مهندسی عمران شریف، (تابستان ۱۴۰۳)
دوره‌ی ۴۰، شماره‌ی ۲، صص. ۱۶۵-۱۷۵، (یادداشت فنی)

Research Note

تحلیل استاتیکی تیرهای نانو بر پایه‌ی نظریه‌ی گرادیان تنش و با استفاده از دو روش تحلیلی و عددی نیستروم

محمدصادق بهنام رسولی (دانشجوی کارشناسی ارشد)
احمد آفتابی ثانی (دانشیار)
عباس کرم‌الدین* (دانشیار)
گروه عمران، دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه فردوسی، مشهد

نظریه‌ی غیرموضعی گرادیان تنش ارینگن، یکی از پرکاربردترین نظریه‌های مکانیک محیط پیوسته برای تحلیل سازه‌های نانو است، که در آن، تنش غیرموضعی به کمک یک تبدیل انتگرالی با کرنش مرتبط می‌شود. تابع هسته‌ی تبدیل انتگرالی مذکور، یک تابع منحصر به فرد نبوده و تابع‌های گوناگونی برای آن پیشنهاد شده است. در پژوهش حاضر سعی شده است تیر نانوی اویلر - برنولی بر پایه‌ی نظریه‌ی غیرموضعی ارینگن و با فرض تابع هسته‌ی نمایی طبیعی به‌صورت استاتیکی تحلیل شود. شایان ذکر است، در پژوهش حاضر، معادله‌ی انتگرالی حاکم بر رفتار تیر نانو، مستقیماً حل شده و معادله‌ی دیفرانسیل معادل آن نیز به‌دست آمده است. برای حل معادله‌ی انتگرالی ذکرشده از روش عددی نیستروم و روش‌های نظری استفاده شده است. در ادامه، روش مزبور برای تحلیل استاتیکی تیرهای نانو با شرایط مرزی و بارگذاری‌های مختلف به‌کار رفته و نتایج آن با یافته‌های مطالعات پیشین مقایسه شده است. در پایان، به تناقضی در نمودارهای بخش نتایج عددی اشاره و علت آن بررسی شده است.

واژگان کلیدی: نظریه‌ی کشسانی غیرموضعی گرادیان تنش ارینگن، تیر نانو، معادله‌ی انتگرالی تیر نانو، تابع خیز، روش عددی نیستروم.

behnamrasouli4001317159@mail.um.ac.ir
aftabi@um.ac.ir
a-karam@um.ac.ir

۱. مقدمه

امروزه مواد در ابعاد نانو کاربردهای فراوانی در صنایع گوناگون، مانند صنعت بهداشت و درمان و صنایع نظامی دارند. از جمله‌ی آن‌ها می‌توان به حسگرهای نانو، مولدهای نانو و میکروسکوپ‌های نیروی اتمی اشاره کرد. این مسئله سبب جلب نظر پژوهشگران فراوانی به موضوع مکانیک سازه‌های نانو شده است. به‌طورکلی، روش دینامیک شبکه‌یی، روش اصلی برای تحلیل و طراحی سازه‌های نانو است، که روشی بسیار دقیق است، ولی به‌علت حجم بالای محاسبات و زمان زیاد تحلیل کمتر استفاده می‌شود. از سوی دیگر، روش‌های مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته سریع‌تر به پاسخ می‌رسند، ولی دقت کمتری دارند.

تاکنون نظریه‌های گوناگونی برای تفسیر رفتار سازه‌های میکرو و نانو پیشنهاد شده است. نظریه‌های: غیرموضعی گرادیان تنش ارینگن[۱]،[1] گرادیان تنش رومانو و برتا[۲]،[2] گرادیان کرنش میندلین[۳]،[3] گرادیان کرنش پاپارگیری[۴] و همکاران،[4] و کشسانی کلاسیک اصلاح‌شده با آثار انرژی سطحی[5و6] از مهم‌ترین آن‌ها هستند. در پژوهش حاضر، نظریه‌ی غیرموضعی گرادیان تنش ارینگن،[1] با فرض تابع هسته‌ی نمایی طبیعی استفاده شده است. شایان ذکر است، نوآوری پژوهش حاضر در آن است که برای نخستین بار، معادله‌ی انتگرالی حاکم بر تیر نانوی اویلر - برنولی براساس نظریه‌ی غیرموضعی ارینگن و با فرض تابع هسته‌ی نمایی طبیعی، مستقیماً حل و سپس، تابع پاسخ آن به‌صورت فرمِ بسته ارائه شده است.

رفتار متفاوت سازه‌های با ابعاد نانو به کمک آزمایش‌های متعدد آشکار شده است. برای مثال، نیلسون[5] و همکاران (۲۰۰۳ و ۲۰۰۴)،[7و8] با انجام آزمایش

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۴۰۲/۴/۶، *اصلاحیه* ۱۴۰۲/۶/۱۳، *پذیرش* ۱۴۰۲/۶/۲۹.

استناد به این مقاله:
بهنام رسولی، محمدصادق، آفتابی ثانی، احمد، و کرم‌الدین، عباس. ۱۴۰۳. تحلیل استاتیکی تیرهای نانو بر پایه‌ی نظریه‌ی گرادیان تنش و با استفاده از دو روش تحلیلی و عددی نیستروم. مهندسی عمران شریف، ۴۰(۲)، صص. ۱۶۵-۱۷۵. DOI:10.24200/J30.2023.62546.3231

بارگذاری روی تیرهای نانو از جنس کرومیم و با کمک میکروسکوپ نیروی اتمی (AFM)[۶]، نمودار خیز تیرهای مذکور را به‌دست آوردند و رفتار آن را مغایر با رفتار تیرهای کلاسیک یافتند. همچنین، پتی[۷] و همکاران (۲۰۱۵)،[۹] آزمایش بارگذاری خمشی روی تیر دو سر مفصل نانو را اجرا کردند و نتوانستند نتایج آن را با معادلات کلاسیک توجیه کنند. به‌دنبال آشکارشدن ناتوانی نظریه‌ی کلاسیک در توجیه پدیده‌ی جدید، پژوهشگران متعددی به تعریف نظریه‌های کشسانی جدید پرداختند. برای مثال، براساس نظریه‌ی گرادیان کرنش میندلین،[۳] برای مواد همگن، تنش و کرنش با ۱۸ پارامتر کشسانی به یکدیگر مرتبط می‌شدند. همچنین، سابساترن و راجپکسی[۸] (۲۰۱۲)،[۵] و میلر و شینوی[۹] (۲۰۰۰)،[۶] سعی کردند با افزودن پارامترهای جدید مربوط به انرژی کرنشی سطحی، به نظریه‌ی کشسانی کلاسیک، خیز تیرهای نانو را توجیه کنند. همینطور استمپین و سیمولکا[۱۰] (۲۰۲۰)،[۱۰] توانستند تا حدودی رفتار تیرهای نانو را به کمک حساب دیفرانسیل کسری توجیه کنند.

از سوی دیگر، نخستین بار کرونر[۱۱] (۱۹۶۷)،[۱۱] با تعریف نیروهای بلندبرد، رفتار غیرموضعی را تعریف کرده و رابطه‌ی کلی مکانیک غیرموضعی را ارائه داده است. سپس ارینگن[۱۲] (۱۹۸۳ و ۱۹۷۲)،[۱،۱۲] و ارینگن و اِدلن[۱۳] (۱۹۷۲)،[۱۳] با اعمال فرض رفتار غیرموضعی در معادلات تعادل جرم، اندازه، حرکت و انرژی توانستند رابطه‌ی انتگرالی میان تنش و کرنش را بیابند. ایشان سپس به کمک داده‌های آزمایش‌هایی که بر روی انتشار موج در بلور جامدات انجام شده بود، چند تابع هسته یا کرنل مناسب برای تبدیل انتگرالی مذکور پیشنهاد دادند و مناسب‌ترین آن‌ها را مشخص کردند.[۱۲] همچنین، ارینگن در پژوهش خود نشان داد که رابطه‌ی انتگرالی میان تنش و کرنش به ازاء هر تابع هسته، معادل با یک معادله‌ی دیفرانسیلی میان آن‌هاست.[۱۲] وی در حالت کلی (سه‌بُعدی)، معادله‌ی دیفرانسیل معادلِ مربوط به تبدیل انتگرالی با هسته‌ی تابع بسِل[۱۴] اصلاح‌شده را به‌دست آورد؛ که به‌علت سادگی کاربرد، بسیار پرطرفدار است.

در ادامه، پدیسون[۱۵] و همکاران (۲۰۰۳)،[۱۴] معادله‌ی دیفرانسیل معادل پیشنهادی ارینگن را برای تیر اویلر – برنولی و در یک بُعد بازنویسی و آن را برای تحلیل تیرهای نانوی یک سر گیردار و دو سر مفصل استفاده کردند. در سال‌های بعد، پژوهشگران متعددی از معادله‌ی دیفرانسیل معادل پیشنهادی به‌جای معادله‌ی انتگرالی اولیه در تحلیل تیرهای نانو با رفتار اویلر – برنولی و تیموشنکو استفاده کردند[۱۵-۲۴] به‌عنوان مثال، ونگ و شیندو[۱۶] (۲۰۰۶)،[۱۵] و ونگ و لیو[۱۷] (۲۰۰۷)،[۱۶] راهکار اخیر را برای تحلیل استاتیکی و کمانشی تیرهای نانو به‌کار بردند. همچنین، ابوهلال[۱۸] (۲۰۱۳)،[۱۷] به کمک معادله‌ی دیفرانسیل اخیر و به‌کارگیری روش تابع گرین، پاسخ دینامیکی تیرهای اویلر – برنولی را در شرایط مرزی گوناگون به‌دست آورد. قنادی اصل و مفید (۲۰۱۳)،[۱۸] تحلیل دینامیکی تیر نانو با رفتار تیموشنکو را زیر اثر بار متحرک بررسی و از معادله‌ی دیفرانسیل معادل استفاده کردند. از سوی دیگر فرناندز[۱۹] و همکاران (۲۰۱۶)،[۱۹] نشان دادند که معادله‌ی دیفرانسیل مذکور، معادل با رابطه‌ی انتگرالی نظریه‌ی گرادیان تنش به ازاء تابع هسته‌ی نمایی طبیعی نیست. همچنین، کوکلا و زاموسکا[۲۰] (۲۰۰۶)،[۲۰] نیز تحلیل ارتعاش آزاد تیر نانو را زیر بار محوری بررسی کردند.

کیانی و پاکدامن (۲۰۱۸)،[۲۱] بر پایه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل به‌دست‌آمده توسط ارینگن و پدیسون،[۱۲،۱۴] بسامد طبیعی یک غشاء تک‌لایه از نانولوله‌های کربنی دوجداره را که در یک محیط با گرادیان دمایی قرار گرفته بود، تعیین کردند. ایشان در پژوهش بعدی‌شان،[۲۲] بسامد طبیعی ارتعاش آزاد همان سازه‌ی پژوهش قبل را به کمک معادله‌ی دیفرانسیل پیشنهادی در نوشتارهای اخیر،[۱۲،۱۴] و همچنین، دینامیک شبکه‌یی به‌دست آوردند. شایان ذکر است، در دو پژوهش مذکور،[۲۱،۲۲] آثار پارامترهای مختلف در مقدار بسامد طبیعی بررسی شده است. از سوی دیگر، یوآن[۲۱] و همکاران (۲۰۲۰)،[۲۳] نیز به کمک معادله‌ی دیفرانسیل اشاره‌شده در نوشتارهای اخیر،[۱۲،۱۴] به بررسی ارتعاش آزاد پیچشی سیم نانوی ناهمگن و غیرمنشوری که تغییر مقطع‌های موضعی دارد، پرداختند. با به‌کارگیری اصول مشابه، کیانی و زور[۲۲] (۲۰۲۱)،[۲۴] ارتعاش آزاد دو میله‌ی نانوی به‌هم‌چسبیده با تغییر مقطع را مطالعه کردند.

همان‌طور که گفته شد، بر پایه‌ی مرجع ارینگن،[۱۲] معادله‌ی دیفرانسیل معادلِ تبدیل انتگرالی میان تنش و کرنش، به ازاء تابع‌های هسته‌ی متفاوت تغییر می‌کند. از سوی دیگر، معادله‌ی استفاده‌شده در برخی پژوهش‌ها،[۱۵-۲۴] همان معادله‌ی دیفرانسیل معادلِ تبدیل انتگرالی به ازاء تابع هسته‌ی بسل اصلاح‌شده است. در پژوهش حاضر تلاش شده است تبدیل انتگرالی اخیر به ازاء تابع هسته‌ی نمایی طبیعی حل شود و معادله‌ی دیفرانسیل معادل آن به‌دست آید.

همان‌طور که پیشتر اشاره شد، در سال‌های اخیر، نخستین تلاش‌ها برای حل معادله‌ی انتگرالی با تابع هسته‌ی بسل از سوی فرناندز و همکاران (۲۰۱۶)،[۱۹] و همچنین، تونا و کیرکا[۲۳] (۲۰۱۶)،[۲۵] بوده است. در پژوهش فرناندز و همکاران،[۱۹] سعی شده بود معادله‌ی انتگرالی با هسته‌ی نمایی طبیعی به روش تحلیلی، ساده و سپس به کمک روش‌های عددی حل شود. به‌دلیل به‌کارگیری روش عددی، ایشان فقط به نمودار تغییرات خیز یک نقطه از تیر به ازاء تغییر پارامتر غیرموضعی دست یافتند. در ادامه، تونا و کیرکا،[۲۵] معادله‌ی انتگرالی اشاره‌شده را به کمک روش تبدیل لاپلاس و برای تیر تیموشنکو و اویلر – برنولی حل کردند. با وجود این، رومانو و برتا[۲۴] (۲۰۱۶)،[۲۶] با مروری بر پژوهش اخیر، ایرادهایی به آن وارد ساختند؛ از جمله اینکه تابع پاسخ در نوشتار تونا و کیرکا،[۲۵] نمی‌تواند معادله‌ی انتگرالی را ارضاء کند و جملات مبهم، شامل: تابع هوی‌ساید و دلتای دیراک در نقاط تعریف‌نشده‌ی خارج از دامنه وجود دارد.

تاکنون روش‌های عددی و نظری گوناگونی برای حل معادلات انتگرالی ارائه شده است، که در برخی کتاب‌های راهنمای حل معادلات انتگرالی،[۲۷،۲۸] ارائه شده است. در پژوهش حاضر، تابع پاسخ با راهکار عددی نیستروم[۲۵] حدس زده شده و با یک راهکار تحلیلی دقیق به‌دست آمده است. روش نیستروم، در واقع، شیوه‌یی مبتنی بر تبدیل انتگرال به مجموع جملات محدود است، که تاکنون برای حل عددی معادلات انتگرالی فردهولم و ولترا[۲۶] به‌کار رفته است.[۲۹-۳۳]

در پژوهش حاضر، معادله‌ی انتگرالی ارائه‌شده براساس نظریه‌ی کشسانی غیرموضعی گرادیان تنش ارینگن[۲۷] (۱۹۸۳)،[۱] و به ازاء تابع هسته‌ی نمایی طبیعی، با ترکیب روش‌های عددی و تحلیلی حل شده و پاسخ صریح ریاضی به‌صورت تابع با فرم بسته به‌دست آمده است. تاکنون پژوهشگری اقدام به حل معادله‌ی انتگرالی نظریه‌ی غیرموضعی با هسته‌ی نمایی طبیعی و استخراج معادله‌ی دیفرانسیل معادلِ آن نکرده است. در ادامه و در بخش دوم، ابتدا پیش‌نیازهای نظری و مفاهیم اولیه‌ی موردنیاز برای یافتن تابع خیز ارائه شده‌اند. در بخش سوم، محاسبات ریاضی مربوط به حل معادله‌ی انتگرالی و در بخش چهارم، تابع خیز به فرم بسته ارائه شده است. در بخش بعدی، نیز تیرهای نانو با شرایط مرزی مختلف و بارگذاری‌های گوناگون به کمک راهکار پیشنهادی تحلیل و نتایج به‌دست‌آمده با نتایج موجود در پژوهش‌های پیشین مقایسه شده است. همچنین در بخش حاضر، نمودار خیز تیر نانو در شرایط مرزی گوناگون و زیر بارگذاری‌های مختلف براساس تابع هسته‌ی نمایی طبیعی به‌دست آمده است. در بخش انتهایی، به

تناقضی که در شرایط مرزی با شیب صفر رخ داده و همچنین علت آن اشاره شده است.

۲. مفاهیم اولیه

در بخش حاضر، ضمن مرور نظریه‌ی غیرموضعی گرادیان تنش ارینگن،[۱] و معرفی تابع هسته‌ی استفاده‌شده در معادله‌ی انتگرالی نظریه‌ی ارینگن، راهکارهای موجود برای حل معادله‌ی انتگرالی ارینگن، از جمله روش عددی نیستروم معرفی شده‌اند.

۱.۲. نظریه‌ی غیرموضعی گرادیان تنش ارینگن[۱]

در پژوهش حاضر، تیرنانو با رفتار اویلر - برنولی بررسی شده است. ابتدا جهت‌های مثبت فرض‌شده برای خیز، لنگر خمشی، نیروی برشی، و بار خارجی در شکل ۱ مشاهده می‌شود. همچنین، رابطه‌ی ۱ برای تیرهای اویلر - برنولی برقرار است:

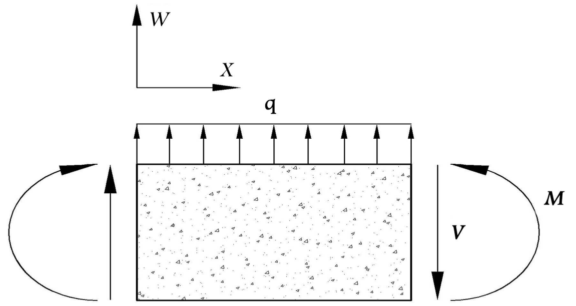
$$\varepsilon_x = z\frac{d^2w}{dx^2} \tag{1}$$

که در آن، w تابع خیز و z محور ارتفاعی تیر هستند، که جهت مثبت آن در شکل ۲ مشاهده می‌شود. در ادامه، رابطه‌ی تنش - کرنش (مطابق رابطه‌ی ۲)، براساس نظریه‌ی غیرموضعی گرادیان تنش ارینگن ارائه شده است:[۱۲،۱۳]

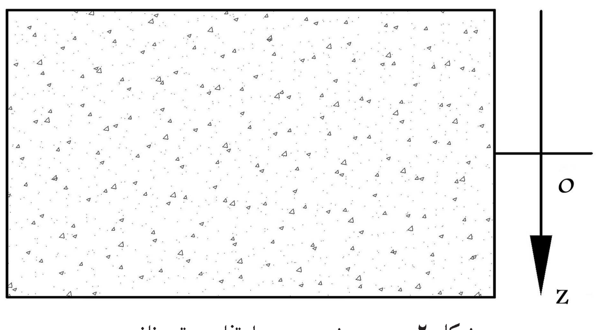
$$\sigma_x(x) = \int_0^L k\left(|x-\bar{x}|, \tau\right) E\varepsilon_x(\bar{x})\, d\bar{x} \tag{2}$$

که در آن، σ نمایانگر تنش غیرموضعی در جهت محور تیر نانو، $\varepsilon_x(\bar{x})$ نشان‌دهنده‌ی کرنش در نقطه‌ی مشخص $\bar{x}$ در طول تیر، $k(|x-\bar{x}|, \tau)$ بیانگر تابع هسته‌ی تبدیل انتگرالی و τ بیانگر پارامتر غیرموضعی در ماده هستند. همچنین، E و L به ترتیب ثابت کشسانی ماده و طول تیر نانو هستند. τ به‌صورت رابطه‌ی ۳ تعریف می‌شود:

$$\tau = e_0 a \tag{3}$$



شکل ۱. جهت‌های مثبت فرض‌شده برای نیروهای داخلی، خارجی و خیز.



شکل ۲. جهت مثبت محور ارتفاعی تیر نانو.

که در آن، a طول مشخصه‌ی درونی و e_0 ثابت کالیبراسیون است. با ترکیب معادله‌ی ۱ و ۲ و به‌کارگیری معادله‌ی تعادل لنگر در یک مقطع از تیر نانو، رابطه‌ی ۴ به‌دست می‌آید:[۱۹]

$$M(x) = EI\int_0^L k\left(|x-\bar{x}|, \tau\right)\frac{d^2w(\bar{x})}{d\bar{x}^2}\mathrm{d}\bar{x} \tag{4}$$

تابع هسته‌ی استفاده‌شده در پژوهش حاضر مطابق رابطه‌ی ۵ است:[۱]

$$k\left(|x-\bar{x}|, \tau\right) = \frac{1}{2\tau}e^{-\frac{|x-\bar{x}|}{\tau}} \tag{5}$$

با جای‌گذاری معادله‌ی ۵ در معادله‌ی ۴ و بی‌بُعدسازی آن، معادله‌ی انتگرالی نهایی با متغیرهای بی‌بُعد مطابق رابطه‌ی ۶ به‌دست می‌آید:

$$2h\bar{M}(\xi) = \int_0^1 e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}}\frac{d^2\bar{w}(\eta)}{d\eta^2}\mathrm{d}\eta \tag{6}$$

متغیرهای بی‌بُعد به‌صورت روابط ۷ تعریف می‌شوند:

$$h = \frac{\tau}{L}; \quad \eta = \frac{\bar{x}}{L}; \quad \xi = \frac{x}{L}; \quad \bar{M} = \frac{M}{q_0 L^2};$$
$$\bar{q} = \frac{q}{q_0}; \quad w_0 = \frac{q_0 L^4}{EI}; \quad \bar{w} = \frac{w}{w_0}; \tag{7}$$

که در آن، h پارامتر غیرموضعی بی‌بُعد، η و ξ مکان نسبی یک نقطه‌ی مشخص در طول تیر، اولی به‌عنوان متغیر انتگرال و دومی برای محاسبه‌ی لنگر است. همچنین، $\bar{M}$، $\bar{w}$ و $\bar{q}$ به ترتیب نشان‌دهنده‌ی لنگر بی‌بُعد، خیز بی‌بُعد و بار خارجی بی‌بُعد هستند. به‌علاوه، q_0 و w_0 به ترتیب بار خارجی مشخصه و خیز مشخصه هستند.

۲.۲. روش تحلیلی حل معادله‌ی انتگرالی

پس از معرفی معادله‌ی انتگرالی حاکم بر تیرهای نانوی اویلر - برنولی براساس هسته‌ی نمایی طبیعی، در ادامه به مرور روش‌های حل این‌گونه معادلات انتگرالی پرداخته شده است. ناگفته نماند، معادله‌ی ۶ از نظر ریاضی، یک معادله‌ی انتگرالی فردهولم نوع اول است. صورت کلی معادله‌ی انتگرالی فردهولم نوع اول به‌صورت رابطه‌ی ۸ است:[۲۷]

$$f(\xi) = \int_a^b e^{\mu|\xi-\eta|}y(\eta)\, d\eta \tag{8}$$

معادله‌ی ۸، به کمک خاصیت جداسازی کران‌های انتگرال مطابق رابطه‌ی ۹ به جمع دو انتگرال تبدیل می‌شود:

$$f(\xi) = \int_a^\xi e^{\mu(\xi-\eta)}y(\eta)\, d\eta + \int_\xi^b e^{\mu(\eta-\xi)}y(\eta)\, d\eta \tag{9}$$

پس از دو بار مشتق‌گیری از معادله‌ی ۹ و جمع عبارت‌های ایجادشده، رابطه‌ی ۱۰ به‌دست می‌آید:[۲۷]

$$y(\xi) = \frac{f''(\xi) - \mu^2 f(\xi)}{2\mu} \tag{10}$$

از سوی دیگر، براساس نوشتار پلیانین و منژیرو[۲۸] (۲۰۰۸)،[۲۷] برای برقراربودن رابطه‌ی ۱۰، لازم است دو شرط مطابق رابطه‌ی ۱۱ رعایت شوند:

$$\begin{cases} f'(a) + \mu f(a) = 0 \\ f'(b) - \mu f(b) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

بنابراین، اگر شرایط ۱۱ رعایت شود، معادله‌ی انتگرالی ۸ با معادله‌ی دیفرانسیل ۱۰ معادل است. این تذکر لازم است که برای تابع دلخواه $f(\xi)$، تابع $F(\xi)$ (مطابق رابطه‌ی ۱ − ۱۲) همواره شرایط رابطه‌ی ۱۱ را رعایت می‌کند:[۲۷]

$$F(\xi) = f(\xi) + A\xi + B \tag{۱ − ۱۲}$$

که در آن، ضرایب A و B مطابق روابط ۲ − ۱۲ و ۳ − ۱۲ به دست می‌آیند:

$$A = \frac{f'(a) + f'(b) + \mu f(a) - \mu f(b)}{b\mu - a\mu - ۲} \tag{۲ − ۱۲}$$

$$B = -\frac{f'(a) + \mu f(a) + Aa\mu + A}{\mu} \tag{۳ − ۱۲}$$

در ادامه، برای استفاده از رابطه‌های ۸، ۱۰ و ۱۱ در پژوهش حاضر، نخست روابط ۱۳ با توجه به رابطه‌ی ۶ تعریف می‌شوند:

$$a = ۰; \quad b = ۱; \quad \mu = \frac{-۱}{h}; \quad y(\xi) = \frac{d^۲\bar{w}(\xi)}{d\xi^۲};$$
$$f(\xi) = ۲h\bar{M}(\xi); \tag{۱۳}$$

سپس، دو شرط رابطه‌ی ۱۱ به‌صورت رابطه‌ی ۱۴ نوشته می‌شوند:

$$\bar{V}(۰) - \frac{۱}{h}\bar{M}(۰) = ۰; \quad \bar{V}(۱) + \frac{۱}{h}\bar{M}(۱) = ۰; \tag{۱۴}$$

با توجه به رابطه‌ی ۱۴، آشکار است که معادله‌های ذکرشده هیچگاه برقرار نیستند.[۱۹] بنابراین نمی‌توان از رابطه‌ی ۱۰ به‌عنوان معادله‌ی دیفرانسیل معادل استفاده کرد. بدین ترتیب، لازم است معادله‌ی انتگرالی ۶ با توجه به رابطه‌های ۱ − ۱۲ الی ۳ − ۱۲ مطابق رابطه‌ی ۱ − ۱۵ حل شود:[۱۹]

$$F(\xi) = ۲h\bar{M}(\xi) + A\xi + B \tag{۱ − ۱۵}$$

که در آن، پارامترهای A و B مطابق روابط ۲ − ۱۵ و ۳ − ۱۵ محاسبه می‌شوند:

$$A = \frac{-۲h}{۱ + ۲h}\left\{\left[h\bar{V}(۰) - \bar{M}(۰)\right] + \left[h\bar{V}(۱) + \bar{M}(۱)\right]\right\} \tag{۲ − ۱۵}$$

$$B = \left(\frac{۲h + ۲h^۲}{۱ + ۲h}\right)\left[h\bar{V}(۰) - \bar{M}(۰)\right] - \frac{۲h^۲}{۱ + ۲h}\left[h\bar{V}(۱) + \bar{M}(۱)\right] \tag{۳ − ۱۵}$$

در بخش‌های بعد، به کمک رابطه‌های ۱۵ (۱، ۲ و ۳)، معادله‌ی ۶ حل شده است. در ادامه، روش عددی نیستروم نیز بررسی شده است.

۲.۳. روش عددی نیستروم

یکی از راهکارهای عددی برای حل‌کردن معادلات انتگرالی، روش عددی نیستروم است،[۲۸] که از آن تاکنون برای حل معادلات انتگرالی گوناگون، شامل فردهولم و ولترا استفاده شده است.[۲۹-۳۳] فرم کلی یک معادله‌ی انتگرالی به‌صورت رابطه‌ی ۱۶ است:

$$\int_a^b k(x,t)\, y(t)\, dt = f(x) \tag{۱۶}$$

که می‌توان آن را به مجموع ریمانی مطابق رابطه‌ی ۱۷ تبدیل کرد:

$$\sum_{j=۱}^{m} k(x_i, t_j)\, y(t_j) = \frac{f(x_i)}{\Delta t}; \quad (i = ۱, \dots, m) \tag{۱۷}$$

که در آن، m بیانگر تعداد تقسیمات بازه‌ی انتگرال‌گیری و Δt نمایانگر طول بازه‌ی هر تقسیم به‌طور مساوی است. Δt در معادله‌ی ۱۷ مطابق رابطه‌ی ۱۸ محاسبه می‌شود:

$$\Delta t = \frac{b - a}{m}; \quad \begin{cases} t_j = \left(j - \frac{۱}{۲}\right)\Delta t + a \\ x_i = \left(i - \frac{۱}{۲}\right)\Delta t + a \end{cases} \tag{۱۸}$$

همچنین اگر رابطه‌ی ۱۹ برقرار باشد:

$$y(t_j) = y_j; \quad f(x_i) = f_i; \tag{۱۹}$$

می‌توان معادله‌ی ۱۷ را به‌صورت ماتریسی (رابطه‌ی ۲۰) بازنویسی کرد:

$$[k]\{y\} = \frac{۱}{\Delta t}\{f\}; \quad \begin{cases} \{f_i\} = \{f_۱, \dots, f_m\}^T \\ \{y_i\} = \{y_۱, \dots, y_m\}^T \\ [k_{ij}] = [k(x_i, t_j)]_{m\times m} \end{cases}; \tag{۲۰}$$

با حل دستگاه معادلات خطی ۲۰، می‌توان به مقادیر تابع مجهول یا $\{y(t_j)\}$ دست یافت.[۲۸] در بخش بعد، از روش عددی نیستروم برای حل معادله‌ی انتگرالی حاکم بر رفتار تیر نانو استفاده شده است.

۳. حل معادله‌ی انتگرالی با هسته‌ی نمایی طبیعی

در بخش حاضر تلاش شده است از روش‌های تحلیلی و عددی استفاده شود، تا معادله‌ی انتگرالی حاکم بر رفتار تیر نانو به ازاء تابع هسته‌ی نمایی طبیعی حل شود. برای این منظور مانند روند استفاده‌شده در نوشتار فرناندز و همکاران (۲۰۱۶)،[۱۹] تابع انحناء به‌صورت رابطه‌ی ۲۱ در نظر گرفته شده است:

$$\bar{w}''(\eta) = \bar{w}''_۱(\eta) - A\bar{w}''_A(\eta) - B\bar{w}''_B(\eta) \tag{۲۱}$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی ۲۱ در رابطه‌ی ۶، رابطه‌ی ۲۲ به‌دست می‌آید:

$$\int_۰^۱ e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}}\left[\bar{w}''_۱(\eta) - A\bar{w}''_A(\eta) - B\bar{w}''_B(\eta)\right] \mathrm{d}\eta = ۲h\bar{M}(\xi) \tag{۲۲}$$

با یک بار افزودن و کاستن عبارت $(A\xi + B)$ در سمت راست رابطه‌ی ۲۲ و تفکیک عبارت‌های آن، می‌توان رابطه‌ی ۲۳ (۱، ۲ و ۳) را نوشت:

$$\begin{cases} \int_۰^۱ e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}}\bar{w}''_۱(\eta)\,\mathrm{d}\eta = ۲\mathrm{h}\bar{\mathrm{M}}(\xi) + \mathrm{A}\xi + \mathrm{B} & (۱ − ۲۳) \\ \int_۰^۱ e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}}\bar{w}''_A(\eta)\,\mathrm{d}\eta = \xi & (۲ − ۲۳) \\ \int_۰^۱ e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}}\bar{w}''_B(\eta)\,\mathrm{d}\eta = ۱ & (۳ − ۲۳) \end{cases}$$

می‌توان با محاسبه‌ی سه تابع $\bar{w}''_۱$، $\bar{w}''_A$ و $\bar{w}''_B$ و استفاده از رابطه‌ی ۲۱، به تابع انحناء دست یافت. در ادامه، پارامتر $\bar{w}''_۱$ با توجه به رابطه‌های ۱ − ۱۶ تا ۳ − ۱۶، مطابق رابطه‌ی ۲۴ به‌دست آمده است:

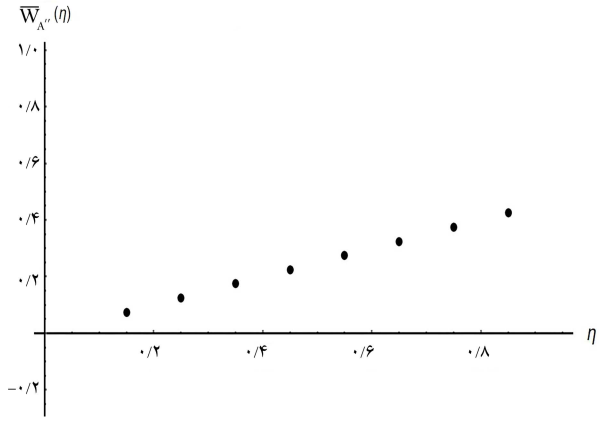
$$\bar{w}''_۱(\xi) = \bar{M}(\xi) - h^۲\bar{q}(\xi) + \left(\frac{A\xi + B}{۲h}\right) \tag{۲۴}$$

بدین ترتیب، معادله‌ی انتگرالی حاکم بر تیر نانو، به سه معادله‌ی انتگرالی مجزاء تبدیل و یکی از آن‌ها محاسبه شد. درگام بعد، ابتدا از روش عددی نیستروم برای حل دو معادله‌ی ۲ − ۲۳ و ۳ − ۲۳ مطابق رابطه‌ی ۲۵ استفاده شده است:

$$\int_۰^۱ e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}}\bar{w}''(\eta)\,\mathrm{d}\eta = \xi^n \quad (n = ۰, ۱) \tag{۲۵}$$

جدول ۱. نتایج حل دستگاه معادلات ۲۰ به ازاء: $h = ۱$، $m = ۱۰$ و $n = ۱$.

η_j	$\bar{w}''_A\,(\eta_j)$
۰/۰۵	−۴/۷۲۹۲
۰/۱۵	۰/۰۷۴۵
۰/۲۵	۰/۱۲۴۹
۰/۳۵	۰/۱۷۴۹
۰/۴۵	۰/۲۲۴۸
۰/۵۵	۰/۲۷۴۸
۰/۶۵	۰/۳۲۴۷
۰/۷۵	۰/۳۷۴۷
۰/۸۵	۰/۴۲۴۷
۰/۹۵	۹/۹۷۹۰



شکل ۳. تابع پاسخ معادله‌ی انتگرالی ۲۵ با روش عددی نیستروم به ازاء: $h = ۱$، $m = ۱۰$ و $n = ۱$.

که در آن، n توان ξ است، که می‌تواند ۰ یا ۱ باشد. مشابه رابطه‌ی ۱۷ می‌توان رابطه‌ی ۲۶ را نوشت:

$$\sum_{j=۱}^{m} e^{-\frac{|\xi_i-\eta_j|}{h}}\,\bar{w}''(\eta_j) = \frac{\xi_i^n}{\Delta\eta} \qquad (n=۰,۱);\ \ (i=۱,\dots,m) \tag{۲۶}$$

که در آن $\Delta\eta$ مطابق رابطه‌ی ۲۷ محاسبه می‌شود:

$$\Delta\eta = \frac{۱-۰}{m} = \frac{۱}{m};\quad \begin{cases} \eta_j = \frac{۱}{m}\left(j-\frac{۱}{۲}\right) \\ \xi_i = \frac{۱}{m}\left(i-\frac{۱}{۲}\right) \end{cases}; \tag{۲۷}$$

در ادامه، دستگاه معادلات خطی ۲۰ برای چند حالت مختلف h، m و n حل شده و نتایج آن که همان $\{y(t_j)\}$ است، در جدول ۱ ارائه شده است. نخست فرض شده است: $h = ۱$، $m = ۱۰$ و $n = ۱$. در این حالت با توجه به رابطه‌ی ۲ − ۲۳، $\bar{w}'' = \bar{w}''_A$ است.

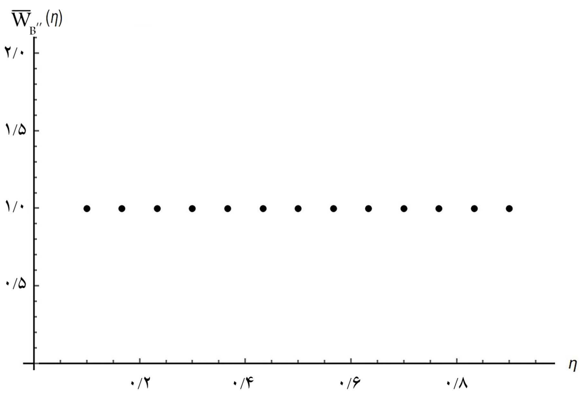
ترسیم خروجی‌های جدول ۱، در دستگاه مختصات، نقاطی از تابع $\bar{w}''_A\,(\eta_j)$ را مطابق شکل ۳ به‌دست داده است.

در ادامه، مطابق جدول ۲، فرض شده است که: $h = ۰/۵$، $m = ۱۵$ و $n = ۰$. در این حالت با توجه به رابطه‌ی ۳ − ۲۳، $\bar{w}'' = \bar{w}''_B$ است.

رسم خروجی‌های جدول ۲، در دستگاه مختصات، نقاطی از تابع $\bar{w}''_B\,(\eta_j)$ در شکل ۴ مشاهده می‌شود.

جدول ۲. نتایج حل دستگاه معادلات ۲۰ به ازاء: $h = ۰/۵$، $m = ۱۵$ و $n = ۰$.

η_j	$\bar{w}''_B\,(\eta_j)$
۰/۰۳۳۳	۷/۹۹۹۳
۰/۱۰۰۰	۰/۹۹۸۵
۰/۱۶۶۷	۰/۹۹۸۵
۰/۲۳۳۳	۰/۹۹۸۵
۰/۳۰۰۰	۰/۹۹۸۵
۰/۳۶۶۷	۰/۹۹۸۵
۰/۴۳۳۳	۰/۹۹۸۵
۰/۵۰۰۰	۰/۹۹۸۵
۰/۵۶۶۷	۰/۹۹۸۵
۰/۶۳۳۳	۰/۹۹۸۵
۰/۷۰۰۰	۰/۹۹۸۵
۰/۷۶۶۷	۰/۹۹۸۵
۰/۸۳۳۳	۰/۹۹۸۵
۰/۹۰۰۰	۰/۹۹۸۵
۰/۹۶۶۷	۷/۹۹۹۳



شکل ۴. تابع پاسخ معادله‌ی انتگرالی ۲۵ با روش عددی نیستروم به ازاء: $h = ۰/۵$، $m = ۱۵$ و $n = ۰$.

در نتایج دو نمونه‌ی اخیر مشاهده می‌شود که تمامی خروجی‌ها به جز خروجی‌های اول و آخر، روی یک تابع ثابت یا خطی قرار دارند. در هر حل دستگاه معادلات نیز فقط اولین و آخرین داده، به ترتیب بسیار بزرگ و بسیار کوچک هستند. این رفتار بسیار شبیه به رفتار تابع دلتای دیراک[۲۹] است. تابع دلتای دیراک، در یک نقطه‌ی مشخص به سمت بی‌نهایت میل می‌کند و در سایر نقاط صفر است.[۳۴] بنابراین، اگر در تابع پاسخ معادله‌ی انتگرالی ۲۵، در دو سر بازه‌ی [۰,۱]، دو تابع دلتای دیراک در نظر گرفته شود، احتمالاً توجیه‌کننده‌ی خوبی برای رفتار تابع پاسخ است. از سوی دیگر، با توجه به شکل‌های ۳ و ۴، در نقاط میانی، احتمالاً تابع پاسخ، یک تابع چندجمله‌یی نیز دارد. با توجه به حدس‌های اخیر، تابع کلی ۲۸ به‌عنوان پاسخ دقیق معادله‌ی انتگرالی ۲۵ برای $n = ۰,۱$ پیشنهاد شده

است:

$$\bar{w}''(\eta) = a\eta^{۲} + b\eta + c + d\,\delta(\eta) + f\,\delta(\eta - ۱) \quad (۲۸)$$

با جای‌گذاری تابع ۲۸ در رابطه‌ی انتگرالی ۲۵ و هم‌ارز قراردادن حاصل انتگرال با سمت راست تساوی، می‌توان تابع پاسخ را مطابق رابطه‌ی ۲۹ به‌دست آورد:

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{۱} e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \left[a\eta^{۲} + b\eta + c + d\delta(\eta) + f\delta(\eta-۱)\right] \mathrm{d}\eta &= a\int_{۰}^{۱} e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \eta^{۲} \mathrm{d}\eta + b\int_{۰}^{۱} e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \eta \mathrm{d}\eta \\ &+ c\int_{۰}^{۱} e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \mathrm{d}\eta + d\int_{۰}^{۱} e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \delta(\eta)\mathrm{d}\eta \\ &+ f\int_{۰}^{۱} e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \delta(\eta-۱)\mathrm{d}\eta \quad (۲۹)\end{aligned}$$

به روش انتگرال‌گیری جزبه‌جز، می‌توان روابط ۳۰ الی ۳۲ را نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{۱} e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \eta^{۲}\mathrm{d}\eta &= \int_{۰}^{\xi} e^{-\frac{(\xi-\eta)}{h}} \eta^{۲}\mathrm{d}\eta + \int_{\xi}^{۱} e^{-\frac{(\eta-\xi)}{h}} \eta^{۲}\mathrm{d}\eta \\ &= ۲\xi^{۲}h + ۴h^{۳} - he^{\frac{(\xi-۱)}{h}} - ۲h^{۲}e^{\frac{(\xi-۱)}{h}} \\ &- ۲h^{۳}e^{\frac{(\xi-۱)}{h}} - ۲h^{۳}e^{-\frac{\xi}{h}} \quad (۳۰)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{۱} e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \eta\mathrm{d}\eta &= \int_{۰}^{\xi} e^{-\frac{(\xi-\eta)}{h}} \eta\mathrm{d}\eta + \int_{\xi}^{۱} e^{-\frac{(\eta-\xi)}{h}} \eta\mathrm{d}\eta \\ &= ۲\xi h - \left(h + h^{۲}\right) e^{\frac{(\xi-۱)}{h}} + h^{۲}e^{-\frac{\xi}{h}} \quad (۳۱)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{۱} e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \mathrm{d}\eta &= \int_{۰}^{\xi} e^{-\frac{(\xi-\eta)}{h}} \mathrm{d}\eta + \int_{\xi}^{۱} e^{-\frac{(\eta-\xi)}{h}} \mathrm{d}\eta \\ &= ۲h - he^{\frac{(\xi-۱)}{h}} - he^{-\frac{\xi}{h}} \quad (۳۲)\end{aligned}$$

در مورد تابع‌های دلتای دیراک نیز براساس خواص آن، نتایج ۳۳ و ۳۴ در دسترس قرار می‌گیرد:[۳۴]

$$\int_{۰}^{۱} e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \delta(\eta)\mathrm{d}\eta = \frac{۱}{۲}e^{-\frac{\xi}{h}} \quad (۳۳)$$

$$\int_{۰}^{۱} e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \delta(\eta-۱)\mathrm{d}\eta = \frac{۱}{۲}e^{\frac{(\xi-۱)}{h}} \quad (۳۴)$$

اکنون با روی‌هم‌گذاری معادله‌های ۳۰ الی ۳۴ و با توجه به معادله‌ی انتگرالی ۲۹، می‌توان پاسخ را به‌دست آورد (معادله‌ی ۳۵):

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{۱} e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \left[a\eta^{۲} + b\eta + c + d\delta(\eta) + f\delta(\eta-۱)\right]\mathrm{d}\eta \\ = a\begin{pmatrix} ۲\xi^{۲}h + ۴h^{۳} - he^{\frac{(\xi-۱)}{h}} - ۲h^{۲}e^{\frac{(\xi-۱)}{h}} \\ -۲h^{۳}e^{\frac{(\xi-۱)}{h}} - ۲h^{۳}e^{-\frac{\xi}{h}} \end{pmatrix} \\ + b\left(۲\xi h - \left(h + h^{۲}\right)e^{\frac{(\xi-۱)}{h}} + h^{۲}e^{-\frac{\xi}{h}}\right) \\ + c\left(۲h - he^{\frac{(\xi-۱)}{h}} - he^{-\frac{\xi}{h}}\right) + d\left(\frac{e^{-\frac{\xi}{h}}}{۲}\right) + f\left(\frac{e^{\frac{(\xi-۱)}{h}}}{۲}\right) \quad (۳۵)\end{aligned}$$

در نتیجه پس از مرتب‌کردن عبارت‌های مشابه در رابطه‌ی ۳۵، می‌توان رابطه‌ی ۳۶ را نوشت:

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{۱} e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \left[a\eta^{۲} + b\eta + c + d\delta(\eta) + f\delta(\eta-۱)\right]\mathrm{d}\eta \\ = ۲ah\xi^{۲} + ۲bh\xi + \left(۴ah^{۳} + ۲ch\right) \\ + \left(-۲ah^{۳} + bh^{۲} - ch + \frac{d}{۲}\right)e^{-\frac{\xi}{h}} \\ + \begin{pmatrix} -ch - ah - ۲ah^{۲} - ۲ah^{۳} \\ -b\left(h + h^{۲}\right) + \frac{f}{۲} \end{pmatrix} e^{\frac{(\xi-۱)}{h}} \equiv \xi^{n} \quad (۳۶)\end{aligned}$$

که در آن، n برابر با ۰ یا ۱ است. در ادامه، پاسخ دو معادله‌ی انتگرالی ۲ – ۲۳ و ۳ – ۲۳ مطابق رابطه‌های ۳۷ و ۳۸ به‌دست آمده‌اند:

$$\int_{۰}^{۱} e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \bar{w}_A''(\eta)\mathrm{d}\eta = \xi \quad (۳۷)$$

$$\begin{aligned}۲ah\xi^{۲} + ۲bh\xi + \left(۴ah^{۳} + ۲ch\right) + \left(-۲ah^{۳} + bh^{۲} - ch + \frac{d}{۲}\right)e^{-\frac{\xi}{h}} \\ + \left(-ch - ah - ۲ah^{۲} - ۲ah^{۳} - b\left(h + h^{۲}\right) + \frac{f}{۲}\right)e^{\frac{(\xi-۱)}{h}} \\ \equiv \xi \quad (۳۸)\end{aligned}$$

با هم‌ارز قرار دادن دو سمت رابطه‌ی ۳۸، می‌توان معادلات ۳۹ را نتیجه گرفت:

$$\begin{cases} ۲ah = ۰ \Rightarrow a = ۰ \\ ۲bh = ۱ \Rightarrow b = \frac{۱}{۲h} \\ ۴ah^{۳} + ۲ch = ۰ \Rightarrow c = ۰ \\ -۲ah^{۳} + bh^{۲} - ch + \frac{d}{۲} = ۰ \Rightarrow d = -h \\ -ch - ah - ۲ah^{۲} - ۲ah^{۳} - b\left(h + h^{۲}\right) + \frac{f}{۲} = ۰ \\ \qquad \Rightarrow f = ۱ + h \end{cases} \quad (۳۹)$$

و تابع پاسخ دقیق به‌صورت رابطه‌ی ۴۰ درمی‌آید:

$$\bar{w}_A''(\xi) = \frac{\xi}{۲h} - h\,\delta(\xi) + (۱ + h)\,\delta(\xi - ۱) \quad (۴۰)$$

در مورد معادله‌ی دوم نیز می‌توان رابطه‌ی ۴۱ را نوشت:

$$\int_{۰}^{۱} e^{-\frac{|\xi-\eta|}{h}} \bar{w}_B''(\eta)\mathrm{d}\eta = ۱ \quad (۴۱)$$

بنابراین، رابطه‌ی ۴۲ به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}۲ah\xi^{۲} + ۲bh\xi + \left(۴ah^{۳} + ۲ch\right) + \left(-۲ah^{۳} + bh^{۲} - ch + \frac{d}{۲}\right)e^{-\frac{\xi}{h}} \\ + \left(-ch - ah - ۲ah^{۲} - ۲ah^{۳} - b\left(h + h^{۲}\right) + \frac{f}{۲}\right)e^{\frac{(\xi-۱)}{h}} \\ \equiv ۱ \quad (۴۲)\end{aligned}$$

به‌طور مشابه، ثابت‌های مجهول با هم‌ارز قراردادن دو سمت رابطه‌ی ۴۲، روابط ۴۳ به‌دست آمده‌اند:

$$\begin{cases} 2ah = 0 \Rightarrow a = 0 \\ 2bh = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 4ah^3 + 2ch = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2h} \\ -2ah^3 + bh^2 - ch + \frac{d}{2} = 0 \Rightarrow d = 1 \\ -ch - ah - 2ah^2 - 2ah^3 - b\left(h + h^2\right) + \frac{f}{2} = 0 \\ \qquad \Rightarrow f = 1 \end{cases} \tag{43}$$

و سپس تابع پاسخ به‌صورت رابطه‌ی ۴۴ نوشته شده است:

$$\bar{w}''_B(\xi) = \frac{1}{2h} + \delta(\xi) + \delta(\xi - 1) \tag{44}$$

تابع‌های به‌دست‌آمده، پاسخ‌های دقیق و صریح معادله‌های انتگرالی ۲ — ۲۳ و ۳ — ۲۳ هستند. در بخش بعدی، پاسخ‌های به‌دست‌آمده ترکیب شده و تابع انحنا و خیز تیر نانو نیز به‌دست آمده است. شایان ذکر است که پاسخ‌های تحلیلی مندرج در دو رابطه‌ی ۴۰ و ۴۴، برای نخستین بار است که به‌دست آمده و گزارش شده‌اند. در پژوهش فرناندز و همکاران (۲۰۱۶)،[۱۹] فقط پاسخ عددی معادله‌های انتگرالی و آن هم در یک نقطه از تیر به‌دست آمده است.

۴. یافتن تابع خیز تیر نانو

تا اینجا پاسخ تمام معادلات انتگرالی رابطه‌های ۱ — ۲۳، ۲ — ۲۳ و ۳ — ۲۳ به‌دست آمده است. بنابراین می‌توان براساس تابع‌های مندرج در سه رابطه‌ی ۲۴، ۴۰ و ۴۴ و همچنین، براساس رابطه‌ی ۲۱، به تابع خیز دست یافت (رابطه‌ی ۴۵). تابع انحناء شامل تابع دلتای دیراک و تابع‌های شیب و خیز دارای تابع هوی‌ساید هستند.

$$\begin{aligned} \bar{w}''(\xi) =& \bar{w}''_1(\xi) - A\bar{w}''_A(\xi) - B\bar{w}''_B(\xi) \\ =& \left[\bar{M}(\xi) - h^2\bar{q}(\xi) + \left(\frac{A\xi + B}{2h}\right)\right] \\ & - A\left[\frac{\xi}{2h} - h\delta(\xi) + (1 + h)\delta(\xi - 1)\right] \\ & - B\left[\frac{1}{2h} + \delta(\xi) + \delta(\xi - 1)\right] = \bar{M}(\xi) - h^2\bar{q}(\xi) \\ & + (Ah - B)\delta(\xi) - [A(h + 1) + B]\delta(\xi - 1) \end{aligned} \tag{45}$$

به‌عبارت دیگر، رابطه‌ی اخیر مطابق رابطه‌ی ۴۶ خلاصه شده است:

$$\begin{aligned} & \bar{w}''(\xi) = \bar{M}(\xi) - h^2\bar{q}(\xi) + \beta_1\delta(\xi) + \beta_2\delta(\xi - 1) \\ & \begin{cases} \beta_1 = Ah - B \\ \beta_2 = -[A(h + 1) + B] \end{cases} \end{aligned} \tag{46}$$

که در آن، A و B به کمک رابطه‌های (۲ — ۱۶) و (۳ — ۱۶) محاسبه می‌شوند. براساس رابطه‌ی دیفرانسیلی میان بار خارجی و لنگر خمشی می‌توان روابط ۴۷ (۱ الی ۳) را نوشت:

$$\begin{cases} \bar{q}(\xi) = \frac{d^2\bar{M}}{d\xi^2} & (47-1) \\ \bar{V}(\xi) = C_1 + \int_0^\xi \bar{q}(t)\,\mathrm{d}t & (47-2) \\ \bar{M}(\xi) = C_2 + C_1\xi + \int_0^\xi (\xi - t)\,\bar{q}(t)\,\mathrm{d}t & (47-3) \end{cases}$$

با جای‌گذاری رابطه‌های ۱ — ۴۷ و ۳ — ۴۷ در معادله‌ی ۴۶، معادله‌ی ۴۸ به‌دست آمد:

$$\begin{aligned} \bar{w}''(\xi) = & C_2 + C_1\xi + \int_0^\xi (\xi - t)\,\bar{q}(t)\,\mathrm{d}t - h^2\bar{q}(\xi) + \beta_1\delta(\xi) \\ & + \beta_2\delta(\xi - 1) \end{aligned} \tag{48}$$

در ادامه، با دو مرتبه انتگرال‌گیری از معادله‌ی ۴۸، تابع‌های شیب (رابطه‌ی ۴۹) و خیز (رابطه‌ی ۵۰) به‌دست آمدند:

$$\begin{aligned} \bar{w}'(\xi) =& C_3 + C_2\xi + \frac{C_1\xi^2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^\xi (\xi - t)^2\,\bar{q}(t)\,\mathrm{d}t \\ & - h^2\int_0^\xi \bar{q}(t)\,\mathrm{d}t + \beta_1\mathrm{H}(\xi) + \beta_2\mathrm{H}(\xi - 1) \end{aligned} \tag{49}$$

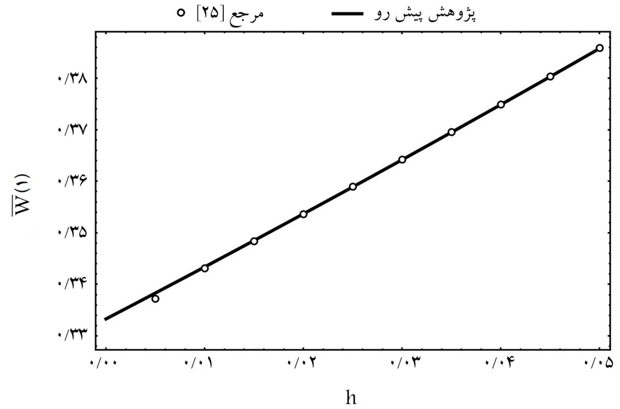
$$\begin{aligned} \bar{w}(\xi) =& C_4 + C_3\xi + \frac{C_2\xi^2}{2} + \frac{C_1\xi^3}{6} + \frac{1}{6}\int_0^\xi (\xi - t)^3\,\bar{q}(t)\,\mathrm{d}t \\ & - h^2\int_0^\xi (\xi - t)\,\bar{q}(t)\,\mathrm{d}t + \beta_1\xi\mathrm{H}(\xi) \\ & + \beta_2(\xi - 1)\,\mathrm{H}(\xi - 1) \end{aligned} \tag{50}$$

رابطه‌ی ۵۰، تابع فرم بسته‌ی خیز تیر نانو است، که ۴ ثابت مجهول دارد؛ که پس از تعیین شرایط مرزی و بارگذاری تیر نانو تعیین می‌شوند. در بخش بعد، از رابطه‌ی اخیر برای تعیین خیز تیرهای نانو در شرایط مرزی و بارگذاری‌های مختلف استفاده شده است.

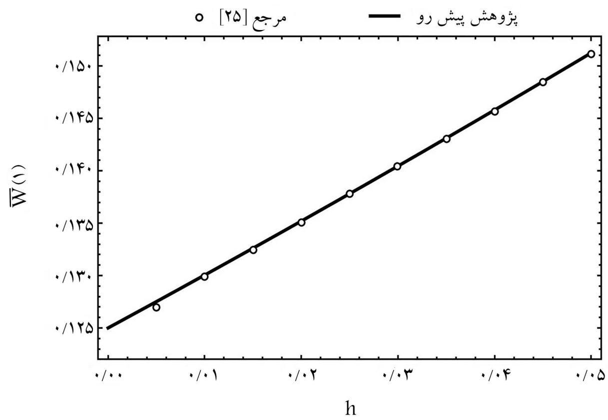
۵. نتایج عددی و تحلیل آن‌ها

در بخش حاضر، معادله‌ی ۵۰ برای چند حالت شرایط مرزی و تابع بارگذاری تعیین شده است. در بخش اول، نمودار تغییرات خیز یک نقطه از تیر نانو با پارامتر غیرموضعی ترسیم و با نتایج مشابه در مرجع [۱۹] مقایسه شده است (شکل‌های ۵ الی ۱۱). در بخش دوم، نمودار خیز تیرهای نانو در شرایط مرزی مختلف ترسیم شده‌اند (شکل‌های ۱۲ الی ۱۷). نکته‌ی مهم نمودارهای ذکرشده آن است که برای نخستین بار آن‌ها براساس تابع هسته‌ی نمایی طبیعی به‌دست آمده‌اند.

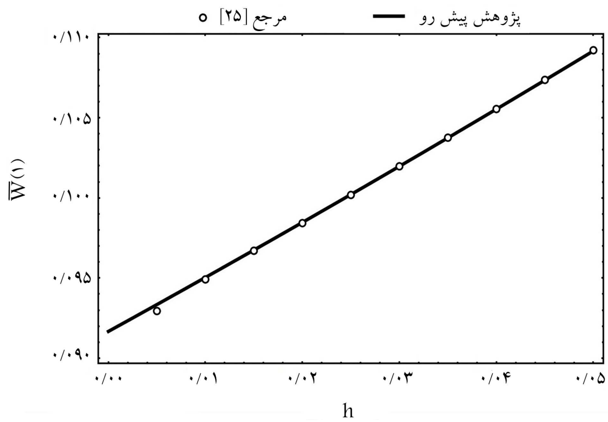
همان‌طورکه مشاهده می‌شود، نقطه‌های نمودار شکل ۵ مربوط به نتایج عددی [۱۹] و نمودار پررنگ به معادله‌ی به‌دست‌آمده براساس رابطه‌ی ۵۰ اشاره می‌کند.



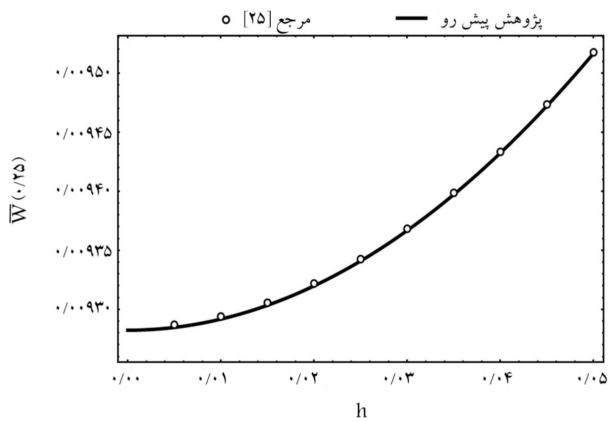
شکل ۵. خیز نقطه‌ی پایانی تیر یک سرگیردار زیر بار متمرکز انتهایی بر اساس معادله‌ی ۵۰ و مرجع[۱۹].



شکل ۶. خیز نقطه‌ی پایانی تیر یک سرگیردار زیر بارگسترده‌ی یکنواخت براساس معادله‌ی ۵۰ و مرجع[۱۹].

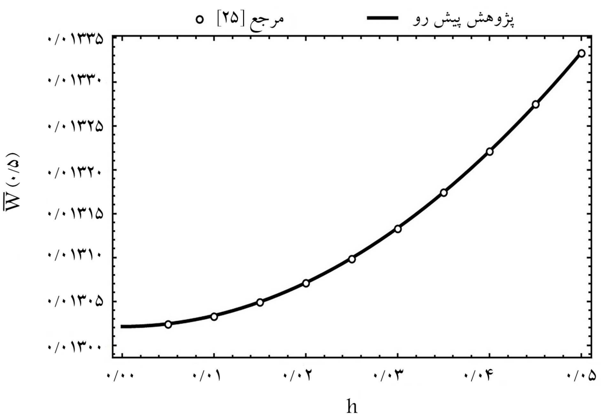


شکل ۷. خیز نقطه‌ی پایانی تیر یک سرگیردار زیر بارگسترده‌ی مثلثی به معادله‌ی $\bar{q}(\xi) = \xi$ بر اساس معادله‌ی ۵۰ و مرجع[۱۹].

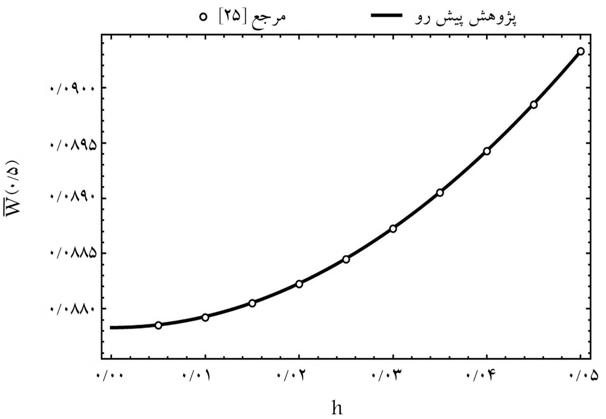


شکل ۸. خیز نقطه‌ی ۱/۴ تیر دو سر مفصل زیر بارگسترده‌ی یکنواخت براساس معادله‌ی ۵۰ و مرجع [۱۹].

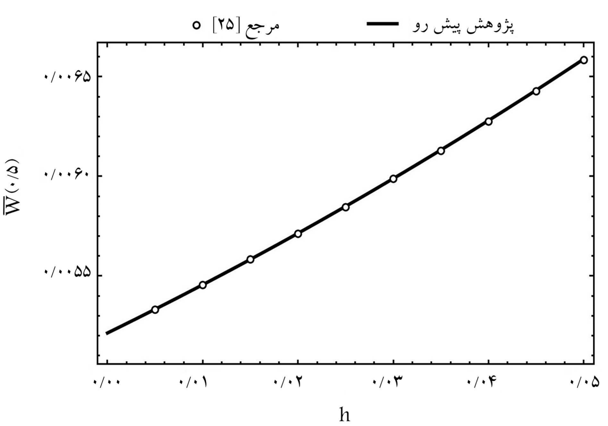
در نمودارهای اخیر، محور قائم مربوط به خیز بی‌بُعد نقطه‌ی مشخصی از تیر نانو و محور افقی نشان‌دهنده‌ی پارامتر غیرموضعی بی‌بُعد است. همان‌طورکه در تمام آن‌ها مشاهده می‌شود، نتایج به‌دست‌آمده براساس حل معادله‌ی ۵۰ منطبق بر نتایج عددی مرجع [۱۹] بوده است. در ادامه، نمودارهای خیز تیرهای نانو با شرایط مرزی و بارگذاری‌های مختلف ارائه شده‌اند.



شکل ۹. خیز نقطه‌ی میانی تیر دو سر مفصل زیر بارگسترده‌ی یکنواخت براساس معادله‌ی ۵۰ و مرجع [۱۹].

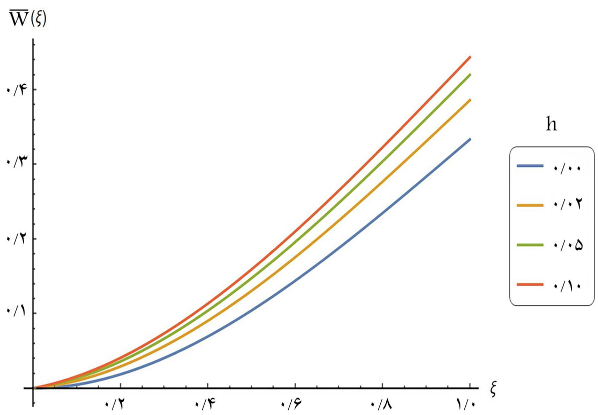


شکل ۱۰. خیز نقطه‌ی میانی تیر دو سر مفصل زیر بارگسترده‌ی کسینوسی به معادله‌ی $\bar{q}(\xi) = 2\pi^2 \cos(2\pi\xi)$ و براساس معادله‌ی ۵۰ و مرجع [۱۹].

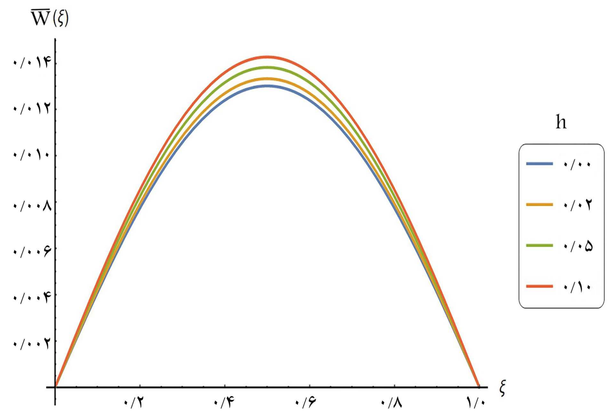


شکل ۱۱. خیز نقطه‌ی میانی تیر یک سر گیردار یک سر مفصل زیر بارگسترده‌ی یکنواخت براساس معادله‌ی ۵۰ و مرجع[۱۹].

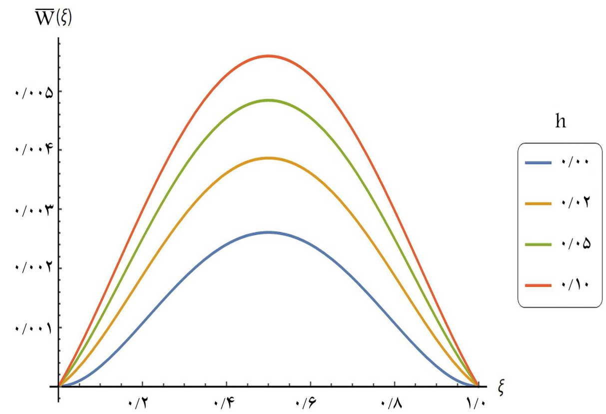
در ادامه، با توجه به نمودارهای شکل‌های ۵ الی ۱۷، نتایجی استخراج شده است. در ابتدا، براساس شکل‌های ۵ الی ۱۷ آشکار است که با افزایش پارامتر غیرموضعی، خیز تیر افزایش یافته است. اگر فرض شود جنس و ابعاد سطح مقطع تیر نانو ثابت باشد، عامل افزایش پارامتر غیرموضعی، فقط کاهش طول تیر است. از طرفی می‌توان نتیجه گرفت که برخلاف نظریه‌ی کلاسیک، با کاهش طول تیر نانو،



شکل ۱۲. نمودار خیز تیر یک سر گیردار زیر بار متمرکز انتهایی براساس معادله‌ی ۵۰.



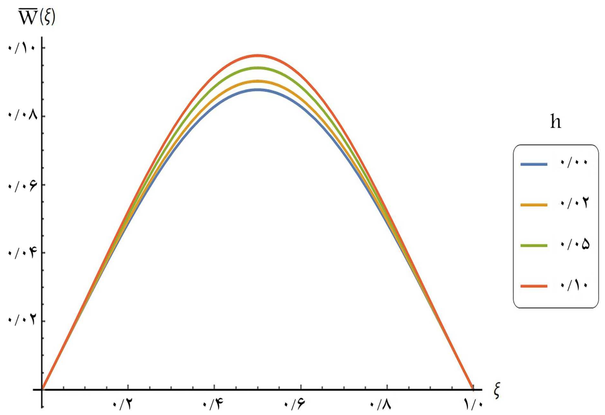
شکل ۱۳. نمودار خیز تیر دو سر مفصل زیر بارگسترده‌ی یکنواخت براساس معادله‌ی ۵۰.



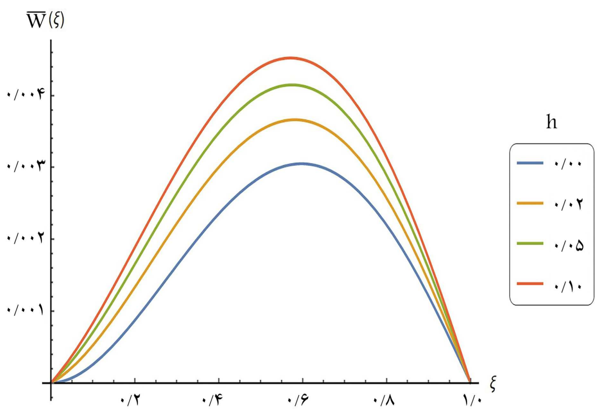
شکل ۱۴. نمودار خیز تیر دو سرگیردار زیر بارگسترده‌ی یکنواخت براساس معادله‌ی ۵۰.

خیز آن متناسباً کاهش نیافته و در نتیجه مجموعاً، خیز تیر افزایش پیدا کرده است.

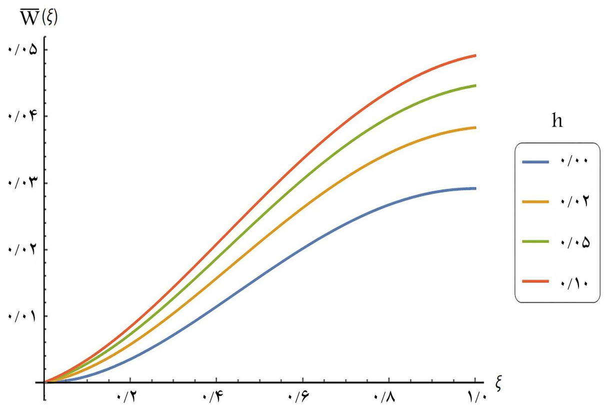
در ادامه، به علت تناقضی که در شکل‌های ۱۲، ۱۴، ۱۶ و ۱۷ رخ داده است، اشاره شده است. براساس شکل‌های مذکور، کاملاً مشهود است که شیب تیر نانو در تکیه‌گاه‌ها صفر نیست. این در حالی است که در تیرهای نانو، تکیه‌گاه گیردار یا برش‌آزاد وجود دارد. این تناقض فقط به هنگام استفاده از تابع هسته‌ی نمایی طبیعی



شکل ۱۵. نمودار خیز تیر دو سر مفصل زیر بارگسترده‌ی کسینوسی به معادله‌ی $\bar{q}(\xi) = 2\pi^2 \cos(2\pi\xi)$ و براساس معادله‌ی ۵۰.



شکل ۱۶. نمودار خیز تیر یک سرگیردار یک سر مفصل زیر بارگسترده‌ی مثلثی به معادله‌ی $\bar{q}(\xi) = \xi$ براساس معادله‌ی ۵۰.



شکل ۱۷. نمودار خیز تیر یک سرگیردار یک سر برش آزاد زیر بارگسترده‌ی مثلثی به معادله‌ی $\bar{q}(\xi) = \xi$ براساس معادله‌ی ۵۰.

ایجاد می‌شود. این تذکر لازم است، که مطابق رابطه‌ی ۴۹، تابع شیب تیر نانو، دو تابع هوی‌ساید در دو انتهای خود دارد. تابع هوی‌ساید به‌صورت رابطه‌ی ۵۱ تعریف می‌شود:[۳۴]

$$\mathrm{H}(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} \delta(\xi)\, d\xi \tag{۵۱}$$

که براساس آن، مقدار تابع هوی‌ساید به ازاء مقادیر مثبت، ۱؛ به ازاء مقادیر

منفی، ۰؛ و به ازاء ۰ مساوی ۱/۲ است. این ناپیوستگیِ تابع هوی‌ساید در نقطه‌یی که مقدار کمانک جلوی آن را صفر می‌کند، باعث ایجاد تناقض مذکور در تیرهایی می‌شود که دست‌کم یکی از دو انتهای آن‌ها، شرط مرزی شیبِ صفر را دارند.

۶. نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر، نظریه‌ی غیرموضعی گرادیان تنش ارینگن،[1] برای تحلیل تیر نانوی اویلر ــ برنولی استفاده شده است، که برای تیرهای نانو منجر به معادله‌ی انتگرالی شد؛ که برای تابع هسته‌ی آن، تابع نمایی طبیعی در نظر گرفته شد. در ادامه، برای نخستین بار، پاسخ معادله‌ی انتگرالی اخیر و معادله‌ی دیفرانسیل معادلِ آن، مستقیماً و با ترکیب روش‌های عددی نیستروم و روش‌های تحلیلی در دسترس قرار گرفت.

بر این اساس، ابتدا مبانی نظری تئوری کشسانی غیرموضعی گرادیان تنش و معادله‌ی انتگرالی مزبور تشریح و سپس مبانی ریاضی حل یک معادله‌ی انتگرالی به روش عددی نیستروم ارائه و از آن، برای حل عددی معادلات انتگرالی حاکم بر تیرهای نانو استفاده شده است. در گام بعدی، با توجه به نتایج روش عددی نیستروم، روش تحلیلی حل معادله‌ی انتگرالی دنبال شد و تابع انحناء و سپس تابع خیز تیر نانو با فرم بسته به‌دست آمد. همچنین، برای اطمینان از درستی رابطه‌ی نهایی، رابطه‌ی به‌دست‌آمده برای تیرهای نانو با شرایط مرزی و بارگذاری‌های مختلف استفاده و نتایج آن با یافته‌های پیشین مقایسه شده است. شایان ذکر است، در پی آشکارشدن تناقضی در نتایج عددی، علت آن تناقض نیز روشن شد. به‌دست‌آوردن تابع پاسخ دقیق در مقایسه با روش‌های عددی، این امکان را در اختیار پژوهشگران قرار می‌دهد که بتوانند با دقت‌های بالاتر و با صرف زمان کمتر و بدون نیاز به روش‌های طولانی عددی به تحلیل تیرهای نانو بپردازند.

پانوشت‌ها

1. Eringen
2. Romano & Barretta
3. Mindlin
4. Papargyri
5. Nilsson
6. Atomic Force Microscopy
7. Patti
8. Sapsathiarn & Rajapakse
9. Shenoy & Miller
10. Sumelka & Stempin
11. Kröner
12. Eringen
13. Edelen
14. Bessel Functions
15. Peddieson
16. Shindo & Wang
17. Wang & Liew
18. Abu-Hilal
19. Fernandrez-Saez
20. Kukla & Zamojska
21. Yuan
22. Kiani & Żur
23. Tuna & Kirca
24. Romano & Barretta
25. Nyström
26. Volterra and Fredholm Integral Equations
27. Eringen
28. Polyanin & Manzhirov
29. Dirac Delta Function

منابع (References)

1. Eringen, A.C., 1983. On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, *54*(9), pp. 4703-4710. doi.org/10.1063/1.332803.
2. Romano, G. and Barretta, R., 2017. Stress-driven versus strain-driven nonlocal integral model for elastic nano-beams. *Composites Part B: Engineering*, *114*, pp. 184-188. doi.org/10.1016/j.compositesb.2017.01.008.
3. Mindlin, R.D., 1964. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, *16*(1), pp. 51-78. doi.org/10.1007/BF00248490.
4. Papargyri-Beskou, S., Tsepoura, K.G., Polyzos, D. and Beskos, D., 2003. Bending and stability analysis of gradient elastic beams. *International Journal of Solids and Structures*, *40*(2), pp. 385-400. doi.org/10.1016/S0020-7683(02)00522-X.
5. Sapsathiarn, Y. and Rajapakse, R.K.N.D., 2012. A model for large displacements of nanobeams and experimental comparison. *IEEE Transactions on Nanotechnology*, *11*(2), pp. 247-254. doi.org/10.1109/TNANO.2011.2160457.
6. Miller, R.E. and Shenoy, V.B., 2000. Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. *Nanotechnology*, *11*(3), pp. 139-147. doi.org/10.1088/0957-4484/11/3/301.
7. Nilsson, S.G., Sarwe, E.L. and Montelius, L., 2003. Fabrication and mechanical characterization of ultrashort nanocantilevers. *Applied Physics Letters*, *83*(5), pp. 990-992. doi.org/10.1063/1.1592303.
8. Nilsson, S.G., Borrise, X. and Montelius, L., 2004. Size effect on Young's modulus of thin chromium cantilevers. *Applied Physics Letters*, *85*(16), pp. 3555-3557. doi.org/10.1063/1.1807945.
9. Patti, A., Barretta, R., De Sciarra, F.M., Mensitieri, G., Menna, C. and Russo, P., 2015. Flexural properties of multi-wall carbon nanotube/polypropylene composites: Experimental investigation and nonlocal modeling. *Composite Structues*, *131*, pp. 282-289. doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.05.002.

10. Stempin, P. and Sumelka, W., 2020. Space-fractional Euler-Bernoulli beam model-theory and identification for silver nanobeam bending. *International Journal of Mechanical Sciences*, *186*, pp. 111-119. doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105902.
11. Kröner, E., 1967. Elasticity theory of materials with long cohesive forces. *International Journal of Solids and Structures*, *3*(5), pp. 731-742. doi.org/10.1016/0020-7683(67)90049-2.
12. Eringen, A.C., 1972. Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. *International Journal of Engineering Science*, *10*(5), pp. 425-435. doi.org/10.1016/0020-7225(72)90050-X.
13. Eringen, A.C. and Edelen, D., 1972. On nonlocal elasticity. *International Journal of Engineering Science*, *10*(3), pp. 233-248. doi.org/10.1016/0020-7225(72)90039-0.
14. Peddieson, J., Buchanan, G.R. and McNitt, R.P., 2003. Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science*, *41*(3-5), pp. 305-312. doi.org/10.1016/S0020-7225(02)00210-0.
15. Wang, Q. and Shindo, Y., 2006. Nonlocal continuum models for carbon nanotubes subjected to static loading. *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, *1*(4), pp. 663-680. doi.org/10.2140/jomms.2006.1.663.
16. Wang, Q. and Liew, K.M., 2007. Application of nonlocal continuum mechanics to static analysis of micro-and nano-structures. *Physics Letters A*, *363*(3), pp. 236-242. doi.org/10.1016/j.physleta.2006.10.093.
17. Abu-Hilal, M., 2003. Forced vibration of Euler–Bernoulli beams by means of dynamic Green functions. *Journal of Sound and Vibration*, *267*(2), pp. 191-207. doi.org/10.1016/S0022-460X(03)00178-0.
18. Ghannadiasl, A. and Mofid, M., 2014. Dynamic green function for response of timoshenko beam with arbitrary boundary conditions. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*, *42*(1), pp. 97-110. doi.org/10.1080/15397734.2013.836063.
19. Fernandez-Saez, J., Zaera, R., Loya, J.A. and Reddy, J., 2016. Bending of Euler–Bernoulli beams using Eringen's integral formulation: A paradox resolved. *International Journal of Engineering Science*, *99*, pp. 107-116. doi.org/10.1016/j.ijengsci.2015.10.013.
20. Kukla, S. and Zamojska, I., 2007. Frequency analysis of axially loaded stepped beams by Green's function method. *Journal of Sound and Vibration*, *300*(3-5), pp. 1034-1041. doi.org/10.1016/j.jsv.2006.07.047.
21. Kiani, K. and Pakdaman, H., 2018. Nonlocal vibrations and potential instability of monolayers from double-walled carbon nanotubes subjected to temperature gradients. *International Journal of Mechanical Sciences*, *144*, pp. 576-599. doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2018.06.018.
22. Kiani, K. and Pakdaman, H., 2020. On the nonlocality of bilateral vibrations of single-layered membranes from vertically aligned double-walled carbon nanotubes. *Physica Scripta*, *95*(3), p. 035221. doi.org/10.1088/1402-4896/ab43b6.
23. Yuan, Y., Xu, K. and Kiani, K., 2020. Torsional vibration of nonprismatically nonhomogeneous nanowires with multiple defects: Surface energy-nonlocal-integro-based formulations. *Applied Mathematical Modelling*, *82*, pp. 17-44. doi.org/10.1016/j.apm.2020.01.030.
24. Kiani, K. and Żur, K.K., 2021. Vibrations of double-nanorod-systems with defects using nonlocal-integral-surface energy-based formulations. *Composite Structures*, *256*, pp. 113028. doi.org/10.1016/j.compstruct.2020.113028.
25. Tuna, M. and Kirca, M., 2016. Exact solution of Eringen's nonlocal integral model for bending of Euler–Bernoulli and Timoshenko beams. *International Journal of Engineering Science*, *105*, pp. 80-92. doi.org/10.1016/j.ijengsci.2016.05.001.
26. Romano, G. and Barretta, R., 2016. Comment on the paper "Exact solution of Eringen's nonlocal integral model for bending of Euler–Bernoulli and Timoshenko beams" by Meral Tuna & Mesut Kirca. *International Journal of Engineering Science*, *100*(109), pp. 240-242. doi.org/10.1016/j.ijengsci.2016.09.009.
27. Polyanin, P. and Manzhirov, A.V., 2008. *Handbook of Integral Equations*. Chapman and Hall/CRC. doi.org/10.1201/9781420010558.
28. Delves, L.M. and Mohamed, J.L., 1985. *Computational Methods for Integral Equations*. CUP Archive.
29. Abdou, M.A., Mohamed, K.J. and Ismal, A.S., 2002. Toeplitz matrix and product Nystrom methods for solving the singular integral equation. *Le Matematiche*, *57*(1), pp. 21-37.
30. Tong, M.S., Qian, Z.G. and Chew, W.C., 2010. Nyström method solution of volume integral equations for electromagnetic scattering by 3D penetrable objects. *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, *58*(5), pp. 1645-1652. doi.org/10.1109/TAP.2010.2044350.
31. Occorsio, D. and Russo, M.G., 2014. Nyström methods for Fredholm integral equations using equispaced points. *Filomat*, *28*(1), pp. 49-63. doi.org/10.2298/FIL1401049O.
32. Bremer, J. and Gimbutas, Z., 2012. A Nyström method for weakly singular integral operators on surfaces. *Journal of Computational Physics*, *231*(14), pp. 4885-4903. doi.org/10.1016/j.jcp.2012.04.003.
33. Dick, J., Kritzer, P., Kuo, F.Y. and Sloan, I.H., 2007. Lattice-Nyström method for Fredholm integral equations of the second kind with convolution type kernels. *Journal of Complexity*, *23*(4-6), pp. 752-772. doi.org/10.1016/j.jco.2007.03.004.
34. Kanwal, R.P., 2012. *Generalized Functions: Theory and Applications*. Springer Science & Business Media.