

# تحلیل استاتیکی تیر های نانو بر پایه‌ی نظریه‌ی گرادیان تنش و با استفاده از دو روش تحلیلی

## و عددی نیستروم

محمد صادق بهنام رسولی<sup>۱</sup>، احمد آفتابی ثانی<sup>۲</sup>، عباس کرم‌الدین<sup>۳\*</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، گروه عمران، دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

۲- دانشیار، گروه عمران، دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

۳- دانشیار، گروه عمران، دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

پست الکترونیکی نویسندگان:

۱- [behnamrasouli4001317159@mail.um.ac.ir](mailto:behnamrasouli4001317159@mail.um.ac.ir)

۲- [aftabi@um.ac.ir](mailto:aftabi@um.ac.ir)

۳- [a-karam@um.ac.ir](mailto:a-karam@um.ac.ir)

### چکیده:

نظریه‌ی غیرموضعی گرادیان تنش ارینگن یکی از پرکاربردترین نظریه‌های مکانیک محیط پیوسته برای تحلیل سازه‌های نانو می‌باشد. در این نظریه، تنش غیرموضعی به کمک یک تبدیل انتگرالی با کرنش مرتبط می‌شود. تابع هسته‌ی تبدیل انتگرالی مذکور، یک تابع منحصر به فرد نبوده و تابع‌های گوناگونی برای آن پیشنهاد شده است. در این پژوهش سعی می‌شود تیر نانوی اویلر - برنولی بر پایه‌ی نظریه‌ی غیرموضعی ارینگن و با فرض تابع هسته‌ی نمایی طبیعی به صورت استاتیکی تحلیل شود. شایان ذکر است، در پژوهش پیش‌رو معادله‌ی انتگرالی حاکم بر رفتار تیر نانو، بطور مستقیم حل شده و معادله‌ی دیفرانسیل معادل آن نیز بدست می‌آید. برای حل این معادله‌ی انتگرالی از روش عددی نیستروم و روش‌های نظری استفاده شده است. در ادامه، روش مزبور برای تحلیل استاتیکی تیرهای نانو با شرایط مرزی و بارگذاری‌های مختلف بکار می‌رود و نتایج آن با یافته‌های پیشینیان مقایسه می‌گردد. در پایان، به تناقضی در نمودارهای بخش نتایج عددی اشاره شده و علت آن بررسی می‌شود.

### واژگان کلیدی:

نظریه‌ی کشسانی غیرموضعی گرادیان تنش ارینگن، تیر نانو، معادله‌ی انتگرالی تیر نانو، تابع خیز، روش عددی نیستروم.

\* عباس کرم‌الدین، دانشیار گروه عمران دانشکده‌ی مهندسی - دانشگاه فردوسی مشهد.

ایمیل: [a-karam@um.ac.ir](mailto:a-karam@um.ac.ir) (نویسنده‌ی مسئول مقاله)

# Static analysis of the stress-gradient nanobeam by both of analytical and the Nystrom numerical method

M.S Behnam rasouli <sup>١</sup>, A. Aftabi sani <sup>٢</sup>, A. Karamodin <sup>٣</sup>

١- MSc Student of Structural Engineering of Ferdowsi University, Mashhad, Iran.

٢- associate Prof., Civil Engineering Department, Faculty of Engineering of Ferdowsi University, Mashhad, Iran.

٣- associate Prof., Civil Engineering Department, Faculty of Engineering of Ferdowsi University, Mashhad, Iran.

## Abstract:

This paper deals with the static analysis of the Euler-Bernoulli nanobeam based on the Eringen's nonlocal theory. This theory is used for the nanoscale structures such as nanobeams which claims that the stress tensor is associated with the strain tensor by a linear integral transformation. The kernel function of the transformation contains an attenuation function. Several candidates have been proposed for the attenuation function. In this paper, the exponential attenuation function is utilized and the corresponding integral equation is solved directly. To do so, two different methods of the Nystrom numerical method and analytical method are employed, respectively. The Nystrom numerical method is one of the numerical solutions that is extensively utilized to solve different integral equations. This method builds up a linear system of equations that is conveniently solved by the computational programs. Next, the function of the answer is predicted and then examined by the analytical method. In fact, the analytical method is determination of the unknown constants in order to justify the integral equation by inserting the mentioned probable answer in the integral equation and putting both side equivalent to each other. At last, the displacement and curvature function of the nanobeam is determined according to the answer of the integral equation so that the mentioned integral equation converts to an equivalent differential equation that is newly proposed. On the other hand, the resultant displacement function is a closed form function which contains some constants that should be found by utilizing the boundary conditions of the nanobeam. For the sake of verification, the offered function is employed to determine the dimensionless displacement of a specified point of the beam and compare it with the results given in the previously proposed papers. Additionally, the mentioned function is employed to analyze several nanobeams with new boundary conditions and load functions. Then, the displacement function is plotted. Lastly, a contradiction is also determined based on the displacement graphs in the pervious section.

**Keywords:** Stress gradient elasticity theory; Nystrom method; Fredholm's integral equation; numerical method; equivalent differential equation

متعددی به تعریف نظریه‌ی های کشسانی جدید پرداختند. به عنوان مثال، بر اساس نظریه‌ی گرادیان کرنش میندلین [۳]، برای مواد همگن، تنش و کرنش با هجده پارامتر کشسانی به یکدیگر مرتبط می‌شدند. همچنین، سابساترن و راجچکسی [۵] و میلر و شینوی [۶] سعی کردند با افزودن پارامترهای جدید مربوط به انرژی کرنشی سطحی، به نظریه‌ی کشسانی کلاسیک، خیز تیرهای نانو را توجیه کنند. همینطور استمپین و سیمولکا [۱۰] توانستند تا حدودی رفتار تیرهای نانو را به کمک حساب دیفرانسیل کسری توجیه نمایند.

از سوی دیگر، نخستین بار کرومر [۱۱] با تعریف نیروهای بلندبرد، رفتار غیرموضعی را تعریف کرده و رابطه‌ی کلی مکانیک غیرموضعی را ارائه داد. سپس ارینگن [۱۲ و ۱۳] و ارینگن و ادلن [۱۳] با اعمال فرض رفتار غیرموضعی در معادلات تعادل جرم، اندازه حرکت و انرژی توانستند رابطه‌ی انتگرالی میان تنش و کرنش را بیابند. ایشان سپس به کمک داده‌های آزمایشاتی که بر روی انتشار موج در بلور جامدات انجام شده بود، چند تابع هسته یا کرنل مناسب برای تبدیل انتگرالی مذکور پیشنهاد داده و مناسب‌ترین این تابع‌ها را مشخص نمودند [۱۲]. همچنین، ارینگن در پژوهش خود نشان داد که رابطه‌ی انتگرالی میان تنش و کرنش به ازای هر تابع هسته، معادل با یک معادله‌ی دیفرانسیلی میان آنهاست [۱۲]. وی در حالت کلی (سه بُعد)، معادله‌ی دیفرانسیل معادل مربوط به تبدیل انتگرالی با هسته‌ی تابع پسل اصلاح‌شده را بدست آورد. به علت سادگی کاربرد، این معادله‌ی دیفرانسیل بسیار پرطرفدار می‌باشد.

در ادامه، پدیسون و همکاران [۱۴]، معادله‌ی دیفرانسیل معادل پیشنهادشده توسط ارینگن را برای تیر اویلر - برنولی و در یک بُعد بازنویسی کردند و آن را برای تحلیل تیرهای نانوی یک سر گیردار و دو سر مفصل بکار بردند. در سال‌های بعد، پژوهشگران متعددی از این معادله‌ی دیفرانسیل معادل به جای معادله‌ی انتگرالی اولیه در تحلیل تیرهای نانو با رفتار اویلر - برنولی و تیموشنکو بهره جستند [۱۵-۲۴]. به عنوان مثال ونگ و شیندو [۱۵] و ونگ و لیو [۱۶]، این راهکار را برای تحلیل استاتیکی و کماتشی تیرهای نانو بکار بستند. همچنین، ابوهلال [۱۷] به کمک این معادله‌ی دیفرانسیل و بکارگیری روش تابع

امروزه مواد در ابعاد نانو کاربردهای فراوانی در صنایع گوناگون، مانند صنعت بهداشت و درمان و صنایع نظامی یافته‌اند. از این جمله می‌توان به حسگرهای نانو، مولدهای نانو و میکروسکوپ‌های نیروی اتمی اشاره کرد. این مسأله سبب جلب نظر پژوهشگران فراوانی به موضوع مکانیک سازه‌های نانو شده است. بطور کلی، روش دینامیک شبکه‌ای، روش اصلی برای تحلیل و طراحی سازه‌های نانو می‌باشد. این روش بسیار دقیق است ولی به علت حجم بالای محاسبات و زمان زیاد تحلیل، کمتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. از سوی دیگر روش‌های مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته سریعتر به پاسخ می‌رسند ولی دقت کمتری دارند.

تاکنون نظریه‌های گوناگونی برای تفسیر رفتار سازه‌های میکرو و نانو پیشنهاد شده است. نظریه‌ی غیرموضعی گرادیان تنش ارینگن [۱]، نظریه‌ی گرادیان تنش رومانو و برتا [۲]، نظریه‌ی گرادیان کرنش میندلین [۳]، نظریه‌ی گرادیان کرنش پاپارگیری و همکاران [۴] و نظریه‌ی کشسانی کلاسیک اصلاح‌شده با اثرات انرژی سطحی [۵ و ۶] از مهمترین این نظریه‌ها می‌باشند. در این پژوهش، نظریه‌ی غیرموضعی گرادیان تنش ارینگن [۱] با فرض تابع هسته‌ی نمایی طبیعی، بکار گرفته می‌شود. شایان ذکر است، نوآوری پژوهش پیش‌رو در آن است که برای نخستین بار، معادله‌ی انتگرالی حاکم بر تیر نانوی اویلر - برنولی بر اساس نظریه‌ی غیرموضعی ارینگن و با فرض تابع هسته‌ی نمایی طبیعی، بطور مستقیم حل می‌شود و سپس، تابع پاسخ آن به صورت فرم بسته ارائه می‌گردد.

رفتار متفاوت سازه‌های با ابعاد نانو به کمک آزمایشات متعدد آشکار شده است. برای مثال نیلسون و همکاران [۷ و ۸] با انجام آزمایش بارگذاری روی تیرهای نانو از جنس کرومیم و با کمک میکروسکوپ نیروی اتمی (AFM) نمودار خیز تیر مذکور را بدست آوردند و رفتار آن را مغایر با رفتار تیرهای کلاسیک یافتند. همچنین، پتی و همکاران [۹] آزمایش بارگذاری خمشی روی تیر دو سر مفصل نانو را اجرا کرده و نتایج آن را نتوانستند با معادلات کلاسیک توجیه کنند. به دنبال آشکار شدن ناتوانی نظریه‌ی کلاسیک در توجیه پدیده جدید، پژوهشگران

گرین، پاسخ دینامیکی تیرهای اوپلر - برنولی را در شرایط مرزی گوناگون بدست آورد. قنادی اصل و مفید [۱۸] تحلیل دینامیکی تیر نانو با رفتار تیموشنکو را زیر اثر بار متحرک بررسی کردند و از این معادله‌ی دیفرانسیل معادل بهره جستند. از سوی دیگر فرناندز و همکاران [۱۹]، نشان دادند که معادله‌ی دیفرانسیل مذکور، معادل با رابطه‌ی انتگرالی نظریه‌ی گرادیان تنش به ازای تابع هسته‌ی نمایی طبیعی نیست. همچنین، کوکلا و زاموسکا [۲۰] نیز تحلیل ارتعاش آزاد تیرنانو زیر بار محوری را بررسی کردند.

کیانی و پاکدامن [۲۱] بر پایه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل بدست‌آمده در مرجع [۱۴و۱۲]، فرکانس طبیعی یک غشاء تک‌لایه از نانولوله‌های کربنی دوجداره را که در یک محیط با گرادیان دمایی قرار گرفته است، تعیین کردند. آنها در پژوهش بعدی [۲۲] فرکانس طبیعی ارتعاش آزاد همان سازه‌ی پژوهش قبل را به کمک معادله‌ی دیفرانسیل پیشنهادشده در مرجع [۱۴و۱۲] و همچنین، دینامیک شبکه‌ای بدست آوردند. شایان ذکر است، در این دو پژوهش اثرات پارامترهای مختلف بر مقدار فرکانس طبیعی بررسی شده است. از سوی دیگر، یوان و همکاران [۲۳] به کمک معادله‌ی دیفرانسیل اشاره‌شده در مرجع [۱۴و۱۲] به بررسی ارتعاش آزاد پیچشی سیم نانو‌ی ناهمگن و غیر منشوری که دارای تغییر مقطع‌های موضعی می‌باشد، پرداختند. با بکارگیری اصول مشابه، کیانی و زور [۲۴]، ارتعاش آزاد دو میله‌ی نانو به هم چسبیده با تغییر مقطع را مورد مطالعه قرار دادند.

همانطور که گفته شد بر پایه‌ی مرجع [۱۲] معادله‌ی دیفرانسیل معادل تبدیل انتگرالی میان تنش و کرنش، به ازای تابع‌های هسته متفاوت، تغییر می‌کند. از سوی دیگر، معادله‌ی مورد استفاده در پژوهش‌های [۲۴-۱۵] همان معادله‌ی دیفرانسیل معادل تبدیل انتگرالی به ازای تابع هسته‌ی بسط اصلاح‌شده است. در پژوهش پیش‌رو، تلاش می‌شود تبدیل انتگرالی مذکور به ازای تابع هسته‌ی نمایی طبیعی حل شده و معادله‌ی دیفرانسیل معادل آن بدست آید.

همانطور که پیشتر اشاره شد، در سالهای اخیر، نخستین تلاش‌ها برای حل معادله‌ی انتگرالی با تابع هسته‌ی مزبور از سوی فرناندز و همکاران [۱۹] و همچنین، تونا و کیرکا [۲۵] بوده است. در پژوهش

فرناندز و همکاران [۱۹] سعی شده است معادله‌ی انتگرالی با هسته‌ی نمایی طبیعی به روش تحلیلی، ساده شده و سپس به کمک روش‌های عددی حل شود. به دلیل بکارگیری روش عددی، آنها صرفاً به نمودار تغییرات خیز یک نقطه از تیر به ازای تغییر پارامتر غیرموضعی دست یافتند. در ادامه، تونا و کیرکا [۲۵]، معادله‌ی انتگرالی اشاره‌شده را به کمک روش تبدیل لاپلاس و برای تیر تیموشنکو و اوپلر - برنولی حل کردند. با این وجود، رومانو و برتا [۲۶] با مروری بر این پژوهش، ایراداتی به آن وارد ساختند. از جمله اینکه تابع پاسخ در مرجع [۲۵] نمی‌تواند معادله‌ی انتگرالی را ارضاء کند و دارای جملات مبهم شامل تابع هوی‌ساید و دلتای دیراک در نقاط تعریف‌نشده خارج از دامنه می‌باشد. تاکنون روش‌های عددی و نظری گوناگونی برای حل معادلات انتگرالی ارائه شده است. این روش‌ها در کتاب‌های راهنمای حل معادلات انتگرالی مانند مراجع [۲۷و۲۸] آمده است. در پژوهش پیش‌رو، تابع پاسخ با راهکار عددی نیستروم حدس زده می‌شود و با راهکار تحلیلی به دقت بدست می‌آید. روش نیستروم، در واقع، شیوه‌ای مبتنی بر تبدیل انتگرال به مجموع جملات محدود است که تاکنون برای حل عددی معادلات انتگرالی فردهولم و ولترا بکار رفته است [۲۹-۳۳].

در این پژوهش، معادله‌ی انتگرالی ارائه‌شده بر اساس نظریه‌ی کشسانی غیرموضعی گرادیان تنش اربینگن [۱] و به ازای تابع هسته‌ی نمایی طبیعی، با ترکیب روش‌های عددی و تحلیلی حل می‌شود و پاسخ صریح ریاضی به صورت تابع با فرم بسته در دست قرار می‌گیرد. تاکنون پژوهشگری اقدام به حل معادله‌ی انتگرالی نظریه‌ی غیرموضعی با هسته‌ی نمایی طبیعی و استخراج معادله‌ی دیفرانسیل معادل آن نکرده است. در ادامه و در بخش دوم، ابتدا پیش‌نیازهای نظری و مفاهیم اولیه مورد نیاز برای یافتن تابع خیز ارائه می‌شوند. در بخش سوم، محاسبات ریاضی مربوط به حل معادله‌ی انتگرالی می‌آید. در بخش چهارم، تابع خیز به فرم بسته حاصل می‌شود. در بخش بعدی، تیرهای نانو با شرایط مرزی مختلف و بارگذاری‌های گوناگون به کمک راهکار پیشنهادی تحلیل می‌شوند و نتایج بدست آمده با نتایج موجود در پژوهش‌های پیشین مقایسه می‌شود. همچنین در این بخش نمودار خیز تیر نانو در شرایط مرزی گوناگون و زیر بارگذاری‌های مختلف بر اساس تابع

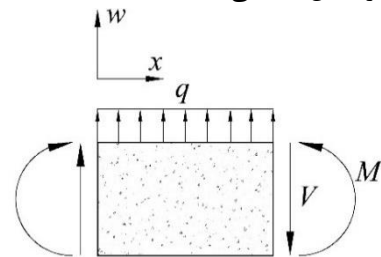
هسته‌ی نمایی طبیعی بدست می‌آید. در بخش بعد، به تناقضی که در شرایط مرزی با شیب صفر رخ می‌دهد و علت آن، اشاره می‌شود.

## ۲- مفاهیم اولیه

در این بخش ضمن مرور نظریه‌ی غیرموضعی گرادیان تنش ارینگن [۱] و معرفی تابع هسته‌ی مورد استفاده در معادله‌ی انتگرالی این نظریه، راهکارهای موجود برای حل معادله‌ی انتگرالی مذکور، از جمله روش عددی نیستروم، معرفی می‌شوند.

### ۲-۱- نظریه‌ی غیرموضعی گرادیان تنش ارینگن [۱]

در پژوهش پیش‌رو، تیر نانو با رفتار اویلر - برنولی بررسی می‌شود. ابتدا جهت‌های مثبت فرض شده برای خیز، لنگر خمشی، نیروی برشی و بار خارجی در شکل (۱) می‌آید.

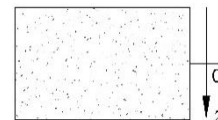


شکل (۱): جهت‌های مثبت فرض شده برای نیروهای داخلی و خارجی و خیز

همچنین، رابطه‌ی زیر برای تیرهای اویلر - برنولی برقرار است:

$$\varepsilon_x = z \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (1)$$

در رابطه‌ی بالا،  $w$  تابع خیز و  $z$  محور ارتفاعی تیر می‌باشد که جهت مثبت آن در شکل (۲) نشان داده می‌شود.



شکل (۲): جهت مثبت محور ارتفاعی تیر نانو

در ادامه، رابطه‌ی تنش - کرنش، بر اساس نظریه‌ی غیرموضعی گرادیان تنش ارینگن ارائه می‌شود [۱۳ و ۱۲]:

$$\sigma_x(x) = \int_0^L k(|x-\bar{x}|, \tau) E \varepsilon_x(\bar{x}) d\bar{x} \quad (2)$$

در معادله‌ی (۲)،  $\sigma$  نمایانگر تنش غیرموضعی در جهت محور تیر نانو،  $\varepsilon_x(\bar{x})$  نشان‌دهنده‌ی کرنش در نقطه‌ی مشخص  $\bar{x}$  در طول تیر،  $k(|x-\bar{x}|, \tau)$  بیانگر تابع هسته‌ی تبدیل انتگرالی و  $\tau$  بیانگر پارامتر غیرموضعی در ماده است. افزون بر اینها،  $E$  و  $L$  به ترتیب ثابت کشسانی ماده و طول تیر نانو می‌باشند.  $\tau$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau = e_0 a \quad (3)$$

که در آن،  $a$  طول مشخصه‌ی درونی و  $e_0$  ثابت کالیبراسیون است. با ترکیب دو معادله‌ی (۱) و (۲) و بکارگیری معادله‌ی تعادل لنگر در یک مقطع تیر نانو، رابطه‌ی زیر بدست می‌آید [۱۹]:

$$M(x) = EI \int_0^L k(|x-\bar{x}|, \tau) \frac{d^2 w(\bar{x})}{d\bar{x}^2} d\bar{x} \quad (4)$$

تابع هسته‌ی مورد استفاده در پژوهش پیش‌رو به قرار زیر است [۱]:

$$k(|x-\bar{x}|, \tau) = \frac{1}{2\tau} e^{-\frac{|x-\bar{x}|}{\tau}} \quad (5)$$

با جایگذاری معادله‌ی (۵) در معادله‌ی (۴) و بی‌بعدسازی آن، معادله‌ی انتگرالی نهایی با متغیرهای بی‌بعد بدست می‌آید:

$$2h\bar{M}(\xi) = \int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \frac{d^2 \bar{w}(\eta)}{d\eta^2} d\eta \quad (6)$$

متغیرهای بی‌بعد به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$h = \frac{\tau}{L}; \quad \eta = \frac{\bar{x}}{L}; \quad \xi = \frac{x}{L}; \quad \bar{M} = \frac{M}{q_0 L^2}, \quad (7)$$

$$\bar{q} = \frac{q}{q_0}; \quad w_0 = \frac{q_0 L^4}{EI}; \quad \bar{w} = \frac{w}{w_0},$$

در رابطه‌ی (۷)،  $h$  پارامتر غیرموضعی بی‌بعد،  $\eta$  و  $\xi$  مکان نسبی یک نقطه مشخص در طول تیر، اولی به عنوان متغیر انتگرال و دومی برای محاسبه لنگر است. همچنین،  $\bar{M}$ ،  $\bar{w}$  و  $\bar{q}$  به ترتیب نشان‌دهنده‌ی لنگر بی‌بعد، خیز بی‌بعد و بار خارجی بی‌بعد است. به علاوه،  $w_0$  و  $q_0$  به ترتیب بار خارجی مشخصه و خیز مشخصه می‌باشند.

## ۲-۲- روش تحلیلی حل معادله‌ی انتگرالی

پس از معرفی معادله‌ی انتگرالی حاکم بر تیرهای نانوی اوپلر - برنولی بر اساس هسته‌ی نمایی طبیعی، در ادامه به مرور روش‌های حل اینگونه معادلات پرداخته می‌شود. ناگفته نماند، معادله‌ی (۶) از نظر ریاضی، یک معادله‌ی انتگرالی فردهولم نوع اول است. صورت کلی معادله‌ی انتگرالی فردهولم نوع اول به قرار زیر می‌باشد [۲۷]:

$$f(\xi) = \int_a^b e^{\mu(\xi-\eta)} y(\eta) d\eta \quad (۸)$$

معادله‌ی (۸) به کمک خاصیت جداسازی کران‌های انتگرال به جمع دو انتگرال تبدیل می‌شود:

$$f(\xi) = \int_a^\xi e^{\mu(\xi-\eta)} y(\eta) d\eta + \int_\xi^b e^{\mu(\eta-\xi)} y(\eta) d\eta \quad (۹)$$

پس از دو بار مشتق‌گیری از معادله‌ی (۹) و جمع عبارت‌های ایجادشده رابطه‌ی (۱۰) بدست می‌آید [۲۷]:

$$y(\xi) = \frac{f''(\xi) - \mu^2 f(\xi)}{2\mu} \quad (۱۰)$$

از سوی دیگر، بر اساس مرجع [۲۷]، برای برقرار بودن رابطه‌ی (۱۰)، لازم است دو شرط زیر رعایت شوند:

$$\begin{cases} f'(a) + \mu f(a) = 0 \\ f'(b) - \mu f(b) = 0 \end{cases} \quad (۱۱)$$

بنابراین، اگر شرایط (۱۱) رعایت شود، معادله‌ی انتگرالی (۸) با معادله‌ی دیفرانسیل (۱۰) معادل می‌باشد. لازم به ذکر است، برای تابع دلخواه  $f(\xi)$ ، تابع  $F(\xi)$  همواره شرایط (۱۱) را رعایت می‌کند [۲۷]:

$$F(\xi) = f(\xi) + A\xi + B \quad (۱-۱۲)$$

$$A = \frac{f'(a) + f'(b) + \mu f(a) - \mu f(b)}{b\mu - a\mu - 2} \quad (۲-۱۲)$$

$$B = -\frac{f'(a) + \mu f(a) + Aa\mu + A}{\mu} \quad (۳-۱۲)$$

در ادامه، برای بکارگیری رابطه‌های (۸)، (۱۰) و (۱۱) در پژوهش پیش‌رو، نخست روابط زیر با توجه به رابطه‌ی (۶) تعریف می‌شوند:

$$a = 0; b = 1; \mu = \frac{-1}{h}; y(\xi) = \frac{d^2 \bar{w}(\xi)}{d\xi^2}; \quad (۱۳)$$

$$f(\xi) = 2h\bar{M}(\xi);$$

سپس، دو شرط رابطه‌ی (۱۱) به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\bar{V}(0) - \frac{1}{h}\bar{M}(0) = 0; \quad \bar{V}(1) + \frac{1}{h}\bar{M}(1) = 0; \quad (۱۴)$$

با توجه به رابطه‌ی (۱۴)، آشکار است که این معادله‌ها هیچگاه برقرار نیستند [۱۹]. بنابراین نمی‌توان از رابطه‌ی (۱۰) به عنوان معادله‌ی دیفرانسیل معادل بهره جست. بدین ترتیب، لازم است معادله‌ی انتگرالی (۶) با توجه به رابطه‌های (۱-۱۲) تا (۳-۱۲) حل شود [۱۹]:

$$F(\xi) = 2h\bar{M}(\xi) + A\xi + B \quad (۱-۱۶)$$

$$A = \frac{-2h}{1+2h} \{ [h\bar{V}(0) - \bar{M}(0)] + [h\bar{V}(1) + \bar{M}(1)] \} \quad (۲-۱۶)$$

$$B = \left( \frac{2h+2h^2}{1+2h} \right) [h\bar{V}(0) - \bar{M}(0)] \quad (۳-۱۶)$$

$$- \frac{2h^2}{1+2h} [h\bar{V}(1) + \bar{M}(1)]$$

در بخش‌های بعد، به کمک رابطه‌های (۱-۱۶) تا (۳-۱۶)، معادله‌ی (۶) حل می‌شود. در ادامه، روش عددی نیستروم بررسی می‌شود.

## ۳-۲- روش عددی نیستروم

یکی از راهکارهای عددی برای حل کردن معادلات انتگرالی، روش عددی نیستروم (Nyström method) است [۲۸]. از این روش تاکنون برای حل معادلات انتگرالی گوناگون، شامل فردهولم و ولترا، استفاده شده است [۲۹-۳۳]. فرم کلی یک معادله‌ی انتگرالی به شکل زیر می‌باشد:

$$\int_a^b k(x,t) y(t) dt = f(x) \quad (۱۶)$$

انتگرال فوق را می‌توان به مجموع ریمانی تبدیل کرد:

$$\sum_{j=1}^m k(x_i, t_j) y(t_j) = \frac{f(x_i)}{\Delta t}; \quad (i=1, \dots, m) \quad (۱۷)$$

در رابطه‌ی (۱۷)،  $m$  بیانگر تعداد تقسیمات بازه‌ی انتگرال‌گیری و  $\Delta t$  نمایانگر طول بازه هر تقسیم بطور مساوی است. در معادله‌ی (۱۷):

$$\Delta t = \frac{b-a}{m}; \quad \begin{cases} t_j = \left( j - \frac{1}{2} \right) \Delta t + a \\ x_i = \left( i - \frac{1}{2} \right) \Delta t + a \end{cases} \quad (۱۸)$$

همچنین اگر:

بدین ترتیب، معادله‌ی انتگرالی حاکم بر تیر نانو، به سه معادله‌ی انتگرالی مجزاء تبدیل شد و یکی از آنها محاسبه گردید. در گام بعد، ابتدا از روش عددی نیستروم برای حل دو معادله‌ی (۲۳-۲) و (۲۳-۳) استفاده می‌شود. برای این منظور، معادله‌ی کلی زیر معرفی می‌شود:

$$\int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \bar{w}''(\eta) d\eta = \xi^n \quad (n=0,1) \quad (25)$$

در رابطه‌ی (۲۵)،  $n$  توان  $\xi$  است که می‌تواند صفر یا یک باشد. مشابه رابطه‌ی (۱۷) می‌توان نوشت:

$$\sum_{j=1}^m e^{-\frac{|\xi-\eta_j|}{h}} \bar{w}''(\eta_j) = \frac{\xi^n}{\Delta\eta} \quad (n=0,1); (i=1, \dots, m) \quad (26)$$

که در آن:

$$\Delta\eta = \frac{1-0}{m} = \frac{1}{m}; \quad \begin{cases} \eta_j = \frac{1}{m} \left( j - \frac{1}{2} \right) \\ \xi_i = \frac{1}{m} \left( i - \frac{1}{2} \right) \end{cases}; \quad (27)$$

در ادامه دستگاه معادلات خطی (۲۰) برای چند حالت مختلف  $m$  و  $h$  و  $n$  حل می‌شود و نتایج آن که همان  $\{y(t_j)\}$  است، در جدول (۱) به نمایش درمی‌آید. نخست فرض می‌شود  $n=1, m=10, h=1$ . در این حالت با توجه به رابطه‌ی (۲۳-۲)،  $\bar{w}'' = \bar{w}_A''$  است.

جدول (۱): نتایج حل دستگاه معادلات (۲۰) به ازای:

$$n=1, m=10, h=1$$

$\eta_j$	$\bar{w}_A''(\eta_j)$
۰/۰۵	-۴/۷۲۹۲
۰/۱۵	۰/۰۷۴۵
۰/۲۵	۰/۱۲۴۹
۰/۳۵	۰/۱۷۴۹
۰/۴۵	۰/۲۲۴۸
۰/۵۵	۰/۲۷۴۸
۰/۶۵	۰/۳۲۴۷
۰/۷۵	۰/۳۷۴۷
۰/۸۵	۰/۴۲۴۷
۰/۹۵	۹/۹۷۹۰

$$y(t_j) = y_j; \quad f(x_i) = f_i; \quad (19)$$

می‌توان معادله‌ی (۱۷) را به صورت ماتریسی بازنویسی کرد:

$$[k]\{y\} = \frac{1}{\Delta t} \{f\}; \quad \begin{cases} \{f_i\} = \{f_1, \dots, f_m\}^T \\ \{y_i\} = \{y_1, \dots, y_m\}^T \end{cases}; \quad [k_{ij}] = [k(x_i, t_j)]_{m \times m} \quad (20)$$

با حل دستگاه معادلات خطی (۲۰) می‌توان به مقادیر تابع مجهول یا دست یافت [۲۸]. در بخش بعد، از روش عددی نیستروم برای حل معادله‌ی انتگرالی حاکم بر رفتار تیر نانو استفاده می‌شود.

### ۳- حل معادله‌ی انتگرالی با هسته‌ی نمایی طبیعی

در این بخش کوشش می‌شود از روش‌های تحلیلی و عددی استفاده شود تا معادله‌ی انتگرالی حاکم بر رفتار تیر نانو به ازای تابع هسته‌ی نمایی طبیعی حل شود. برای این منظور مانند روند مورد استفاده در مرجع [۱۹]، تابع انحناء به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\bar{w}''(\eta) = \bar{w}_1''(\eta) - A\bar{w}_A''(\eta) - B\bar{w}_B''(\eta) \quad (21)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۲۱) در رابطه‌ی (۶)، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$\int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} [\bar{w}_1''(\eta) - A\bar{w}_A''(\eta) - B\bar{w}_B''(\eta)] d\eta = 2h\bar{M}(\xi) \quad (22)$$

با یک بار افزودن و کاستن عبارت  $(A\xi + B)$  در سمت راست رابطه‌ی (۲۲) و تفکیک عبارت‌های آن، می‌توان نوشت:

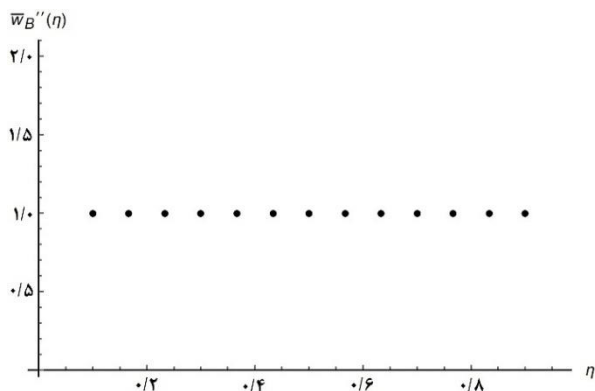
$$\int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \bar{w}_1''(\eta) d\eta = 2h\bar{M}(\xi) + A\xi + B \quad (1-23)$$

$$\int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \bar{w}_A''(\eta) d\eta = \xi \quad (2-23)$$

$$\int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \bar{w}_B''(\eta) d\eta = 1 \quad (3-23)$$

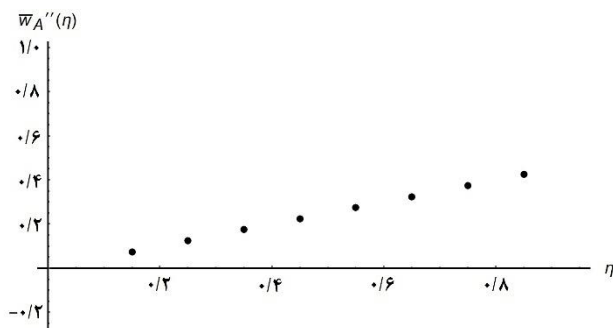
می‌توان با محاسبه سه تابع  $\bar{w}_1''$  و  $\bar{w}_A''$  و  $\bar{w}_B''$  و استفاده از رابطه‌ی (۲۱)، به تابع انحناء دست یافت. در ادامه، بدست می‌آید. برای این منظور، با توجه به رابطه‌های (۱۶-۱) تا (۱۶-۳)، بدست می‌آید:

$$\bar{w}_1''(\xi) = \bar{M}(\xi) - h^2 \bar{q}(\xi) + \left( \frac{A\xi + B}{2h} \right) \quad (24)$$



شکل (۴): تابع پاسخ معادله‌ی انتگرالی (۲۵) با روش عددی نیستروم به ازای:  
 $n=0, m=15, h=0.15$

ترسیم خروجی‌های جدول (۱) در دستگاه مختصات، نقاطی از تابع  $\bar{w}_A''(\eta_j)$  را بدست می‌دهد:



شکل (۳): تابع پاسخ معادله‌ی انتگرالی (۲۵) با روش عددی نیستروم به ازای:  
 $n=1, m=10, h=1$

در نتایج دو نمونه بالا، مشاهده می‌شود تمامی خروجی‌ها بجز خروجی‌های اول و آخر روی یک تابع ثابت یا خطی قرار دارند. در هر حل دستگاه معادلات نیز، فقط اولین و آخرین داده، به ترتیب بسیار بزرگ و بسیار کوچک می‌باشند. این رفتار بسیار شبیه به رفتار تابع دلتای دیراک است. تابع دلتای دیراک در یک نقطه‌ی مشخص به سمت بینهایت میل می‌کند و در سایر نقاط صفر می‌باشد [۳۴]. بنابراین، اگر در تابع پاسخ معادله‌ی انتگرالی (۲۵)، در دو سر بازه‌ی  $[0, 1]$  در تابع دلتای دیراک در نظر گرفته شود، احتمالاً توجیه‌کننده‌ی خوبی برای رفتار تابع پاسخ می‌باشد. از سوی دیگر، با توجه به شکل‌های (۳) و (۴) در نقاط میانی، احتمالاً تابع پاسخ، دارای یک تابع چندجمله‌ای نیز می‌باشد. با توجه به این حدس‌ها، تابع کلی زیر به عنوان پاسخ دقیق معادله‌ی انتگرالی (۲۵)، برای  $n=0, 1$  پیشنهاد می‌شود:

$$\bar{w}''(\eta) = a\eta^2 + b\eta + c + d\delta(\eta) + f\delta(\eta-1) \quad (28)$$

با جایگذاری تابع (۲۸) در رابطه‌ی انتگرالی (۲۵) و هم‌ارز قرار دادن حاصل انتگرال با سمت راست تساوی، می‌توان تابع پاسخ را بدست آورد:

$$\int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} [a\eta^2 + b\eta + c + d\delta(\eta) + f\delta(\eta-1)] d\eta = a \int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \eta^2 d\eta + b \int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \eta d\eta + c \int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} d\eta + d \int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \delta(\eta) d\eta + f \int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \delta(\eta-1) d\eta \quad (29)$$

در ادامه فرض می‌شود  $n=0, m=15, h=0.5$ . در این حالت با توجه به رابطه‌ی (۲۳-۳)،  $\bar{w}'' = \bar{w}_B''$  است.

جدول (۲): نتایج حل دستگاه معادلات (۲۰) به ازای:  
 $n=0, m=15, h=0.15$

$\eta_j$	$\bar{w}_B''(\eta_j)$
0.0333	7.9993
0.1000	0.9985
0.1667	0.9985
0.2333	0.9985
0.3000	0.9985
0.3667	0.9985
0.4333	0.9985
0.5000	0.9985
0.5667	0.9985
0.6333	0.9985
0.7000	0.9985
0.7667	0.9985
0.8333	0.9985
0.9000	0.9985
0.9667	7.9993

رسم خروجی‌های جدول (۲) در دستگاه مختصات، نقاطی از تابع  $\bar{w}_B''(\eta_j)$  را بدست می‌دهد:



به روش انتگرال گیری جزیه‌جز، می‌توان نتیجه گرفت:

$$\int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \eta^2 d\eta = \int_0^\xi e^{-\frac{(\xi-\eta)}{h}} \eta^2 d\eta + \int_\xi^1 e^{-\frac{(\eta-\xi)}{h}} \eta^2 d\eta = \quad (30)$$

$$2\xi^2 h + 4h^3 - he^{-\frac{(\xi-1)}{h}} - 2h^2 e^{-\frac{(\xi-1)}{h}} - 2h^3 e^{-\frac{(\xi-1)}{h}} - 2h^3 e^{-\frac{\xi}{h}}$$

همچنین:

$$\int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \eta d\eta = \int_0^\xi e^{-\frac{(\xi-\eta)}{h}} \eta d\eta + \int_\xi^1 e^{-\frac{(\eta-\xi)}{h}} \eta d\eta = \quad (31)$$

$$2\xi h - (h+h^2)e^{-\frac{(\xi-1)}{h}} + h^2 e^{-\frac{\xi}{h}}$$

و:

$$\int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} d\eta = \int_0^\xi e^{-\frac{(\xi-\eta)}{h}} d\eta + \int_\xi^1 e^{-\frac{(\eta-\xi)}{h}} d\eta \quad (32)$$

$$= 2h - he^{-\frac{(\xi-1)}{h}} - he^{-\frac{\xi}{h}}$$

در مورد تابع‌های دلتای دیراک نیز بر اساس خواص آن نتایج زیر در دسترس قرار می‌گیرد [۳۴]:

$$\int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \delta(\eta) d\eta = \frac{1}{2} e^{-\frac{\xi}{h}} \quad (33)$$

و همچنین:

$$\int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \delta(\eta-1) d\eta = \frac{1}{2} e^{-\frac{(\xi-1)}{h}} \quad (34)$$

اکنون با روی هم‌گذاری معادله‌های (۳۰) تا (۳۴) و با توجه به معادله‌ی انتگرالی (۲۹) می‌توان پاسخ را بدست آورد:

$$\int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} [a\eta^2 + b\eta + c + d\delta(\eta) + f\delta(\eta-1)] d\eta = \quad (35)$$

$$a \left( 2\xi^2 h + 4h^3 - he^{-\frac{(\xi-1)}{h}} - 2h^2 e^{-\frac{(\xi-1)}{h}} - 2h^3 e^{-\frac{(\xi-1)}{h}} - 2h^3 e^{-\frac{\xi}{h}} \right)$$

$$+ b \left( 2\xi h - (h+h^2)e^{-\frac{(\xi-1)}{h}} + h^2 e^{-\frac{\xi}{h}} \right)$$

$$+ c \left( 2h - he^{-\frac{(\xi-1)}{h}} - he^{-\frac{\xi}{h}} \right) + d \left( \frac{e^{-\frac{\xi}{h}}}{2} \right) + f \left( \frac{e^{-\frac{(\xi-1)}{h}}}{2} \right)$$

در نتیجه پس از مرتب کردن عبارت‌های مشابه در رابطه‌ی (۳۵)، می‌توان نوشت:

$$\int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} [a\eta^2 + b\eta + c + d\delta(\eta) + f\delta(\eta-1)] d\eta = \quad (36)$$

$$2ah\xi^2 + 2bh\xi + (4ah^3 + 2ch)$$

$$+ \left( -2ah^3 + bh^2 - ch + \frac{d}{2} \right) e^{-\frac{\xi}{h}}$$

$$+ \left( -ch - ah - 2ah^2 - 2ah^3 - b(h+h^2) + \frac{f}{2} \right) e^{-\frac{(\xi-1)}{h}} \equiv \xi^n$$

که در رابطه‌ی (۳۶)،  $n$  صفر یا یک می‌باشد. در ادامه، پاسخ دو معادله‌ی انتگرالی (۲۳) و (۲۳-۳) بدست می‌آید:

$$\int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \bar{w}_A''(\eta) d\eta = \xi \quad (37)$$

بنابراین:

$$2ah\xi^2 + 2bh\xi + (4ah^3 + 2ch)$$

$$+ \left( -2ah^3 + bh^2 - ch + \frac{d}{2} \right) e^{-\frac{\xi}{h}} \quad (38)$$

$$+ \left( -ch - ah - 2ah^2 - 2ah^3 - b(h+h^2) + \frac{f}{2} \right) e^{-\frac{(\xi-1)}{h}} \equiv \xi$$

با هم‌ارز قرار دادن دو سمت رابطه‌ی (۳۸)، می‌توان معادلات زیر را نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} 2ah = 0 \Rightarrow a = 0 \\ 2bh = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2h} \\ 4ah^3 + 2ch = 0 \Rightarrow c = 0 \\ -2ah^3 + bh^2 - ch + \frac{d}{2} = 0 \Rightarrow d = -h \\ -ch - ah - 2ah^2 - 2ah^3 - b(h+h^2) + \frac{f}{2} = 0 \\ \Rightarrow f = 1+h \end{cases} \quad (39)$$

و تابع پاسخ دقیق به صورت زیر درمی‌آید:

$$\bar{w}_A''(\xi) = \frac{\xi}{2h} - h\delta(\xi) + (1+h)\delta(\xi-1) \quad (40)$$

در مورد معادله‌ی دوم نیز می‌توان نوشت:

خیز دست یافت. تابع انحناء شامل تابع دلتای دیراک و تابع‌های شیب و خیز دارای تابع هوی‌ساید می‌باشند.

$$\begin{aligned} \bar{w}''(\xi) &= \bar{w}_1''(\xi) - A\bar{w}_A''(\xi) - B\bar{w}_B''(\xi) \\ &= \left[ \bar{M}(\xi) - h^2\bar{q}(\xi) + \left( \frac{A\xi + B}{2h} \right) \right] \\ &\quad - A \left[ \frac{\xi}{2h} - h\delta(\xi) + (1+h)\delta(\xi-1) \right] \\ &\quad - B \left[ \frac{1}{2h} + \delta(\xi) + \delta(\xi-1) \right] = \bar{M}(\xi) - h^2\bar{q}(\xi) \\ &\quad + (Ah - B)\delta(\xi) - [A(h+1) + B]\delta(\xi-1) \end{aligned} \quad (45)$$

به عبارت دیگر:

$$\begin{aligned} \bar{w}''(\xi) &= \bar{M}(\xi) - h^2\bar{q}(\xi) + \beta_1\delta(\xi) + \beta_2\delta(\xi-1) \\ \left\{ \begin{aligned} \beta_1 &= Ah - B \\ \beta_2 &= -[A(h+1) + B] \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (46)$$

در رابطه‌ی بالا  $A$  و  $B$  به کمک رابطه‌های (۲-۱۶) و (۳-۱۶) محاسبه می‌شوند. بر اساس رابطه‌ی دیفرانسیلی میان بار خارجی و لنگر خمشی می‌توان نوشت:

$$\bar{q}(\xi) = \frac{d^2\bar{M}}{d\xi^2} \quad (1-47)$$

$$\bar{V}(\xi) = C_1 + \int_0^\xi \bar{q}(t) dt \quad (2-47)$$

$$\bar{M}(\xi) = C_2 + C_1\xi + \int_0^\xi (\xi-t)\bar{q}(t) dt \quad (3-47)$$

با جایگذاری رابطه‌های (۱-۴۷) و (۳-۴۷) در معادله‌ی (۴۶)، معادله‌ی زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \bar{w}''(\xi) &= C_2 + C_1\xi + \int_0^\xi (\xi-t)\bar{q}(t) dt \\ &\quad - h^2\bar{q}(\xi) + \beta_1\delta(\xi) + \beta_2\delta(\xi-1) \end{aligned} \quad (48)$$

در ادامه، با دو مرتبه انتگرال‌گیری از معادله‌ی (۴۸)، تابع‌های شیب و خیز بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \bar{w}'(\xi) &= C_3 + C_2\xi + \frac{C_1\xi^2}{2} + \frac{1}{2} \int_0^\xi (\xi-t)^2 \bar{q}(t) dt \\ &\quad - h^2 \int_0^\xi \bar{q}(t) dt + \beta_1 H(\xi) + \beta_2 H(\xi-1) \end{aligned} \quad (49)$$

$$\int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \bar{w}_B''(\eta) d\eta = 1 \quad (41)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} &2ah\xi^2 + 2bh\xi + (4ah^3 + 2ch) \\ &+ \left( -2ah^3 + bh^2 - ch + \frac{d}{2} \right) e^{-\frac{\xi}{h}} \end{aligned} \quad (42)$$

$$+ \left( -ch - ah - 2ah^2 - 2ah^3 - b(h+h^2) + \frac{f}{2} \right) e^{-\frac{(\xi-1)}{h}} \equiv 1$$

بطور مشابه، ثابت‌های مجهول با هم‌ارز قرار دادن دو سمت رابطه‌ی (۴۲)، بدست می‌آید:

$$\begin{cases} 2ah = 0 \Rightarrow a = 0 \\ 2bh = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 4ah^3 + 2ch = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2h} \\ -2ah^3 + bh^2 - ch + \frac{d}{2} = 0 \Rightarrow d = 1 \\ -ch - ah - 2ah^2 - 2ah^3 - b(h+h^2) + \frac{f}{2} = 0 \\ \Rightarrow f = 1 \end{cases} \quad (43)$$

و تابع پاسخ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\bar{w}_B''(\xi) = \frac{1}{2h} + \delta(\xi) + \delta(\xi-1) \quad (44)$$

تابع‌های بدست‌آمده، پاسخ‌های دقیق و صریح معادله‌های انتگرالی (۲-۲۳) و (۳-۲۳) می‌باشند. در بخش بعدی، پاسخ‌های بدست‌آمده ترکیب شده و تابع انحناء و خیز تیر نانو حاصل می‌شود. شایان ذکر است که پاسخ‌های تحلیلی مندرج در دو رابطه‌ی (۴۰) و (۴۴) برای نخستین بار است که بدست آمده و گزارش می‌شوند. در پژوهش فرناندز و همکاران [۱۹] صرفاً پاسخ عددی معادله‌های انتگرالی و آن هم در یک نقطه از تیر بدست آمد.

#### ۴- یافتن تابع خیز تیر نانو

تا اینجا پاسخ تمام معادلات انتگرالی رابطه‌های (۱-۲۳)، (۲-۲۳) و (۳-۲۳) بدست آمد. بنابراین می‌توان بر اساس تابع‌های مندرج در سه رابطه‌ی (۲۴)، (۴۰) و (۴۴) و همچنین، بر اساس رابطه‌ی (۲۱)، به تابع

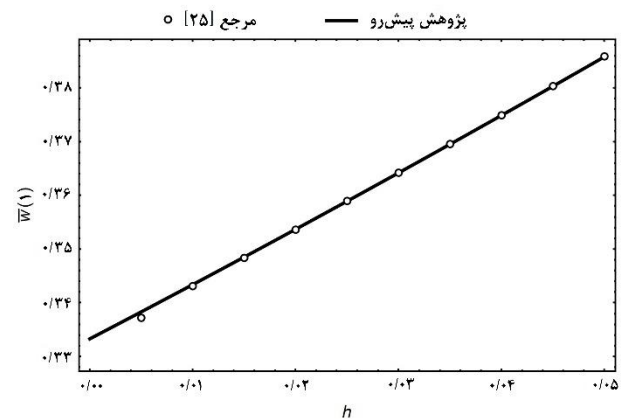
همچنین برای تابع خیز می توان نوشت:

$$\bar{w}(\xi) = C_4 + C_3\xi + \frac{C_2\xi^2}{2} + \frac{C_1\xi^3}{6} + \frac{1}{6} \int_0^\xi (\xi-t)^3 \bar{q}(t) dt - h^2 \int_0^\xi (\xi-t) \bar{q}(t) dt + \beta_1 \xi H(\xi) + \beta_2 (\xi-1) H(\xi-1) \quad (50)$$

رابطه ی (50) تابع فرم بسته خیز تیر نانو می باشد. این تابع دارای چهار ثابت مجهول است که پس از تعیین شرایط مرزی و بارگذاری تیر نانو تعیین می شوند. در بخش بعد از این رابطه برای تعیین خیز تیرهای نانو در شرایط مرزی و بارگذاری های مختلف استفاده می شود.

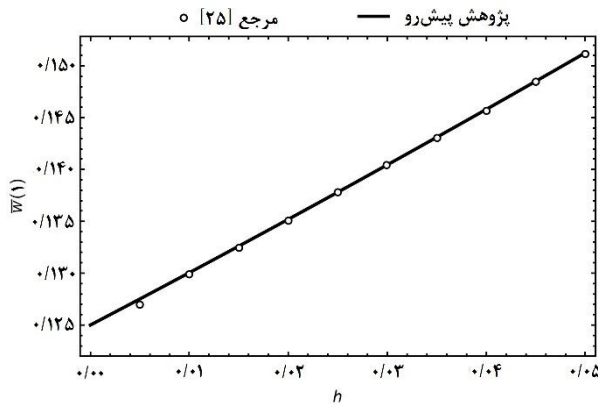
## ۵- نتایج عددی و تحلیل آنها

در این بخش، معادله ی (50) برای چند حالت شرایط مرزی و تابع بارگذاری تعیین می شود. در بخش اول این فصل، نمودار تغییرات خیز یک نقطه از تیر نانو با پارامتر غیرموضعی ترسیم شده و با نتایج مشابه در مرجع [19] مقایسه می شود. در بخش بعدی، نمودار خیز تیرهای نانو در شرایط مرزی مختلف ترسیم می شوند. نکته ی مهم این نمودارها آن است که برای نخستین بار این منحنی ها بر اساس تابع هسته ی نمایی طبیعی بدست می آیند.

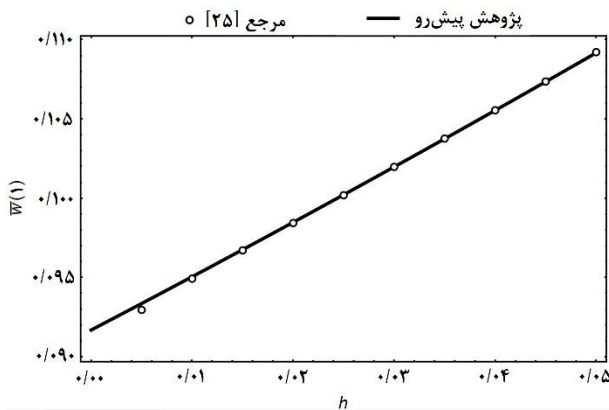


شکل (5): خیز نقطه ی پایانی تیر یک سر گیردار زیر بار متمرکز انتهایی بر اساس معادله ی (50) و مرجع [19]

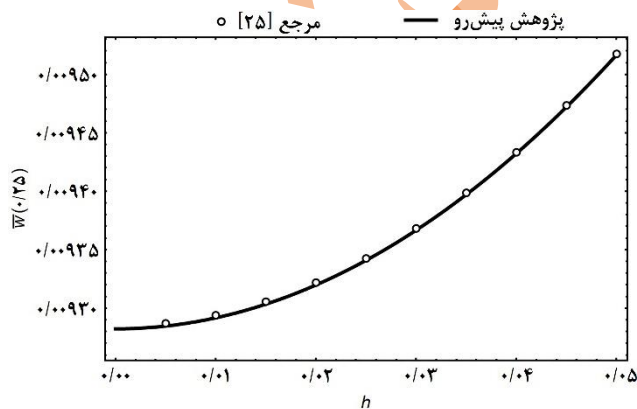
همانطور که مشاهده می شود نقطه های نمودار شکل (5) مربوط به نتایج عددی مرجع [19] و نمودار پیرنگ به معادله ی بدست آمده بر اساس رابطه ی (50) اشاره می کند.



شکل (6): خیز نقطه پایانی تیر یک سر گیردار زیر بار گسترده ی یکنواخت بر اساس معادله ی (50) و مرجع [19]

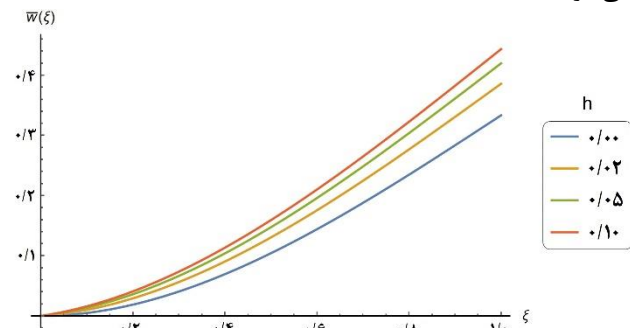


شکل (7): خیز نقطه پایانی تیر یک سر گیردار زیر بار گسترده ی مثلثی به معادله ی  $\bar{q}(\xi) = \xi$  بر اساس معادله ی (50) و مرجع [19]

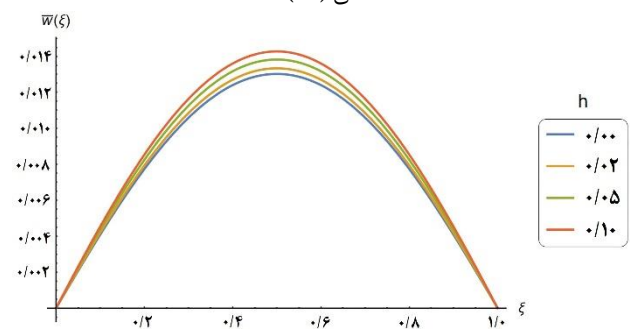


شکل (8): خیز نقطه 1/4 تیر دو سر مفصل زیر بار گسترده ی یکنواخت بر اساس معادله ی (50) و مرجع [19]

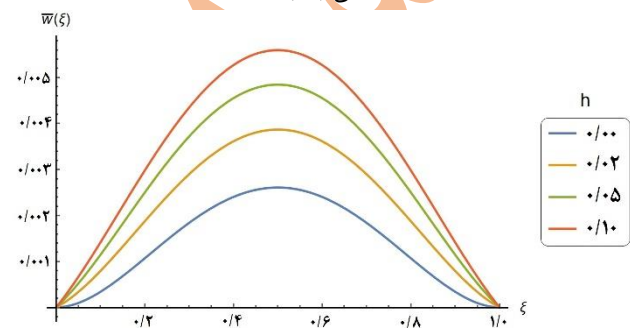
در نمودارهای بالا محور قائم مربوط به خیز بی‌بعد نقطه مشخصی از تیر نانو و محور افقی نشان‌دهنده پارامتر غیرموضعی بی‌بعد می‌باشد. همانطور که در تمام این نمودارها مشاهده می‌شود، نتایج بدست آمده بر اساس حل معادله‌ی (۵۰) منطبق بر نتایج عددی مرجع [۱۹] می‌باشد. در ادامه نمودار خیز تیرهای نانو با شرایط مرزی و بارگذاری‌های مختلف ارائه می‌شوند.



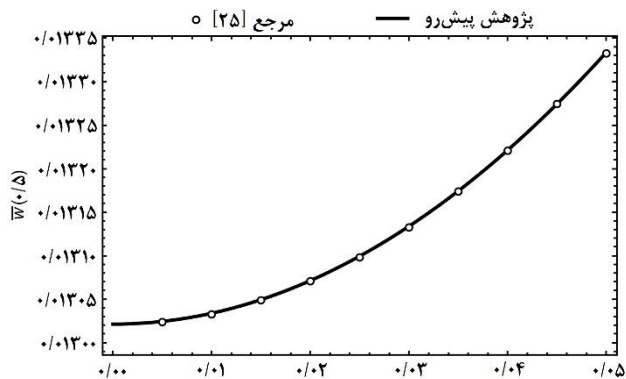
شکل (۱۲): نمودار خیز تیر یک سر گیردار زیر بار متمرکز انتهایی بر اساس معادله‌ی (۵۰)



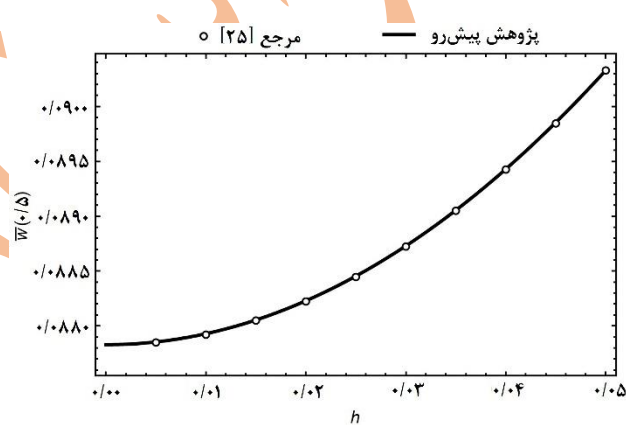
شکل (۱۳): نمودار خیز تیر دو سر مفصل زیر بار گسترده‌ی یکنواخت بر اساس معادله‌ی (۵۰)



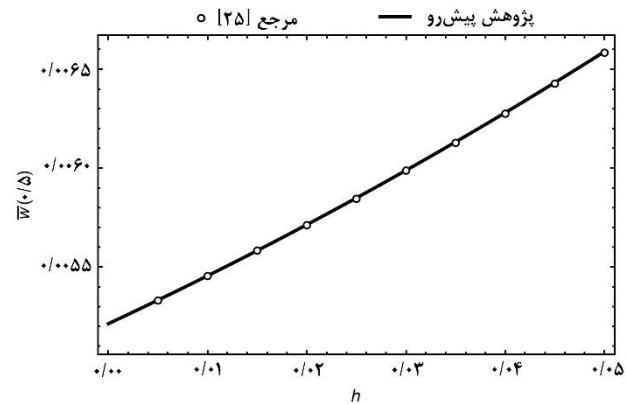
شکل (۱۴): نمودار خیز تیر دو سر گیردار زیر بار گسترده‌ی یکنواخت بر اساس معادله‌ی (۵۰)



شکل (۹): خیز نقطه میانی تیر دو سر مفصل زیر بار گسترده‌ی یکنواخت بر اساس معادله‌ی (۵۰) و مرجع [۱۹]



شکل (۱۰): خیز نقطه میانی تیر دو سر مفصل زیر بار گسترده‌ی کسینوسی به معادله‌ی  $\bar{q}(\xi) = 2\pi^2 \cos(2\pi\xi)$  بر اساس معادله‌ی (۵۰) و مرجع [۱۹]



شکل (۱۱): خیز نقطه میانی تیر یک سر گیردار یک سر مفصل زیر بار گسترده‌ی یکنواخت بر اساس معادله‌ی (۵۰) و مرجع [۱۹]

که بر خلاف نظریه‌ی کلاسیک، با کاهش طول تیر نانو، خیز آن متناسباً کاهش نمی‌یابد و در نتیجه در مجموع، خیز تیر افزایش پیدا کند. در ادامه به تناقضی که در شکل‌های (۱۲)، (۱۴)، (۱۶) و (۱۷) رخ داده است و علت آن اشاره می‌شود. بر اساس این شکل‌ها، کاملاً مشهود است که شیب تیر نانو در تکیه‌گاه‌ها صفر نمی‌باشد. این در حالی است که در این تیرها تکیه‌گاه گیردار یا برش‌آزاد وجود دارد. این تناقض تنها به هنگام بکارگیری تابع هسته‌ی نمایی طبیعی ایجاد می‌شود. لازم به ذکر است، همانطور که از رابطه‌ی (۴۹) مشخص می‌شود، تابع شیب تیر نانو دارای دو تابع هوی‌ساید در دو انتهای خود می‌باشد. تابع هوی‌ساید به صورت زیر تعریف می‌شود [۳۴]:

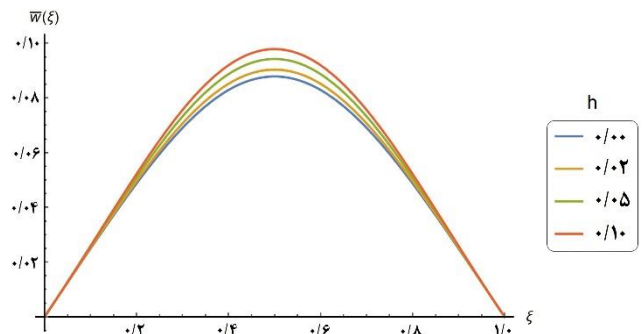
$$H(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \delta(\xi) d\xi \quad (51)$$

بر اساس این رابطه، مقدار تابع هوی‌ساید به ازای مقادیر مثبت، یک، به ازای مقادیر منفی، صفر و به ازای صفر مساوی ۱/۲ می‌باشد. این ناپیوستگی تابع هوی‌ساید در نقطه‌ای که مقدار کمانک جلوی آن را صفر می‌کند، باعث ایجاد تناقض مذکور در تیرهایی می‌شود که حداقل یکی از دو انتهای آنها، شرط مرزی شیب صفر را دارند.

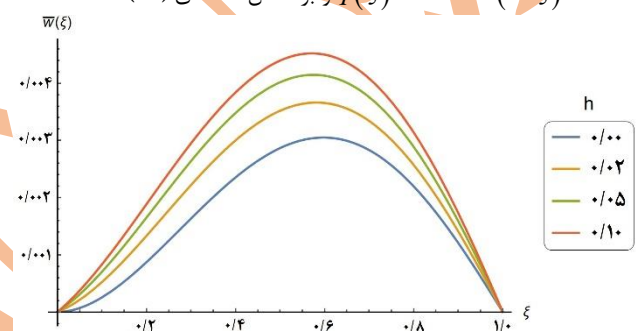
## ۷- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، نظریه‌ی غیرموضعی گرادیان تنش ارینگن [۱] برای تحلیل تیر نانوئولر - برنولی بکار رفت. بکارگیری این نظریه برای تیرهای نانو منجر به معادله‌ی انتگرالی شد. در این پژوهش، تابع هسته‌ی این معادله، تابع نمایی طبیعی در نظر گرفته شد. در ادامه، برای نخستین بار، پاسخ معادله‌ی انتگرالی مذکور و معادله‌ی دیفرانسیل معادل آن، بطور مستقیم و با ترکیب روش‌های عددی نیستروم و روش‌های تحلیلی در دسترس قرار گرفت.

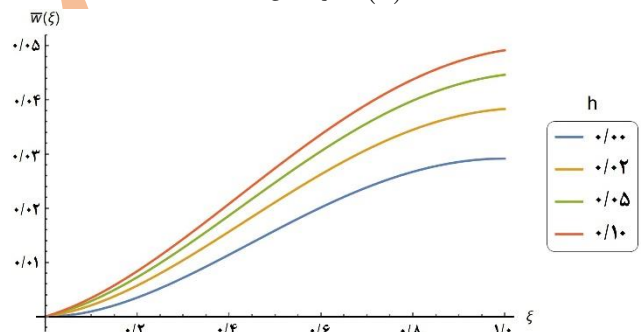
در این پژوهش، ابتدا مبانی نظری تئوری کشسانی غیرموضعی گرادیان تنش و معادله‌ی انتگرالی مزبور شرح داده شد و سپس مبانی ریاضی حل یک معادله‌ی انتگرالی به روش عددی نیستروم تشریح گردید. در ادامه، از این روش برای حل عددی معادلات انتگرالی حاکم بر تیرهای نانو استفاده شد. در گام بعدی، با توجه به نتایج روش عددی نیستروم، روش تحلیلی حل معادله‌ی انتگرالی دنبال شد و تابع انحناء و



شکل (۱۵): نمودار خیز تیر دو سر مفصل زیر بار گسترده‌ی کسینوسی به معادله‌ی  $\bar{q}(\xi) = 2\pi^2 \cos(2\pi\xi)$  و بر اساس معادله‌ی (۵۰)



شکل (۱۶): نمودار خیز تیر یک سر گیردار یک سر مفصل زیر بار گسترده‌ی مثلثی به معادله‌ی  $\bar{q}(\xi) = \xi$  بر اساس معادله‌ی (۵۰)



شکل (۱۷): نمودار خیز تیر یک سر گیردار یک سر برش‌آزاد زیر بار گسترده‌ی مثلثی به معادله‌ی  $\bar{q}(\xi) = \xi$  بر اساس معادله‌ی (۵۰)

در ادامه، با توجه به نمودارهای شکل‌های (۵) تا (۱۷) نتایجی استخراج می‌شوند. در ابتدا بر اساس شکل‌های (۵) تا (۱۷) آشکار است که با افزایش پارامتر غیرموضعی، خیز تیر افزایش می‌یابد. اگر فرض شود جنس و ابعاد سطح مقطع تیر نانو ثابت باشد، تنها عامل افزایش پارامتر غیرموضعی کاهش طول تیر است. از طرفی می‌توان نتیجه گرفت

- bending. *International Journal of Mechanical Sciences* ۲۰۲۰; ۱۸۶:۱۱۱-۱۱۹
- ۱۱) Kröner E. Elasticity theory of materials with long range cohesive forces. *International Journal of Solids and Structures* ۱۹۶۷; ۳:۷۳۱-۷۴۲
  - ۱۲) Eringen A.C. Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. *International Journal of Engineering Science* ۱۹۷۲; ۱۰:۴۲۵-۴۳۵
  - ۱۳) Eringen, A.C, Edelen, D.G.B. On nonlocal elasticity. *International Journal of Engineering Science* ۱۹۷۲; ۱۰:۲۳۳-۲۴۸
  - ۱۴) Peddieson J, Buchanan G.R, McNitt R.P. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science* ۲۰۰۳; ۴۱:۳۰۵-۳۱۲
  - ۱۵) Wang Q, Shindo Y. Nonlocal continuum models for carbon nanotubes subjected to static loading. *Journal of Mechanics of Materials and Structures* ۲۰۰۶; ۱:۶۶۳-۶۸۰
  - ۱۶) Wang Q, Liew K.M. Application of nonlocal continuum mechanics to static analysis of micro- and nanostructures. *Physics Letters A* ۲۰۰۷; ۳۶۳:۲۳۶-۲۴۲
  - ۱۷) Abu-Hilal M. Forced vibration of Euler–Bernoulli beams by means of dynamic Green’s functions. *Journal of Sound and Vibration* ۲۰۰۳; ۲۶۷:۱۹۱-۲۰۷
  - ۱۸) Ghannadial A, Mofid M. Dynamic Green’s Function for Response of Timoshenko Beam with Arbitrary Boundary Conditions. *Mechanics Based Design of Structures and Machines* ۲۰۱۳; ۴۲:۹۷-۱۱۰
  - ۱۹) Fernández-Sáez J, Zaera R, Loya J.A, Reddy J.N. Bending of Euler–Bernoulli beams using Eringen’s integral formulation: A paradox resolved. *International Journal of Engineering Science* ۲۰۱۶; ۹۹:۱۰۷-۱۱۶
  - ۲۰) Kukla S, Zamojska I. Nonlocal vibration of bonded double-nanoplate-systems. *Journal of Sound and Vibration* ۲۰۰۶; ۳۰۰:۱۰۳۴-۱۰۴۱
  - ۲۱) Kiani K, Pakdaman H. Nonlocal vibrations and potential instability of monolayers from double-walled carbon nanotubes subjected to temperature gradients. *International Journal of mechanical Science* ۲۰۱۸; ۱۴۴:۵۷۶-۵۹۹
  - ۲۲) Kiani K, Pakdaman H. On the nonlocality of bilateral vibrations of single-layered membranes from vertically aligned double-walled carbon nanotubes. *Physica Scripta*. ۲۰۲۰; ۹۵:۰۳۵۲۲۱
  - ۲۳) Yuan Y, Xu K, Kiani K. Torsional vibration of nonprismatically nonhomogeneous nanowires with multiple defects: Surface energy-nonlocal-integro-based

سپس تابع خیز تیر نانو با فرم بسته بدست آمد. همچنین، برای اطمینان از درستی رابطه‌ی نهایی، این رابطه برای تیرهای نانو با شرایط مرزی و بارگذاری‌های مختلف استفاده شد و نتایج آن با یافته‌های پیشینیان مقایسه گردید. شایان ذکر است، در پی آشکار شدن تناقضی در نتایج عددی، علت آن تناقض روشن شد. بدست آوردن تابع پاسخ دقیق در مقایسه با روش‌های عددی، این امکان را در اختیار پژوهشگران قرار می‌دهد که بتوانند با دقت‌های بالاتر و با صرف زمان کمتر و بدون نیاز به روش‌های طولانی عددی به تحلیل تیرهای نانو بپردازند.

## ۸- مراجع

- ۱) Eringen A.C. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics* ۱۹۸۳; ۵۴:۴۷۰۳-۴۷۱۰
- ۲) Romano G, Barretta R. Stress-driven versus strain-driven nonlocal integral model for elastic nano-beams. *Composites Part B: Engineering* ۲۰۱۷; ۱۱۴:۱۸۴-۱۸۸
- ۳) Mindlin, R.D. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for rational mechanics and analysis* ۱۹۶۴; ۱۶:۵۱-۷۸
- ۴) Papargyri-Beskou S, Tsepoura K.G, Polyzos D, Beskos D.E. Bending and stability analysis of strain gradient elastic beams. *International Journal of Solids and Structures* ۲۰۰۳; ۴۰:۳۸۵-۴۰۰
- ۵) Sapsathiam Y, Rajapakse R.K.N.D. A Model for Large Displacements of Nanobeams and Experimental Comparison. *IEEE Transactions on Nanotechnology* ۲۰۱۲; ۱۱:۲۴۷-۲۵۴
- ۶) Miller R.E, Shenoy V.B. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology* ۲۰۰۰; ۱۱:۱۳۹-۱۴۷
- ۷) Nilsson S.G, Sarwe E.L, Montelius L. Fabrication and mechanical characterization of ultrashort nanocantilevers. *Applied Physics Letters* ۲۰۰۳; ۸۳:۹۹۰-۹۹۲
- ۸) Nilsson S.G, Sarwe E.L, Montelius L. Size effect on Young’s modulus of thin chromium cantilevers. *Applied Physics Letters* ۲۰۰۴; ۸۵:۳۵۵۵-۳۵۵۷
- ۹) Patti A, Barretta R, Marotti de Sciarra F, Mensitieri G, Menna C, Russo P. Flexural properties of multi-wall carbon nanotube/polypropylene composites: Experimental investigation and nonlocal modeling. *Composite Structures* ۲۰۱۵; ۱۳۱:۲۸۲-۲۸۹
- ۱۰) Stempin P, Sumelka W. Space-Fractional Euler-Bernoulli beam model-theory and identification for silver nanobeam

- formulations. *Applied Mathematical Modelling*. ۲۰۲۰; ۸۲:۱۷-۴۴
- ۲۴) Kiani K, Żur KK. Vibrations of double-nanorod-systems with defects using nonlocal-integral-surface energy-based formulations. *Composite Structures*. ۲۰۲۱; ۲۵۶:۱۱۳-۲۸
- ۲۵) Tuna M, Kirca M. Exact solution of Eringen's nonlocal integral model for bending of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams. *International Journal of Engineering Science* ۲۰۱۶ August; ۱۰۵:۸۰-۹۲
- ۲۶) Romano G, Barretta R. Comment on the paper "Exact solution of Eringen's nonlocal integral model for bending of Euler-Bernoulli and Timoshenko beams" by Meral Tuna & Mesut Kirca. *International Journal of Engineering Science* ۲۰۱۶ September; ۱۰۹:۲۴۰-۲۴۲
- ۲۷) Polyanin A.D, Manzhirov A.V. (۲۰۰۸) Handbook of Integral Equations, ۲nd Edition. Broken Sound Parkway NW, Suite ۳۰۰. *Taylor & Francis Group*.
- ۲۸) Delves L.M, Mohamed J.L. (۲۰۰۸) Computational Methods for Integral Equations, Volume ۴۲. *Cambridge University Press*.
- ۲۹) Abdou M.A, Mohamed K.J, Ismal A.S. Toeplitz matrix and product Nystrom methods for solving the singular integral equation. *Le Matematiche* ۲۰۰۲ February; ۵۷:۲۱-۳۷
- ۳۰) Tong M.S, Qian Z.G, Chew W.C. Nyström Method Solution of Volume Integral Equations for Electromagnetic Scattering by ۳D Penetrable Objects. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* ۲۰۱۰; ۵۸:۱۶۴۵-۱۶۵۲
- ۳۱) Occorsio D, Russo M.G. Nyström Methods for Fredholm Integral Equations Using Equispaced Points. *Filomat* ۲۰۱۴; ۲۸:۴۹-۶۳
- ۳۲) Bremer J, Gimbutas Z. A Nyström method for weakly singular integral operators on surfaces. *Journal of Computational Physics* ۲۰۱۲; ۲۳۱:۴۸۸۵-۴۹۰۳
- ۳۳) Dick J, Kritzer P, Kuo F.Y, Sloan L.H. Lattice-Nyström method for Fredholm integral equations of the second kind with convolution type kernels. *Journal of Complexity* ۲۰۰۷; ۲۳:۷۵۲-۷۷۲
- ۳۴) Kanwal R.P. (۲۰۰۴) Generalized Functions: Theory and Applications, ۲nd Edition. Springer *Science+Business Media, LLC*.