e_1 + b_2e_2 \tag{۶۴}$$

- **راستی‌آزمایی با حالت همگن**

در نهایت با صرف‌نظر کردن از پارامتر ناهمگنی از روابط میدان تغییرمکان ـ حرارت (رابطه‌ی ۶۱)، روابط توابع پتانسیل برای مسائل ترموالاستودینامیک همسانگرد جانبی به شکل روابط ۶۵ به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
u_1 &= -\left(\left(\frac{k_1}{\theta_0}\alpha_3\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}\right)\square_T^{*2} - m_1m_3\frac{\partial^3}{\partial x_1\partial x_3\partial t}\right)F - \frac{\partial\chi}{\partial x_2} \\
u_2 &= -\left(\left(\frac{k_1}{\theta_0}\alpha_3\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}\right)\square_T^{*2} - m_1m_3\frac{\partial^3}{\partial x_2\partial x_3\partial t}\right)F + \frac{\partial\chi}{\partial x_1} \\
u_3 &= \begin{pmatrix} \frac{k_1}{\theta_0}\square_T^{*2}(1+\alpha_1)(\nabla_{12}^2 + \frac{\alpha_2}{(1+\alpha_1)}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \\ -\frac{\rho_0}{(1+\alpha_1)}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - m_1\nabla_{12}^2\frac{\partial}{\partial t}) \end{pmatrix} F \\
T &= -\begin{pmatrix} (\alpha_1m_3 - \alpha_3m_1 + m_3)\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial t} \\ \begin{pmatrix} \nabla_{12}^2 + \frac{\alpha_2m_3}{(\alpha_1m_3-\alpha_3m_1+m_3)}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \\ -\frac{\rho_0m_3}{(\alpha_1m_3-\alpha_3m_1+m_3)}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \end{pmatrix} \end{pmatrix} F
\end{aligned} \tag{۶۵}$$

که همان روابط توابع پتانسیل پیشنهادی اسکندری قادی و همکاران (۲۰۱۳)،[۳۱] هستند و در نتیجه درستی روند محاسبه تابع پتانسیل تأیید می‌شود.

$$\mathbf{C_{ijkl}}(x_3)=\begin{bmatrix} \lambda(x_3)+2\mu(x_3) & \lambda(x_3) & \lambda(x_3) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(x_3) & \lambda(x_3)+2\mu(x_3) & \lambda(x_3) & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(x_3) & \lambda(x_3) & \lambda(x_3)+2\mu(x_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu(x_3) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu(x_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu(x_3) \end{bmatrix} \tag{66}$$

۶. بازنویسی روابط برای محیط همسانگرد ناهمگن

از آن‌جایی که مواد ناهمگن همسانگرد، فقط دو ضریب کشسان مستقل در تانسور تنش ـ کرنش خود دارند، ضرایب کشسان محیط ناهمگن همسانگرد را می‌توان به شکل رابطه‌ی ۶۶ ساده کرد، که در آن، پارامترهای $\lambda(x_3)$ و $\mu(x_3)$ ثابت‌های لامه هستند، که با توجه به ناهمگن بودن محیط و فرض توزیع نمایی مشخصات مواد در راستای (x_3) به‌صورت روابط ۶۷ و ۶۸ تعریف می‌شوند:

$$\lambda(x_3)=\lambda_0 e^{2\beta x_3} \tag{67}$$

$$\mu(x_3)=\mu_0 e^{2\beta x_3} \tag{68}$$

که در آن‌ها، λ_0 و μ_0 ثابت‌های لامه در سطح مبنا ($x_3=0$) هستند.

با جایگذاری ضرایب کشسان رابطه‌ی ۶۶ در دستگاه معادلات حاکم ۱۸ تا ۲۱ و دانستن این موضوع که در حالت همسانگرد، پارامترهای k_3 و k_1 در تانسور رسانایی حرارتی $\mathbf{K}$ و همچنین پارامترهای m_2 و m_1 در تانسور تنش ـ درجه‌ی حرارت $\mathbf{M}$ با یکدیگر برابرند،[29] معادلات حاکم حرکت ترموکشسان برای محیط همسانگرد ناهمگن مدرج تابعی به شکل روابط ۶۹ الی ۷۲ حاصل می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\left(\nabla_{12}^2+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+2\beta\frac{\partial}{\partial x_3}-\rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\left(\frac{\lambda_0+\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)u_1\\&+\left(\left(\frac{\lambda_0+\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right)u_2\\&+\left(\left(\frac{\lambda_0+\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}+2\beta\frac{\partial}{\partial x_1}\right)u_3\\&+\left(m_1\frac{\partial}{\partial x_1}\right)T=-\bar{\rho}_0\bar{b}_1\end{aligned} \tag{69}$$

$$\begin{aligned}&\left(\left(\frac{\lambda_0+\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right)u_1\\&+\left(\nabla_{12}^2+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+2\beta\frac{\partial}{\partial x_3}-\rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\left(\frac{\lambda_0+\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)u_2\\&+\left(\left(\frac{\lambda_0+\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}+2\beta\frac{\partial}{\partial x_2}\right)u_3\\&+\left(m_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right)T=-\bar{\rho}_0\bar{b}_2\end{aligned} \tag{70}$$

$$\begin{aligned}&\left(\left(\frac{\lambda_0+\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}+2\beta\left(\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\right)u_1\\&+\left(\left(\frac{\lambda_0+\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}+2\beta\left(\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\right)u_2\\&+\left(\begin{array}{c}\nabla_{12}^2+\left(\frac{\lambda_0+2\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\\+2\beta\left(\frac{\lambda_0+2\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}-\rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\end{array}\right)u_3\\&+\left(2\beta m_1+m_1\frac{\partial}{\partial x_3}\right)T=-\bar{\rho}_0\bar{b}_3\end{aligned} \tag{71}$$

$$\begin{aligned}&\left(m_1\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial t}\right)u_1+\left(m_1\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial t}\right)u_2+\left(m_1\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial t}\right)u_3\\&+\left(\frac{k_1}{\theta_0}\left(\nabla_{12}^2+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+2\beta\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{c_0}{k_1}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)=-\frac{r_0}{\theta_0}\end{aligned} \tag{72}$$

از طرفی دیگر، برای محیط همسانگرد ناهمگن، پارامترهای α_1 تا α_4، m_1، k_1، c_0، r_0، $\bar{\rho}_0$، $\bar{b}$ به‌صورت نرمال شده‌ی ضرایب کشسان و چگالی نسبت به ضریب μ_0 به شکل روابط ۷۳ بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{aligned}&\alpha_1=\alpha_3=\tfrac{\lambda_0+\mu_0}{\mu_0},\\&\alpha_2=1,\alpha_4=\tfrac{\lambda_0+2\mu_0}{\mu_0},\\&k_1=\tfrac{\bar{k}_1}{\mu_0},m_1=\tfrac{\bar{m}_1}{\mu_0},\\&c_0=\tfrac{c}{\mu_0},r_0=\tfrac{r}{\mu_0},\\&\bar{\rho}_0=\tfrac{\rho_0}{\mu_0},\bar{b}=\tfrac{b}{\mu_0}.\end{aligned} \tag{73}$$

با جایگذاری ضرایب جدید اخیر در روابط ۶۹ تا ۷۲، در نهایت می‌توان ۴ معادله‌ی دیفرانسیل حرکت حرارتی را به شکل ماتریسی مشابه با رابطه‌ی ۲۳ بیان کرد؛ با این تفاوت که درایه‌های ماتریس عملگر دیفرانسیلی $\mathbf{D}$ مطابق با روابط ۷۴ تا ۸۹ تغییر می‌یابند:

$$D_{11}=\left(\nabla_{12}^2+\left(\frac{\lambda_0+\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+2\beta\frac{\partial}{\partial x_3}\right)-\bar{\rho}_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{74}$$

$$D_{12}=\left(\frac{\lambda_0+\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} \tag{75}$$

$$D_{13}=\left(\frac{\lambda_0+\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}+2\beta\frac{\partial}{\partial x_1} \tag{76}$$

$$D_{14}=m_1\frac{\partial}{\partial x_1} \tag{77}$$

$$D_{21}=\left(\frac{\lambda_0+\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} \tag{78}$$

$$D_{22}=\left(\nabla_{12}^2+\left(\frac{\lambda_0+\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+2\beta\frac{\partial}{\partial x_3}\right)-\bar{\rho}_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{79}$$

$$D_{23}=\left(\frac{\lambda_0+\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}+2\beta\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{80}$$

$$D_{24}=m_1\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{81}$$

$$D_{31}=\left(\frac{\lambda_0+\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}+2\beta\left(\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial}{\partial x_1} \tag{82}$$

$$D_{32}=\left(\frac{\lambda_0+\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}+2\beta\left(\frac{\lambda_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{83}$$

$$D_{33}=\left(\begin{array}{c}\nabla_{12}^2+\left(\frac{\lambda_0+2\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\\+2\beta\left(\frac{\lambda_0+2\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial}{\partial x_3}\end{array}\right)-\bar{\rho}_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{84}$$

$$D_{34}=2\beta m_1+m_1\frac{\partial}{\partial x_3} \tag{85}$$

$$D_{41}=m_1\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial t} \tag{86}$$

$$D_{32} = m_1 \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial t} \tag{87}$$

$$D_{33} = m_1 \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial t} \tag{88}$$

$$D_{44} = \frac{k_1}{\theta_0}\nabla_{12}^2 + \frac{k_1}{\theta_0}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{k_1}{\theta_0}2\beta\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{c}{\theta_0}\frac{\partial}{\partial t} \tag{89}$$

با انجام محاسبات مربوط به تعیین توابع پتانسیل مشابه بخش چهارم نوشتار حاضر، در نهایت رابطه‌ی بردار تغییرمکان ـ درجه‌ی حرارت بر حسب توابع پتانسیل برای محیط همسانگرد مدرج تابعی ناهمگن به‌صورت روابط ۹۰ به دست می‌آیند:

$$u_1 = -\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{k_1}{\theta_0}\left(\frac{\lambda_0+\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} \\ +2\beta\frac{k_1}{\theta_0}\frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix}\Box_T^2 \\ -m_1^2\frac{\partial^3}{\partial x_1\partial x_3\partial t} \end{pmatrix} F - \frac{\partial\chi}{\partial x_2}$$

$$u_2 = -\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{k_1}{\theta_0}\left(\frac{\lambda_0+\mu_0}{\mu_0}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} \\ +2\beta\frac{k_1}{\theta_0}\frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}\Box_T^2 \\ -m_1^2\frac{\partial^3}{\partial x_2\partial x_3\partial t} \end{pmatrix} F + \frac{\partial\chi}{\partial x_1}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} \frac{k_1}{\theta_0}\Box_T^2(\nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\frac{\partial}{\partial x_3} \\ -\bar{\rho}_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} - m_1\nabla_{12}^2\frac{\partial}{\partial t}) \end{pmatrix} F$$

$$T = -\begin{pmatrix} (m_1)\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial t} \\ \begin{pmatrix} \nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} \\ +2\beta\frac{\partial}{\partial t}\left(m_1\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - m_1\nabla_{12}^2\right) \end{pmatrix} \end{pmatrix} F \tag{90}$$

که در آن‌ها پارامتر $\Box_T^2$ به شکل رابطه‌ی ۹۱ در نظر گرفته شده است:

$$\Box_T^2 = \nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{c_0}{k_1}\frac{\partial}{\partial t} \tag{91}$$

با استفاده از روابط اخیر، معادلات دیفرانسیل حاکم بر توابع F و χ نیز برای مسائل ترموالاستودینامیک دارای محیط همسانگرد مدرج تابعی ناهمگن به شکل روابط ۹۲ و ۹۳ به دست می‌آیند:

$$\begin{pmatrix} k_1(\frac{\lambda_0+2\mu_0}{\mu_0})\Box_T^2\begin{bmatrix} \Box_1^2\Box_2^2 + 4\beta^2\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_0+2\mu_0}\right)\nabla_{12}^2 \\ +\delta\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \end{bmatrix} \\ -m_1^2\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \left(\nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\frac{\partial}{\partial x_3} - \rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \\ \left(\nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\frac{\partial}{\partial x_3}\right) \\ +\delta_m\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\nabla_{12}^2 \end{bmatrix} \end{pmatrix} F = b_3 \tag{92}$$

$$\Box_2^2\chi(x_1, x_2, x_3, t) = \zeta(x_1, x_2, x_3, t) \tag{93}$$

در روابط اخیر، پارامترهای $\Box_i^2$ به‌صورت روابط ۹۴ معرفی می‌شوند:

$$\Box_1^2 = \nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\bar{\rho}_0}{(1+\alpha_1)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

$$\Box_2^2 = \nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + 2\beta\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\bar{\rho}_0}{\alpha_2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{94}$$

۷. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، مجموعه‌ی توابع پتانسیل تغییرمکان مسائل ترموالاستودینامیک برای مصالح مدرج تابعی در محیط همسانگرد جانبی، بر اساس روابط تعادل و قوانین ترمودینامیک با استفاده از یک روش نظام‌مند ارائه شده است. توابع پتانسیل به دست آمده، شامل: عملگرهای موج، انتقال حرارت و ترم‌های اضافی است، که هر یک دارای مفهوم فیزیکی و کاربردی مستقل هستند. همچنین در مرتب‌سازی عملگرها دقت شده است که مرتبه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل حاکم کاهش یابد، که نهایتاً دو معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی شش و دو به دست آمده است. با حل معادلات دیفرانسیل مذکور و اعمال شرایط مرزی مربوط به هر مسئله، مجهولات بردار تغییرمکان ـ درجه حرارت، کرنش‌ها و تنش‌ها برای هر مسئله‌ی ترموالاستو دینامیک به دست خواهد آمد.

منابع (References)

1. Swaminathan, K., Naveenkumar, D., Zenkour, A. and et al. "Stress , vibration and buckling analyses of FGM plates-A state-of-the-art", *Composite Structures*, **120**, pp. 10-31 (2015).
2. Hosseini-Hashemi, S., Rokni Damavandi Taher, H., Akhavan, H. and et al."Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory", *Applied Mathematical Modelling*, **34**(5), pp. 1276-1291 (2010).
3. Jha, D., Kant, T. and Singh, R. "A critical review of recent research on functionally graded plates", *Composite Structures*, **96**, pp. 833-849 (2013).
4. Thai, H.-T. and Kim, S.-E. "A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and

پانوشت‌ها

1. volume fractions
2. Chen
3. Trinh
4. Wattanasakulpong
5. Chakraverty & Pradhan
6. Reddy & Chin
7. Yang & Shen
8. Lekhnitskii
9. Hu
10. Nowacki
11. Wang
12. composite materials
13. power law function
14. exponential function

shells", *Composite Structures*, **128**(15), pp. 70-86 (2015).

5. Chen, Y., Jin, G., Zhang, C. and et al. "Thermal vibration of FGM beams with general boundary conditions using a higher order shear deformation theory", *Composites Part B*, **153**(15), pp. 376-386 (2018).

6. Trinh, L.C., Vo, T.P., Thai, H.-T. and et al. "An analytical method for the vibration and buckling of functionally graded beams under mechanical and thermal loads", *Composites Part B*, **100**(1), pp. 152-163 (2016).

7. Wattanasakulpong, N., Gangadhara Prusty, B. and Kelly, D.W. "Thermal buckling and elastic vibration of third-order shear deformable functionally graded beams", *International Journal of Mechanical Sciences*, **53**(9), pp. 734-743 (2011).

8. Chakraverty, S. and Pradhan, K. "Free vibration of exponential functionally graded rectangular plates with general boundary conditions", *Aerospace Science and Technology*, **36**, pp. 132-156 (2014).

9. Reddy, J.N. and Chin, C.D. "Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plated", *Journal of Thermal Stresses*, **21**(6), pp. 593-626 (1998).

10. Yang, J. and Shen, H.-S. "Vibration characteristics and transient response of shear-deformable functionally graded plated in termal environments", *Journal of Sound and Vibration*, **255**(3), pp. 579-602 (2002).

11. Tounsi, A., Sid Ahmed Houari, M., Benyoucef, S. and et al. "A refined trigonometric shear deformation theory for thermoelastic bending of functionally graded sandwich plates", *Aerospace Science and Technology*, **24**(1), pp. 209-220 (2013).

12. Lekhnitskii, S.G. "The elastic equilibrium of a transversely isotropic layer and a thick plate Uprugoe ravnovesie transversal' no izotropnogo sloia i tolstoi plity: PMM vol.26, no.4, 1962, pp. 687-696", *J. of Applied Mathematics and Mechanics*, **26**(4), pp. 1026-1039 (1962).

13. Hu, H.-C. "On the three-dimensional problems of the theory of elasticity of a tranversely isotropic body", *Acta, Phys. Sin*, **9**(2), pp. 130-148 (1953).

14. Nowacki, W. "The stress function in three-dimeusionai problems concerning an elastic body characterized by transverse isotropy", *Applied Mechanics*, **2**(1), pp. 21-25 (1954).

15. Wang, W. and Sho, M. "On the general solutions of transversely isotropic elasticity", *lnt. J. Solid and Structure*, **35**(25), pp. 3283-3297 (1998).

16. Eskandari-Ghadi, M. "A complete solution of the wave equations for transversely isotropic media", *Journal of Elasticity*, **81**, pp. 1-19 (2005).

17. Eskandari-Ghadi, M., Mirzapour, A. and Ardeshir-Behrestaghi, A. "Rocking vibration of a rigid circular disc in a transversely isotropic full-space", *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech*, **35**(14), pp. 1587-1603 (2011).

18. Eskandari-Ghadi, M. and Ardeshir-Behrestaghi, A. "Forced vertical vibration of rigid circular disc buried in an arbitrary depth of a transversely isotropic half space", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **30**(7), p. 547-560 (2010).

19. Eskandari-Ghadi, M., Pak, R.Y. and Ardeshir-Behrestaghi, A. "Transversely isotropic elastodynamic solution of a finite layer on an infinite subgrade under surface loads", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **28**(12), pp. 986-1003 (2008).

20. Eskandari-Ghadi, M., Ardeshir-Behrestaghi, A. and Navayi Neya, B. "Mathematical analysis for an axissymmetric disc-shaped crack in transversely isotropic half-space", *International Journal of Mechanical Sciences*, **68**, pp. 171-179 (2013).

21. Nematzadeh, M., Eskandari-Ghadi, M. and Navayi Neya, B. "An analytical solution for transversely isotropic simply supported thick rectangular plates using displacement potential functions", *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design*, **46**(2), pp. 121-142 (2011).

22. Navayi Neya, B. "Exact solution of free vibration of thick rectangular isotropic plates on a simply supported using displacement potential functions", *Sharif Civil Engineering*, **30**(2), pp. 33-41 (In Persian) (2014).

23. Moslemi, A., Navayi Neya, B. and Vaseghi Amiri, J. "3-D elasticity buckling bolution for simply supported thick rectangular plates using displacement potential functions", *Applied Mathematical Modelling*, **40**(11-12), pp. 5717-5730 (2016).

24. Moslemi, A., Navayi Neya, B. and Vaseghi Amiri, J. "Benchmark solution for buckling of thick rectangular transversely isotropicplates under biaxial load", *International Journal of Mechanical Sciences*, 131-132, pp. 356-367 (2017).

25. Bakhshandeh, A., Navayi Neya, B. and Nateghi Babagi, P. "Benchmark solution for free vibration analysis of transversely isotropic thick rectangular plates", *Acta Mechanica*, **228**, pp. 3977-3995 (2017).

26. Samadi, Gh., Navayi Neya, B. and Nateghi Babagi, P. "Bending analysis of transversely isotropic thick rectangular plates on two-parameter elastic foundation", *Journal of Civil and Environmental Engineering*, **49**(3) pp.53-64 (2019).

27. Eskandari-Ghadi, M. and Amiri-Hezaveh, A. "Wave propagations in exponentially graded transversely isotropic half-space with potential function method", *Mechanics of Materials*, **68**, pp. 275-292 (2014).

28. Vafakhah, Z. and Navayi Neya, B. "An exact three dimensional solution for bending of thick rectangular FGM plate", *Composites Part B:Engineering*, **156**, pp. 72-87 (2019).

29. Carlson, D.E., *Linear Thermoelasticity*, In Linear Theories of Elasticity and Thermoelasticity, Verlag Berlin, Springer, pp. 298-345 (1973).

30. Zorski, H. "Singular solutions for thermoelastic media", *Bull. Asad. Polon. Sci*, **6**, pp. 331-339 (1958).

31. Forati, M., Eskandari-Ghadi, M. and Rahimian, M. "Thermo elstodynamic boundary value problems in transversely isotropic material with pontential functions", *Sharif Civil Engineering*, **29**(2), pp. 55-64 (In Persian) (2013).

32. Raoofian Naeen, M., Eskandari-Ghad, M., Ardalan, A. and et al. "Asymmetric motion of a transversely isotropic thermoelastic half-space under time-harmonic buried

source", *ZAMM- Z. Angew. Math. Phys*, **65**, pp. 1031-1051 (2014).

33. Raoofian Naeeni, M., Eskandari-Ghadi, M., Ardalan, A. and et al. "Transient response of a thermoelastic half-space to mechanical and thermal buried sources", *ZAMM - Z. Angew. Math. Mech*, **95**(4), pp. 354-376 (2015).

34. Raoofian Naeeni, M., Eskandari-Ghadi, M., Ardalan, A. and et al. "Coupled thermoviscoelastodynamic Green's functions for bi-material half-space", *ZAMM - Z. Angew. Math. Mech*, **95**(3), pp. 260-282 (2015).

35. Eskandari-Ghadi, M., Sture, S., Rahimian, M. and et al. "Thermoelastodynamics with scalar potential functions", *American Society of Civil Engineers*, **140**(1), pp. 74-81 (2014).

36. Shiota, I. and Miyamoto, Y. "Functionally graded materials", Netherlands: Elsevier (1996).

37. Rahimian, M. and Eskandari-Ghadi, M. "Mechanics of continuous media", *Tehran, University of Tehran Press* (In Persian) (2005).