

بررسی بارهای کمانشی تیرهای مدرج تابعی جدارنازک قوطی شکل تحت بارگذاری محوری

وحید میرحاجی* (استادیار)

رضا جهانگیری (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد سلماس

علی نادری (کارشناس ارشد)

گروه مهندسی عمران، مؤسسه‌ی آموزش عالی غیرانتفاعی آئین کمال، ارومیه

مهندسی عمران شریف، زمستان ۱۴۰۱ (دوره‌ی ۲ - ۳۸، شماره‌ی ۴/۲، ص. ۳۷-۵۱، پژوهشی)

در پژوهش حاضر، با دخالت دادن اثر ناهمگنی ساختاری از طریق مدل توزیع توانی، اثر تداخل و اثر تاب خوردگی اعضاء مقاطع عرضی با استفاده از فرضیات تیر ولاسوف و با به‌کارگیری اصل هامیلتون، معادلات حاکم بر تعادل استاتیکی تیر جدارنازک قوطی شکل مدرج تابعی متداخل در معرض بارگذاری محوری به دست آمده است. سپس با استفاده از روش المان محدود، معادله‌ی مشخصه‌ی مقدار ویژه‌ی حاکم بر مسئله‌ی کمانش تحت شرایط مرزی چندگانه به دست آمده است. در ادامه، با راستی‌آزمایی مدل عددی به دست آمده و استخراج منحنی‌های مشخصه، تأثیر پارامترهای مختلف مسئله، اعم از: نسبت منظر تیر، شاخص کسر حجمی اختلاط، نسبت ضخامت لایه‌ی سرامیکی به فلزی اعضاء، نسبت مدول مواد متشکله‌ی هسته و شاخص تداخل در مقدار بار بحرانی کمانش تجزیه و تحلیل جامع شده است. نتایج به دست آمده نشان دادند که پارامترهای مختلف مسئله به‌ویژه شاخص تداخل و شاخص اختلاط توانی مواد متشکله، در تعیین محدوده‌ی کمانش نقش اساسی دارند.

واژگان کلیدی: تیر جدارنازک، تیر تابعی قوطی شکل، روش المان محدود، شاخص کسر حجمی اختلاط، بار بحرانی کمانش.

۱. مقدمه

انتقال تدریجی خواص از یک لایه به لایه‌ی دیگر، تمرکز تنش به میزان بسیار زیادی کاهش می‌یابد. تعداد زیادی از مطالعات مربوط به کاربردهای مواد مدرج تابعی برای اعضاء سازه‌ی منتشر شده است. مواد FGM، نوع جدیدی از مواد هستند که در سال ۱۹۸۴ در آزمایشگاه ملی هوا و فضای ژاپن^[۲] معرفی شده‌اند که ترکیب‌های آن به منظور تغییر مداوم درون ماده خصوصاً در راستای ضخامت، طراحی شده‌اند.^[۳] برتری مواد FGM را می‌توان در نقش سپرگونه‌ی مصالح حاضر در برابر دماهای بالا تلقی کرد، به گونه‌ی که استحکام کششی قوی‌تری فراهم می‌آورد و تمرکز یا پله‌های تنش را کاهش می‌دهد و مصالح را کارتر می‌سازد؛ در نتیجه، احتمال شکست ماده کاهش می‌یابد.^[۵] مزیت اصلی مواد FGM نسبت به کامپوزیت‌های سنتی آن است که پدیده‌ی ترک خوردگی و لایه‌لایه‌شدگی و تمرکز تنش می‌تواند متوقف شود، چون هیچ مرز داخلی در مواد FGM وجود ندارد. چندین روش برای تولید مواد مدرج تابعی وجود دارد؛ مانند روش‌های: متالورژی پودری^[۶]، رسوب‌سازی با بخار، نفوذ چند مرحله‌ی تریبی، یکپارچه‌سازی بدون فشار و سنتز خود تکثیرشونده در دمای بالا.^[۷] با این حال، در فرایند آماده‌سازی مواد مدرج تابعی، ممکن است در

در دهه‌های اخیر، پژوهش‌های بسیاری بر روی ساخت صفحاتی انجام شده است که خواص مطلوبی، اعم از: صلبیت خمشی زیاد، وزن مخصوص پایین، مشخصات استاتیکی، دینامیکی مطلوب و مقاومت بالا و نیز کاربردهای گوناگونی در شاخه‌های مهندسی عمران سازه در ساخت اجزاء سازه‌های دریایی، سازه‌های مکانیکی و ادوات سازه‌های فضایی، اجزاء سازه‌های راکتورهای هسته‌ی و کوره‌های حرارتی و اتومبیل‌ها و ... دارند.^[۱] همچنین مواد مدرج تابعی (FGM)^[۱] در پزشکی (ساخت ایمپلنت دندان پزشکی) و فناوری مرتبط با نوروالکترونیک (نظیر پوشش محافظ روی پره‌های توربین در موتور توربین گاز) و غیره به‌کار می‌روند.^[۲] هنگامی که سازه‌هایی نظیر بدنه‌ی شاتل‌های فضایی، در معرض محیط‌های حرارتی با دماهای بالا قرار می‌گیرند، وجود تغییرات ناگهانی در خواص فیزیکی مصالح از یک لایه به لایه‌ی دیگر، منجر به تمرکز شدید تنش محلی، تورق و جدایش بین لایه‌ها می‌شود. اما با

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴۰۱/۵/۱، اصلاحیه ۱۴۰۱/۶/۳۱، پذیرش ۱۴۰۱/۷/۱۹

DOI:10.24200/J30.2022.60499.3108

vahid.mirhaji@iau.ac.ir
r_jahangiri@tabrizu.ac.ir
naderi.alii76@yahoo.com

داخل مواد به علت چند مشکل فنی، تداخل و ریزمغذ رخ دهد. در روش نفوذ چندمرحله‌یی، نفوذ مواد ثانویه به قسمت میانی بسیار دشوار است، در حالی که نفوذ آن‌ها به قسمت‌های بالایی و پایینی آسان‌تر است؛ در نتیجه، تداخل عمدتاً در منطقه‌ی میانی مواد FGM اتفاق می‌افتد. روش‌های دیگر در این زمینه، شکل‌دهی خالص مهندسی شده با لیزر (LENS) [83] روش پودر مخلوط توسط گریز از مرکز [9]، روش‌های نمونه‌سازی/تولید سریع تطبیقی (RP/M) [10] و ... هستند.

مطالعات در مورد رفتار مکانیکی مواد FGM، موضوع داغی در سال‌های اخیر بوده است. لی [4] (2008)، [11] خمش استاتیکی، انتشار امواج خمشی و ارتعاش آزاد تیرهای FG را با استفاده از تئوری‌های تیموشنکو و اوپلر - برنولی بررسی کرده است. کادولی [5] و همکاران (2008)، [12] رفتار خمشی تیرها را براساس یک نظریه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه‌ی بالاتر استفاده از فرمولاسیون المان محدود مطالعه کرده‌اند. لو و همکاران (2008)، [13] با تمرکز بر تیرهای مدرج تابعی دوطبقه‌ی، روش کشسان نیمه‌تحلیلی برای تیرهای مدرج تابعی دوطبقه‌ی را بسط داده و از روش مربعات تفاضلی مبتنی بر فضای حالت برای به‌دست آوردن تغییرشکل خمش و گرمایی استفاده کرده‌اند. ژائو [7] و همکاران (2006)، [14] یک راه‌حل کشسان دقیق برای تیرهای مدرج تابعی دوطبقه‌ی در معرض بارهای جانبی اختیاری با شرایط مرزی اختیاری براساس آنالیزی پیچیده به‌دست آورده‌اند. وانگ و همکاران (2006)، [15] ارتعاش آزاد تیرهای مدرج تابعی دوطبقه‌ی بر پایه‌ی نظریه‌ی تیر برنولی - اوپلر را بررسی کردند. متعاقباً، شمشک [8] و همکاران (2006)، [16] تحلیل کمانش تیرهای تیموشنکو ساخته شده از مواد مدرج تابعی دوطبقه‌ی را با ملاحظه‌ی شرایط مرزی مختلف و روش ریتز بررسی کرده‌اند.

لی و همکاران (2008)، [17] رفتار خمش غیرخطی دوطبقه‌ی تیرهای مدرج دوطبقه‌ی را با استفاده از نظریه‌ی تیر اوپلر - برنولی و روش مربعات تفاضلی تعمیم یافته (GDQM) [9] مطالعه کرده‌اند. علاوه‌براین، برخی پژوهشگران بر روی مشخصات خمشی، [18] ارتعاش آزاد، [20-22] و کمانش، [23] دو جهتی میکرو - نانو تیرهای مدرج تابعی متمرکز شده‌اند. لی و همکاران (2010)، [24] الگوریتمی را براساس روش مربعات تفاضلی برای تحلیل ترموکشسان صفحات با مواد مدرج تابعی دوجبه‌ی (BFG) [10] توسعه داده‌اند. نعمت - علا [11] و همکاران (2009)، [25] از یک مدل المان محدود سه‌طبقه برای بررسی بسیار دقیق عددی رفتار الاستوخمیری مواد FGM طی بارگذاری حرارتی استفاده کرده‌اند. چند سال بعد، ارتعاش آزاد یک پوسته‌ی استوانه‌یی دوطبقه‌ی با مواد مدرج تابعی توسط ابراهیمی و نجفی‌زاده (2014)، [26] آنالیز شد. ساتوری [2] و همکاران (2015)، [27] مطالعاتی را در مورد تحلیل رفتار کمانش کشسان پوسته‌ی استوانه‌یی دوطبقه‌ی تقویت شده توسط سخت‌کننده‌های محوری تحت ترکیب بارهای فشار محوری و گسترده‌ی عرضی یکنواخت با استفاده از روش مربعات تفاضلی (DQM) بر عهده گرفتند. یک مطالعه‌ی دقیق در مورد پاسخ‌های کمانش غیرخطی و پس از کمانش صفحات مدرج تابعی سخت شده با ویژگی‌های هندسی مختلف در محیط‌های حرارتی توسط تاکزالا [3] و همکاران (2017)، [28] تهیه شد. اخیراً یک روش تحلیلی به منظور بررسی رفتار کمانشی در قطعات پوسته با مواد مدرج تابعی سخت شده توسط تعدادی از سخت‌کننده‌ها در محیط‌های حرارتی، توسط وونگ و دوک [14] (2018)، گسترش یافته است. [29]

لی (2008)، [11] بررسی دورانی و تغییرشکل برشی در مطالعه‌ی رفتارهای استاتیکی و دینامیکی تیر مستطیلی را با مواد FGM در نظر گرفت. طبق مطالعات ذکر شده، نویسندگان نشان داده‌اند که مواد FGM، بسته به نوع یک طرح خاص، مفید یا زیان‌آور هستند. ملاحظه شد که هسته‌ی FGM می‌تواند آسیب ناشی از ضربه در سازه‌ها را کاهش دهد و یا از آن جلوگیری به عمل آورد و منجر به کاهش

چشم‌گیر وزن شود. محرابیان و گل‌مکانی (2015)، [30] به آثار عمق سخت‌کننده همراه با شرایط مرزی مختلف در پاسخ استاتیکی صفحات متورق حلقوی پرداختند. گل‌مکانی و امامی (2016)، [31] نیز رفتارهای کمانشی و تغییرشکل‌های بزرگ یک حلقه‌ی مدرج تابعی را - که به صورت دایره‌یی سخت شده‌اند - براساس روش DR بررسی کرده‌اند.

با توجه به نتایج تجزیه و تحلیل در نوشتارهای ذکر شده، رفتار مکانیکی ساختارهای BFG به مقدار زیادی به توزیع کسر حجمی مواد وابسته است. با وجود این، پروفیل مادی ساختارهای BFG معمولاً توسط یک تابع ریاضی مشخص، مانند قانون‌های توانی یا نمایی توضیح داده می‌شود. ظاهراً چنین ترکیب موادی نمی‌تواند در مسائل عملی بهینه‌سازی شود. بنابراین بهینه‌سازی توزیع مواد در ساختارهای BFG برای به دست آوردن عملکرد مکانیکی مطلوب سازه ضروری است. در مطالعه‌ی دیگر، حسین و مولانی (2018)، [32] به منظور بهینه‌سازی پانل‌های مدرج تابعی دوطبقه‌ی در برابر مقاومت کمانشی از روش بسط چندجمله‌یی استفاده کرده‌اند. نام ترونک [15] و همکارانش (2019)، [33] نیز به بهینه‌سازی توزیع ساختاری - هندسی مواد متشکله‌ی تابعی در تیر تیموشنکو در معرض بارگذاری استاتیکی پرداخته و نشان داده‌اند که در تیرهای با شرایط مرزی گیردار، باید ترکیب سرامیکی بهینه‌ی عمدتاً به لبه‌های گیردار و همچنین سطوح فوقانی و تحتانی اختصاص یابد. شرایط مرزی و محدودیت حجمی سرامیک، همانند نسبت ابعادی (L/H)، اثر قابل توجهی در رفتار مکانیکی تیرهای BFG دارند. نگوین [16]

و همکاران (2016)، [34] بهینه‌سازی تیرهای کامپوزیتی با مقطع ناودانی جدارنازک را برای بهینه‌سازی گشتاور بحرانی کمانش و بسامد اساسی با عرض بال، ارتفاع جان، و زاویه‌ی فیبر - که به صورت همزمان به‌عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته شده‌اند - فرمول‌بندی کرده‌اند. علاوه بر این، بهینه‌سازی با استفاده از الگوریتم ژنتیک میکرو، نرخ همگرایی سریع‌تری نسبت به الگوریتم ژنتیک کلاسیک نشان داده است. نگوین و لی (2017)، [35] از یک روش بهینه‌سازی مبتنی بر الگوریتم ژنتیک برای بررسی کمانش جانبی و خمشی پیشگی تیرهای مدرج تابعی با مقطع I شکل استفاده کرده‌اند که در آن پارامترهای توزیع هندسی و مواد، به عنوان متغیرهای طراحی منظور شده‌اند. پارامترهای هندسی و مصالح، نقش پرنفوذی بر روی کمانش تیرهای مدرج تابعی خصوصاً در تیرهای کوتاه‌تر دارند. همچنین آن‌ها نشان دادند که ضخامت پوشش سرامیکی بال و شاخص توزیع توانی خواص (متناظر با مقادیر پایین)، نقش به‌سزایی در تعیین بار بحرانی متناظر با کمانش بازی می‌کنند. فی [17] و همکارانش (2022)، [36] نیز با بررسی چگونگی بهینه‌سازی مسئله‌ی کمانش و ارتعاش‌های تیرهای جدارنازک باز با توزیع تدریجی خواص در راستای جان و بال، به این نتیجه رسیدند که ظرفیت کمانش بهینه‌ی تیرهای مذکور مستقل از شکل‌های خاص یا ساختار هندسی است. همچنین مطالعه‌ی اخیر نشان داد که بهینه‌سازی توزیع مواد مدرج تابعی می‌تواند به‌طور مؤثر در بهبود ارتعاش‌ها و کمانش تیرهای دارای دیواره‌ی نازک استفاده شود.

نگوین و همکارانش (2018)، [37] نیز با بررسی مسئله‌ی کمانش و ارتعاش‌های خمشی - پیشگی تیرهای جدارنازک مدرج تابعی دوجبه‌ی دریافتند که ناپایداری کمانشی در تیرهای طویل در مود خمشی و در تیرهای کوتاه‌تر در مود پیشگی رخ می‌دهد. لی و همکارانش (2019)، [38] با استفاده از به‌روزترین تئوری تغییرشکل‌های برشی و روش GDQM، رفتار پس از کمانش تیرهای معیوب مدرج تابعی دوجبه‌ی را با تداخل ساختاری بررسی کردند و نشان دادند که سختی تیر تابعی دوجبه‌ی براساس مدل تنش مسطح از سختی مدل کرنش مسطح کمتر است.

- تیر، جدارنازک است و رفتار مصالح آن در محدوده‌ی کشسان یا خطی تغییر می‌کند.
 - منحنی محیطی مقطع عرضی تیر در صفحه‌ی خود تغییرشکل نمی‌دهد.
 - به سبب کوچک بودن مؤلفه‌ی کرنش برشی واقع بر سطح میانی و تنش‌های نرمال مماس بر منحنی، می‌توان از اثر آن‌ها صرف‌نظر کرد ($\bar{\gamma}_{zs} = 1$).
 - فرضیات کیرشهف^{۲۲} برای هر کدام از بخش‌های مقطع عرضی صادق است.
 - آثار کماتش محلی و اعوجاجی در مدل‌سازی مسئله دخالت داده نمی‌شود.
- مطابق شکل ۱، مختصات هر نقطه‌ی دلخواه در مقطع عرضی بر حسب موقعیت مرکز برش را می‌توان با رابطه‌ی (۱ الف و ب) بیان کرد:

$$x = x_s + (r + n) \sin \theta - q \cos \theta \quad (الف۱)$$

$$y = y_s - (r + n) \cos \theta - q \sin \theta \quad (الف۲)$$

که در آن‌ها، q فاصله‌ی بین قطب P تا محل تلاقی راستای مماسی s گذرنده از P با راستای عمودی n است. مطابق شکل ۱، می‌توان مؤلفه‌های جابه‌جایی هر نقطه‌ی روی مقطع عرضی را بر حسب مؤلفه‌های جابه‌جایی نقاط واقع بر کانتور محیطی - میانی مقطع را از رابطه‌ی ۲ به‌دست آورد: [۵۷-۲۵]

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{bmatrix} - n \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{u}_{,s} \\ \bar{u}_{,z} \end{bmatrix} \quad (۲)$$

با فرض کوچک بودن مؤلفه‌های کرنش و با صرف‌نظر از آثار کماتش موضعی، می‌توان مؤلفه‌های جابه‌جایی \bar{u} و \bar{v} نقاط روی کانتور میانی - محیطی، بر حسب مؤلفه‌های جابه‌جایی U و V ، قطب P (مرکز برش) و زاویه‌ی دوران مقطع Φ حول محور گذرنده از قطب را به‌صورت رابطه‌ی (۳ الف و ب) بیان کرد:

$$\bar{u}(s, z) = U(z) \sin \theta(s) - V(z) \cos \theta(s) - \Phi(z)q(s) \quad (الف۳)$$

$$\bar{v}(s, z) = U(z) \cos \theta(s) + V(z) \sin \theta(s) + \Phi(z)q(s) \quad (ب۳)$$

با استفاده از مطالعات صورت گرفته توسط فونگ وو و لی^{۲۳} (۲۰۰۷)، مختصات قطاعی (ω) یا تابع اعوجاج از رابطه‌ی (۴ الف و ب) به‌دست می‌آیند: [۴۲]

$$\omega(s) = \int_{s_0}^s \left[r(s) - \frac{F(s)}{t(s)} \right] ds \quad (الف۴)$$

$$\oint_i \frac{F(s)}{t(s)} ds = 2A_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (ب۴)$$

که در آن، A_i معرف سطح مقطع احاطه شده توسط کانتور i ام است. همچنین $t(s)$ بیانگر ضخامت در راستای محیط مقطع قوطی شکل است. با توجه به روابط اخیر، فرم صریح $F(s)$ ، یعنی جریان برش محیطی سنت و نانت^{۲۴} برای مقطع قوطی شکل مطابق رابطه‌ی ۵ به‌دست می‌آید: [۴۲]

$$F = \frac{2A_m}{\oint \frac{ds}{t(s)}} = \frac{2b_1 b_r}{b_1 \left(\frac{1}{t_r} + \frac{1}{t_l} \right) + b_r \left(\frac{1}{t_r} + \frac{1}{t_l} \right)} \quad (۵)$$

با توجه به فرضیات ولاسوف، کرنش برشی نقاط واقع بر منحنی میانی به صورت رابطه‌ی ۶ به‌دست می‌آید:

$$\bar{\gamma}_{sz} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} = 0 \quad (۶)$$

با نگاهی به مطالعات انجام شده می‌توان دریافت که تاکنون رفتار کماتشی تیرهای ساندوچی تابعی جدارنازک بسته به ویژه قوطی شکل با ساختار ناهمگن، تحت بارگذاری‌های استاتیکی محوری / عرضی به صورت جامع تجزیه و تحلیل نشده است. لذا، در پژوهش حاضر، کماتش تیرهای ذکر شده، مطالعه و بررسی شده است. در این راستا فرض شده است که خواص مکانیکی تیر تابعی به صورت پیوسته با توزیع توانی در راستای ضخامت مقطع تیر با تبعیت از قانون اختلاط خطی کسر حجمی مواد، تغییر می‌یابد. [۲۰، ۲۹] سپس با دخالت دادن اثر تاب‌خوردگی اعضاء مقطع عرضی در فرمول‌بندی مسئله با استفاده از فرضیات تیر ولاسوف^{۱۸}، [۲۱] و به‌کارگیری تئوری تیرکلاسیک و با استفاده از اصل همیتون (اصل کار مجازی)، معادلات حاکم بر کماتش تیر استخراج و بار بحرانی کماتش متناظر با تیر ساندوچی شکل مدرج تابعی جدارنازک تحت اثر بارگذاری با استفاده از روش حل مقادیر ویژه برای حالت‌های تکیه‌گاهی: الف) دو سر ساده (SS)^{۱۹}، ب) یک‌سرگیردار - یک‌سر آزاد (CF)^{۲۰} و ج) یک‌سرگیردار - یک‌سر ساده (CS)^{۲۱} استخراج و نتایج حاصل، مقایسه و آنالیز کیفی و کمی شده‌اند.

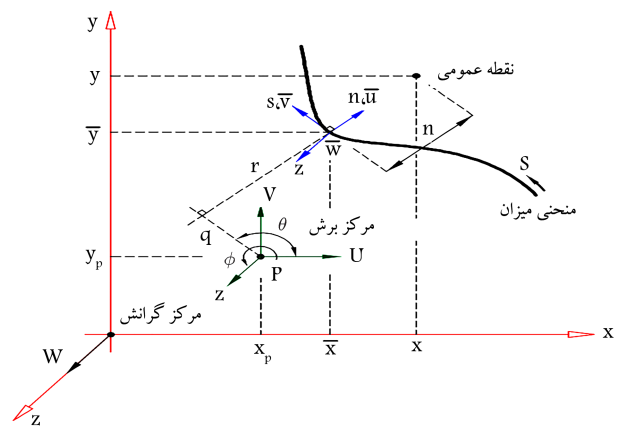
۲. فرمول‌بندی و استخراج معادلات

۱.۲. سینماتیک تغییرشکل مقطع عرضی

به منظور استخراج یک مدل عمومی جهت توصیف چگونگی تغییرشکل مقطع عرضی تیر جدارنازک در حین بارگذاری، سه نوع دستگاه مختصات متعامد دکارتی (x, y, z) برای سیستم کلی، دستگاه مختصات متعامد (n, s, z) محلی (واقع بر قسمت‌های صفحه، مانند تیر اعم از بال و جان) و دستگاه مختصات محیطی فرض شده است. مطابق شکل ۱، محورهای x و y در صفحه‌ی مقطع عرضی تیر واقع شده‌اند، در حالی که محور z عمود بر مقطع عرضی و به موازات راستای طولی تیر در نظر گرفته شده است. محور n عمود بر سطح میانی هر یک از قسمت‌های صفحه، مانند تیر و محور s مماس بر سطح میانی بوده و همواره در طول محیط منحنی تراز مشخصه‌ی مقطع عرضی حرکت داده شده است. نقطه‌ی P با عنوان مبدأ قطب یا مرکز برش شناخته می‌شود. [۴۱]

در راستای استخراج معادلات حاکم بر مدل تحلیلی تیر جدارنازک هدمند FG، این فرضیات منظور شده است:

- مؤلفه‌های کرنش مسئله‌ی کوچک و تغییرات آن‌ها در محدوده‌ی خطی در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۱. دستگاه مختصات واقع بر مقطع عرضی تیر جدارنازک باز.

حجمی اختلاط جزءهای سرامیکی و فلزی هستند، به طوری که در هر سطحی از ضخامت ناحیه‌ی مدرج تابعی تیر ساندویچی شکل تابعی، رابطه‌ی ۱۱ برقرار است:

$$V_c(n) + V_m(n) = 1 \quad (11)$$

با استفاده از قانون توزیع توانی ساده، می‌توان کسر حجمی جزء سرامیکی را به صورت رابطه‌ی ۱۲ نوشت: [۲۲]

$$V_c(n) = \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{n}{h}\right)^p, \quad 0 \leq p < \infty \quad (12)$$

که در آن، p چگونگی توزیع مواد در ضخامت لایه‌ی هدفمند تابعی را توصیف می‌کند (شکل ۳). مطابق شکل ۳ و با توجه به رابطه‌ی ۸ مشاهده می‌شود که برای مقادیر کوچک‌تر از شاخص اختلاط، درصد سهم ترکیب جزء سرامیکی در مقایسه با جزء فلزی بیشتر است و بالعکس.

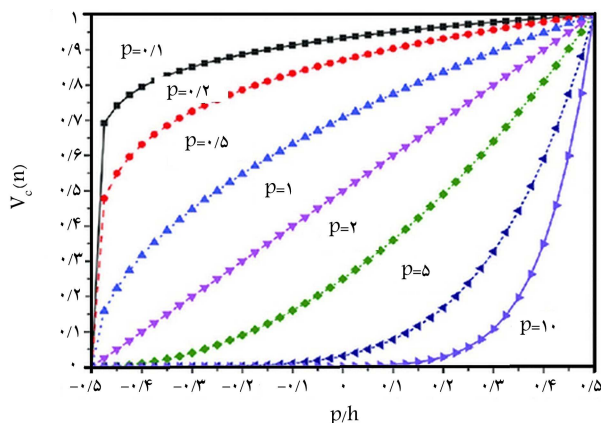
از آنجایی که در تجزیه و تحلیل تیر جدارنازک با مدل حاضر، اثر نسبت پواسون در مقایسه با اثر مدول یانگ ناچیز است، از این رو به منظور سادگی فرض شده است که مقدار نسبت پواسون ثابت است. از طرفی دیگر، به منظور سادگی فرض شده است که خواص مصالح فقط در راستای ضخامت بخش‌های مقطع عرضی صورت می‌گیرد و مدول کشسان اعضاء جان و بال در راستای ضخامت از خواص خالص فلزی در $n = -h/2$ به خواص خالص سرامیکی $n = +h/2$ براساس توزیع توانی تغییر می‌یابد. با توجه به توضیحات موردنیاز در مورد ساختار ناهمگن هدفمند تابعی در پژوهش حاضر، خواص مواد مدرج تابعی با اجزاء فلزی و سرامیکی و کسر حجمی فاز سرامیکی در راستای ضخامت، مدل‌های A (تک‌لایه‌ی تابعی)، مدل B (دولایه‌ی بی) و مدل C (سه‌لایه‌ی بی) به صورت روابط ۱۳ الی ۱۵ تعریف می‌شوند: [۲۳]

نوع A

$$V_c = \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{n}{h}\right)^p, \quad -\frac{h}{\gamma} \leq n \leq +\frac{h}{\gamma} \quad (13)$$

نوع B

$$V_c = \begin{cases} \left(\frac{1}{\gamma} + \frac{n}{h}\right)^p, & -\alpha h \leq n \leq (\alpha h - \alpha)h \\ 1 & (\alpha h - \alpha)h \leq n \leq \alpha h \end{cases} \quad (14)$$



شکل ۳. توزیع کسر حجمی در امتداد ضخامت لایه‌ی تابعی جان و بال مقطع قوطی شکل.

با استفاده از رابطه‌ی (۳) و با انتگرال‌گیری نسبت به s در راستای محیطی از نقطه‌ی مبدأ تا نقطه‌ی دلخواه روی کانتور محیطی می‌توان مؤلفه‌ی جابه‌جایی \bar{w} را به صورت رابطه‌ی ۷ استخراج کرد:

$$\bar{w}(s, z) = W(z) \sin \theta(s) - \frac{dU}{dz} x(s) - \frac{dV}{dz} y(s) - \frac{\partial \Phi(z)}{\partial z} \omega(s) \quad (7)$$

در ادامه، مؤلفه‌های کرنش خطی به صورت رابطه‌ی ۸ معرفی شده‌اند: [۲۳]

$$\begin{aligned} \varepsilon_z &= \varepsilon_z^0 + (x + n \sin \theta) \kappa_y + (y - n \cos \theta) \kappa_x + (\omega - nq) \kappa_\omega \\ \gamma_{sz} &= n \kappa_{sz} \end{aligned} \quad (8)$$

که در آن، $\varepsilon_z^0 = W_{,z}$ ، $\kappa_x = -U_{,zz}$ ، $\kappa_y = -V_{,zz}$ ، $\kappa_\omega = -\Phi_{,zz}$ و $\kappa_{sz} = 2\Phi_{,z}$ ، $\kappa_{zs} = 2\Phi_{,z}$ و به ترتیب نشان‌دهنده‌ی کرنش محوری، انحنای در راستای x و y ، انحنای ناشی از تاب‌خوردگی و انحنای پیچشی هستند. با استفاده از معادله‌های ۲ و ۸، می‌توان رابطه‌ی متشکله‌ی حاکم بر تنش - کرنش تیر مدرج تابعی را به صورت رابطه‌ی ۹ نوشت:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_z \\ \sigma_{zs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E(n) & 0 \\ 0 & G(n) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z \\ \gamma_{zs} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

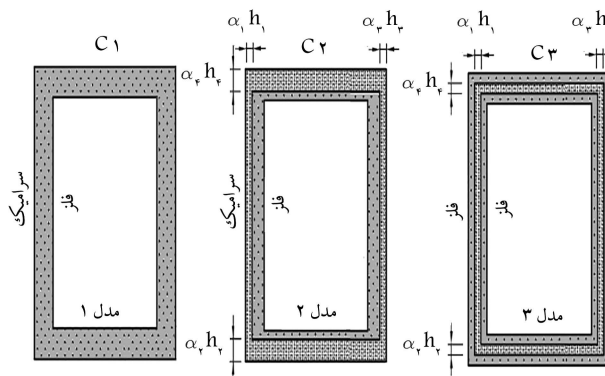
که در آن $E(n)$ و $G(n)$ به ترتیب بیانگر مدول کشسانی و مدول برشی مقطع به فاصله‌ی n از محور هندسی هر کدام از لایه‌های مقطع هستند.

۲.۲. مدل‌سازی خواص مقطع هدفمند دو فازه‌ی تابعی متخلخل

در شکل ۲، مقطع عرضی تیر قوطی شکل جدارنازک بسته با ساختار ناهمگن دو فازه‌ی مدرج تابعی FG مشاهده می‌شود؛ که مطابق آن، اجزاء مقطع (بال و جان) از اختلاط دو جزء فلزی و سرامیکی با سه مدل متنوع ساخته شده‌اند. فرض شده است که توزیع خواص بال و جان تیر FG مذکور در راستای ضخامت و در حضور شاخص تخلخل از قانون اختلاط خطی کسر حجمی مواد تبعیت می‌کند و از رابطه‌ی ۱۰ به دست می‌آید: [۲۳]

$$E(n) = E_c V_c(n) + E_m V_m(n) - \rho \frac{E_c + E_m}{\gamma} \quad (10)$$

که در آن، E_c و E_m به ترتیب نشان‌دهنده‌ی مدول کشسانی خالص سرامیکی و فلزی و ρ معرف شاخص تخلخل هستند. همین‌طور V_c و V_m نیز نشان‌دهنده‌ی کسر



شکل ۲. مدل‌های مختلف تیر با مقطع عرضی قوطی شکل.

$$V_c = \begin{cases} \left(\frac{-|n| + \frac{\circ}{\delta}h}{\frac{\circ}{\delta}(1-\alpha)h}\right)^p, & +\frac{\circ}{\delta}h \leq n \leq \frac{\circ}{\delta}h \\ 1, & -\frac{\circ}{\delta}h \leq n \leq \frac{\circ}{\delta}h \\ \left(\frac{-|n| + \frac{\circ}{\delta}h}{\frac{\circ}{\delta}(1-\alpha)h}\right)^p, & -\frac{\circ}{\delta}h \leq n \leq \frac{\circ}{\delta}h \end{cases} \quad (15)$$

که با استفاده از آن‌ها می‌توان ماتریس‌های منتجه‌ی سختی محوری A_{11} ، سختی همبستگی (جفت‌شدگی) محوری - خمشی B_{11} و سختی خمشی D_{11} مقطع عرضی تیر را با انتگرال‌گیری در راستای ضخامت اعضاء بال و جان از روابط ۱۶ به‌دست آورد:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \int_s E(n)dn \\ B_{11} &= \int_s nE(n)dn \\ D_{11} &= \int_s n^2 E(n)dn \\ D_{\delta\delta} &= \int_s n^2 G(n)dn \end{aligned} \quad (16)$$

۳.۲. انرژی کرنشی و معادلات متشکله

فونگ وو و لی (۲۰۱۵)، [۲۴] با به‌کارگیری اصل کار مجازی (اصل همیلتون)، انرژی پتانسیل ذخیره‌شونده در سیستم در فرم ضعیف را با دخالت دادن اثر بار محوری خارج، استخراج کرده و معادلات حاکم بر مسئله‌ی کماتش تیر را بر حسب متجه‌های نیروی محوری و لنگری به‌صورت رابطه‌ی ۱۷ ارائه داده‌اند، که در آن‌ها M_x ، N_z ، M_y ، M_t و M_ω به‌ترتیب بیانگر متجه‌های نیروی محوری، گشتاورهای خمشی در راستاهای x و y ، گشتاور اعوجاجی (تاب‌دهنده)، و گشتاور پیچشی هستند. در رابطه‌ی ۱۸، نیز فرم فشرده‌ی ماتریسی متجه‌های نیروی محوری و لنگری بر حسب مؤلفه‌های کرنش تعمیم‌یافته و اجزاء سختی تیر (E_{ij}) ارائه شده است. [۲۴]

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_z}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_y}{\partial z^2} + P^\circ (U'' + y_s \Phi'') &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} + P^\circ (V'' - x_s \Phi'') &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_\omega}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial M_t}{\partial z} + P^\circ \left(\frac{I_p}{A} \Phi'' + y_s U'' - x_s V'' \right) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_y \\ M_x \\ M_\omega \\ M_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & 0 \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} & 0 \\ E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_z^\circ \\ \kappa_y \\ \kappa_x \\ \kappa_\omega \\ \kappa_{zs} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

که در آن‌ها، E_{11} بیانگر سختی محوری، E_{22} و E_{33} بیانگر سختی خمشی، E_{44} معرف سختی اعوجاجی، E_{55} معادل سختی پیچشی تیر جدارنازک با ساختار کامپوزیتی هستند. به‌طورکلی، E_{ij} ‌ها نشان‌دهنده‌ی اجزاء ماتریس سختی تیر هستند که از مجموعه‌ی روابط ۱۹ به‌دست می‌آیند. همچنین ε_z° ، κ_y ، κ_x ، κ_ω ، κ_{zs} پارامترهای به‌ترتیب معرف کرنش محوری، انحناء دو محوری در امتدادهای y و x ، انحناء پیچشی حول مرکز برش و انحناء پیچ‌خوردگی (تابیدگی) در مقطع تیر حاضر

هستند. در روابط اخیر، P° بار محوری و x_s و y_s مختصات مرکز برش سطح مقطع تیر جدارنازک، و I_p بیانگر ممان اینرسی سطح حول محور هستند. امتدادها و زوایا مطابق شکل ۱ تعریف می‌شوند. توضیح اینکه، نوآوری اول پژوهش حاضر، یعنی اثر تداخل و نوآوری دوم، ساندویچی بودن مقطع عرضی با هسته‌ی تابعی از طریق ضرایب سختی مذکور به داخل مسئله منعکس شده‌اند.

$$\begin{aligned} E_{11} &= \int_s A_{11} ds \\ E_{12} &= \int_s (A_{11}x + B_{11} \sin \theta) ds \\ E_{13} &= \int_s (A_{11}y - B_{11} \cos \theta) ds \\ E_{14} &= \int_s (A_{11}\omega - B_{11}q) ds \\ E_{15} &= \int_s (A_{16} \frac{F}{\sqrt{t}} + B_{16}) ds \\ E_{22} &= \int_s (A_{11}x^2 + 2xB_{11} + D_{11} \sin^2 \theta) ds \\ E_{23} &= \int_s (A_{11}xy - B_{11}(x \cos \theta - y \sin \theta) - \frac{1}{\sqrt{t}} D_{11} \sin 2\theta) ds \\ E_{24} &= \int_s (A_{11}x\omega - B_{11}(xq - \omega \sin \theta) - D_{11}q \sin \theta) ds \\ E_{25} &= \int_s (A_{16}x + B_{16}(x + \frac{F}{\sqrt{t}} \sin \theta) + D_{16} \sin \theta) ds \\ E_{33} &= \int_s (A_{11}y^2 - 2B_{11}y \cos \theta + D_{11} \cos^2 \theta) ds \\ E_{34} &= \int_s (A_{11}y\omega - B_{11}(yq + \omega \cos \theta) + D_{11}q \cos \theta) ds \\ E_{35} &= \int_s (A_{16} \frac{F}{\sqrt{t}} y + B_{16}(y - \frac{F}{\sqrt{t}} \cos \theta) - D_{16} \cos \theta) ds \\ E_{44} &= \int_s (A_{11}\omega^2 - 2B_{11}\omega q + D_{11}q^2) ds \\ E_{45} &= \int_s (A_{16} \frac{F}{\sqrt{t}} \omega + B_{16}(\omega - \frac{Fq}{\sqrt{t}}) - D_{16}q) ds \\ E_{55} &= \int_s (A_{66} \frac{F^2}{\sqrt{t}^2} + 2B_{66} \frac{F}{t} + D_{66}) ds \end{aligned} \quad (19)$$

با جایگذاری معادلات ماتریسی رابطه‌ی ۱۸ در روابط شرایط مرزی (رابطه‌ی ۱۷) مستخرج از اصل همیلتون، فرم صریح معادلات حاکم بر کماتش بر حسب مؤلفه‌های جابه‌جایی به‌صورت رابطه‌ی ۲۰ خلاصه شده‌اند:

$$\begin{aligned} E_{11}W_{,zz} - E_{12}U_{,zzz} - E_{13}V_{,zzz} - E_{14}\Phi_{,zzz} + 2E_{15}\Phi_{,zz} &= 0 \\ E_{12}W_{,zzz} - E_{22}U_{,zzzz} - E_{23}V_{,zzzz} - E_{24}\Phi_{,zzzz} + 2E_{25}\Phi_{,zzz} \\ + P^\circ (U_{,zz} + y_s \Phi_{,zz}) &= 0 \\ E_{13}W_{,zzz} - E_{23}U_{,zzzz} - E_{33}V_{,zzzz} - E_{34}\Phi_{,zzzz} \\ + 2E_{35}\Phi_{,zzz} + P^\circ (V_{,zz} - x_s \Phi_{,zz}) &= 0 \\ E_{14}W_{,zzz} + 2E_{15}W_{,zz} - E_{24}U_{,zzzz} - 2E_{25}U_{,zzz} \\ - E_{34}V_{,zzzz} - 2E_{35}V_{,zzz} - E_{44}\Phi_{,zzzz} + 4E_{55}\Phi_{,zz} \\ + P^\circ \left(\frac{I_p}{A} \Phi_{,zz} + y_s U_{,zz} - x_s V_{,zz} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

مجموعه‌ی معادلات ۲۰، بیانگر فرم عمومی معادلات حاکم بر مسئله‌ی ناپایداری

چندجمله‌یی (مکعبی شکل) هرمتیتی Ψ_j ، بر حسب مؤلفه‌های جابه‌جایی گره‌های ابتدایی و انتهایی مطابق مجموعه‌ی روابط ۲۲ و ۲۳ بیان کرد:

$$\begin{aligned} W(z) &= W_1\Psi_1(z) + W_2\Psi_2(z) \\ U(z) &= u_1\Psi_1(z) + u_{1,z}\Psi_2(z) + u_2\Psi_2(z) + u_{2,z}\Psi_3(z) \\ V(z) &= v_1\Psi_1(z) + v_{1,z}\Psi_2(z) + v_2\Psi_2(z) + v_{2,z}\Psi_3(z) \\ \phi(z) &= \phi_1\Psi_1(z) + \phi_{1,z}\Psi_2(z) + \phi_2\Psi_2(z) + \phi_{2,z}\Psi_3(z) \quad (22) \\ \psi_1(z) &= 2z^2/l_e^2 - 3z^2/l_e^2 + 1 \\ \psi_2(z) &= z^2/l_e^2 - 2z^2/l_e^2 + z \\ \psi_3(z) &= -2z^2/l_e^2 + 3z^2/l_e^2 \\ \psi_4(z) &= z^2/l_e^2 - z^2/l_e \quad (23) \end{aligned}$$

نوع شرایط مرزی سه‌گانه‌ی هندسی حاکم بر جابه‌جایی‌ها و دوران لبه‌های ابتدایی و انتهایی تیر را می‌توان به این صورت در نظر گرفت:

- شرایط مرزی دو سر ساده (SS):
 $x = 0 : u = v = w = \phi = 0 ; x = L : u = v = \phi = 0$
- شرایط مرزی یکسرگیردار یکسر ساده (CS):
 $x = 0 : u = v = w = \phi = 0 ; x = L : u = v = \phi = 0$
- شرایط مرزی یکسرگیردار یکسر آزاد (CF):
 $x = 0 : u = v = w = \phi = 0 ; x = L : u = v = \phi = 0$
- شرایط مرزی یکسرگیردار یکسر آزاد (CF):
 $x = 0 : u = v = w = \phi = 0 ; x = L : u = v = \phi = 0$
- شرایط مرزی یکسرگیردار یکسر آزاد (CF):
 $x = 0 : u = v = w = \phi = 0 ; x = L : u = v = \phi = 0$
- شرایط مرزی یکسرگیردار یکسر آزاد (CF):
 $x = 0 : u = v = w = \phi = 0 ; x = L : u = v = \phi = 0$

با جایگذاری جابه‌جایی‌های نقاط در معادله‌ی انتگرالی مستخرج از اصل همیلتون (فرم ضعیف شده)، فرم صریح معادله‌ی جابه‌جایی گره‌ها به دست می‌آید.^[۴] از طرف دیگر، به علت ماهیت غیروابسته‌ی δv_i ، δu_i و δw_i در معادله‌ی انتگرالی با فرم ضعیف شده، می‌توان با صفر قرار دادن ضرایب هر کدام از کمیت‌های ذکر شده، مدل المان محدود هر کدام از المان‌ها را در قالب مسئله‌ی مقدار مشخصه‌ی تعمیم‌یافته، مطابق رابطه‌ی ۲۴ توصیف کرد:

$$(K - \lambda G) \times \Delta = 0 \quad (24)$$

که در آن، رابطه‌ی ۲۵ به دست می‌آید:

$$\Delta = \{w_1 \ w_2 \ u_1 \ u'_1 \ u_2 \ u'_2 \ v_1 \ v'_1 \ v_2 \ v'_2 \ \phi_1 \ \phi'_1 \ \phi_2 \ \phi'_2\}^T \quad (25)$$

که در آن، Δ بردار ویژه‌ی جابه‌جایی‌های گره‌یی متناظر با مقدار ویژه‌ی مرتبط برای $\lambda = P_{cr}$ هستند. همچنین، K و G نیز به ترتیب نشان‌دهنده‌ی ماتریس سختی المان و ماتریس سختی هندسی هستند که به تفصیل توسط نگین و همکاران (۲۰۱۶) ارائه شده‌اند.^[۴] در حالت کلی، اگر تغییرات خواص از جمله مدول یانگ فقط در راستای ضخامت اعضاء مقطع تابعی (بال و جان)

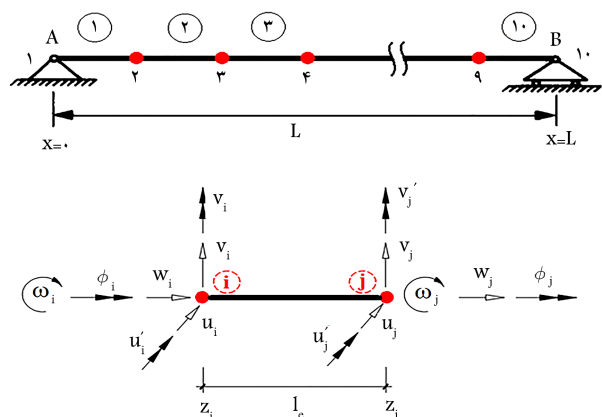
استاتیکی است، به نحوی که در آن مؤلفه‌های تغییرمکان نسبت به هم همبسته هستند. تحت شرایط خاص و فرض وجود تقارن هندسی و برقراری تقارن در توزیع خواص لایه‌ها نسبت به محورهای x و y منجر به $x_s = y_s = 0$ و انطباق مراکز برش و هندسی سطح بر روی هم می‌شود؛ که در نتیجه، معادله‌های دوم و سوم در مجموعه‌ی معادلات ۲۰ که متناظر با مودهای کاماش خمشی حول محورهای x و y هستند، مستقل از هم و مستقل از مود کاماش محوری (معادله‌ی اول) و مود پیچشی (معادله‌ی چهارم) می‌شوند. حال آنکه تحت مفروضات ذکرشده و مطابق رابطه‌ی ۲۱، همبستگی شدیدی بین معادله‌های اول و چهارم به وجود می‌آید که به عنوان مود کاماش پیوندی شناخته می‌شود، که در برگزیده‌ی آثار توآمان مود تغییرمکان محوری و مود پیچشی مقطع جدارنازک است:

$$\begin{aligned} E_{11}W_{,zz} - E_{12}\Phi_{,zzz} &= 0 \\ E_{22}U_{,zzzz} + P^*U_{,zz} &= 0 \\ -E_{22}V_{,zzzz} + P^*V_{,zz} &= 0 \\ E_{12}W_{,zzz} - E_{22}F_{,zzzz} + 4E_{55}\Phi_{,zz} + P^*\frac{I_p}{A}\Phi_{,zz} &= 0 \quad (21) \end{aligned}$$

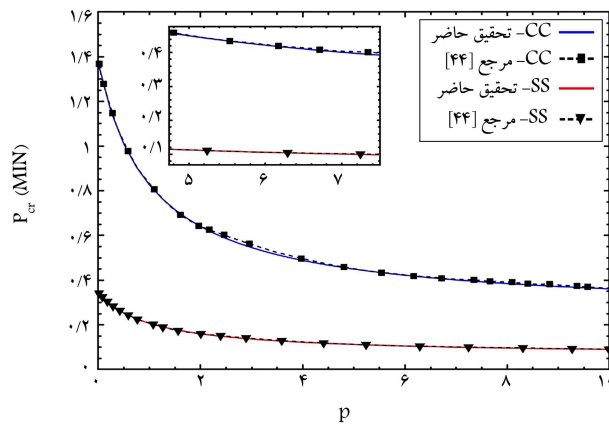
زیرا برخلاف مقطع قوطی شکل باکس، مانند جدار ضخیم، وقتی مقطع جدار نازک قوطی شکل تحت نیروی محوری P^* قرار می‌گیرد، به دلیل همبستگی مذکور بین مود تغییرمکان محوری و مود پیچشی مقطع، اثر آن از طریق تابع اعوجاج به داخل معادلات تعادل استاتیکی منعکس می‌شود. لذا تحت مفروضات مذکور، کاماش ایجاد شده ماهیت متفاوتی نسبت به کاماش محوری مقاطع توپر یا جدار ضخیم خواهد داشت؛ که تحت شرایط اشاره شده با به‌کارگیری روش المان محدود و پیامد آن با استخراج ماتریس‌های سختی سیستم و با حل معادله‌ی مشخصه‌ی حاکم بر کاماش، می‌توان کوچک‌ترین نیروی بحرانی متناظر با وضعیت کاماش را که مشتمل بر تلفیقی از مودهای محوری و پیچشی است، به عنوان ظرفیت کاماش مقطع جدارنازک بسته به دست آورد.

۴.۲. فرمول‌بندی مسئله به روش المان محدود

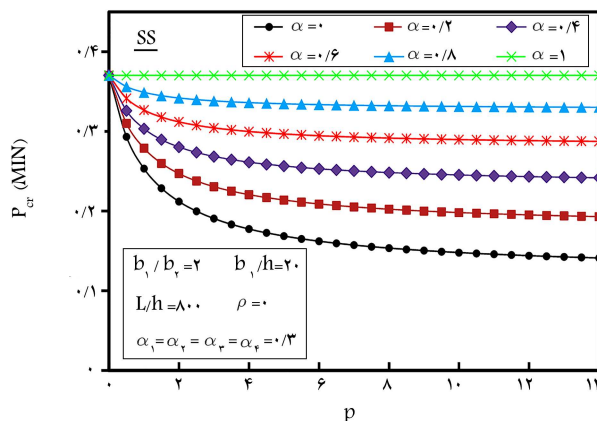
در ادامه، با تقسیم‌بندی تیر در راستای محوری به چند المان مشابه (شکل ۴) و با به‌کارگیری روش المان محدود، می‌توان مؤلفه‌های میدان جابه‌جایی نقاط داخل هر کدام از المان‌ها را با استفاده از توابع درون‌یابی خطی لاگرانژی ζ_j و توابع درون‌یابی



شکل ۴. شکل شماتیک هندسی المان‌های تیر در راستای طولی.



شکل ۵. تغییرات برای دو حالت مختلف از شرایط مرزی.



شکل ۶. تغییرات بار محوری بحرانی کمانش در برابر شاخص توانی اختلاط برای α های متفاوت.

لایه‌ی سرامیکی جان است. ضمناً نسبت منظر تیر برابر $L/b_2 = 40$ در نظر گرفته شده است. سه مقطع عرضی از توزیع مواد در راستای جدار مقطع تیر، به صورت تک لایه، دولایه و سه لایه با هسته‌ی سرامیکی خالص، با عناوین A، B و C ارائه شده و خواص مصالح در لایه‌ی تابعی، به صورت تدریجی به خواص سرامیکی در فصل مشترک لایه‌ها گرایش یافته است. مطابق شکل ۲، مقطع عرضی تیر هدفمند تابعی قوطی شکل که معرف ساختار هندسی و چگونگی توزیع خواص لایه‌های همگن و تابعی مقطع عرضی تیر با مقطع قوطی شکل است، با عناوین C1، C2 و C3 معرفی شده است.

۴. تحلیل عددی

۱.۴. اثر نسبت ضخامت لایه‌ی سرامیکی در بار بحرانی کمانش در

تیر دو سر ساده (SS)

در ابتدا مسئله‌ی کمانش تیر جدارنازک بسته‌ی قوطی شکل، در معرض بار محوری تیر ارائه شده در مدل C2 (شکل ۲) بررسی شده است. در این راستا فرض شده است که نسبت ضخامت لایه‌های سرامیکی بال‌ها و هسته‌ی سرامیکی جان تیر یکسان و برابر $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha$ بوده است. در شکل ۶، نمودار تغییرات نیروی بحرانی کمانش در برابر تغییرات شاخص توانی اختلاط، برای مقدار مختلف از نسبت ضخامت لایه‌ی سرامیکی (α) مشاهده می‌شود؛ که مطابق آن،

اتفاق بیفتد، اعضاء ماتریس سختی و هندسی به فرم روابط ۲۶ و ۲۷ خواهند بود:

$$K = \begin{bmatrix} [K_{IJ}^{(1)}]_{[2 \times 2]} & [K_{IJ}^{(2)}]_{[2 \times 2]} & [K_{IJ}^{(3)}]_{[2 \times 2]} & [K_{IJ}^{(4)}]_{[2 \times 2]} \\ \vdots & [K_{IJ}^{(2)}]_{[2 \times 2]} & [K_{IJ}^{(3)}]_{[2 \times 2]} & [K_{IJ}^{(4)}]_{[2 \times 2]} \\ \vdots & \dots & [K_{IJ}^{(3)}]_{[2 \times 2]} & [K_{IJ}^{(4)}]_{[2 \times 2]} \\ sym. & \dots & \dots & [K_{IJ}^{(4)}]_{[2 \times 2]} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$G = \begin{bmatrix} [0]_{[2 \times 2]} & [0]_{[2 \times 2]} & [0]_{[2 \times 2]} & [0]_{[2 \times 2]} \\ \vdots & [G_{IJ}^{(2)}]_{[2 \times 2]} & [0]_{[2 \times 2]} & [G_{IJ}^{(4)}]_{[2 \times 2]} \\ \vdots & \dots & [G_{IJ}^{(3)}]_{[2 \times 2]} & [G_{IJ}^{(4)}]_{[2 \times 2]} \\ sym. & \dots & \dots & [G_{IJ}^{(4)}]_{[2 \times 2]} \end{bmatrix} \quad (27)$$

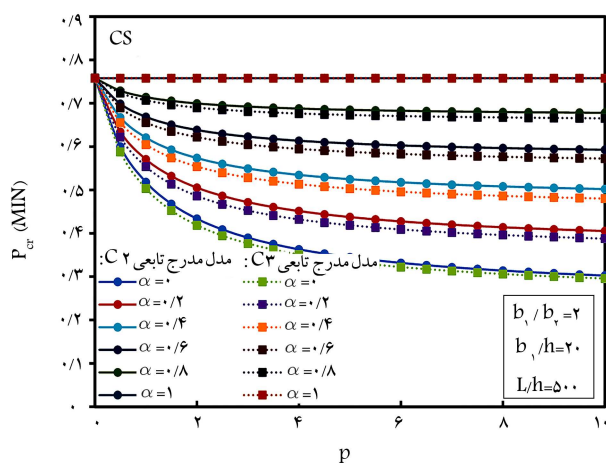
۳. مدل سازی عددی

۱.۳. راستی آزمایی کمانش

به منظور راستی آزمایی نتایج مدل حاضر، مشابه نوشتار لانک و همکارانش (۲۰۱۵)، [۲۴] فرض شده است که تیر قوطی شکل مدرج تابعی تک لایه با نسبت ابعاد $b_1/h = 20$ ، $b_2/h = 40$ مکانیکی $E_m = \nu_e GPa$ و جزء حجمی فلزی $\nu_e = 0.3$ و $E_c = 380 GPa$ و $\nu_m = 0.3$ تحت تأثیر بار محوری قرار دارد. در این راستا، مطابق مرجع [۲۴] فرض شده است که شرایط مرزی حاکم بر لبه‌های تیر از دو نوع: الف) دوسرگیردار (CC)، ب) دو سر ساده‌ی نامتحرک (SS) است. در شکل ۵، مقایسه‌ی کمی نتایج مستخرج از پژوهش حاضر با نتایج مرجع اخیر [۲۴] برای تغییرات ظرفیت کمانش در برابر پارامتر شاخص کسر اختلاط حجمی برای دو حالت از شرایط مرزی اخیر مشاهده می‌شود؛ که مطابق آن، نتایج حاصل از مدل حاضر، انطباق بسیار خوبی با نتایج متناظر به دست آمده در پژوهش لانک و همکارانش [۲۴] دارد.

۲.۳. تیر مدرج تابعی جدارنازک تحت بارگذاری محوری

تیر جدارنازک با مقطع عرضی مستطیلی بسته با ضخامت جدار h و ابعاد وسط تا وسط جدار $(b_1 \times b_2)$ تحت شرایط مرزی تکیه‌گاهی ساده فرض شده است. همچنین، با توجه به مقطع مفروض، ضخامت جدار به طور یکنواخت معادل $h = 5 mm$ ، $b_1 = 40h$ و $b_2 = 20h$ فرض شده است. نسبت L/b_2 نیز معادل نسبت منظر تیر معرفی شده است. ضمناً فرض شده است که مقاطع عرضی تیر اعم از جان و بال، ساندویچی شکل (کامپوزیتی یا چندلایه‌یی) هستند، به نحوی که لایه‌ی هدفمند تابعی آن از ترکیب ریزساختاری فازهای فلزی سرامیکی (Al/Al_2O_3) ساخته شده است؛ به طوری که در لایه‌های مذکور، انتقال خواص مواد از یک فاز به فاز دیگر به صورت تدریجی و پیوسته اتفاق می‌افتد. در این راستا، فرض شده است که مدول کشسان جزء سرامیکی (Al_2O_3) برابر $E_c = 320/\sqrt{GPa}$ و جزء فلزی (Al) برابر $E_m = 105/69 GPa$ است. همچنین برای سادگی فرض شده است که نسبت پواسون هر دو جزء مساوی و برابر $\nu = 0.3$ است. از طرف دیگر فرض شده است که α_1 و α_2 به ترتیب نشان‌دهنده‌ی نسبت ضخامت لایه‌های همگن سرامیکی بال‌های فوقانی و تحتانی مقاطع هستند و α_2 نیز معادل نسبت ضخامت



شکل ۸. تغییرات $P_{cr} - p$ در تیر با مدل‌های CS به ازاء مقادیر مختلف α .

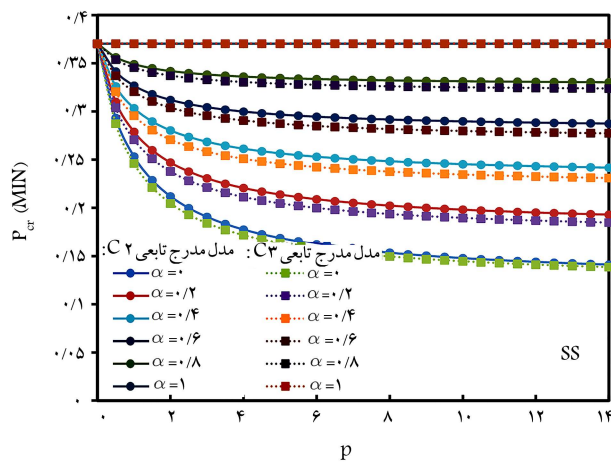
با افزایش شاخص توانی اختلاط، کمانش در بارهای کوچک‌تر اتفاق افتاده است؛ به نحوی که در تمامی حالت‌ها با ادامه‌ی افزایش شاخص توانی اختلاط به سمت خواص فلزی، بار بحرانی تا تثبیت شدن در یک مقدار خاصی، کاهش روند کاهشی داشته است. از طرف دیگر، مقایسه‌ی نتایج حاصل برای مدل‌های دولایه‌یی (C2) و سه‌لایه‌یی (C3)، نشان‌دهنده‌ی این واقعیت است که به ازاء مشخصات هندسی یکسان و هر مقدار خاص از α ، کمانش مقطع با توزیع خواص سه‌لایه‌یی در مقایسه با خواص دولایه‌یی در بارهای پایین‌تری اتفاق افتاده است. دلیل آن نیز به بیشتر بودن کسر حجمی اختلاط جزء سرامیکی در مدل C2 در مقایسه با مدل C3 از طرف دیگر، افزایش نسبت α سبب افزایش سهم مشارکت جزء سرامیکی در تحمل مقاومتی مقطع در مقایسه با سهم جزء فلزی شده است؛ زیرا مقادیر بزرگ‌تر α متناظر با بزرگ‌تر بودن نسبت ضخامت لایه‌ی سرامیکی جان و بال و به تبع آن افزایش کسر حجمی سرامیکی است. در نتیجه، پیامد افزایش کسر جزء سرامیکی، افزایش سختی کمانشی تیر است که باعث می‌شود دامنه‌ی تحمل بار کمانشی مقطع بهبود یابد. همچنین مطابق شکل اخیر، در هر دو مدل، منحنی متناظر با $\alpha = 1$ بیانگر سرامیکی شدن کل مقطع است که در شرایط ذکر شده، تیر بیشینه‌ی مقدار سختی متناظر با بیشترین بار بحرانی را خواهد داشت.

۳.۴. اثر نسبت ضخامت لایه‌ی سرامیکی در کمانش با شرایط مرزی CF

در شکل ۹، تغییرات بار بحرانی کمانش در برابر تغییرات شاخص توانی اختلاط در مقادیر مختلف α در تیر یک‌سرگردار - یک‌سر آزاد با مقطع دولایه (C2)، مشاهده می‌شود که مطابق آن، مشابه حالت‌های قبلی، با افزایش شاخص توانی اختلاط، مقدار بار کمانش به علت کاهش سختی ناشی از کاهش سهم جزء سرامیکی کاهش یافته است. همچنین از شکل اخیر می‌توان دریافت که افزایش نسبت ضخامت سرامیکی اثر پایدارکننده دارد؛ زیرا طبق شکل اخیر، با افزایش α ، سختی تیر نیز افزایش یافته و کمانش در مقادیر بزرگ‌تری از بار وارده اتفاق افتاده است.

۴.۴. اثر نسبت ضخامت لایه‌ی سرامیکی در ظرفیت کمانشی

در بخش حاضر، اثر نسبت ضخامت سرامیکی $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha$ ، در ظرفیت کمانش تیر دو سرساده، با مدل نوع C3 بررسی شده است. در شکل ۱۰، منحنی‌های تغییرات ظرفیت کمانشی در برابر نسبت ضخامت سرامیکی، برای پنج



شکل ۹. تغییرات $P_{cr} - p$ در تیر با مدل‌های C2 و C3 به ازاء مقادیر مختلف α .

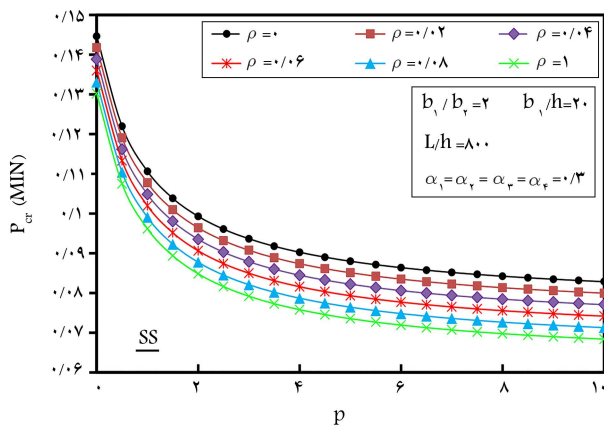
برای هر مقدار خاص از نسبت ضخامت سرامیکی، با افزایش p و به تبع آن به علت کاهش سهم جزء سرامیکی، مقدار بار بحرانی متناظر با کمانش نیز به صورت پیوسته کاهش یافته است؛ به طوری که با افزایش شاخص توانی اختلاط، بار بحرانی متناظر با کمانش عرضی، به یک مقدار حدهی خاصی میل کرده و در آن تثبیت شده است. زیرا بزرگ‌تر بودن مدول کشسان جزء سرامیکی در مقایسه با جزء فلزی سبب می‌شود که در p های کوچک‌تر (متناظر با سهم سرامیکی بیشتر)، بار محوری جهت ایجاد کمانش عرضی بیشتری لازم باشد. به عبارت دیگر، بالا رفتن مقدار شاخص اختلاط، اثر ناپایدارکننده دارد؛ به طوری که در شاخص‌های بزرگ‌تر، سهم جزء فلزی با مدول کشسان کوچک‌تر، کمتر شده و کمانش عرضی در بارهای کوچک‌تری اتفاق افتاده است. از طرف دیگر، در نمودار مذکور به خوبی مشاهده می‌شود که افزایش نسبت ضخامت لایه‌ی سرامیکی در جان و بال مقطع (α)، سبب شده است که سهم مشارکت جزء سرامیکی در تحمل مقاومتی مقطع، در مقایسه با سهم جزء فلزی افزایش یافته است. در نتیجه، افزایش سهم جزء سرامیکی موجب افزایش سختی تیر شده و کمانش عرضی در بارهای محوری بزرگ‌تر رخ داده است.

علاوه بر این، مقدار لنگر بحرانی مستقل از مقدار شاخص توانی اختلاط است. در شکل ۷، منحنی‌های مشخصه‌ی بار بحرانی کمانش در برابر تغییرات شاخص توانی اختلاط، برای دو مدل مختلف از مقطع عرضی جدارنازک بسته: الف) مدل C2 و ب) مدل C3، به ازاء شش مقدار α مقایسه شده است. با توجه به شکل اخیر، برای تمامی مقادیر α ، با افزایش شاخص توانی اختلاط، کمانش در بارگذاری‌های پایین‌تر اتفاق افتاده و بار و لنگر بحرانی تا تثبیت شدن در یک مقدار خاصی کاهش یافته است. با مقایسه‌ی نتایج حاصل برای مدل‌های دولایه‌یی (مدل C2) و سه‌لایه‌یی (مدل C3)، معلوم می‌شود که برای تمام مقادیر α و p ، کمانش مقطع با توزیع خواص سه‌لایه‌یی (ساندوچی شکل)، در مقایسه با دولایه‌یی (مدل C2)، در بارهای پایین‌تری اتفاق افتاده است.

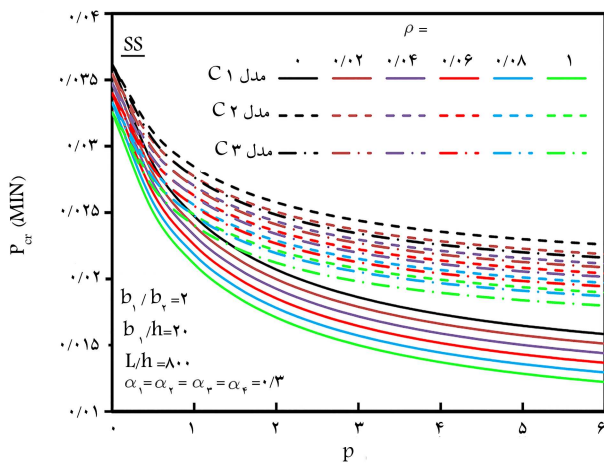
۲.۴. اثر نسبت ضخامت لایه‌ی سرامیکی در P_{cr} در تیر تحت

شرایط مرزی CS

در این راستا، در شکل ۸، منحنی‌های مشخصه‌ی بار بحرانی کمانش در برابر تغییرات شاخص توانی اختلاط، برای دو مدل مختلف از مقطع عرضی جدارنازک بسته: الف) مدل C2 و ب) مدل C3، به ازاء شش مقدار α و تحت شرایط مرزی تکیه‌گاهی CS نشان داده شده است. با توجه به شکل مذکور، برای تمامی مقادیر α ،



شکل ۱۱. تغییرات $P_{cr} - \rho$ ، تیر سه لایه‌یی با شرایط SS.



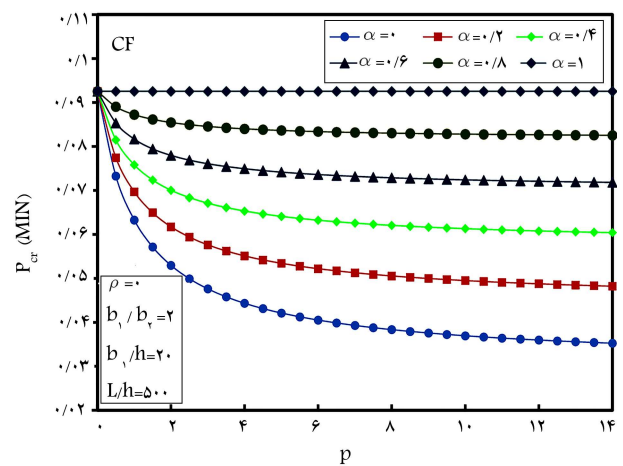
شکل ۱۲. تغییرات $P_{cr} - \rho$ ، سه مدل تیر با مقادیر مختلف شاخص تخلخل در مدل‌های C1، C2، C3 در حالت SS.

سه لایه‌یی (C3)، به ازاء شش مقدار مختلف از شاخص تخلخل تحت شرایط مرزی تکیه‌گاهی SS در شکل ۱۲ ملاحظه می‌شود؛ که با توجه به آن، برای تمامی مقادیر تخلخل، با افزایش شاخص توانی، ظرفیت کمانشی نیز کاهش یافته است که دلیل آن ناشی از کاهش سختی‌های کل و خالص مقطع است.

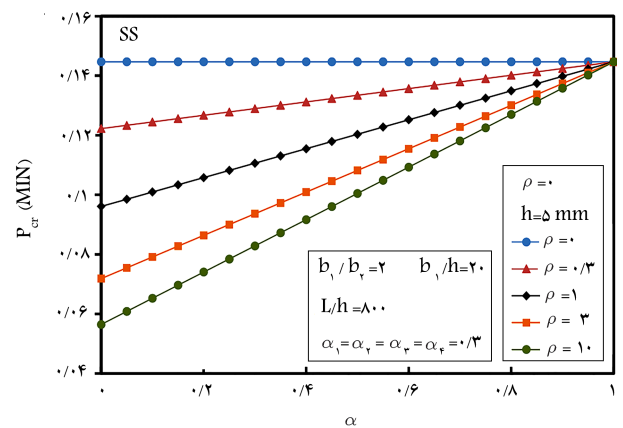
با ادامه‌ی افزایش p شاخص توانی از سمت خواص خالص سرامیکی به سمت خواص فلزی، ظرفیت باربری کمانشی تا تثبیت شدن در یک مقدار خاصی کاهش یافته است. از طرف دیگر، مقایسه‌ی نتایج حاصل برای سه مدل ارائه شده، نشان‌دهنده‌ی این واقعیت است که در هر مقدار خاصی از شاخص تخلخل، ظرفیت باربری تیر با مدل مقطع عرضی دولایه‌یی بیشتر از ظرفیت باربری مدل‌های تک‌لایه و مدل ساندویچی سه لایه است؛ که به دلیل بیشتر بودن کسر حجمی جزء سرامیکی مدل C2، در مقایسه با دو مدل دیگر است.

۶.۴. اثر شاخص تخلخل در ظرفیت کمانش

در شکل ۱۳، منحنی‌های تغییرات ظرفیت کمانشی در برابر تغییرات شاخص تخلخل، برای پنج مقدار p در مدل C3 مشاهده می‌شود؛ که برای تمامی مقادیر p ، با افزایش ρ ، ظرفیت کمانشی به علت کاهش سختی کاهش یافته است. همچنین با افزایش شاخص توانی از $p = 0$ (مقطع سرامیکی خالص) به سمت $p \rightarrow \infty$ (مقطع فلزی خالص)، ظرفیت کمانشی به علت کاهش سختی کاهش یافته است.



شکل ۹. تغییرات $P_{cr} - p$ در تیر دولایه‌یی یکسره گیردار - یکسره آزاد به ازای مقادیر مختلف α .

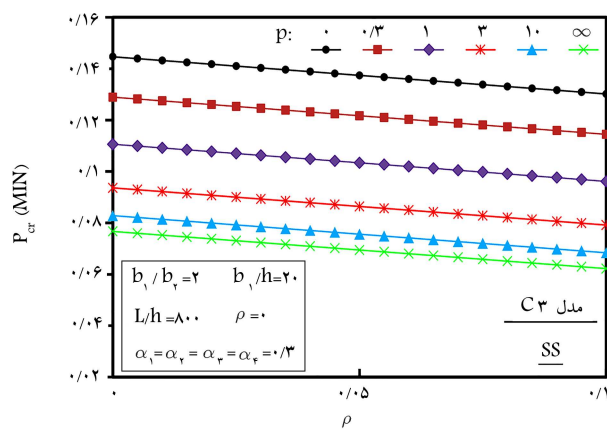
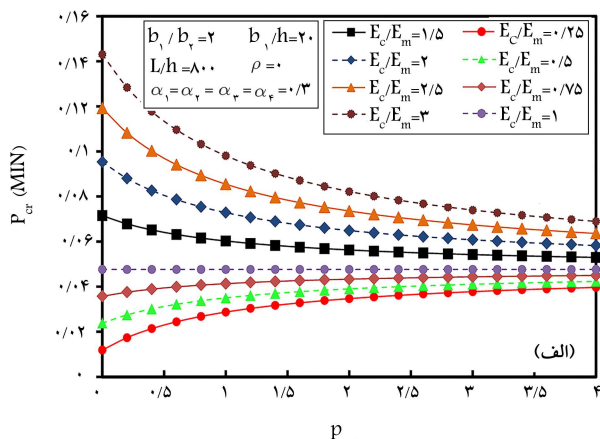


شکل ۱۰. تغییرات ظرفیت کمانشی مدل نوع C3 در برابر α به ازاء مقادیر مختلف p .

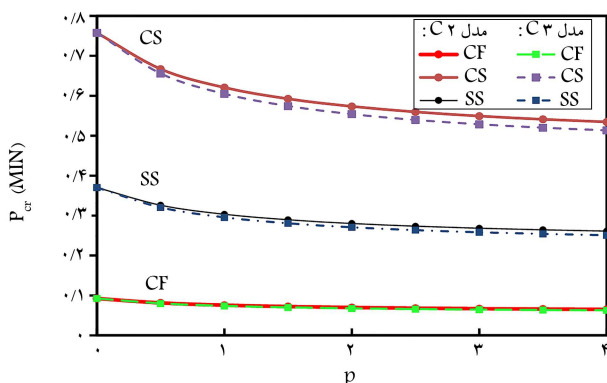
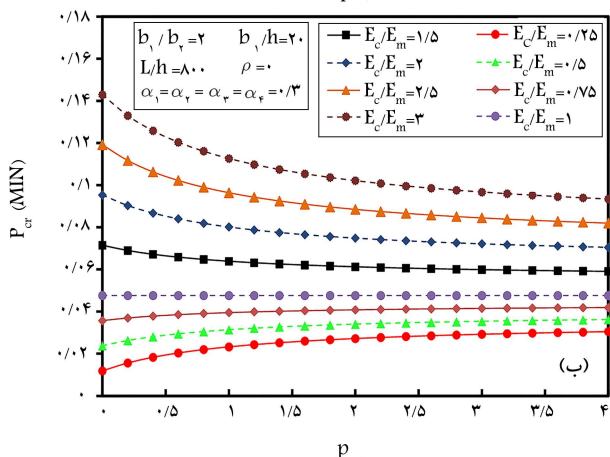
مقدار از شاخص توانی مشاهده می‌شود که مطابق آن برای تمامی مقادیر شاخص توانی اختلاط، با افزایش نسبت ضخامت سرامیکی، ظرفیت کمانشی به علت بالا رفتن سختی کل افزایش یافته است. مطابق شکل مذکور، در محدوده $0 \leq \alpha \leq 1$ با بزرگ‌تر شدن شاخص توانی اختلاط از $p = 0$ به سمت $p = 10$ ، ظرفیت کمانشی به علت کاهش سختی در نتیجه‌ی کاهش کسر حجمی سرامیکی در کل مقطع، کاهش یافته است.

۵.۴. اثر شاخص تخلخل در بار بحرانی با شرایط مرزی SS

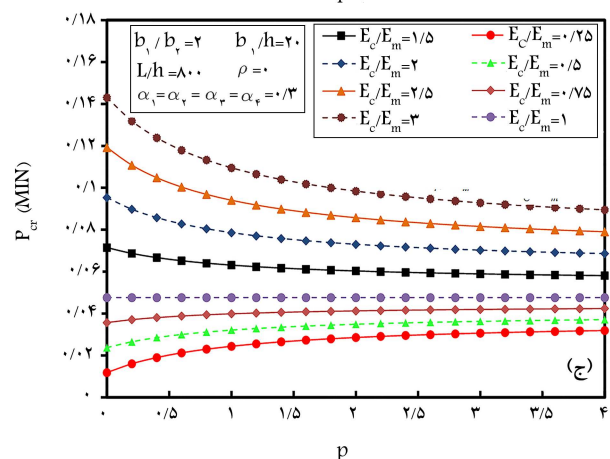
در شکل ۱۱، تغییرات دامنه‌ی بار بحرانی متناظر با کمانش در برابر شش مقدار مختلف از شاخص تخلخل ρ مشاهده می‌شود که مطابق آن، برای هر مقدار خاصی از تخلخل (ρ)، با افزایش شاخص توانی (p)، مقدار بار بحرانی کمانش به علت کاهش سطح مقطع عرضی ناشی از تخلخل کاهش یافته است. با ادامه‌ی افزایش P دامنه‌ی بار بحرانی متناظر با کمانش، در یک مقدار حدی خاص وابسته به شاخص تخلخل مرتبط تثبیت شده است. همچنین با توجه به شکل اخیر پیداست که با کاهش سختی تیر، کمانش تیر در مقادیر کوچک‌تری از دامنه‌ی بار وارده اتفاق افتاده است. همچنین منحنی‌های مشخصه‌ی ظرفیت باربری کمانشی در برابر شاخص توانی، برای سه مدل مختلف از مقطع: الف) تک‌لایه‌یی (C1)، ب) دولایه‌یی (C2)، و ج)



شکل ۱۳. تغییرات $P_{cr} - \rho$ ، به ازای تخلخل یکنواخت و شش مقدار از p در مدل C۳.



شکل ۱۴. تغییرات $P_{cr} - \rho$ برای حالات مختلف تکیه‌گاهی و پروفیل عرضی.



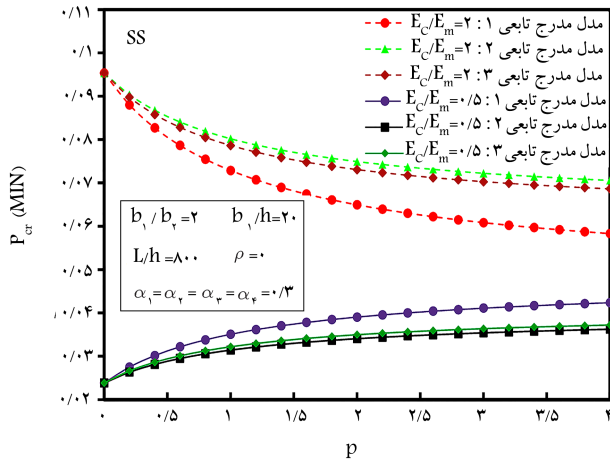
شکل ۱۵. تغییرات $P_{cr} - \rho$ به ازاء نسبت مدول مواد متشکله در مدل‌های تک، دو و سه لایه.

۸.۴. اثر نسبت مدول مواد در ظرفیت باربری کماتشی

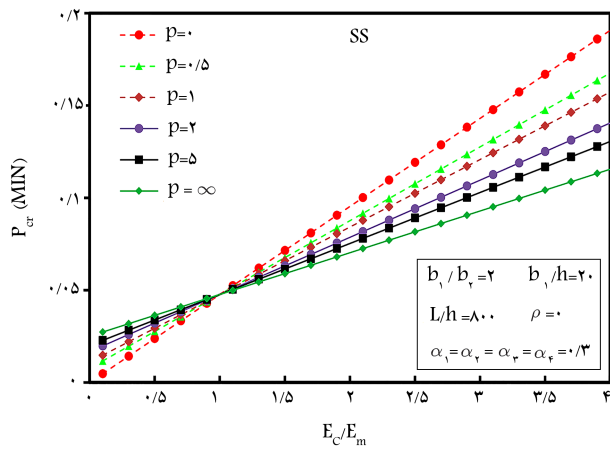
در بخش کنونی، اثر نسبت مدول کشسانی مواد متشکله ($r = E_c/E_m$) در ظرفیت باربری بحرانی کماتش تیر دو سر ساده‌ی جدارنازک بسته‌ی قوطی‌شکل، با مدل‌های نوع C۱، C۲ و C۳ بررسی شده است. در این راستا فرض شده است که نسبت ضخامت لایه‌های سرامیکی در مدل‌های C۲ و C۳ برابر $\alpha_i = 0/3$ است. برای این منظور در شکل ۱۵ (الف الی ج)، تغییرات ظرفیت کماتشی بحرانی تیر در برابر شاخص توانی اختلاط، برای مدل‌های نوع C۱، C۲ و C۳ متناظر با شش

۷.۴. اثر شرایط مرزی تکیه‌گاهی در ظرفیت باربری کماتشی

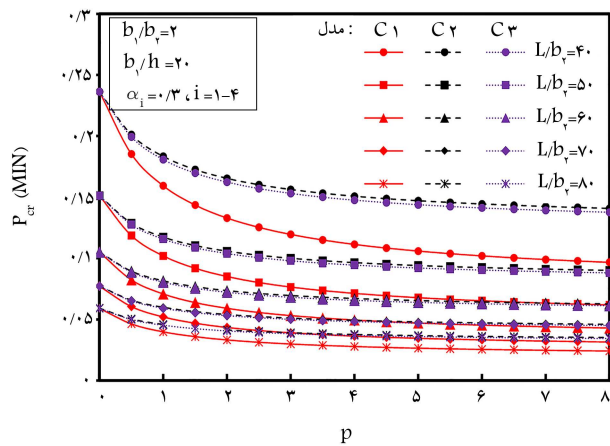
در شکل ۱۴، منحنی‌های مشخصه‌ی بار کماتشی در برابر شاخص توانی اختلاط، برای دو مدل مختلف از توزیع خواص: الف) مدل C۲ و ب) مدل C۳ و برای سه حالت مختلف از شرایط مرزی حاکم بر لبه‌های تیر: الف) دو سر ساده، ب) یک سر ساده - یک سر گیردار و ج) یک سر گیردار - یک سر آزاد، برای مقدار خاص $\alpha_i = 0/4$ ترسیم و مقایسه شده‌اند. با توجه به شکل اخیر پیداست که در تمامی حالت‌ها، با افزایش شاخص توانی اختلاط، از سمت خواص سرامیکی ($p = 0$) به سمت خواص فلزی ($p \rightarrow \infty$)، مقدار بار بحرانی متناظر با حالت کماتش تا تثبیت شدن در یک مقدار خاصی کاهش یافته است. با مقایسه‌ی نتایج حاصل برای مدل‌های دولایه‌ی (مدل C۲) و سه لایه‌ی (مدل C۳) پیداست که برای هر سه حالت مختلف از شرایط تکیه‌گاهی، آستانه‌ی تحمل کماتشی مقطع سه لایه‌ی، در مقایسه با مقطع دولایه‌ی کمتر بوده است. از طرف دیگر، همچنان‌که انتظار می‌رود با افزایش درجه‌ی قیود تکیه‌گاهی حاکم بر دو سر تیر از حالت یک سر گیردار - یک سر آزاد به سمت یک سر گیردار - یک سر ساده، سختی تیر افزایش و ظرفیت باربری کماتشی مقطع نیز بهبود یافته است. به عبارت دیگر، برای هر مقدار خاصی از شاخص توانی اختلاط و به علت افزایش درجه‌ی قیود تکیه‌گاهی، ظرفیت کماتشی تیر یک سر ساده - یک سر گیردار بیشتر از دو حالت دیگر است. ضمناً مطابق شکل اخیر پیداست که ظرفیت باربری کماتشی تیر دو سر ساده در مقایسه با تیر یک سر گیردار - یک سر آزاد بیشتر است.



شکل ۱۶. ظرفیت باربری در مدل‌های (C۳ و C۲، C۱) متناظر با دو مقدار مختلف از نسبت مدول مواد (E_c/E_m).



شکل ۱۷. تغییرات ظرفیت باربری در مدل C۳ متناظر با نسبت مدول مواد (E_c/E_m) به ازاء شاخص‌های توانی.



شکل ۱۸. تغییرات بارکمانشی در برابر شاخص توانی برای مقادیر مختلف نسبت منظر تیر تحت شرایط مرزی CS.

۹.۴. اثر نسبت منظر تیر در ظرفیت کمانشی

در شکل ۱۸، منحنی‌های مشخصه‌ی ظرفیت کمانشی در برابر شاخص توانی اختلاط برای سه مدل مختلف از مقطع (C۱، C۲ و C۳)، به ازاء پنج مقدار از نسبت منظر

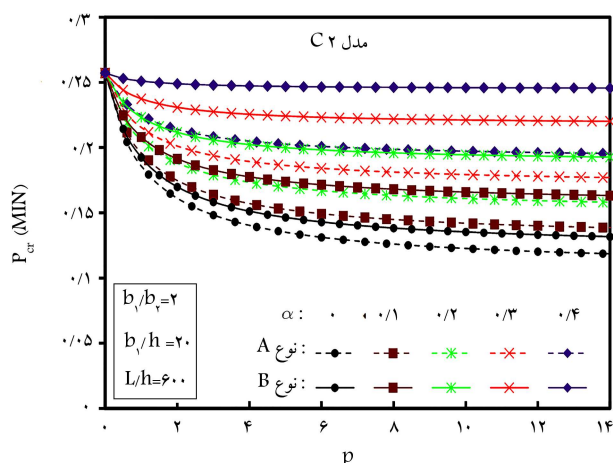
مقدار مختلف از نسبت مدول مواد متشکله در تیر دو سر ساده مشاهده می‌شود؛ که مطابق آن، برای نسبت مدول‌های مواد متشکله $E_c/E_m < 1$ ، با افزایش شاخص توانی اختلاط، ظرفیت کمانشی به علت افزایش سختی ناشی از افزایش کسر حجمی جزء سرامیکی تا تثبیت شدن در مقدار خاصی افزایش یافته است. از طرف دیگر، مطابق نمودارها به خوبی مشاهده می‌شود که برای نسبت مدول‌های مواد متشکله $(E_c/E_m > 1)$ با افزایش شاخص توانی اختلاط، ظرفیت کمانشی به علت کاهش سختی ناشی از کوچک‌تر شدن کسر حجمی جزء سرامیکی تا تثبیت شدن در مقدار خاصی کاهش یافته است.

شایان ذکر است که در نمودارهای اخیر، منحنی $E_c/E_m = 1$ متناظر با همگن شدن کل مقطع است؛ به نحوی که تحت شرایط خاص ذکر شده، مقدار ظرفیت باربری کمانشی مستقل از مقدار شاخص توانی اختلاط بوده و ثابت مانده است. از طرف دیگر، با توجه به این نمودارها به خوبی مشاهده می‌شود که به ازاء جمیع مقادیر از شاخص توانی اختلاط در محدوده‌ی داده شده‌ی $p \in [0, \infty]$ با افزایش نسبت مدول مواد متشکله در محدوده‌ی $0.25 < E_c/E_m < 3$ ، ظرفیت باربری کمانشی مقطع افزایش یافته است.

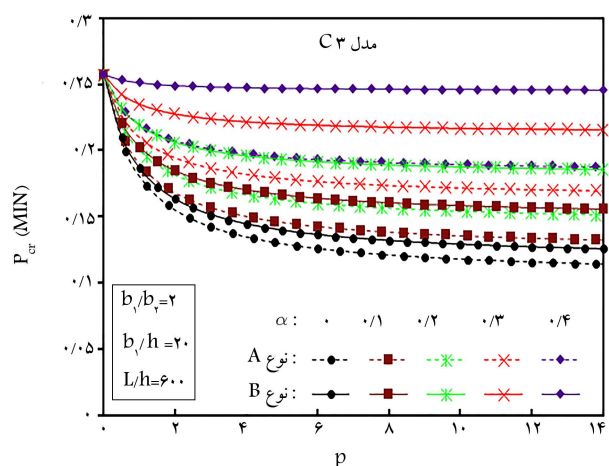
از طرف دیگر در شکل ۱۶، منحنی‌های مشخصه‌ی ظرفیت کمانشی در برابر شاخص توانی اختلاط، برای سه مدل اخیر (C۳ و C۲، C۱) دو مقدار مختلف از نسبت مدول مواد ($E_c/E_m = 0.5, 2$) با شرایط مرزی SS مشاهده می‌شوند. با مقایسه‌ی منحنی‌های متناظر با مقدار $E_c/E_m = 0.5$ ، ظرفیت باربری تیری با مقطع عرضی C۲، کمتر از ظرفیت باربری مدل C۱ و مدل ساندویچی C۳ است. این امر به دلیل پایین بودن کسر حجمی جزء سرامیکی مدل C۲، در مقایسه با دو مدل دیگر است. همچنین برای $E_c/E_m = 0.5$ ، چون مدل تک‌لایه‌ی C۱ همانند دو مدل دیگر، در برگیرنده‌ی لایه‌ی همگن سرامیکی (در اینجا جنس ضعیف‌تر) نیست، لذا ظرفیت باربری مدل در مقایسه با دو مدل دیگر (به علت بالاتر بودن سختی ناشی از جنس قوی‌تر E_c/E_m) بیشتر است.

علاوه بر این، برای $E_c/E_m = 2$ ، چون مدل تک‌لایه‌ی C۱ در مقایسه با دو مدل دیگر، لایه‌ی همگن سرامیکی (در اینجا جنس قوی‌تر) ندارد، لذا ظرفیت باربری مدل در مقایسه با دو مدل دیگر (به علت پایین بودن سختی) کوچک‌تر است. در حالت کلی، با توجه به شکل اخیر مشخص است که ظرفیت باربری کمانشی مدل سه‌لایه‌یی برای دو مقدار داده شده از نسبت مدول مواد، مابین نتایج حاصل برای مدل‌های تک‌لایه و دو لایه قرار گرفته است که به مقدار کسر حجمی اختلاط جزء سرامیکی در مدل‌ها بستگی دارد.

در شکل ۱۷، منحنی‌های تغییرات ظرفیت کمانشی تیر در برابر نسبت مدول کشسانی مواد متشکله E_c/E_m ، برای شش مقدار شاخص توانی اختلاط مواد مشاهده می‌شوند. نمودارهای اخیر برای تیرهای دو سر ساده، با مدل نوع C۳ و با فرض نسبت ضخامت لایه‌های سرامیکی معادل $\alpha_i = 0.3$ ترسیم شده‌اند. مطابق شکل مذکور، به وضوح ملاحظه می‌شود که در محدوده‌ی $E_c/E_m < 1$ با افزایش شاخص توانی اختلاط، ظرفیت کمانشی به علت افزایش سختی تا تثبیت شدن در مقدار خاصی افزایش یافته است. همچنین پیداست که در محدوده‌ی $E_c/E_m > 1$ با افزایش شاخص توانی اختلاط از $p \rightarrow \infty$ ، ظرفیت کمانشی به علت کاهش سختی تا تثبیت شدن در مقدار خاصی کاهش می‌یابد. توجه به این نکته حائز اهمیت است که در حالت $E_c/E_m = 1$ ساختار مقطع، همگن شده و در این حالت همچنانچه انتظار می‌رود ظرفیت کمانشی در محدوده‌ی $0.25 \leq E_c/E_m \leq 3$ دارای مقدار ثابتی خواهد بود.



شکل ۱۹. تغییرات بار کمانشی در برابر شاخص توانی به ازاء مقادیر α در شرایط مرزی SS در مقطع دولایه‌یی (C۲).



شکل ۲۰. تغییرات بار کمانشی در برابر شاخص توانی به ازاء مقادیر α در شرایط مرزی SS در مقطع سه‌لایه‌یی (C۳).

پیشگی ایجاد می‌شود. در ادامه، با استفاده از روش اجزاء محدود، ماتریس‌های سختی کل تیر استخراج و نهایتاً با حل مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی حاکم نشان داده شد که:

(الف) با افزایش شاخص اختلاط از سمت خواص خالص سرامیکی به سمت خواص فلزی، ظرفیت باربری کمانشی تا تثبیت شدن در یک مقدار خاصی همواره به صورت پیوسته کاهش یافته است.

(ب) به ازاء جمیع مقادیر شاخص اختلاط، با افزایش شاخص تخلخل، ظرفیت کمانشی به علت کاهش سختی ناشی از کاهش سطح در ابعاد میکروسکوپی کوچک کاهش یافته است.

(ج) با افزایش درجه‌ی قیود تکیه‌گاهی، ظرفیت کمانشی تیر افزایش یافته است.

(د) تحت تمامی شرایط مرزی ارائه‌شده، افزایش نسبت منظر تیر، سبب کاهش ظرفیت باربری کمانشی شده است.

(ه) نشان داده شد که تغییرات ضخامت لایه‌ی سرامیکی جان در مقایسه با ضخامت لایه‌ی سرامیکی بال در ظرفیت کمانشی چشمگیرتر بوده است.

(و) افزایش نسبت ضخامت سرامیکی اثر پایدارکننده دارد، زیرا افزایش آن سبب افزایش سختی تیر و نیز وقوع کمانش تیر در مقادیر بزرگ‌تری از بار وارده می‌شود.

تیر L/b_2 ، برای شرایط مرزی تکیه‌گاهی CS ملاحظه می‌شوند؛ که مطابق آن، در هر سه مدل از پروفیل عرضی و به ازاء تمامی مقادیر نسبت منظر تیر، با تغییر خواص سرامیکی به سمت خواص فلزی به‌واسطه‌ی افزایش شاخص توانی اختلاط، ظرفیت کمانشی کاهش یافته است. از طرف دیگر، در نمودارهای موردنظر، مقایسه‌ی نتایج حاصل برای سه مدل ارائه شده، نشان‌دهنده‌ی این واقعیت است که در هر مقدار خاصی از نسبت منظر L/b_2 ، ظرفیت کمانشی تیر با مدل مقطع C۲، بیشتر از ظرفیت کمانشی مدل‌های C۱ و C۳ است. زیرا کسر حجمی سرامیکی مدل C۲، در مقایسه با دو مدل دیگر بیشتر است. ضمناً چون در مدل C۱ مشابه دو مدل دیگر، لایه‌ی سرامیکی خالص وجود ندارد؛ در نتیجه، ظرفیت کمانشی مدل C۱ (به علت پایین‌تر بودن سختی کل) کمتر از دو مدل دیگر است. همچنین مطابق نمودار مذکور مشاهده می‌شود که در هر سه مدل اشاره شده، نتیجه‌ی افزایش نسبت منظر تیر (طول شدن تیر)، کاهش ظرفیت باربری کمانشی است. مشابه همین رفتار در تیر با مشخصات حاضر، در تیر با شرایط مرزی SS و CF نیز مشاهده شده است.

۱۰.۴. اثر نسبت ضخامت سرامیکی جان و بال مقطع در ظرفیت کمانشی

برای بررسی اثر تفاوت ضخامت لایه‌ی سرامیکی جان و بال مقطع در ظرفیت کمانشی، دو نوع شکل مقطع عرضی مدل C۲ (مطابق شکل ۲) ملاحظه می‌شود. در نوع A، ضخامت جان‌های مقطع دو برابر ضخامت بال‌ها ($\alpha_2 = 2\alpha_1$) و در نوع B، ضخامت بال‌های مقطع دو برابر ضخامت جان‌های ($\alpha_2 = 2\alpha_1$) منظور شده است. در این راستا، در شکل‌های ۱۹ و ۲۰، تغییرات ظرفیت کمانشی در برابر شاخص توانی اختلاط، متناظر با مقطع دولایه‌یی مدل C۲ و C۳ برای ترکیب‌های A و B برای پنج مقدار از نسبت ضخامت لایه‌ی سرامیکی (α) به‌تصویر کشیده شده است. مطابق شکل‌های مذکور، برای تمامی مقادیر، با افزایش شاخص توانی اختلاط، ظرفیت باربری کمانشی تا تثبیت شدن در مقدار خاصی کاهش یافته است. همچنین مطابق شکل‌های اخیر، به‌خوبی مشاهده می‌شود که به ازاء تمامی مقادیر α ، تأثیر ضخامت لایه‌ی سرامیکی جان در مقایسه با ضخامت لایه‌ی سرامیکی بال حائز اهمیت بالاست؛ به‌نحوی که با مقایسه‌ی شکل‌های اخیر پیداست که ظرفیت کمانشی تیر دولایه با مقطع عرضی نوع A، بزرگ‌تر از ظرفیت کمانشی نوع B است. از طرفی، با توجه به شکل‌های ذکر شده می‌توان دریافت که افزایش نسبت ضخامت سرامیکی اثر پایدارکننده دارد، به‌طوری که با افزایش α ، سختی تیر نیز به سبب افزایش سهم جزء سرامیکی افزایش یافته و به تبع آن کمانش تیر در مقادیر بزرگ‌تری از بار وارده اتفاق افتاده است. نوع رفتار تیر با پروفیل‌های C۲ و C۳ تطابق بسیار بالایی با هم دارد و تفاوت جزئی در مقادیر ملاحظه می‌شود.

۵. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، با استفاده از روش عددی المان محدود مسئله‌ی کمانش اعضاء جدارنازک با نیمرخ قوطی‌شکل تحت شرایط مرزی تکیه‌گاهی متنوع ارائه شده است. در این راستا، با استفاده از اصل کار مجازی، انرژی پتانسیل کلی سیستم کشسان با احتساب اثر کار بار محوری خارجی وارده به مرکز برش مقطع عرضی تیر، معادلات دیفرانسیل جفت‌شده مرتبه‌ی چهارم حاکم بر مسئله‌ی ناپایداری کمانش استخراج و از روی معادلات مذکور نشان داده شد که مودهای خمشی به صورت مستقل رفتار می‌کنند؛ حال آنکه همبستگی شدیدی بین مود کمانش محوری و

پانوشتها

1. functionally graded material (FGM)
2. national aerospace laboratory of Japan
3. laser engineered net shaping (LENS)
4. Li
5. Kadoli
6. Lu
7. Zhao
8. simsek
9. generalized differential quadrature method (GDQM)
10. Bi-directional functionally graded (BFG)
11. Nemat-Alla
12. Satouri
13. Taczala
14. Young and Duc
15. Truong
16. Nguyen
17. Phi
18. Vlasov
19. simply supported
20. clamped-free ended
21. clamped-simple supported
22. Kirchhoff
23. Phuong Vo & Lee
24. Saint-Venant

منابع (References)

1. Van Do, T., Nguyen, D.K., Duc, N.D. and et al. "Analysis of bi-directional functionally graded plates by FEM and a new third-order shear deformation plate theory", *Thin-Walled Struct*, **119**, pp. 687-699 (2017).
2. Mahamood, R.-M., Akinlabi, E.-T., Shukla, M. and et al. "Functionally graded material: an overview", International Association of Engineers (IAENG) (2012).
3. Tu, T.M., Quoc, T.H. and Van Long, N. "Vibration analysis of functionally graded plates using the eight-unknown higher order shear deformation theory in thermal environments", *Aerosp. Sci. Technol*, **84**, pp. 698-711 (2019).
4. Duc, N.D. and Quan, T.Q. "Nonlinear stability analysis of double-curved shallow fgm panels on elastic foundations in thermal environments", *Mech. Compos. Mater*, **48**(4), pp. 435-448 (2012).
5. Nguyen, T.-T., Thang, P.T. and Lee, J. "Flexural-torsional stability of thin-walled functionally graded open-section beams," *Thin-Walled Struct*, **110**, pp. 88-96 (2017).
6. Kieback, B., Neubrand, A. and Riedel, H. "Processing techniques for functionally graded materials", *Mater. Sci. Eng. A Struct. Mater*, **362**(1-2), pp. 81-106 (2003).
7. Wang, Y.Q. and Zu, J.W. "Vibration characteristics of moving sigmoid functionally graded plates containing porosities", *Int. J. Mech. Mater. Des*, **14**(4), pp. 473-489 (2018).
8. Liu, W. and DuPont, J.N. "Fabrication of functionally graded TiC/Ti composites by Laser Engineered Net Shaping", *Scr. Mater*, **48**(9), pp. 1337-1342 (2003).
9. Watanabe, Y., Inaguma, Y., Sato, H. and et al. "A novel fabrication method for functionally graded materials under centrifugal force: The centrifugal mixed-powder method", *Materials (Basel)*, **2**(4), pp. 2510-2525 (2009).
10. Jin, G.Q. and Li, W.D. "Adaptive rapid prototyping/manufacturing for functionally graded material-based biomedical models", *Int. J. Adv. Manuf. Technol*, **65**(1-4), pp. 97-113 (2013).
11. Li, X.-F. "A unified approach for analyzing static and dynamic behaviors of functional-ly graded Timoshenko and Euler-Bernoulli beams", *J. Sound Vib*, **318**(4-5) pp. 1210-1229 (2008).
12. Kadoli, R., Akhtar, K. and Ganesan, N. "Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory", *Appl. Math. Model*, **32**(12), pp. 2509-2525 (2008).
13. Lu, C.F., Chen, W.Q., Xu, R.Q. and et al. "Semi-analytical elasticity solutions for bi-directional functionally graded beams", *Int. J. Solids Struct*, **45**(1), pp. 258-275 (2008).
14. Zhao, L., Zhu, J. and Wen, X.D. "Exact analysis of bi-directional functionally graded beams with arbitrary boundary conditions via the symplectic approach", *Struct. Eng. Mech*, **59**(1), pp. 101-122 (2016).
15. Wang, Z.-H., Wang, X.-H., Xu, G.-D. and et al. "Free vibration of two-directional functionally graded beams", *Compos. Struct*, **135**, pp. 191-198 (2016).
16. Simsek, M. "Buckling of Timoshenko beams composed of two-dimensional functional-ly graded material (2D-FGM) having different boundary conditions", *Compos. Struct*, **149**, pp. 304-314 (2016).
17. Li, L., Li, X. and Hu, Y. "Nonlinear bending of a two-dimensionally functionally graded beam", *Compos. Struct*, **184**, pp. 1049-1061 (2018).
18. Nejad, M.Z. and Hadi, A. "Eringen's non-local elasticity theory for bending analysis of bi-directional functionally graded Euler-Bernoulli nano-beams", *Int. J. Eng. Sci*, **106**, pp. 1-9 (2016).
19. Karamanli, A. and Vo, T.P. "Size dependent bending analysis of two directional functionally graded microbeams via a quasi-3D theory and finite element method", *Compos. B. Eng*, **144**, pp. 171-183 (2018).
20. Nejad, M.Z. and Hadi, A. "Non-local analysis of free vibration of bi-directional functionally graded Euler-Bernoulli nano-beams", *Int. J. Eng. Sci*, **105**, pp. 1-11 (2016).
21. Shafei, N., Mirjavadi, S.S., Mohasel Afshari, B. and et al. "Vibration of two-dimensional imperfect functionally graded (2D-FG) porous nano-/micro-beams", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng*, **322**, pp. 615-632 (2017).
22. Trinh, L.C., Vo, T.P., Thai, H.-T. and et al. "Size-dependent vibration of bi-directional functionally graded microbeams with arbitrary boundary conditions", *Compos. B Eng*, **134**, pp. 225-245 (2018).

23. Nejad, M.Z., Hadi, A. and Rastgoo, A. "Buckling analysis of arbitrary two-directional functionally graded Euler-Bernoulli nano-beams based on nonlocal elasticity theory", *Int. J. Eng. Sci.*, **103**, pp. 1-10 (2016).
24. Li, L. and Xiaohui, R. "Stiffened plate bending analysis in terms of refined triangular laminated plate element", *Compos. Struct.*, **92**(12), pp. 2936-2945 (2010).
25. Nemat-Alla, M., Ahmed, K.I.E. and Hassab-Allah, I. "Elastic-plastic analysis of two-dimensional functionally graded materials under thermal loading", *Int. J. Solids Struct.*, **46**(14-15), pp. 2774-2786 (2009).
26. Ebrahimi, M.J. and Najafzadeh, M.M. "Free vibration analysis of two-dimensional functionally graded cylindrical shells", *Appl. Math. Model.*, **38**(1), pp. 308-324 (2014).
27. Satouri, S., Kargarnovin, M.H., Allahkarami, F. and et al, "Application of third order shear deformation theory in buckling analysis of 2D-functionally graded cylindrical shell reinforced by axial stiffeners", *Compos. B Eng*, **79**, pp. 236-253 (2015).
28. Taczala, M., Buczkowski, R. and Kleiber, M. "Nonlinear buckling and post-buckling response of stiffened FGM plates in thermal environments", *Compos. B Eng*, **109**, pp. 238-247 (2017).
29. Vuong, P.M. and Duc, N.D. "Nonlinear response and buckling analysis of eccentrically stiffened FGM toroidal shell segments in thermal environment", *Aerosp. Sci. Technol.*, **79**, pp. 383-398 (2018).
30. Mehrabian, M. and Golmakani, M.E. "Nonlinear bending analysis of radial-stiffened annular laminated sector plates with dynamic relaxation method", *Comput. Math. Appl.*, **69**(10), pp. 1272-1302 (2015).
31. Golmakani, M.E. and Emami, M. "Buckling and large deflection behaviors of radially functionally graded ring-stiffened circular plates with various boundary conditions", *Appl. Math. Mech.*, **37**(9), pp. 1131-1152 (2016).
32. Hussein, O.S. and Mulani, S.B. "Optimization of in-plane functionally graded panels for buckling strength: Unstiffened, stiffened panels, and panels with cutouts", *Thin-Walled Struct*, **122**, pp. 173-181 (2018).
33. Truong, T.T., Nguyen-Thoi, T. and Lee, J. "Isogeometric size optimization of bi-directional functionally graded beams under static loads", *Compos. Struct.*, **227**, pp. 111259 (2019).
34. Nguyen, H.X., Lee, J. and et al. "Vibration and lateral buckling optimization of thin-walled laminated composite channel-section beams", *Compos. Struct.*, **143**, pp. 84-92 (2016).
35. Nguyen, T.-T. and Lee, J. "Optimal design of thin-walled functionally graded beams for buckling problems", *Compos. Struct.*, **179**, pp. 459-467 (2017).
36. Phi, L.T.M., Nguyen, T.-T., Kang, J. and et al. "Vibration and buckling optimization of thin-walled functionally graded open-section beams", *Thin-Walled Struct*, **170**, pp. 108586 (2022).
37. Nguyen, T.-T. and Lee, J. "Flexural-torsional vibration and buckling of thin-walled bi-directional functionally graded beams", *Compos. B Eng*, **154**, pp. 351-362 (2018).
38. Lei, J., He, Y., Li, Z. and et al. "Postbuckling analysis of bi-directional functionally graded imperfect beams based on a novel third-order shear deformation theory", *Compos. Struct.*, **209**, pp. 811-829 (2019).
39. Reddy, J.N. "Analysis of functionally graded plates", *Int. J. Numer Meth Engng*, **47**, pp. 663-684 (2000).
40. Nguyen, T.-T., Kim, N.-I. and Lee, J. "Free vibration of thin-walled functionally graded open-section beams", *Compos. B. Eng*, **95**, pp. 105-116 (2016).
41. Nguyen, T.-T. Thang, P.T. and Lee, J. "Lateral buckling analysis of thin-walled functionally graded open-section beams", *Composite Structures*, **160**, pp. 952-963 (Jan., 2017).
42. Vo, T.P. and Lee, J. "Flexural-torsional behavior of thin-walled closed-section composite box beams", *Engineering Structures*, **29**(8), pp. 1774-1782 (Aug., 2007).
43. Nguyen, T.-T., Kim, N.-I. and Lee, J. "Analysis of thin-walled open-section beams with functionally graded materials", *Composite Structures*, **138**, pp. 75-83 (Mar., 2016).
44. Lanc, D., Vo, T.-P., Turkalj, G. and Lee, J. "Buckling analysis of thin-walled functionally graded sandwich box beams", *Thin-Walled Structures*, **86**, pp. 148-156 (2015).
45. Kim, D.-M., Choi, S., Jang, G.-W. and et al. "Buckling analysis of thin-walled box beams under arbitrary loads with general boundary conditions using higher-order beam theory", *J. Mech. Sci. Technol*, **33**(5), pp. 2289-2305 (2019).
46. Vo, T.-P. and Lee, J. "Interaction curves for vibration and buckling of thin-walled composite box beams under axial loads and end moments", *Appl. Math. Model.*, **34**(10), pp. 3142-3157 (2010).
47. Asadi, A., Sheikh, A.H. and Thomsen, O.T. "Buckling behaviour of thin-walled laminated composite beams having open and closed sections subjected to axial and end moment loading", *Thin-Walled Struct*, **141**, pp. 85-96 (2019).
48. Kim, N.-I. and Lee, J. "Theory of thin-walled functionally graded sandwich beams with single and double-cell sections", *Compos. Struct.*, **157**, pp. 141-154 (2016).
49. Vo, T.-P. and Lee, J. "Geometrically nonlinear theory of thin-walled composite box beams using shear-deformable beam theory", *Int. J. Mech. Sci.*, **52**(1), pp. 65-74 (2010).
50. Kim, N.-I. and Lee, J. "Divergence and flutter behavior of Beck's type of laminated box beams", *Int. J. Mech. Sci.*, **84**, pp. 91-101 (2014).
51. Kuehn, T., Pasternak, H. and Mittelstedt, C. "Local buckling of shear-deformable laminated composite beams with arbitrary cross-sections using discrete plate analysis", *Compos. Struct.*, **113**, pp. 236-248 (2014).

52. Sheikh, A.H.; Asadi, A. and Thomsen, O.T. "Vibration of thin-walled laminated composite beams having open and closed sections", *Compos. Struct*, **134**, pp. 209-215 (2015).
53. Shin, D., Choi, S., Jang, G.-W. and et al. "Higher-order beam theory for static and vibration analysis of composite thin-walled box beam", *Compos. Struct*, **206**, pp. 140-154 (2018).
54. Kim, N.-I. and Lee, J. "Exact solutions for coupled analysis of thin-walled functionally graded beams with non-symmetric single- and double-cells", *Appl. Math. Model*, **60**, pp. 661-680 (2018).
55. Choi, S. and Kim, Y.-Y. "Higher-order beam bending theory for static, free vibration, and buckling analysis of thin-walled rectangular hollow section beams", *Comput. Struct*, **248**, pp.1-32 106494 (2021).
56. Choi, S. and Kim, Y.-Y. "Higher-order Vlasov torsion theory for thin-walled box beams", *Int. J. Mech. Sci*, **195**, pp.1-35 106231 (2021).
57. Gokhan Gunay, M. and Timarci, T. "Static analysis of thin-walled laminated composite closed-section beams with variable stiffness", *Compos. Struct*, **182**, pp. 67-78 (2017).