

اعتبارسنجی مدل‌های آشفته‌گی برای پساب چگال تخلیه شده از نازل‌های دایره و مربع با زاویه‌ی تخلیه‌ی 45°

وحید بابایی‌نژاد (کارشناس ارشد)

دانشکده‌ی هندی عمران - آب، دانشگاه امیرکبیر

رضا حاجی سیدمحمد شیوازی* (استادیار)

گروه منابع طبیعی و محیط‌زیست، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی

مهندسی عمران شریف (پهار ۲۰۲۰) (۱۴۰۲)
دوره ۲ - ۳۹، شماره ۱، ص. ۱۱۵-۱۲۳، (پادداشت‌نویس)

پساب شور کارخانه‌های آب شیرین‌کن باعث تخریب محیط‌زیست می‌شود. در صورت تخلیه‌ی مناسب پساب، آثار زیست‌محیطی شیرین‌سازی آب کاهش می‌یابد. مدل‌های عددی، یکی از بهترین روش‌ها برای شناخت رفتار پساب تخلیه شده در محیط آبی هستند. در پژوهش حاضر، به اعتبارسنجی مدل‌های آشفته‌گی (SST) $k - \omega$ و (Standard و RNG) $K - \epsilon$ برای تخلیه‌ی پساب با استفاده از نازل‌های دایره و مربع پرداخته شده است. طبق نتایج به‌دست آمده، مدل‌های SST، Standard و RNG، مقدار Z را به ترتیب با خطایی در حدود ۱۷-۲۴، ۱۲-۵ و ۱۷-۹ درصد تخمین زده‌اند. مقدار S_m توسط مدل Standard با ۱۹-۲۴ درصد خطا و توسط مدل SST نیز با ۲۵-۳۰ درصد خطا برآورد شده است. مدل RNG عملکرد بهتری داشته و مقدار S_m را با خطای ۱۳-۱۸ درصد پیش‌بینی کرده است. مدل‌های SST، Standard و RNG، مقدار S_i را به ترتیب در حدود ۳۵، ۲۵ و ۲۰ درصد کمتر نسبت به نتایج مطالعه‌ی تجربی ارائه داده‌اند.

واژگان کلیدی: هندسه‌ی نازل، آب‌شیرین‌کن، رقیق‌سازی، جت، پساب.

vahidbabaijnejad@aut.ac.ir
r-shirazi@srbiau.ac.ir

۱. مقدمه

محیط آبی، یکی از روش‌های بررسی آلودگی منابع آب و رسیدن به گزینه‌های مطلوب در رابطه با طراحی خروجی پساب است که کمترین آسیب‌های زیست‌محیطی را بر محیط پذیرنده داشته باشد. پساب کارخانه‌های آب‌شیرین‌کن به دلیل غلظت بالای نمک نسبت به غلظت سیال محیط پذیرنده، پس از تخلیه بلافاصله به سمت بستر دریا حرکت می‌کند که این موضوع باعث افزایش غلظت نمک سیال محیط پذیرنده در نزدیکی محل تخلیه می‌شود.^[۱] برای کاهش آثار مخرب زیست‌محیطی، پساب تخلیه شده باید در کمترین زمان و مکان ممکن با سیال محیط پذیرنده مخلوط شود. در افزایش میزان اختلاط پساب با سیال محیط پذیرنده، عامل‌های مختلفی تأثیرگذار است، که یکی از مهم‌ترین آن‌ها، روش تخلیه‌ی پساب است.^[۲] پساب‌های تولیدی به دو صورت سطحی (لوله یا کانال) یا مستغرق مایل (شکل ۱) تخلیه می‌شوند. پساب خروجی در دو ناحیه‌ی میدان نزدیک و میدان دور با سیال محیط پذیرنده ترکیب می‌شود. میدان نزدیک از لحظه‌ی خروج پساب از نازل تا لحظه‌ی برخورد پساب به زمین را شامل می‌شود. اما میدان دور از زمان برخورد پساب به زمین شروع می‌شود

امروزه به دلیل کمبود منابع آب قابل شرب در مناطق مختلف جهت توسعه‌ی شهری و روستایی، مشکلات جدی در زمینه‌ی مدیریت و تأمین منابع آب وجود دارد. از جمله راهکارهایی که به حل مشکل اخیر در مناطق ساحلی کمک می‌کند، استفاده از سیستم‌های آب‌شیرین‌کن است. احداث طرح‌های مذکور در کنار آثار مثبتی که در جهت تأمین آب موردنیاز دارند، می‌تواند منجر به بروز مشکلات زیست‌محیطی و تغییر وضعیت طبیعی محدوده نیز شود، که باید تلاش کرد تا آثار منفی مذکور به میزان کمینه برسد. پساب باید به‌گونه‌ی تخلیه شود که در کمترین زمان و مکان ممکن با سیال محیط پذیرنده ادغام شود، چون در غیر این صورت غلظت نمک در اطراف محل تخلیه به شدت بالا می‌رود و این موضوع باعث از بین رفتن آبزیان در اطراف محل تخلیه می‌شود. به همین دلیل، امروزه شیوه‌سازی نحوه‌ی پخش پساب‌ها در

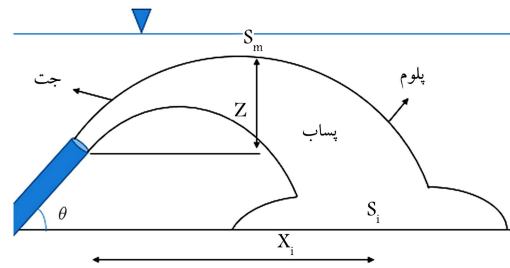
* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴۰۱/۷/۲۴، اصلاحیه ۱۴۰۱/۸/۱۶، پذیرش ۱۴۰۱/۹/۱۲

DOI:10.24200/J30.2022.61208.3154

استناد به این مقاله:

بابایی‌نژاد، وحید و حاجی سیدمحمد شیوازی، رضا (۲۰۱۴). «اعتبارسنجی مدل‌های آشفته‌گی برای پساب چگال تخلیه شده از نازل‌های دایره و مربع با زاویه‌ی تخلیه‌ی 45° ». مهندسی عمران شریف، (۱) ۲-۳۹، ص. ۱۱۵-۱۲۳



شکل ۱. مشخصات پساب تخلیه شده به صورت مستغرق مایل.

فاصله‌ی افقی محل برخورد پساب به زمین از نازل را با اختلاف بالایی در مقایسه با نتایج تجربی تخمین می‌زنند. همچنین مدل‌های CORJET، VISJET و UM3 میزان رقیق‌سازی پساب در محل ارتفاع صعود بیشینه‌ی جت و رقیق‌سازی در محل برخورد پساب به زمین را در محیط ساکن با خطایی در حدود ۶۵-۵۰ درصد (در مقایسه با نتایج مطالعه‌های تجربی) برآورد کرده‌اند.^[۹] فرناندز و همکاران (۲۰۱۸)، به بررسی استفاده از دیفیوزر در میزان رقیق‌سازی پساب شور تخلیه شده در محیط آبی ساکن پرداخته‌اند. ایشان با استفاده از مدل CORMIX نشان دادند که استفاده از دیفیوزر برای تخلیه‌ی پساب شور، آثار زیست‌محیطی پساب ذکر شده را به شدت کاهش می‌دهد.^[۷] جیانگ و همکاران (۲۰۱۹)، با استفاده از مدل‌های آزمایشگاهی و عددی (ANSYS-FLUENT) به بررسی رفتار پساب چگال تخلیه شده از نازل با هندسه‌های مختلف پرداخته‌اند. طبق نتایج ایشان، هندسه‌ی نازل تأثیر زیادی در میزان رقیق‌سازی و طول مسیر حرکت پساب چگال تخلیه شده در محیط آبی دارد. با توجه به نتایج ایشان، نازل ستاره به دلیل مومنتوم بالا، طول مسیر حرکت زیادی دارد که این موضوع باعث همآوری بیشتر سیال محیط به درون جت و در نتیجه افزایش میزان اختلاط پساب با سیال محیط می‌شود.^[۱۰] یان^۲ و محمدیان (۲۰۱۹)، با استفاده از مدل‌های Standard ($k - \varepsilon$) و RNG ($k - \varepsilon$) به شبیه‌سازی رفتار پساب چگال تخلیه شده با استفاده از نازل‌های چندپورتی پرداخته‌اند. طبق نتایج ایشان، مدل‌های عددی قابلیت خوبی در شبیه‌سازی پساب چگال تخلیه شده از تخلیه‌کننده‌های چندپورتی دارند. همچنین مدل RNG عملکرد بهتری در مقایسه با مدل Standard دارد.^[۱۲]

با توجه به محدودیت و هزینه‌ی بالای مطالعه‌های آزمایشگاهی، استفاده از مدل‌های عددی به منظور کاهش هزینه‌ها، امری ضروری است. اولین قدم برای استفاده از مدل‌های عددی، اطمینان از نتایج مربوط به آن مدل است. نتایج مدل‌های انتگرالی به دلیل در نظر نگرفتن آشفتگی جریان، قابل اعتماد نیستند و این مدل‌ها معمولاً میزان رقیق‌سازی پساب را در مقایسه با مطالعه‌های تجربی با خطای بالایی تخمین می‌زنند. به همین دلیل در پژوهش حاضر، برای اولین بار به اعتبارسنجی مدل‌های آشفتگی SST ($k - \omega$)، Standard ($k - \varepsilon$) و RNG ($k - \varepsilon$) با استفاده از نرم‌افزار ANSYS-FLUENT برای بررسی رفتار پساب شور تخلیه شده از نازل‌های دایره و مربع (با زاویه‌ی تخلیه‌ی ۴۵°) پرداخته شده است. برای این منظور، نتایج مدل‌های SST، Standard و RNG با نتایج مطالعه‌های مختلف مقایسه شده‌اند.

۲. مواد و روش‌ها

در پژوهش حاضر، با استفاده از نرم‌افزار ANSYS-FLUENT به شبیه‌سازی پساب چگال تخلیه شده در محیط آبی ساکن پرداخته شده است. مدل‌های مختلف آشفتگی مانند DNS^۳، LES^۴ و RANS^۵ برای مدل‌سازی عددی در جریان‌های مختلف قابل استفاده هستند. استفاده از مدل‌های DNS و LES، دقت و هزینه‌ی محاسبات را بالا می‌برد.^[۱۳] مدل‌های (RNG، Standard) $k - \varepsilon$ ، توانایی بالایی در شبیه‌سازی رفتار پساب تخلیه شده به صورت جت مستغرق مایل دارند.^[۱۳] مدل (SST) $k - \omega$ ، نیز یکی از مدل‌های پرکاربرد در زمینه‌ی شبیه‌سازی جت تخلیه شده در محیط آبی است و عملکرد مناسبی در شبیه‌سازی رفتار جت دارد.^[۱۵] مدل‌های Standard، SST و RNG، هزینه‌ی محاسباتی کمتری نسبت به مدل‌های LES و DNS دارند و نتایج مناسبی را نیز ارائه می‌دهند.^[۱۳] به همین دلیل، در پژوهش حاضر برای اولین بار به اعتبارسنجی مدل‌های مذکور در شبیه‌سازی رفتار پساب

و تا لحظه‌ی اختلاط کامل پساب با سیال محیط پذیرنده ادامه می‌یابد. در میدان نزدیک، پساب در دو مرحله با سیال محیط پذیرنده ترکیب می‌شود. در مرحله‌ی اول، پساب با سرعت بالا و به صورت جت از نازل خارج می‌شود و رفتار آن به عدد فرود جت خروجی و همچنین زاویه‌ی نازل نسبت به افق بستگی دارد. هم‌آوری سیال محیط به درون جت، باعث کاهش غلظت و شار مومنتوم جت خروجی می‌شود. مرحله‌ی دوم هنگامی آغاز می‌شود که شار مومنتوم جت (سرعت جت) تقریباً صفر می‌شود. در این حالت پساب از جت به پلوم تبدیل می‌شود (اگر $F > 1$ باشد، رفتار سیال به صورت جت و اگر $F < 1$ باشد، رفتار سیال به صورت پلوم است). با توجه به اینکه چگالی پساب نسبت به چگالی سیال محیط پذیرنده بیشتر است، پلوم به دلیل شار شناوری به سمت بستر محیط آبی سقوط می‌کند.^[۱۵] میزان رقیق‌سازی پساب در میدان نزدیک، بسیار بیشتر از میدان دور است.^[۷]

میزان رقیق‌شدگی پساب (S) (در اثر اختلاط با محیط آبی) در هر نقطه از پایین دست محل تخلیه به صورت رابطه‌ی ۱ تعریف می‌شود:

$$S = \frac{C_s - C_a}{C - C_a} \quad (1)$$

عدد فرود جت نیز به صورت رابطه‌ی ۲ تعریف می‌شود:

$$F = \frac{U}{\sqrt{Dg'}} \quad (2)$$

شتاب گرانش اصلاح شده به صورت رابطه‌ی ۳ تعریف می‌شود:

$$g' = g \frac{(\rho_s - \rho_a)}{\rho_a} \quad (3)$$

با توجه به اینکه تخلیه‌ی پساب ناشی از کارخانه‌های آب‌شیرین‌کن و دیگر صنایع به آب دریاها و اقیانوس‌ها باعث آسیب رساندن به محیط‌زیست و آبریزان می‌شود، گروهی از پژوهشگران به منظور یافتن روش‌های مناسب تخلیه و کاهش آسیب‌های تخلیه‌ی پساب، آغاز به انجام مطالعاتی در این زمینه کرده و نتایج مختلفی را ارائه داده‌اند. فرناندز^۱ و همکاران (۲۰۱۲)، به مقایسه‌ی نتایج ارائه شده توسط ۴ مدل انتگرالی UM3، CORJET، MEDVSA و CORMIX برای تخلیه‌ی پساب چگال در محیط آبی پرداخته و دریافته‌اند که همه‌ی مدل‌ها به جز مدل UM3، نتایج مربوط به رقیق‌سازی پساب، ارتفاع صعود بیشینه‌ی جت و فاصله‌ی افقی محل برخورد پساب به زمین را با خطای بالایی در مقایسه با نتایج تجربی برآورد کرده‌اند.^[۸] پالمار و همکاران (۲۰۱۲)، به منظور اعتبارسنجی مدل‌های CORJET، VISJET و UM3، نتایج به دست آمده برای تخلیه‌ی پساب چگال در محیط ساکن و پویا توسط مدل‌ها را با نتایج مطالعه‌های آزمایشگاهی مختلف مقایسه کرده و مشخص شده است که در محیط ساکن، هر سه مدل پارامترهای مربوط به ارتفاع صعود بیشینه‌ی جت، فاصله‌ی افقی محل ارتفاع صعود بیشینه‌ی جت از نازل و

۱.۳. آنالیز ابعادی جریان جت با شناوری منفی

آنالیز ابعادی، یک روش مناسب برای کاهش تعداد متغیرهای مؤثر در پدیده‌های فیزیکی است. مطالعه‌های آزمایشگاهی مختلفی برای بررسی رابطه‌های آنالیز ابعادی مربوط به پساب چگال تخلیه شده در محیط آبی انجام شده است. جیانگ و همکاران (۲۰۱۹)^[۱۰] با در نظر گرفتن یک جریان آشفته در یک محیط آبی ساکن نشان دادند که در آنالیز ابعادی، همه پارامترها تابعی از دبی جرمی (Q)، شارمومنت (M) و شار شناوری (B) هستند، که توسط یک ضریب تناسب به صورت مقیاس طولی (رابطه ۷) تعریف می‌شوند:

$$Z, X, S : \int_1(Q, M, B) = \int_2(L_Q, L_M) \quad (7)$$

مقدار مقیاس طولی تخلیه (L_Q) و مقیاس طولی مومنتوم (L_M) به صورت رابطه ۸ تعریف می‌شوند:

$$L_Q = Q/M^{0.5}, L_M = (M^{0.75})/(B^{0.5}) \quad (8)$$

با استفاده از تقریب بوسینسک و با توجه به اینکه $L_Q \ll L_M$ می‌توان گفت: $L_M = 0.94 D.F$. بنابراین برای یک زاویه ثابت، پارامترهای مختلف تخلیه‌ی پساب چگال، تابعی از عدد فرود و قطر تخلیه‌کننده هستند که در حالت بی‌بعد، آن‌ها به صورت: $Z/F.D = N_1, S_i/F = N_2, S_m/F = N_3, X_i/F.D = N_4$ بیان می‌شوند. N_1, N_2, N_3 و N_4 ضرایب ثابتی هستند که از مطالعه‌های تجربی و عددی محاسبه می‌شوند. هر کدام از آن‌ها براساس نتایج مطالعه‌ی انجام شده در بازه‌ی خاصی از عدد فرود جت خروجی، معتبر هستند.

۴. نتایج و بحث

در بخش حاضر، نتایج مدل‌های Standard, SST, RNG برای تخلیه‌ی پساب چگال با نتایج مطالعه‌ی آزمایشگاهی جیانگ^۶ و همکاران (۲۰۱۹)^[۱۰] مقایسه شده‌اند. پساب از نازل‌های مربع و دایره در محیط ساکن به صورت مستغرق مایل ($\theta = 45^\circ$) تخلیه شده است. میزان خطا بین دو عدد با استفاده از رابطه‌ی ۹ محاسبه می‌شود:

$$E = [(J_E - J_N)/J_E] * 100 \quad (9)$$

۱.۴. فاصله‌ی افقی نقطه‌ی برخورد پساب به زمین از تخلیه‌کننده

(X_i)

در شکل ۲، نتایج مربوط به پارامتر بی‌بعد فاصله‌ی افقی نقطه‌ی برخورد پساب به زمین نازل‌های دایره (شکل ۲الف) و مربع (شکل ۲ب) با زاویه‌ی تخلیه‌ی ۴۵ درجه برای اعداد فرود ۱۱، ۱۷ و ۲۶ مشاهده می‌شود. مقدار X_i/D برای هر دو نازل با افزایش عدد فرود به صورت تقریباً خطی افزایش یافته است. با افزایش عدد فرود (به دلیل افزایش سرعت جت خروجی)، ممتوم جت افزایش یافته و به همین دلیل پساب در فاصله‌ی دورتری از نازل با بستر محیط پذیرنده برخورد کرده است.^[۱۸] با توجه به نتایج جیانگ و همکاران (۲۰۱۹)^[۱۰] مقدار X_i/D برای نازل‌های مختلف متفاوت و مقدار X_i/D برای نازل دایره بیشتر از نازل مربع بوده است. اما مدل‌های عددی، مقدار X_i/D را برای هر دو نازل،

چگال تخلیه شده در محیط ساکن از نازل‌های دایره و مربع با زاویه‌ی تخلیه‌ی ۴۵° پرداخته شده است. در مدل RNG، مقدار K (انرژی جنبشی آشفته‌گی) و ε (نرخ استهلاك) به ترتیب از روابط ۴ و ۵ به دست می‌آیند:^[۱۴]

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m k) + \nabla \cdot (\rho_m \bar{u} k) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_{t,m}}{\sigma_k} \nabla k \right) + G_{k,m} - \rho_m \epsilon \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_m \epsilon) + \nabla \cdot (\rho_m \bar{u} \epsilon) = \nabla \cdot \left(\frac{\mu_{t,m}}{\sigma_\epsilon} \nabla \epsilon \right) + \frac{\epsilon}{k} (C_{1\epsilon}^* G_{k,m} - C_{2\epsilon} \rho_m \epsilon) \quad (5)$$

که در آن‌ها، $\mu_{t,m}$ لزجت آشفته‌گی و $G_{k,m}$ انرژی سینماتیک آشفته‌گی هستند. همچنین مقدار $C_{1\epsilon}^*$ مطابق رابطه‌ی ۶ محاسبه می‌شود:

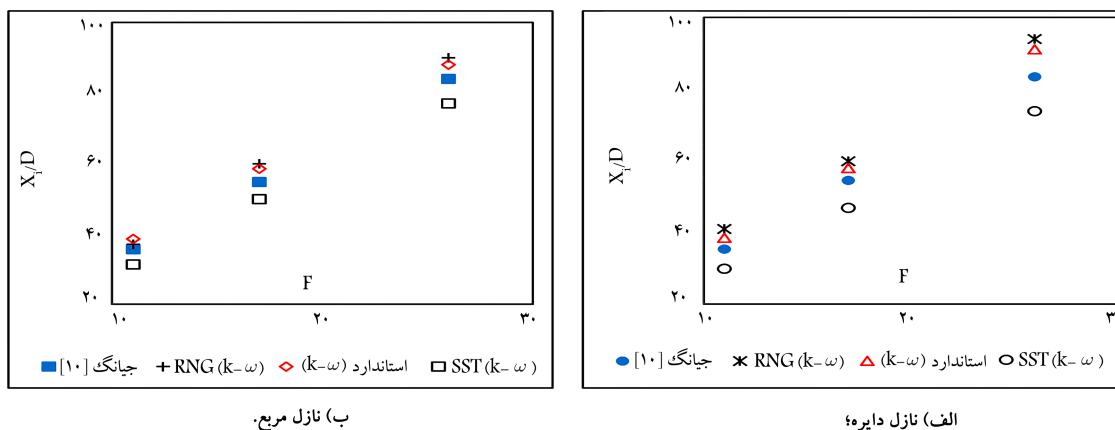
$$C_{1\epsilon}^* = C_{1\epsilon} - \frac{\eta \left(1 - \frac{\eta}{\eta_0} \right)}{1 + \beta \eta^2} \quad (6)$$

مقدار ثابت‌های معادله‌های اخیر، عبارت‌اند از: $\beta = 0.012$ ، $\eta_0 = 4/377$ ، $C_{2\epsilon} = 1/68$ ، $C_{1\epsilon} = 1/44$ ، $\sigma_\epsilon = 1$ ، برای اختصار، معادله‌های مدل‌های Standard, SST در نوشتار حاضر ارائه نشده است. اطلاعات کامل در مورد آن‌ها در برخی مراجع^[۱۷,۱۲] موجود است.

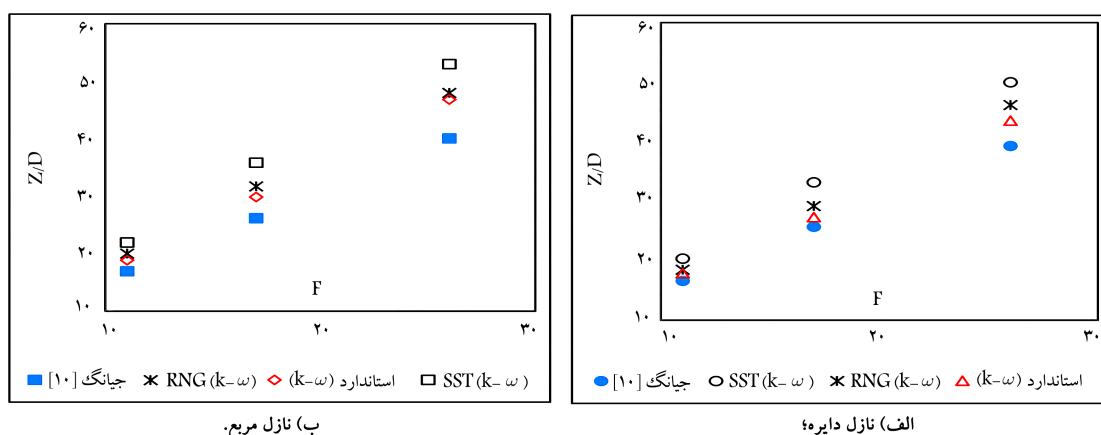
۳. مدل‌سازی

در پژوهش حاضر، با استفاده از مدل‌های آشفته‌گی Standard, SST, RNG به شبیه‌سازی رفتار پساب چگال تخلیه شده از نازل‌های دایره و مربع پرداخته شده است. سپس به منظور اعتبارسنجی مدل‌های آشفته‌گی، نتایج مدل‌ها با نتایج مطالعه‌های مختلف مقایسه شده‌اند. پساب به صورت جت مستغرق مایل ($\theta = 45^\circ$) در محیط ساکن از نازل‌های دایره و مربع با عدد فرود ۱۱ ($U = 0.52 \text{ m/s}$)، هر دو نازل یکسان و برابر $28/50 \text{ mm}^2$ با قطر معادل $\lambda mm (D_e)$ بوده است. D_e به عنوان قطر دایره‌ی برابر با مساحت یک ناحیه‌ی غیردایره‌ی تعریف شده است. چگالی پساب تولیدی برابر $26/10 \text{ kg/m}^3$ بوده است که در یک محیط آبی با چگالی 998 kg/m^3 تخلیه شده است. اختلاف دمای بین پساب و سیال محیط پذیرنده، صفر بوده است.

برای شبیه‌سازی، ابتدا هندسه‌ی مدل در نرم‌افزار SPACE-CLAIM^[۱۷] طراحی و سپس با استفاده از ANSYS-MESHING^[۱۲] مش‌زنی صورت گرفته است. در نزدیکی محل تخلیه از مش‌های با طول بسیار کم استفاده شده و با افزایش فاصله از محل تخلیه، طول مش‌ها نیز افزایش یافته است. بعد از مش‌زنی، مدل جهت مقداردهی وارد نرم‌افزار FLUENT شد. برای دهانه‌ی نازل از شرط مرزی Velocity Inlet، برای بستر محل تخلیه از شرط مرزی No Slip و برای دیواره‌های اطراف محل تخلیه از شرط مرزی Symmetry استفاده شده است. برای شبیه‌سازی از مدل‌های آشفته‌گی Standard, SST, RNG و برای ثابت‌های مدل از پیش‌فرض‌های نرم‌افزار استفاده شده است. برای مدل‌های Standard, RNG، گام زمانی ۰/۰۳ ثانیه و برای مدل SST، گام زمانی ۰/۰۲ ثانیه انتخاب شده است. به جهت اطمینان از توسعه‌یافتگی جریان، مدت زمان شبیه‌سازی، ۱۰۰ ثانیه انتخاب شده است.



شکل ۲. نتایج مدل‌های SST، Standard، و RNG برای فاصله‌ی افقی نقطه‌ی برخورد پساب به زمین از نازل‌های مختلف در مقایسه با مطالعه‌ی تجربی جیانگ و همکاران [۱۰].



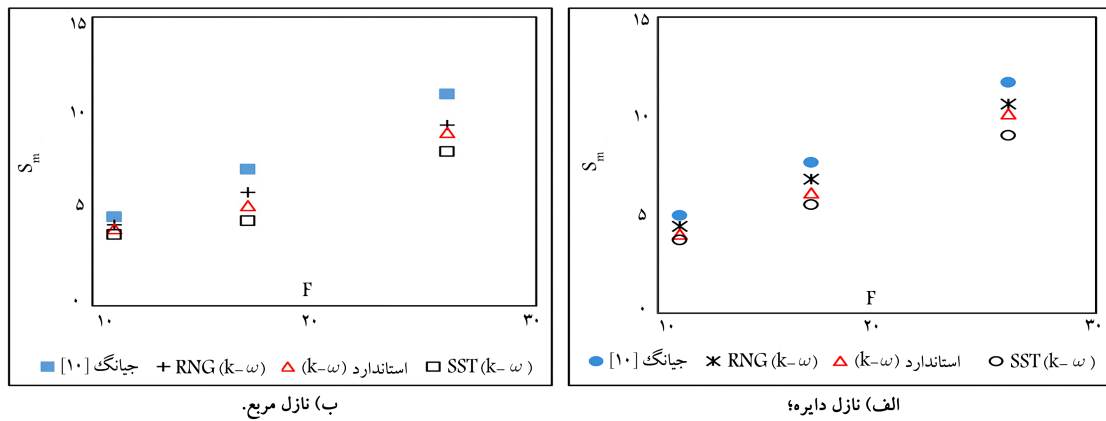
شکل ۳. نتایج مدل‌های SST، Standard، و RNG برای ارتفاع صعود بیشینه‌ی جت نازل‌های مختلف در مقایسه با مطالعه‌ی تجربی جیانگ و همکاران [۱۰].

درجه تخلیه شده است. با افزایش عدد فرود، مقدار Z/D برای همه‌ی نازل‌ها به صورت تقریباً خطی افزایش یافته است. با توجه به شکل ۳، مقدار Z/D برای جت تخلیه شده از نازل مربع بیشتر از نازل دایره بوده است. این موضوع به دلیل هم‌آوری بیشتر سیال به درون جت تخلیه شده از نازل دایره نسبت به نازل مربع بوده است. هم‌آوری سیال به درون جت باعث کاهش سرعت محوری جت و در نتیجه کاهش ارتفاع صعود بیشینه‌ی جت شده است. [۴] مدل SST مقدار Z/D را برای هر دو نازل در مقایسه با مطالعه‌ی آزمایشگاهی دست‌بالا تخمین زده است. SST مقدار Z/D را برای نازل‌های دایره و مربع به ترتیب با $۲۳/۵$ و $۲۴/۶$ درصد خطا پیش‌بینی کرده است. مدل RNG نسبت به مدل SST عملکرد بهتری داشته و مقدار Z/D را برای نازل‌های دایره و مربع به ترتیب با $۱۳/۶$ و $۱۶/۷$ درصد خطا برآورد کرده است. اما مدل Standard در مقایسه با دو مدل دیگر با اختلاف کمتری مقدار Z/D را برای نازل‌ها تخمین زده است. مدل Standard مقدار Z/D را برای نازل‌های دایره و مربع به ترتیب با ۸ و $۱۲/۴$ درصد خطا نسبت به مطالعه‌ی تجربی دست‌بالا پیش‌بینی کرده است. با توجه به نتایج جیانگ و همکاران (۲۰۱۹)، مقدار Z/D برای نازل‌های مختلف مقدار متفاوتی داشته است که این موضوع نشان‌دهنده‌ی تأثیرگذاری هندسه‌ی نازل در مقدار Z است. طبق نتایج، مدل‌های آشفتگی تأثیر هندسه‌ی نازل در مقدار Z را به خوبی تشخیص داده‌اند.

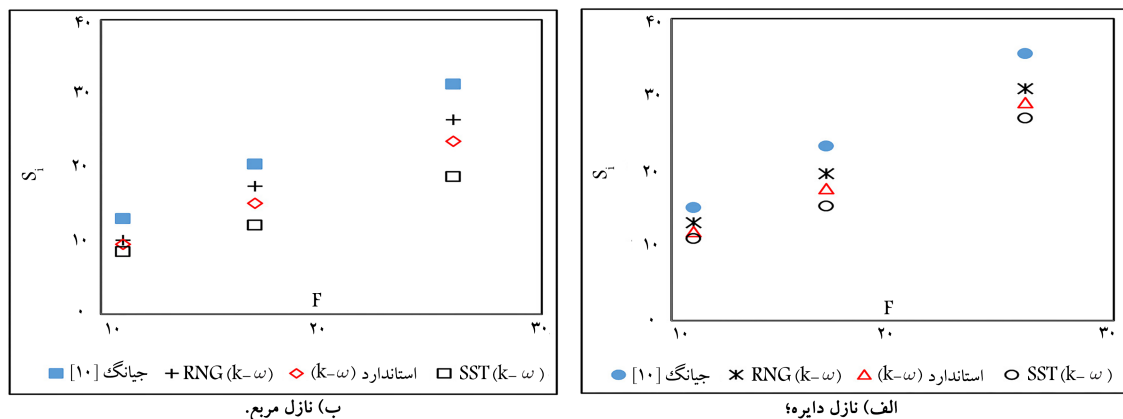
مقدار تقریباً یکسانی تخمین زده‌اند. مدل SST مقدار X_i/D را برای هر دو نازل مذکور در مقایسه با مطالعه‌ی آزمایشگاهی دست‌پایین تخمین زده است. مدل SST مقدار X_i/D را برای نازل‌های دایره و مربع به ترتیب با $۱۴/۵$ و ۱۰ درصد خطا نسبت به نتایج جیانگ و همکاران (۲۰۱۹) ارائه داده است. مدل Standard مقدار X_i/D را برای نازل‌های دایره و مربع به ترتیب با $۷/۹$ و ۶ درصد خطا تخمین زده است. نتایج مدل RNG نزدیک به مدل Standard بوده و مقدار X_i/D را برای نازل‌های دایره و مربع را به ترتیب با $۸/۵$ و $۷/۴$ درصد خطا برآورد کرده است. با توجه به نتایج، هر سه مدل مقدار X_i/D را برای نازل‌های دایره و مربع با خطای قابل قبولی تخمین زده‌اند که در بین آن‌ها، مدل Standard در مقایسه با مدل‌های دیگر، عملکرد نسبتاً بهتری داشته است.

۲.۴. ارتفاع صعود بیشینه‌ی جت (Z)

در شکل ۳، نتایج به‌دست آمده توسط مدل‌های SST، Standard، و RNG و نتایج ارائه شده توسط جیانگ و همکاران (۲۰۱۹) برای ارتفاع صعود بیشینه‌ی جت در اعداد فرود مختلف (۱۱، ۱۷، ۲۶) مقایسه شده‌اند. پساب به صورت مستغرق مایل از نازل‌های دایره (شکل ۳ الف) و مربع (شکل ۳ ب) با زاویه‌ی تخلیه‌ی ۴۵



شکل ۴. نتایج مدل‌های SST، Standard، RNG برای رقیق‌سازی پساب در محل ارتفاع صعود بیشینه جت تخلیه شده از نازل‌های مختلف در مقایسه با مطالعه‌ی تجربی جیانگ و همکاران (۲۰۱۹). [۱۰]



شکل ۵. نتایج مدل‌های SST، Standard، RNG برای رقیق‌سازی پساب در نقطه‌ی برخورد به زمین در مقایسه با نتایج مطالعه‌ی تجربی جیانگ و همکاران (۲۰۱۹). [۱۰]

رتیب با $۱۸/۴$ و $۲۲/۷$ درصد خطا دست پایین برآورد کرده است. مدل RNG نیز مانند مدل‌های دیگر، مقدار S_m را برای نازل‌های دایره و مربع به ترتیب با $۱۲/۳$ و $۱۷/۶$ درصد خطا پیش‌بینی کرده است. با توجه به نتایج ارائه شده، مدل RNG نسبت به مدل‌های دیگر، عملکرد بهتری برای تخمین مقدار S_m داشته است.

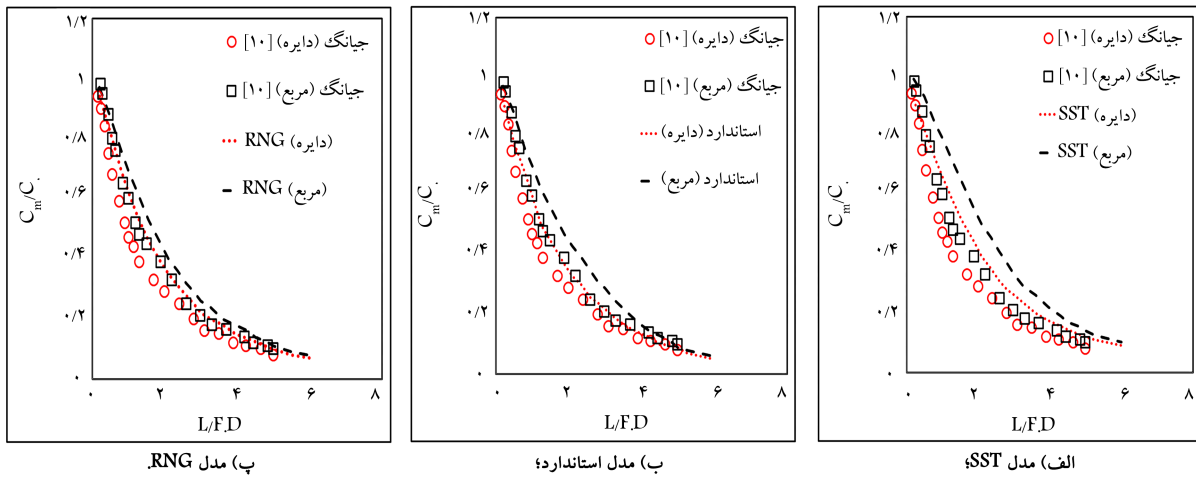
۴.۴. رقیق‌سازی پساب در نقطه‌ی برخورد به زمین (S_z)

نتایج مدل‌های SST، Standard، RNG برای رقیق‌سازی پساب در نقطه‌ی برخورد به زمین در مقایسه با مطالعه‌ی تجربی جیانگ و همکاران (۲۰۱۹)، در شکل ۵ مشاهده می‌شود. پساب از نازل‌های دایره (شکل ۵ الف) و مربع (شکل ۵ ب) به صورت مستغرق مایل و با عددهای فرود ۱۱، ۱۷ و ۲۶ در محیط آبی تخلیه شده است. با توجه به شکل ۵، مقدار S_z با افزایش عدد فرود به صورت تقریباً خطی افزایش یافته است. طبق نتایج، مقدار S_z برای نازل دایره بیشتر از نازل مربع بوده است که این موضوع به دلیل هم‌آوری بیشتر سیال به درون جت بوده است. همه‌ی مدل‌ها، مقدار رقیق‌سازی را برای هر دو نازل محافظه‌کارانه و دست پایین تخمین زده‌اند. مدل SST مقدار S_z را برای نازل‌های دایره و مربع به ترتیب با $۲۳/۳$ و $۳۶/۸$ درصد خطا دست پایین برآورد کرده است. مدل Standard میزان رقیق‌سازی در نقطه‌ی برخورد به زمین پساب تخلیه شده از نازل‌های دایره (با $۱۳/۷\%$ خطا) و مربع (با

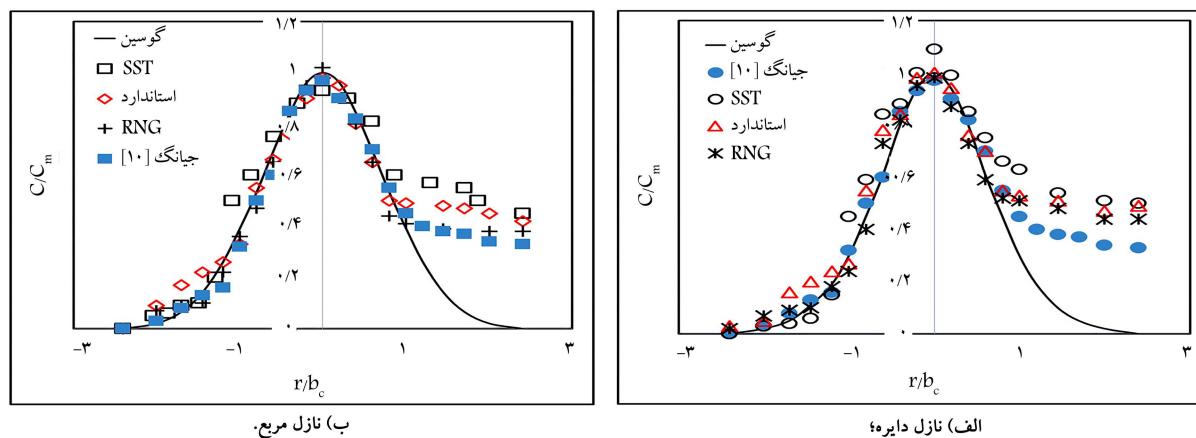
۳.۴. رقیق‌سازی پساب در محل ارتفاع صعود بیشینه جت (S_m)

نتایج مربوط به رقیق‌سازی پساب در محل ارتفاع صعود بیشینه جت مدل‌های آشفستگی SST، Standard، RNG و نتایج تجربی جیانگ و همکاران (۲۰۱۹). [۱۰] برای اعداد فرود مختلف در شکل ۴ مشاهده می‌شود. نتایج مربوط به نازل‌های دایره (شکل ۴ الف) و مربع (شکل ۴ ب) است. با توجه به شکل ۴، با افزایش عدد فرود، مقدار S_m برای همه‌ی مدل‌ها به صورت تقریباً خطی افزایش یافته است. با توجه به نتایج مدل‌های عددی، مقدار S_m برای نازل دایره بیشتر از نازل مربع بوده است. رقیق‌سازی پساب به دلیل تنش برشی ایجاد شده میان جت و سیال محیط پذیرنده و در نتیجه هم‌آوری سیال محیط به درون جت ایجاد می‌شود. هر چه محیط نازل بیشتر باشد، هم‌آوری سیال محیط به درون جت بیشتر می‌شود و در نتیجه میزان رقیق‌سازی (اختلاط پساب با سیال محیط پذیرنده) افزایش می‌یابد. [۱۹، ۱۸] به همین دلیل مقدار S_m پساب تخلیه شده با نازل دایره (به دلیل بیشتر بودن محیط نازل) بیشتر از نازل مربع بوده است.

با توجه به نتایج شبیه‌سازی، هر سه مدل اخیر، مقدار S_m را دست پایین برآورد کرده‌اند. مدل SST مقدار S_m را برای نازل‌های دایره و مربع به ترتیب با ۲۵ و $۲۸/۴$ درصد خطا تخمین زده و مدل Standard نیز در مقایسه با مطالعه‌ی تجربی جیانگ و همکاران (۲۰۱۹). [۱۰] مقدار S_m را برای نازل‌های دایره و مربع به



شکل ۶. کاهش غلظت در امتداد خط مرکزی جت تخلیه شده از نازل‌های دایره و مربع در مقایسه با نتایج مطالعه‌ی تجربی جیانگ و همکاران (۲۰۱۹). [۱۰]



شکل ۷. پروفیل بی‌بعدشده‌ی عرضی غلظت در محل ارتفاع صعود بیشینه‌ی جت مدل‌های آشفته‌گی مختلف در مقایسه با مطالعه‌ی تجربی جیانگ و همکاران (۲۰۱۹). [۱۰]

آن مقدار غلظت هر سه نازل بعد از $L/F.D > 4/5$ ، برابر شده است. با توجه به شکل ۶، مدل RNG کاهش غلظت در امتداد محور جت هر دو نازل را به خوبی و با اختلاف کمی نسبت به نتایج جیانگ و همکاران (۲۰۱۹)، [۱۰] تخمین زده است. طبق نتایج مدل RNG، کاهش غلظت مرکز جت دایره سریع‌تر از نازل مربع صورت گرفته است. مدل RNG همانند مدل Standard، غلظت مرکز جت تخلیه شده از هر دو نازل را بعد از $L/F.D > 4/5$ برابر در نظر گرفته است. با توجه به شکل ۶، هر سه مدل مذکور، مقدار غلظت در محور جت را در مقایسه با مطالعه‌ی تجربی جیانگ و همکاران (۲۰۱۹)، [۱۰] (برای هر دو نازل) دست بالا تخمین زده‌اند.

مدل SST را در مقایسه با مدل SST با خطای کمتری تخمین زده است. مدل RNG نیز مقدار S_i را برای نازل‌های دایره و مربع به ترتیب با $11/5$ و 20 درصد خطا نسبت به نتایج مطالعه‌ی تجربی جیانگ و همکاران (۲۰۱۹)، [۱۰] دست پایین پیش‌بینی کرده است. با توجه به نتایج ارائه شده، مدل RNG نسبت به دو مدل دیگر، عملکرد نسبتاً بهتری داشته است.

۵.۴. غلظت خط مرکزی جت

در شکل ۶، نتایج مدل‌های SST (شکل ۶الف)، Standard (شکل ۶ب)، و RNG (شکل ۶پ) با نتایج مطالعه‌ی تجربی جیانگ و همکاران (۲۰۱۹)، [۱۰] برای کاهش غلظت در امتداد خط مرکزی جت (L) با هندسه‌های مختلف نازل (دایره و مربع) برای عدد فرود ۱۱ مقایسه شده‌اند. با توجه به نتایج مدل SST (شکل ۶الف)، غلظت مرکز جت تخلیه شده از نازل دایره سریع‌تر از نازل مربع کاهش پیدا کرده است. با افزایش مقدار $L/F.D$ ، غلظت مرکز هر دو جت به یکدیگر نزدیک شده است. با توجه به شکل ۶الف، مقدار غلظت مرکز جت هر دو نازل بعد از $L/F.D > 6$ برابر شده است. در این مورد می‌توان گفت با نزدیک شدن پساب به سطح زمین، هندسه‌ی نازل در میزان رقیق‌سازی پساب تأثیر نداشته است. [۱۰] نتایج مدل Standard نیز همانند مدل SST بوده است، فقط با این تفاوت که در

۶.۴. غلظت مقطع عرضی جت

نتایج مدل‌های SST، Standard، و RNG برای پروفیل عرضی غلظت در محل ارتفاع صعود بیشینه‌ی جت در فاصله‌های شعاعی مختلف از مرکز جت در شکل ۷ مشاهده می‌شود. پساب به صورت جت از نازل‌های دایره (شکل ۷الف) و مربع (شکل ۷ب) با عدد فرود ۱۱ تخلیه شده است. در شکل ۷، سمت راست نمودار، مربوط به قسمت داخلی جت (نزدیک بستر) و سمت چپ نمودار، مربوط به قسمت خارجی (نزدیک سطح آب) است. با توجه به شکل ۷، در لبه‌ی خارجی جت، نتایج هر دو مدل نزدیک به پروفیل گوسی بوده است؛ اما در لبه‌ی داخلی، نتایج

تخمین زده‌اند. میزان رقیق‌سازی توسط هر سه مدل آشفتگی، دست‌پایین برآورد شده است. مدل RNG میزان رقیق‌سازی را با ۱۸٪ خطا نسبت به میانگین مطالعه‌های آزمایشگاهی تخمین زده و عملکرد بهتری نسبت به مدل‌های Standard (با ۲۴٪ خطا) و SST (با ۳۴٪ خطا) داشته است.

مدل‌های انتگرالی (UM۳، CORJET و JETLAG) به دلیل زمان و هزینه‌ی محاسباتی پایین، از پرکاربردترین مدل‌ها برای تخلیه‌ی انواع پساب (با استفاده از نازل دایره‌ای) در محیط آبی هستند.^[۹] با توجه به جدول ۱، مدل‌های انتگرالی، پارامترهای مختلف پساب شور را کمتر از مقادیر مدل‌های آزمایشگاهی و مدل‌های آشفتگی تخمین زده‌اند، که این موضوع به دلیل در نظر نگرفتن میزان آشفتگی توسط مدل‌های انتگرالی بوده است. مدل‌های آشفتگی میزان رقیق‌سازی در نقطه‌ی برخورد به زمین را در مقایسه با مدل‌ها انتگرالی با خطای کمتری برآورد کرده‌اند.

مدل‌ها از پروفیل گوسی فاصله گرفته‌اند که این موضوع نشان‌دهنده‌ی بیشتر بودن پخش در لبه‌ی خارجی جت نسبت به لبه‌ی داخلی آن است. در لبه‌ی داخلی به دلیل عواملی همچون اثرگذاری بستر محیط‌پذیرنده و اثر کواندا، هم‌اوری سیال محیط به درون جت به سختی انجام شده است. اما در سطح خارجی جت، هیچ مانعی برای هم‌اوری سیال به درون جت وجود نداشته است.^[۱۸] و به همین دلیل پخش در لبه‌ی خارجی جت بیشتر از لبه‌ی داخلی آن بوده است. مدل‌های عددی مقدار غلظت در مقطع عرضی جت را در مقایسه با نتایج جیانگ و همکاران (۲۰۱۹)^[۱۹] به درستی تخمین زده‌اند. اما در بین آن‌ها، مدل‌های Standard و RNG عملکرد نسبتاً بهتری در مقایسه با مدل SST داشته‌اند. همچنین با توجه به شکل ۷، پروفیل عرضی غلظت برای هر دو نازل تقریباً یکسان بوده است که این موضوع نشان‌دهنده‌ی عدم تأثیر هندسه‌ی نازل در مقدار غلظت در مقطع عرضی جت است.

۷.۴. مقایسه‌ی نتایج مدل‌های مختلف

در بخش حاضر، نتایج بی‌بعد شده‌ی مدل‌های آشفتگی با نتایج مطالعه‌های مختلف (آزمایشگاهی و عددی) با زاویه‌ی تخلیه‌ی ۴۵° مقایسه شده‌اند (جدول ۱). بیشتر مطالعه‌های انجام شده برای تخلیه‌ی پساب با استفاده از نازل دایره‌ای صورت گرفته و به همین دلیل در بخش کنونی، نتایج مربوط به نازل مربع ارائه نشده است.

پارامترهای S_i/F ، $Z/F.D$ ، $X_i/F.D$ در مطالعه‌های تجربی مختلف، مقادیر متفاوتی دارند، به همین دلیل میانگین آن‌ها با نتایج مدل‌های آشفتگی Standard و RNG مقایسه شده است. با توجه به جدول ۱، مدل SST مقدار $X_i/F.D$ را در مقایسه با نتایج مطالعه‌ی شائو^[۷] و همکاران (۲۰۱۰)^[۴] و سیبولینا^[۸] و همکاران (۲۰۰۵)^[۲۰] با اختلاف بسیار کمی تخمین زده است. مدل SST با اختلاف تقریباً ۱۲ درصدی در مقایسه با میانگین مطالعه‌های تجربی، مقدار $X_i/F.D$ را پیش‌بینی کرده و مدل‌های RNG و Standard نیز مقدار $X_i/F.D$ را در مقایسه با میانگین مطالعه‌های تجربی به ترتیب با ۱۱ و ۹ درصد خطا برآورد کرده‌اند. مدل‌های SST، RNG و Standard مقدار $Z/F.D$ را به ترتیب با ۱۷، ۹ و ۵ درصد خطا نسبت به میانگین نتایج مطالعه‌های آزمایشگاهی دست‌پایین

جدول ۱. مقایسه‌ی نتایج مطالعه‌های مختلف برای نازل دایره.

مطالعه‌های مختلف	S_i/F	$Z/F.D$	$X_i/F.D$
شائو و همکاران ^[۴]	۱/۲۶	۱/۴۷	۲/۸۳
پاکنستا و همکاران ^[۵]	۱/۵۵	۱/۵۸	۳/۱۶
کیکرت و همکاران ^[۱]	۱/۷۱	۱/۶	۳/۲۶
سیبولینا و همکاران ^[۲۰]	-	۱/۶۱	۲/۸۲
جیانگ و همکاران ^[۱۹]	۱/۳۶	۱/۵۱	۳/۲۱
میانگین مطالعه‌های تجربی	۱/۴۷	۱/۵۵	۳/۰۵
مدل انتگرالی CORJET ^[۹]	۰/۶۵	۱/۴۱	۲/۶۵
مدل انتگرالی UM۳ ^[۹]	۰/۶۳	۱/۲۴	۲/۳۲
مدل انتگرالی JETLAG ^[۹]	۰/۷۶	۱/۲۷	۲/۶۸
RNG (مطالعه‌ی حاضر)	۱/۲	۱/۷	۳/۴۵
Standard (مطالعه‌ی حاضر)	۱/۱۲	۱/۶۲	۳/۳۵
SST (مطالعه‌ی حاضر)	۰/۹۷	۱/۸۶	۲/۶۸

۵. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، با استفاده از نرم‌افزار ANSYS-FLUENT به اعتبارسنجی مدل‌های آشفتگی $SST(k-\omega)$ ، $Standard(k-\epsilon)$ و $RNG(k-\epsilon)$ برای تخلیه‌ی پساب چگال (به صورت جت مستغرق مایل با زاویه‌ی تخلیه‌ی ۴۵° نسبت به افق) با استفاده از نازل‌های دایره و مربع در محیط آبی ساکن پرداخته شده است. برای این منظور، نتایج مدل‌های SST، Standard و RNG با نتایج مطالعه‌های آزمایشگاهی و عددی مقایسه شده است: مدل SST، مقدار X_i را برای نازل‌های دایره و مربع، در مقایسه با نتایج مطالعه‌های آزمایشگاهی دست‌پایین تخمین زده است. مدل‌های (Standard و RNG) $k-\epsilon$ ، مقدار X_i را برای هر دو نازل مربع و دایره دست‌پایین تخمین کرده‌اند، که نتایج مدل Standard در مقایسه با مدل RNG، به نتایج آزمایشگاهی نزدیک‌تر بوده است. مقدار ارتفاع صعود بیشینه‌ی جت (Z) توسط هر سه مدل آشفتگی، دست‌پایین تخمین زده شده است که در بین آن‌ها، نتایج مدل Standard قابل اعتمادتر بوده است. با توجه به نتایج به دست‌آمده، میزان Z و X_i برای نازل مربع بیشتر از نازل دایره بوده است که دلیل آن بیشتر بودن محیط دایره نسبت به محیط مربع (با سطح مقطع یکسان) است. بیشتر بودن محیط باعث بیشتر شدن هم‌اوری سیال به درون جت و در نتیجه، کاهش سرعت محوری جت شده است. هر سه مدل مذکور، مقدار رقیق‌سازی پساب (S_m و S_i) را دست‌پایین و محافظه‌کارانه تخمین زده‌اند. نتایج نشان داد که مدل‌های $K-\epsilon$ نسبت به مدل $K-\omega$ ، نتایج دقیق‌تری را ارائه داده‌اند. مدل (RNG) $K-\epsilon$ مقدار رقیق‌سازی پساب را در مقایسه با مدل (Standard) $K-\epsilon$ و (SST) $K-\omega$ با خطای کمتری تخمین زده است. مدل RNG عملکرد بهتری نسبت به مدل‌های دیگر در تخمین میزان رقیق‌سازی داشته و میزان رقیق‌سازی را برای هر دو نازل مربع و دایره، در مقایسه با نتایج تجربی به خوبی پیش‌بینی کرده است. غلظت در مرکز جت نیز توسط مدل‌های عددی به خوبی تخمین زده شده است که در بین آن‌ها، مدل‌های Standard و RNG در مقایسه با مدل SST عملکرد بهتری داشته‌اند. نتایج مدل‌های آشفتگی به دلیل در نظر گرفتن آشفتگی جریان، نسبت به نتایج مدل‌های انتگرالی قابل اعتمادتر بوده‌اند. طبق نتایج، مدل‌های آشفتگی ابزاری مناسب برای پیش‌بینی رفتار پساب چگال تخلیه شده از نازل‌های دایره و مربع هستند. مدل‌های Standard و RNG رفتار مشابهی داشته و نتایج آن‌ها در مقایسه با نتایج مدل SST قابل اعتمادتر بوده است. مدل RNG مقدار رقیق‌سازی را در مقایسه با مدل‌های دیگر با اختلاف کمتری تخمین زده و به عنوان مدل برتر توصیه شده است.

فهرست علائم

C : غلظت اولیه‌ی پساب؛	D : قطر نازل دایره‌یی؛
C_a : غلظت محیط پذیرنده؛	De : قطر معادل سطح دایره‌یی؛
r : فاصله‌ی شعاعی نقطه‌ی مورد نظر از مرکز نازل؛	D : قطر نازل؛
b_c : فاصله‌ی شعاعی که در آن: $C/C_c = 1/e$ ؛	U : سرعت خروجی پساب از نازل؛
R : طول مش؛	S : میزان رقیق‌سازی؛
L : امتداد طول خط مرکزی جت؛	S_m : میزان رقیق‌سازی پساب در مرکز محل ارتفاع صعود بیشینه‌ی جت؛
θ : زاویه‌ی دهانه‌ی نازل نسبت به افق؛	S_i : میزان رقیق‌سازی پساب در مرکز محل برخورد به زمین؛
E : مقدار خطا بین دو عدد؛	X_i : فاصله‌ی افقی مرکز محل برخورد پساب به زمین از نازل؛
J_E : داده‌های آزمایشگاهی (عدد بزرگ‌تر)؛	Z : ارتفاع صعود بیشینه‌ی جت از نازل؛
J_N : داده‌های عددی (عدد کوچک‌تر)؛	F : عدد فرود تخلیه؛
ρ_a : چگالی محیط؛	K : انرژی جنبشی آشفتگی؛
ρ : چگالی پساب؛	ε : نرخ استهلاك؛
A : مساحت نازل؛	C : غلظت در نقطه‌ی مورد نظر؛
L_Q : مقیاس طول تخلیه؛	C_c : غلظت در مرکز جت؛
L_M : مقیاس طولی مومنتوم.	

پانویس‌ها

1. Loya-Fernandez
2. Yan
3. Direct Numerical Simulation (DNS)
4. Large Eddy Simulation (LES)
5. Reynolds-Averaged Navier Stokes (RANS)
6. Jiang
7. Choi
8. Cipollina

منابع (References)

1. Kikkert, G.A., Davidson, M.J. and Nokes, R.I. "Inclined negatively buoyant discharges", *Journal of Hydraulic Engineering*, **133**(5), pp. 545-554 (2007).
2. Ramakanth, A., Davidson, M.J. and Nokes, R.I. "Laboratory study to quantify lower boundary influences on desalination discharges", *Desalination*, **529**, p. 115641 (2022).
3. Wang, X. "Numerical modeling of inclined dense jets in stagnant water on a sloped bottom", Doctoral dissertation, Universit d'Ottawa/ University of Ottawa (2020).
4. Shao, D. and Law, A.W.K. "Mixing and boundary interactions of 30 and 45 inclined dense jets", *Environmental Fluid Mechanics*, **10**(5), pp. 521-553 (2010).
5. Papakonstantis, I.G., Christodoulou, G.C. and Papanicolaou, P.N. "Inclined negatively buoyant jets 2: concentration measurements", *Journal of Hydraulic Research*, **49**(1), pp. 13-22 (2011).
6. Shrivastava, I. and Adams, E.E. "Pre-dilution of desalination reject brine: Impact on outfall dilution in different water depths", *Journal of Hydro-Environment Research*, **24**, pp. 28-35 (2019).
7. Loya-Fernandez, A., Ferrero-Vicente, L.M., Marco-Mendez, C. and et al. "Quantifying the efficiency of a mono-port diffuser in the dispersion of brine discharges", *Desalination*, **431**, pp. 27-34 (2018).
8. Loya-Fernandez, A., Ferrero-Vicente, L.M., Marco-Mendez, C. and et al. "Comparing four mixing zone models with brine discharge measurements from a reverse osmosis desalination plant in Spain", *Desalination*, **286**, pp. 217-224 (2012).
9. Palomar, P., Lara, J.L. and Losada, I.J. "Near field brine discharge modeling part 2: Validation of commercial tools", *Desalination*, **290**, pp. 28-42 (2012).
10. Jiang, M., Law, A.W.K. and Song, J. "Mixing characteristics of inclined dense jets with different nozzle geometries", *Journal of Hydro-environment Research*, **27**, pp. 116-128 (2019).
11. Jiang, M., Chen, W. and Law, A.W.K. "Mixing characteristics of 45° inclined duckbill dense jets in co-flowing currents", *Journal of Hydro-environment Research*, **36**, pp. 77-86 (2021).
12. Ansys, Inc. ANSYS Fluent User's Guide, Version 2019 R3 (2019).
13. Yan, X. and Mohammadian, A. "Numerical modeling of multiple inclined dense jets discharged from moderately spaced ports", *Water*, **11**(10), p. 2077 (2019).
14. Wilcox, D.C. "Turbulence modeling for CFD (Vol. 2, pp. 103-217)", La Canada, CA: DCW industries (1998).

15. Yan, X., Ghodoosipour, B. and Mohammadian, A. "Three-dimensional numerical study of multiple vertical buoyant jets in stationary ambient water", *Journal of Hydraulic Engineering*, **146**(7), p. 04020049 (2020).
16. Meng, G. and Wenxin, H. "Numerical simulation of a round buoyant jet in a counterflow", *Procedia Engineering*, **154**, pp. 943-950 (2016).
17. Launder, B.E. and Spalding, D.B. "The numerical computation of turbulent flows", *In Numerical Prediction of Flow, Heat Transfer, Turbulence and Combustion*, **2**, pp. 96-116 Pergamon (1983).
18. Choi, K.W., Lai, C.C. and Lee, J.H. and et al. "Mixing in the intermediate field of dense jets in cross currents", *Journal of Hydraulic Engineering*, **142**(1), p. 04015041 (2016).
19. Roberts, P.J. and Toms, G. "Inclined dense jets in flowing current", *Journal of Hydraulic Engineering*, **113**(3), pp. 323-340 (1987).
20. Cipollina, A., Brucato, A., Grisafi, F. and et al. "Benchmark investigation of inclined dense jets", *Journal of Hydraulic Engineering*, **131**(11), pp. 1017-1022 (2005).