حل عددی مسائل جابجایی خالص یک بعدی با استفاده از روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه بالا

ساman اسپهبدی نیا[1]، علی رحمانی فیروزجائی[2]*

۱- کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، ایران

۲- دانشیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، ایران

پست الکترونیکی نویسندگان:

۲- rahmani@nit.ac.ir

چکیده:

در این پژوهش، روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه‌ی بالا برای حل مسائل جابجایی خالص یک بعدی ارائه شده است. در حل عددی این گونه مسائل با روش گالرکین استاندارد، به علت غلبه‌ی جملات جابجایی بر جملات پخش، نتایج تحلیل ناپایدار می‌شوند. لذا می‌توان با افزودن جمله‌ای تحت عنوان جمله‌ی پایداری به معادله، تاثیر جملات جابجایی را کاهش داد. محدودیت توابع شکل گالرکین استاندارد در مشتق‌پذیری، سبب شده است که تنها استفاده از جملات پایداری با مشتق مرتبه‌ی اول در معادله میسر باشد. در روش ارائه شده، با استفاده از تابع شکل حداقل مربعات متحرک و تابع وزن نمایی، از جملات پایداری با مشتقات مرتبه‌ی بالا در معادلات استفاده می‌شود. برای بررسی این روش، دو مسئله‌ی مرجع جابجایی خالص یک بعدی، یعنی حرکت موج گوسی و ضربه‌ی قوچ کلاس یک، شبیه‌سازی شده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که با هر مرحله افزایش مرتبه‌ی جمله پایداری، دقت نتایج افزایش و نوسانات آن کاهش یافته است.

واژگان کلیدی:

مسائل جابجایی خالص، روش بدون‌شبکه تیلور گالرکین مرتبه بالا، روش اجزای‌محدود، جملات دقت مرتبه بالا

---

* علی رحمانی فیروزجائی، دانشیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، ایران.

ایمیل: rahmani@nit.ac.ir (نویسنده مسئول مقاله)

Numerical solution for one-dimensional pure-convection problems using the high-order Taylor-Galerkin element-free method

Saman Espahbodi Nia [١], Ali Rahmani Firouzjaei [٢]

١- Master of science, Babol Noshirvani University of Technology, Iran

٢- Associate Professor, Babol Noshirvani University of Technology, Iran.

Abstract:

The present study proposes a novel approach for solving one-dimensional pure convection problems, utilizing a high-order Taylor Galerkin element-free method. The standard Galerkin method has limitations in solving such problems due to the predominance of convective terms over diffusion terms, leading to unstable and fluctuating analysis results over time. To address this issue, high-order stabilizing terms can be added to the standard Galerkin method. However, due to the limitations in the derivability of the standard Galerkin shape function, it is not possible to incorporate high-order terms in the equation. In this context, the proposed high-order Taylor Galerkin element-free method enables the inclusion of stabilizing terms with high-order derivatives in the equations, utilizing the moving least-squares (MLS) shape function and exponential weight function, which exhibit the continuity of all their derivatives. This approach provides a promising solution for addressing the limitations of the finite element method and achieving more accurate and stable analysis results for one-dimensional pure convection problems. The accuracy of the numerical simulation was evaluated using two one-dimensional pure convection benchmark problems: the Gaussian wave motion problem and the classical water hammer problem, both analyzed up to the fourth-order. The results of the numerical simulations demonstrated that increasing the number of stabilizing terms led to improved accuracy and decreased fluctuations. Therefore, it can be concluded that the stability terms up to the fourth-order in the equations display acceptable accuracy for these two problems. This development has significant implications for the analysis of fluid mechanics and other related phenomena. By enabling a more comprehensive analysis of fluid dynamics, researchers can investigate complex fluid dynamics with greater precision and detail, yielding valuable insights into a wide range of physical processes. In conclusion, the proposed high-order Taylor Galerkin element-free method is a noteworthy advancement in numerical analysis, overcoming the limitations of the standard Galerkin method and demonstrating superior accuracy and stability in the solution of pure convection problems. This approach provides an efficient and accurate method for numerical analysis and has the potential to be extended to other areas of research, including computational fluid dynamics, heat transfer, and structural mechanics.

Keywords: Pure convection problem, High-order Taylor-Galerkin element-free method, Finite element method, High-order terms.

۱ ـ مقدمه و تاریخچه تحقیقات

معادلات کلی انتقال سیالات شامل دو جمله‌ی جابجایی[۲] و پخش[۳] می‌باشند که به صورت دیفرانسیلی نمایش داده می‌شوند. جمله جابجایی مرتبط با حرکت سیال از مکانی به مکان دیگر می‌باشد که هسته‌ی اصلی آن مولفه‌ی سرعت است و در طرف مقابل، جمله‌ی پخش مرتبط با حرکت نامنظم مولکول‌های سیال است که از نقطه‌ای با غلظت بالا به نقطه‌ای با غلظت پایین‌تر جریان پیدا می‌کنند. مشتقات اول معادله انتقال سیالات مربوط به جملات جابجایی و مشتقات دوم آن مربوط به جملات پخش می‌باشد. با توجه به دشواری‌های موجود در حل تحلیلی این گونه معادلات، روش‌های عددی بسیاری گسترش پیدا کردند تا تخمین مناسبی از جواب را بدست آورند.

یکی از ویژگی‌های مهم یک معادله دیفرانسیل در حل عددی، خاصیت خودالحاقی[۴] آن می‌باشد. خودالحاق بودن معادله سبب می‌شود که تقریب معادلات با روش گالرکین استاندارد (اجزای‌محدود) با حداقل خطا صورت گیرد. از طرفی عدم تامین این خصوصیت باعث ارائه‌ی نوسانات در نتایج و در ادامه ناپایدار شدن جواب در روش گالرکین استاندارد می‌شود. وجود جمله‌ی جابجایی در معادله‌ی انتقال سیالات سبب می‌شود که خاصیت خودالحاقی معادله از بین برود. در نتیجه روش‌های رایج عددی از جمله روش گارکین استاندارد، امکان تحلیل عددی مناسب این گونه مسائل را ندارند و با مشکلات عددی مواجه می‌شوند. این اتفاق در حالی می‌افتد که معمولا معادلات سازه‌ای با جابجایی‌های کوچک، به علت عدم وجود جمله جابجایی در معادلات خود، خودالحاق هستند و روش گالرکین استاندارد با حداقل میزان خطا نتیجه می‌دهد.

راه‌کارهای متنوعی برای از بین بردن تاثیر جمله‌ی جابجایی بر معادلات ارائه شده است. زینکوویچ و همکاران با اصلاح تابع وزن، روش پتروف گالرکین را پیشنهاد کردند [۱]. ماهیت این روش افزودن یک وزن مجازی مناسب به تابع وزن گالرکین استاندارد است که سبب پایدار شدن جواب و از بین رفتن نوسانات می‌شود. افزودن مفرط این وزن باعث هموار[۵] شدن بیش از اندازه‌ی نتایج شده، به همین علت رابطه‌ای برای یافتن مقدار بهینه برای این وزن مجازی ارائه شده است. این مقدار وزن مجازی با یک ضریب کنترل می‌شود و طبعا با در نظر گرفتن ضریب صفر، هیچ مقداری از آن به وزن گالرکین استاندارد اضافه نمی‌شود و روش همان روش گالرکین استاندارد باقی می‌ماند [۲]. گایمون و همکاران برای حذف جمله‌ی جابجایی از معادله، راه مستقیمی را ارائه کردند. آن‌ها از دو تابع دلخواه استفاده نمودند که ضرب آن‌ها در یکدیگر برابر با تابع وزن می‌شود. سپس با در نظرگیری یک مقدار مناسب برای تابع اول، جمله‌ی جابجایی را صفر و معادله را خودالحاق کردند و تابع دوم را به عنوان تابع شکل در نظر گرفتند. در نتیجه با خودالحاق شدن معادله، توانستند با همان تابع وزن گالرکین استاندارد معادله را بدون نوسان حل کنند [۳]. هیوز و بروکس روش پخش خطی[۶] را که یک روش اجزای‌محدودی برای مسائل جابجایی-پخش و جابجایی خالص می‌باشد را ارائه کردند [۴, ۵]. چندی بعد جانسون این روش را توسعه داد که یک اصلاح پتروف گالرکین از روش استاندارد گالرکین است. در این روش جمله‌ی پخش مجازی در جهت جریان اضافه می‌شود. این کار سبب می‌شود که پخش عمود بر جریان[۷] کمتری نسبت به روش‌های کلاسیک پخش مجازی ایجاد شود [۶, ۷]. داگلاس و راسل روش مشخصه اصلاح شده را برای معادلات دیفرانسیل جزئی جابجایی-پخش در حالت غیر پایستار[۸] ارائه کردند. این روش ترکیبی از روش اجزای‌محدود و اختلاف محدود با روش مشخصه‌ها است. این روش مشکل اعوجاج شبکه که در روش‌های جابجایی مسیر[۹] دیده می‌شوند را ندارد. این روش معادلات دیفرانسیل جزئی را متقارن و پایدار می‌کند، بنابراین می‌توان از گام‌های زمانی بزرگ بدون از دست دادن پایداری استفاده کرد [۸]. سیلیا و همکاران روش الحاق موضعی اویلری-لاگرانژی[۱۰] را برای حل معادلات دیفرانسل جزئی جابجایی-پخش یک بعدی معرفی کردند. این روش، یک راهکار کلی حل مشخصه برای معادلات

---

[۲] Convection
[۳] Diffusion
[۴] Self-adjoint
[۵] Damp
[۶] Streamline diffusion
[۷] Crosswind diffusion
[۸] Non-conservative
[۹] Forwarding track
[۱۰] Eulerian-Lagrangian localized adjoint

دیفرانسیل جزئی جابجایی-پخش ایجاد می‌کند و راه‌حل‌های عددی با دقت بالایی را بدون ایجاد نوسانات غیرفیزیکی اضافی حتی در گام‌های زمانی بزرگ ارائه می‌دهد [۹]. هیوز و همکاران روش حداقل مربعات گالرکین[۱۱] را برای مسائل جابجایی-پخش معرفی کردند. این روش ترکیبی از دو روش مجزای گالرکین استاندارد و روش حداقل مربعات است. نتایج عددی نشان می‌دهد که اگر از روش گالرکین استاندارد برای حل معادلات جابجایی-پخش استفاده شود، جواب‌ها نوسانی می‌شوند و اگر از روش حداقل مربعات استفاده گردد، جواب‌ها بیش از اندازه هموار می‌شوند. بنابراین ترکیب این دو روش با نسبت مناسب توسط ضریب کنترلی، می‌تواند دقت قابل قبولی در جواب حل عددی ایجاد کند [۱۰].

اکثر روش‌های ارائه شده که از وزن مجازی برای افزایش جمله پخش و کم اثر کردن جمله‌ی جابجایی استفاده می‌کنند، با استفاده از آزمون و خطاهای عددی و به صورت غیر مستقیم، به ضریب مناسب و نتیجه دلخواه رسیده‌اند. در کنار این روش‌های غیرمستقیم، روش‌های مستقیم برای حل معادلات جابجایی پخش وجود دارد که می‌توان برای نمونه به روش مشخصه گالرکین[۱۲] اشاره کرد. این روش با استفاده از خطوط مشخصه معادله را خودالحاق می‌سازد. بدین صورت می‌توان با استفاده از روش اجزای‌محدود بدون افزودن وزن مجازی، به جواب پایدار رسید [۱۱, ۱۲]. یکی دیگر از روش‌های مستقیم مورد استفاده، روش تیلورگالرکین[۱۳] است که توسط دونیا معرفی شده است. در این روش از بسط‌های تیلور پیشرو[۱۴] برای تولید تفاضل زمانی با دقت بالا استفاده می‌شود [۱۳]. از آنجایی امکان نوشتن بیشمار جمله در این بسط وجود دارد، می‌توان از جملات مرتبه‌ی بالاتر برای افزایش دقت نتایج استفاده کرد، اما با توجه به محدودیت مشتق‌پذیری تابع شکل گالرکین استاندارد، حل معادله تنها تا جملات مرتبه دوم ممکن است که پس از به شکل ضعیف[۱۵] درآوردن، به جملات مرتبه اول تبدیل می‌شود. ژانگ و همکاران روش بدون‌شبکه مشخصه‌ی گالرکین را برای حل معادله‌ی برگر ارائه کردند. با استفاده از روش مشخصه‌ها، معادله خودالحاق شده و امکان گسسته‌سازی مکانی با استفاده از روش گالرکین استاندارد فراهم می‌شود [۱۴]. ژانگ و همکاران یک روش گالرکین بدون‌شبکه نیمه لاگرانژی ارائه کردند که ترکیبی از روش بدون‌شبکه گالرکین[۱۶] و روش نیمه لاگرانژی است [۱۵]. این روش برای حل معادلات مشتق جزئی با جمله‌ی جابجایی خالص گسترش داده شده است. این روش از تمام مزیت‌های روش‌های بدون‌شبکه بهره می‌برد؛ بنابراین مشکلات پیاده‌سازی روش نیمه لاگرانژی در ردیابی به عقب و درونیابی نقطه خروج تا حد زیادی کاهش می‌یابد. لیو و همکاران روش حجم‌محدود مرتبه بالا در شبکه‌های بدون‌ساختار با استفاده از بازسازی تابع پایه شعاعی[۱۷] را ارائه کردند. در این روش دقت بهبود و پراکندگی و اتلاف عددی نیز کاهش می‌یابد که آن را به یک رویکرد امیدوارکننده برای به دست آوردن نتایج دقیق‌تر در شبیه‌سازی دینامیک سیالات محاسباتی تبدیل می‌کند [۱۶]. لی و همکاران روشی را پیشنهاد می‌کنند که تجزیه متعامد مناسب[۱۸] را با تحلیل ایزوهندسی پایدار با روش خط جریان رو به باد پتروف گالرکین[۱۹] ترکیب می‌کند. این رویکرد امکان نمونه‌سازی کارآمد مرتبه کاهش‌یافته مسائل پیچیده جابجایی خالص شامل جابجایی، پخش و اندرکنش را فراهم می‌کند. با گرفتن حالت‌های غالب و ترکیب شیوه‌های پایداری، روش پیشنهادی دقت و کارایی محاسباتی بهبود یافته‌ای را ارائه می‌دهد [۱۷]. گریمبرگ و همکاران این ادعا را به چالش کشیدند که نمونه‌های مرتبه کاهش یافته مبتنی بر طرح‌ریزی[۲۰] برای دینامیک سیالات محاسباتی از نظر عددی ناپایدار هستند. آن‌ها بیان کردند که بی‌ثباتی به دلیل برش مدال[۲۱] (فرآیند کاهش ابعاد یک سیستم با کنار گذاشتن برخی از حالت‌های مرتبه بالاتر) نیست، بلکه به دلیل چارچوب گالرکین مورد استفاده است. با استفاده از چارچوب پتروف-گالرکین، می‌توان نمونه‌های مرتبه کاهش‌یافته مبتنی بر طرح‌ریزی

[۱۱] Galerkin Least-Squares (GLS)
[۱۲] Characteristic-Galerkin
[۱۳] Taylor-Galerkin
[۱۴] Forward-time Taylor series expansions
[۱۵] Weak form
[۱۶] Element Free Galerkin (EFG)
[۱۷] Radial Basis Function (RBF)
[۱۸] Proper Orthogonal Decomposition (POD)
[۱۹] Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG)
[۲۰] Projection-based Reduced-Order Models (PROMs)
[۲۱] Modal truncation

پایدار و دقیقی را برای جریان‌های جابجایی خالص بدون نمونه‌های اضافی یا طراحی زیرفضا ساخت که منجر به عوامل افزایش سرعت قابل توجهی می‌شود [۱۸]. سینق و همکاران روش بدون‌شبکه محلی تثبیت شده[۲۲] با ناپیوستگی[۲۳] خفیف را برای معادلات دیفرانسیل جزئی ثابت و ناپایدار تحت جابجایی ارائه می‌کند. آزمایش‌های عددی دقت و کارایی این روش را نشان می‌دهد و آن را به یک رویکرد امیدوارکننده برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی جابجایی خالص با گوشه‌های تیز و ناپیوستگی پرش و عملکرد بهتر در مقایسه با روش‌های قدیمی مبتنی بر شبکه تبدیل می‌کند [۱۹]. جاود و همکاران یک راه‌حل تثبیت شده با استفاده از توابع پایه شعاعی در روش تفاضل محدود[۲۴] برای معادلات جریان جابجایی بر روی توزیع گره بدون‌شبکه ارائه کردند. این طرح شامل تقریب‌های مرتبه بالاتر، تعادل نیرو و تکانه، و طول مشخصه بر اساس عدد رینولدز و سرعت جریان است. تست‌های عددی اثربخشی آن را در از بین بردن نوسانات عددی و بهبود دقت، به‌ویژه در جریان‌های جابجایی خالص و اطراف ایرفویل در رینولدز ۱۰۰۰۰ نشان می‌دهند [۲۰].

در روش‌هایی که از توابع شکل گالرکین استاندارد بهره می‌برند، امکان توسعه‌ی جملات معادله به مراتب بالاتر وجود ندارد. با این حال روش ارائه شده در این پژوهش تحت عنوان روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه بالا[۲۵]، این امکان را فراهم می‌کند تا دقت و پایداری تحلیل، با افزودن جملات پایداری با مرتبه‌های بالا در گسسته‌سازی زمانی افزایش یابد. این روش با حل مستقیم و ارائه‌ی جملات پایداری به تعداد دلخواه در معادله، این امکان را می‌دهد تا دقت تحلیل افزایش یابد. در این روش ارائه شده با بهره‌گیری از تابع شکل حداقل مربعات متحرک[۲۶]، جملات پایداری مرتبه بالا ساخته می‌شود؛ زیرا تابع شکل حداقل مربعات متحرک محدودیت مشتق‌پذیری ندارد و برای هر نقطه دلخواه قابل محاسبه است. بهره‌گیری از تابع وزن نمایی در محاسبات تابع شکل حداقل مربعات متحرک این امکان را می‌دهد تا به علت پیوستگی تمام مشتقات آن، مشتق‌پذیری به بدون محدودیت انجام شود. به همین علت می‌توان دقت گسسته‌سازی زمانی را تا میزان مورد نیاز افزایش داد که این مزیت بسته به پیچیدگی مسئله بسیار کاربردی است.

در ادامه ابتدا معادله انتقال سیال و نحوه‌ی گسسته‌سازی زمانی و مکانی توسط روش تیلورگالرکین بیان می‌شود. سپس نتایج حاصل از حل دو مسئله جابجایی خالص یک بعدی بررسی می‌شود. مسئله اول مربوط به حرکت یک موج گوسی و مسئله دوم مربوط به پدیده‌ی ضربه قوچ کلاسیک است. هر دو مسئله با روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه بالا شبیه‌سازی و با روش اجزای‌محدود مشخصه گالرکین مقایسه می‌شوند.

۲ ــ معادلات حاکم

در این بخش برای گسسته‌سازی زمانی و مکانی ابتدا معادله جابجایی خالص استخراج می‌شود و سپس با معرفی تابع شکل و وزن استفاده شده، گسسته‌سازی صورت می‌پذیرد. در حالت کلی قالب معادله انتقال سیال یک بعدی با جابجایی خالص به صورت رابطه (۱) است:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{\partial(U\phi)}{\partial x}=0 \qquad (۱)$$

در این رابطه U سرعت معلوم، ϕ کمیت اسکالر منتقل شده توسط این سرعت، x متغیر مکان و t متغیر زمان می‌باشند. با بسط مشتق در رابطه (۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\underline{U\frac{\partial\phi}{\partial x}}+\phi\frac{\partial U}{\partial x}=0 \qquad (۲)$$

عبارتی که در رابطه‌ی (۲) زیر آن خط کشیده شده است، جمله‌ای است که معادله را از خودالحاقی خارج می‌کند. حال برای ساده‌سازی بیشتر معادله می‌توان فرض کرد که واگرایی[۲۷] جریان برابر صفر باشد. بنابراین جمله‌ی سوم رابطه (۲) برابر با صفر می‌شود. در نتیجه می‌توان رابطه (۲) را به صورت رابطه (۳) ساده کرد.

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+U\frac{\partial\phi}{\partial x}=0 \qquad (۳)$$

[۲۲] Stabilized Local Meshless Method (SLMM)
[۲۳] Shock
[۲۴] Radial Basis Functions in Finite Difference Method (RBF-FD)
[۲۵] High-order Taylor-Galerkin Meshless Method
[۲۶] Moving Least-Squares (MLS)
[۲۷] Divergence

این رابطه نشان‌دهنده معادله جابجایی خالص یک بعدی با یک متغیر وابسته می‌باشد.

۲ ــ ۱ ــ گسسته‌سازی زمانی

در روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه بالا، برای گسسته‌سازی زمانی از بسط تیلور استفاده می‌شود. بسط تیلور در حالت صریح[۲۸] برای جملات تا مشتق مرتبه چهارم به صورت رابطه (۴) است.

$$\phi^{n+1}=\phi^{n}+\Delta t\frac{\partial\phi^{n}}{\partial t}+\frac{\Delta t^{2}}{2}\frac{\partial^{2}\phi^{n}}{\partial t^{2}}+\frac{\Delta t^{3}}{6}\frac{\partial^{3}\phi^{n}}{\partial t^{3}}+\frac{\Delta t^{4}}{24}\frac{\partial^{4}\phi^{n}}{\partial t^{4}}+O(\Delta t^{5}) \tag{۴}$$

حال می‌توان طبق رابطه (۳) عبارت‌های زیر را نوشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi^{n}}{\partial t}&=\left[-U\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]^{n}\\ \frac{\partial^{2}\phi^{n}}{\partial t^{2}}&=\frac{\partial}{\partial t}\left[-U\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]^{n}\\ \frac{\partial^{3}\phi^{n}}{\partial t^{3}}&=\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}\left[-U\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]^{n}\\ \frac{\partial^{4}\phi^{n}}{\partial t^{4}}&=\frac{\partial^{3}}{\partial t^{3}}\left[-U\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]^{n}\end{aligned} \tag{۵}$$

با جایگذاری روابط (۵) در رابطه‌ی (۴) و با فرض U به عنوان مقداری ثابت، جمله‌ی $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ را می‌توان با جمله‌ی $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ جابجا کرد. رویکرد جایگذاری جمله‌ی $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ با جمله $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ و همینطور بازنویسی رابطه (۳) به جای $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ تا جایی ادامه پیدا می‌کند تا تمام جملات دارای مشتقات زمانی تبدیل به جملاتی با مشتقات مکانی شوند. در نهایت رابطه‌ی (۶) بدست می‌آید.

$$\phi^{n+1}-\phi^{n}=-\Delta t\left[U\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]^{n}+\frac{\Delta t^{2}}{2}\left[U^{2}\frac{\partial^{2}\phi}{\partial x^{2}}\right]^{n}-\frac{\Delta t^{3}}{6}\left[U^{3}\frac{\partial^{3}\phi}{\partial x^{3}}\right]^{n}+\frac{\Delta t^{4}}{24}\left[U^{4}\frac{\partial^{4}\phi}{\partial x^{4}}\right]^{n} \tag{۶}$$

همانطور که ملاحظه می‌شود، جملات مرتبه بالای دوم، سوم و چهارم به معادله‌ی مرتبه اول اضافه شده است.

۲ ــ ۲ ــ گسسته‌سازی مکانی

۲ ــ۲ ــ ۱ ــ تابع شکل حداقل مربعات متحرک

پیش از گسسته‌سازی مکانی لازم است روابط تابع شکل حداقل مربعات متحرک و تابع وزن مورد استفاده مورد بحث قرار گیرد. برای تقریب تابع مجهول u^{h}، رابطه (۷) در نظر گرفته می‌شود:

$$u^{h}(x)=\sum_{i=1}^{n_p}p_i(x)a_i(x)\equiv p^{T}(x)a(x) \tag{۷}$$

در این رابطه $p^{T}(x)$ بردار توابع پایه و $a(x)$ بردار ضرایب می‌باشد. بردار ضرایب $a(x)$ را می‌توان به صورت رابطه (۸) نوشت:

$$a^{T}(x)=\{a_1(x),a_2(x),a_3(x),\dots,a_{n_p}(x)\} \tag{۸}$$

در رابطه (۷)، n_p تعداد جملات بردار توابع پایه $p^{T}(x)$ است که معمولا با استفاده از چند جمله‌ای‌های خیام-پاسکال نوشته می‌شود. بردار توابع پایه چندجمله‌ای از مرتبه n_p در فضای یک بعدی به صورت رابطه (۹) می‌باشد:

$$\begin{aligned}p^{T}(x)&=\{p_0(x),p_1(x),p_2(x),\dots,p_{n_p}(x)\}\\&=\{1,x,x^{2},\dots,x^{n_p}\}\end{aligned} \tag{۹}$$

برای محاسبه بردار ضرایب $a(x)$، تابع خطای وزن‌دار زیر کمینه می‌شود:

$$\begin{aligned}J&=\sum_{I}^{m}W(x-x_I)\left[u^{h}(x,x_I)-u(x_I)\right]^{2}\\&=\sum_{I}^{m}W(x-x_I)\left[p^{T}(x_I)a(x)-u(x_I)\right]^{2}\end{aligned} \tag{۱۰}$$

[۲۸] Explicit

در رابطه‌ی بالا x_I به عنوان مختصات گره مورد نظر، x به عنوان مختصات نقطه مورد نظر، m تعداد گره‌ها، u_I مقدار پارامتر گرهی در گره x_I و $W\left(x-x_I\right)$ تابع وزن می‌باشد. حال با قرار دادن $\frac{\partial J}{\partial a}=0$ می‌توان نوشت:

$$\mathrm{A}(x)a(x)=\mathrm{B}(x)\mathrm{U}_s \qquad (۱۱)$$

در رابطه بالا، U_s برداری است که شامل تمام پارامترهای گرهی نقاط درون شعاع موثر می‌باشد.

$$\mathrm{U}_s=\{u_1,u_2,u_3,\ldots,u_m\}^T \qquad (۱۲)$$

ماتریس‌های $\mathrm{A}(x)$ و $\mathrm{B}(x)$ به صورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شوند:

$$\mathrm{A}(x)=\sum_{I=1}^{m}W\left(x-x_I\right)p\left(x_I\right)p^T\left(x_I\right) \qquad (۱۳)$$

$$\mathrm{B}(x)=\left[B_1,B_2,B_3,\ldots,B_m\right],\quad B_I=W\left(x-x_I\right)p\left(x_I\right) \qquad (۱۴)$$

لازم به ذکر است که با توجه به اینکه $p\left(x_I\right)$ یک بردار $n\times1$ و $p^T\left(x_I\right)$ یک بردار $1\times n$ است، $\mathrm{A}(x)$ یک ماتریس $n\times n$ خواهد شد. با حل معادله (۱۱)، $a(x)$ به صورت رابطه (۱۵) بدست می‌آید.

$$a(x)=\mathrm{A}^{-1}(x)\mathrm{B}(x)\mathrm{U}_s \qquad (۱۵)$$

با جایگذاری معادله (۱۵) در معادله (۷)، تابع تقریب به شکل رابطه (۱۶) نوشته می‌شود:

$$u^h(x)=\sum_{I=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_p}p_j(x)\left(\mathrm{A}^{-1}(x)\mathrm{B}(x)\right)_{jI}u_I=\sum_{I=1}^{m}N_I(x)u_I=N^T(x)\mathrm{U}_s \qquad (۱۶)$$

در رابطه بالا، $p_j(x)$ مربوط به جمله j ام $p(x)$ است. $N_I(x)$ تابع شکل حداقل مربعات متحرک گره I می‌باشد و به صورت رابطه (۱۷) تعریف می‌شود:

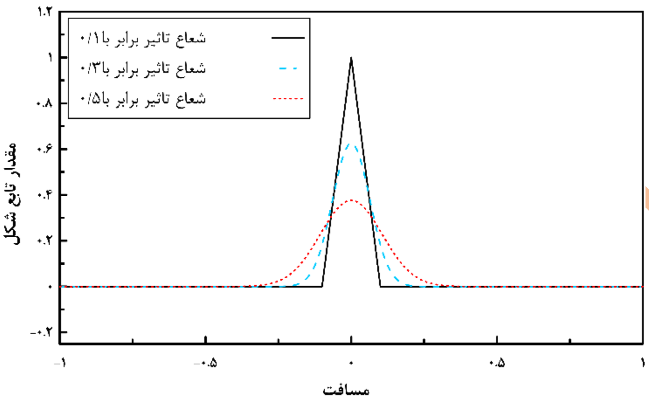
$$N_I(x)=\sum_{j=1}^{n_p}p_j(x)\left(\mathrm{A}^{-1}(x)\mathrm{B}(x)\right)_{jI}=p^T\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}_I \qquad (۱۷)$$

به این ترتیب بردار توابع شکل حداقل مربعات متحرک برای m گره به صورت رابطه (۱۸) تعریف می‌شود:

$$N(x)=\left[N_1(x),N_2(x),N_3(x),\ldots,N_m(x)\right] \qquad (۱۸)$$

لازم به بیان است به طور کلی تابع شکل حداقل مربعات متحرک شرط دلتای کرونکر را برآورده نمی‌کند [۲۱].

در شکل ۱ تابع شکل حداقل مربعات متحرک با شعاع‌های تاثیر مختلف برای گره‌ی $x=0$ رسم شده است. تعداد ۲۱ گره با فواصل مکانی ۰/۱ در دامنه ۱- تا ۱+ قرار گرفته‌اند و بردار تابع پایه به صورت $p^T(x)=\{1,x\}$ در نظر گرفته شده است.



شکل ۱- تابع شکل حداقل مربعات متحرک با شعاع‌های تاثیر مختلف برای گره‌ی $x=0$

۲ــ۲ــ تابع وزن

تابع وزن پارامتری موثر در تابع شکل حداقل مربعات متحرک است. این تابع به صورت مستقیم در ماتریس‌های $\mathrm{A}(x)$ و $\mathrm{B}(x)$ و در پیوسته و هموار بودن تابع شکل نقش دارد. تابع وزن باید دارای چهار ویژگی باشد [۲۱]:

۱- برای نقاط درون دامنه تاثیر، $W\left(x-x_I\right)$ بزرگ‌تر از صفر باشد.

۲- برای نقاط خارج از دامنه تاثیر، $W\left(x-x_I\right)$ برابر با صفر باشد.

۳- با دور شدن از نقطه مورد نظر، تابع به شکل یکنواخت و هموار کاهش یابد.

۴- تابع به اندازه‌ی کافی، خصوصا در مرزها هموار باشد.

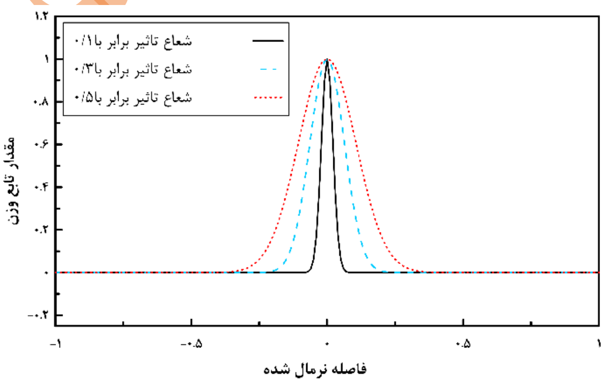
در این پژوهش پیوستگی مرتبه چهارم تابع شکل نیاز است، به همین علت تابع وزن نمایی مورد استفاده قرار گرفته است که تمامی مشتقات آن پیوسته است؛ بدین صورت امکان حل معادلات مرتبه بالا ممکن می‌شود. روابط تابع وزن نمایی به صورت رابطه (۱۹) است:

$$W\left(x-x_I\right)\equiv W\left(\bar{d}\right)=\begin{cases} e^{-\left(\bar{d}/0.3\right)^2} & \bar{d}\le 1 \\ 0 & \bar{d}>1 \end{cases} \qquad (۱۹)$$

در این رابطه $\bar{d}$ تحت عنوان فاصله نرمال شده، به عنوان پارامتری است که به صورت رابطه (۲۰) تعیین می‌شود:

$$\bar{d}=\frac{\left|x-x_I\right|}{d_w}=\frac{d}{d_w} \qquad (۲۰)$$

در رابطه بالا d_w بیانگر شعاع تاثیر نقطه مورد نظر است [۲۱]. در شکل ۲ تابع وزن نمایی با شعاع‌های تاثیر مختلف در دامنه ۱- تا ۱+ نشان داده شده است.



شکل ۲- تابع وزن نمایی با شعاع‌های تاثیر مختلف

۲ـ۲ـ۳ـ گسسته‌سازی مکانی گالرکین

گسسته‌سازی مکانی با روش گالرکین انجام می‌شود. ابتدا برای تقریب متغیر می‌توان نوشت:

$$\phi^{n+1}=\sum N_b\bar{\phi}^{n+1} \qquad \phi^{n}=\sum N_b\bar{\phi}^{n} \qquad (۲۱)$$

رابطه (۶) را می‌توان به صورت رابطه (۲۲) نوشت:

$$\phi^{n+1}-\phi^{n}+\Delta t\left[U\frac{\partial\phi}{\partial x}\right]^n-\frac{\Delta t^2}{2}\left[U^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right]^n+\frac{\Delta t^3}{6}\left[U^3\frac{\partial^3\phi}{\partial x^3}\right]^n-\frac{\Delta t^4}{24}\left[U^4\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}\right]^n=0 \qquad (۲۲)$$

حال باید مقادیر روابط (۲۱) در رابطه (۲۲) جایگذاری شوند. صورت کلی رابطه باقی‌مانده وزن‌دار به شکل رابطه (۲۳) است:

$$\int N_a R\left(x\right)dx=0 \qquad (۲۳)$$

که در این رابطه در وضعیتی که هیچ‌گونه جمله‌ی منبع در مسئله وجود نداشته باشد ($Q=0$)، $R\left(x\right)$ برابر با رابطه (۲۴) است.

$$\begin{aligned} R\left(x\right)=&\sum N_b\bar{\phi}^{n+1}-\sum N_b\bar{\phi}^{n} \\ &+\Delta t\left[U\frac{\partial\left(\sum N_b\bar{\phi}^n\right)}{\partial x}\right]^n \\ &-\frac{\Delta t^2}{2}\left[U^2\frac{\partial^2\left(\sum N_b\bar{\phi}^n\right)}{\partial x^2}\right]^n \\ &+\frac{\Delta t^3}{6}\left[U^3\frac{\partial^3\left(\sum N_b\bar{\phi}^n\right)}{\partial x^3}\right]^n \\ &-\frac{\Delta t^4}{24}\left[U^4\frac{\partial^4\left(\sum N_b\bar{\phi}^n\right)}{\partial x^4}\right]^n=0 \end{aligned} \qquad (۲۴)$$

با حل انتگرال باقی‌مانده وزن‌دار و مرتب‌سازی آن می‌توان رابطه (۲۵) را نوشت:

$$\int N_a N_b dx \times \Delta\bar{\phi}^n =$$

$$-\Delta t\left(\int N_a \left[U\frac{\partial N_b \bar{\phi}^n}{\partial x}\right]^n dx\right)\bar{\phi}^n$$

$$+\frac{\Delta t^2}{2}\left(\int N_a \left[U^2\frac{\partial^2 \left(N_b \bar{\phi}^n\right)}{\partial x^2}\right]^n dx\right)\bar{\phi}^n \qquad (۲۵)$$

$$+\frac{\Delta t^3}{6}\left(\int N_a \left[U^3\frac{\partial^3 \left(N_b \bar{\phi}^n\right)}{\partial x^3}\right]^n dx\right)\bar{\phi}^n$$

$$-\frac{\Delta t^4}{24}\left(\int N_a \left[U^4\frac{\partial^4 \left(N_b \bar{\phi}^n\right)}{\partial x^4}\right]^n dx\right)\bar{\phi}^n$$

رابطه (۲۵) را می‌توان به شکل رابطه (۲۶) نوشت:

$$M \times \Delta\bar{\phi}^n = -\Delta t\left(C\right)\bar{\phi}^n + \frac{\Delta t^2}{2}\left(K_u\right)\bar{\phi}^n - \frac{\Delta t^3}{6}\left(K_{uu}\right)\bar{\phi}^n + \frac{\Delta t^4}{24}\left(K_{uuu}\right)\bar{\phi}^n \qquad (۲۶)$$

که طبق رابطه (۲۷) برابر هستند با:

$$M = \int N_a N_b dx$$
$$C = \int N_a U \frac{\partial N_b}{\partial x} d$$
$$K_u = \int N_a U^2 \frac{\partial^2 N_b}{\partial x^2} dx \qquad (۲۷)$$
$$K_{uu} = \int N_a U^3 \frac{\partial^3 N_b}{\partial x^3} dx$$
$$K_{uuu} = \int N_a U^4 \frac{\partial^4 N_b}{\partial x^4} dx$$

رابطه (۲۶) به شکل رابطه (۲۸) ساده می‌شود:

$$M \times \Delta\bar{\phi}^n = \left[-\Delta t C + \underline{\frac{\Delta t^2}{2}K_u - \frac{\Delta t^3}{6}K_{uu} + \frac{\Delta t^4}{24}K_{uuu}}\right]\bar{\phi}^n \qquad (۲۸)$$

عبارتی که در رابطه (۲۸) زیر آن خط کشیده شده است، بیانگر جملات مرتبه دقت بالای معادله است. همانطور که پیش‌تر گفته شد، روش گالرکین استاندارد با معادلات مرتبه اول، توانایی حل مسائل جابجایی خالص را ندارد و همیشه ناپایدار است. این نکته نیز قابل توجه است که در روش اجزای‌محدود مشخصه گالرکین، قابلیت توسعه‌ی معادلات تا مرتبه‌ی چهارم (و به طور کلی تا مرتبه‌های بالاتر از دو) وجود ندارد و تنها ممکن است که تا جمله‌ی مرتبه دوم نوشته شود. این جمله پس از به شکل ضعیف درآمدن، به مرتبه‌ی اول تبدیل می‌شود و با تابع شکل اجزای‌محدود قابل حل است. اما با استفاده از روش توسعه داده شده‌ی بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه بالا، می‌توان جملات را تا مرتبه‌ی دلخواه نوشت و دقت تحلیل را افزایش داد. با توجه به پیچیدگی مسئله و نیاز به دقت بالاتر، می‌توان جملات مرتبه بالا را افزایش یا کاهش داد. در روش اجزای‌محدود مشخصه گالرکین به علت ساده‌تر بودن تابع شکل، محاسبات عددی بسیار سریع‌تر از روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین صورت می‌پذیرد. همچنین استفاده از مرتبه‌های دقت بالاتر به حجم محاسبات عددی می‌افزاید. لازم به ذکر است برای حالت‌های دو و سه بعدی نیاز است توابع شکل به همراه مشتقات آن دو و سه بعدی شوند که به طور قابل ملاحظه‌ای به فرآیند زمان محاسبات می‌افزایند. با این حال، پرداختن این هزینه‌ی محاسباتی موجب افزایش دقت در تحلیل عددی مسائل نسبت به روش مشخصه گالرکین می‌شود.

۳ ـ نتایج و بحث

برای بررسی تاثیر جملات مرتبه‌ی بالای روش تیلورگالرکین و مقایسه‌ی آن با روش اجزای‌محدود مشخصه‌ی گالرکین، ابتدا مسئله مرجع موج گوسی مورد تحلیل قرار گرفته است [۲۱]. این مسئله با مرتبه‌های مختلف جمله‌ی پایداری، در شعاع‌های تاثیر متفاوت حل شده است؛ تا اثر جملات با مشتق مرتبه بالا را در روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین نشان دهد. در انتهای مسئله‌ی اول نیز خطاهای هر روش نشان داده شده است. مسئله دوم بررسی شده، مسئله‌ی مرجع ضربه‌ی قوچ کلاسیک است. نتایج روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه بالا و روش اجزای‌محدود مشخصه گالرکین مورد مقایسه قرار گرفتند.

۳ ـ ۱ ـ مسئله موج گوسی

مسئله اول مربوط به حرکت یک موج گوسی است که متغیر ϕ در آن، یک متغیر اسکالر و نشان دهنده‌ی غلظت سیال است. از آنجایی که هدف پژوهش بررسی روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه‌ی بالا در یک بعد است، بنابراین حرکت موج در بعد افقی با سرعت ثابت در نظر گرفته شده است. معادله حاکم این مسئله در یک بعد به صورت رابطه (۲۹) است:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+U\frac{\partial \phi}{\partial x}=0 \qquad (۲۹)$$

در این رابطه، U برابر با واحد در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی دریچله در مرزها نیز به صورت رابطه (۳۰) است:

$$\phi(x,t)=0 \quad , \quad x=0 \qquad (۳۰)$$

همچنین دامنه مسئله در حالت اول به صورت $x=(-1,+1)$ و در حالت دوم مسئله برای شرایط طولانی $x=(-1,+10)$ می‌باشد. شرایط اولیه نیز برابر است با:

$$\phi(x,t=0)=e^{-\frac{r^2}{2\alpha^2}} \qquad (۳۱)$$

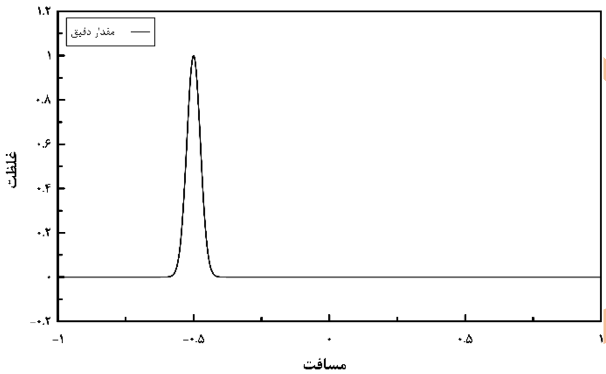
که در رابطه بالا $r=x-x_0$، فاصله‌ی بین نقطه x و نقطه x_0 برابر ۰/۵- می‌باشد. همچنین ضریب α مقدار ثابتی است که اندازه موج گوسی را کنترل می‌کند که برابر با ۰/۰۲۵ در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است هر چه مقدار آلفا (α) کمتر باشد، موجی با شیب تندتر در تحلیل تشکیل می‌شود و شبیه‌سازی عددی آن سخت‌تر می‌شود. برای تحلیل، در حالت اول پس از گذشت مدت زمان ۱/۲ ثانیه و در حالت دوم پس از گذشت ۱۰ ثانیه، نتایج روش‌های مختلف با مقدار دقیق مقایسه می‌شوند تا میزان خطای تحلیل عددی آن‌ها مشخص شود. برای اندازه‌گیری خطا، از نرم خطای L_2 استفاده شده است.

$$L_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\left(\phi_i^{exact}-\phi_i^{numerical}\right)^2} \qquad (۳۲)$$

دامنه محاسباتی به ۲۰۰ سلول پس‌زمینه تقسیم شده که شامل ۲۰۱ گره با فاصله‌های Δx برابر ۰/۰۱ است. درون هر کدام از این سلول‌های پس‌زمینه، از ۱۰ نقطه‌ی گوس استفاده شده است.

همچنین گام زمانی (Δt) برابر با ۰/۰۰۵ ثانیه در نظر گرفته شده است. برای برداشت جامع‌تر از نتایج، نسبت عدد کورانت هر مسئله بیان شده است. در ادامه نتایج روش اجزای‌محدود مشخصه گالرکین و روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه دوم، سوم و چهارم در حالت آلفا برابر با ۰/۰۲۵ پس از گذشت ۱/۲ ثانیه از حالت اولیه نمایش داده می‌شود. هر مرحله با سه شعاع تاثیر متفاوت تحلیل می‌شود و میزان خطای هر شعاع تاثیر مشخص شده است. همچنین نتایج این روش با روش فرام[۲۹] و روش پیشرو در زمان و پسرو در مکان[۳۰] مقایسه شده است.

برای بررسی، ابتدا نتایج اجزای‌محدود مشخصه گالرکین مورد تحلیل قرار گرفته است. در حالت ابتدایی با اعمال شرایط اولیه شکل ۳ حاصل شده است.



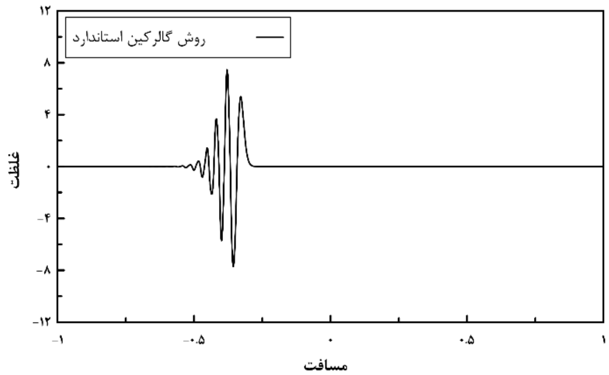
شکل ۳- شرایط اولیه در مسئله حرکت موج گوسی

در روش‌های معمول مانند روش گالرکین استاندارد (اجزای‌محدود)، نتایج پس از گذشت چند گام زمانی نوسانی شده و در نهایت ناپایدار می‌گردند. در شکل ۴ نتیجه روش گالرکین استاندارد پس از گذشت تنها ۰/۲ ثانیه مشخص شده است.

---

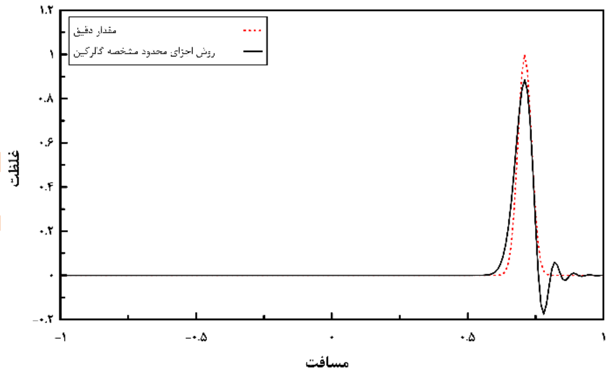
۲۹ Fromm

۳۰ FTBS (Forward Time Backward Space)



شکل ۴- نتیجه جواب روش گالرکین استاندارد گالرکین با کورانت ۰/۲۵ پس از گذشت ۰/۲ ثانیه در مسئله حرکت موج گوسی

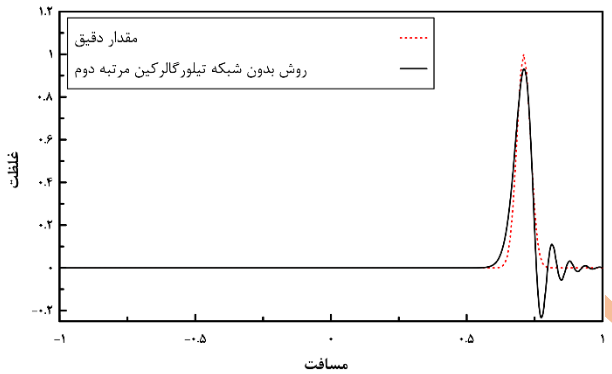
در ادامه نتیجه‌ی جواب روش اجزای‌محدود مشخصه گالرکین پس از گذشت ۱/۲ ثانیه در شکل ۵ آمده است.



شکل ۵- مقایسه جواب دقیق و اجزای‌محدود مشخصه گالرکین با کورانت ۰/۲۵ پس از گذشت ۱/۲ ثانیه در مسئله حرکت موج گوسی

مقدار خطای روش اجزای‌محدود مشخصه گالرکین بر اساس رابطه‌ی (۳۲)، برابر با ۰/۵۳۲ می‌باشد. با توجه به شکل می‌توان مشاهده کرد که روش اجزای‌محدود مشخصه گالرکین با گذشت زمان مقدار زیادی هموارشدگی قبل از رسیدن به غلظت حداکثر و مقداری نوسان بعد از آن دارد و توان شبیه‌سازی موج با دقت بالا را ندارد؛ اما با این وجود اضافه کردن جمله مرتبه دوم به معادلات سبب پایداری نتایج برای این مسئله شده است و بهبود قابل توجهی نسبت به روش گالرکین استاندارد مشاهده می‌شود. در ادامه با استفاده از روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه بالا، مرحله به مرحله با افزایش مرتبه‌ی جملات در معادله، بررسی می‌شود که نتایج چگونه تغییر می‌کند.

مقادیر خروجی برای روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه دوم با شعاع تاثیر دو برابر در شکل ۶ آمده است. معمولا این مقدار شعاع تاثیر، نتایج خوبی برای مسائل حاصل می‌کند [۱۶]. طبق تجربه استفاده از شعاع‌های تاثیر بزرگ به علت درگیر کردن نقاط دورتر در محاسبات، سبب کاهش دقت نتایج می‌شود؛ با این حال این موضوع به پیچیدگی مسئله و دقت مرتبه استفاده شده بستگی دارد. همچنین استفاده از شعاع‌های تاثیر بسیار کوچک باعث بد وضع شدن ماتریس A شده و خطای وارون آن زیاد و حتی در شرایطی وارون‌ناپذیر می‌گردد.



شکل ۶: مقایسه نتایج جواب دقیق و روش بدون شبکه تیلورگالرکین مرتبه دوم در زمان ۱.۲ ثانیه و نسبت شعاع تاثیر به فاصله گرهی دو برابر (کورانت ۰/۵)

همچنین با بررسی شکل ۶ جدول خطای حالت مرتبه دوم در حالت شعاع تاثیر دو برابر آمده است (جدول ۱).

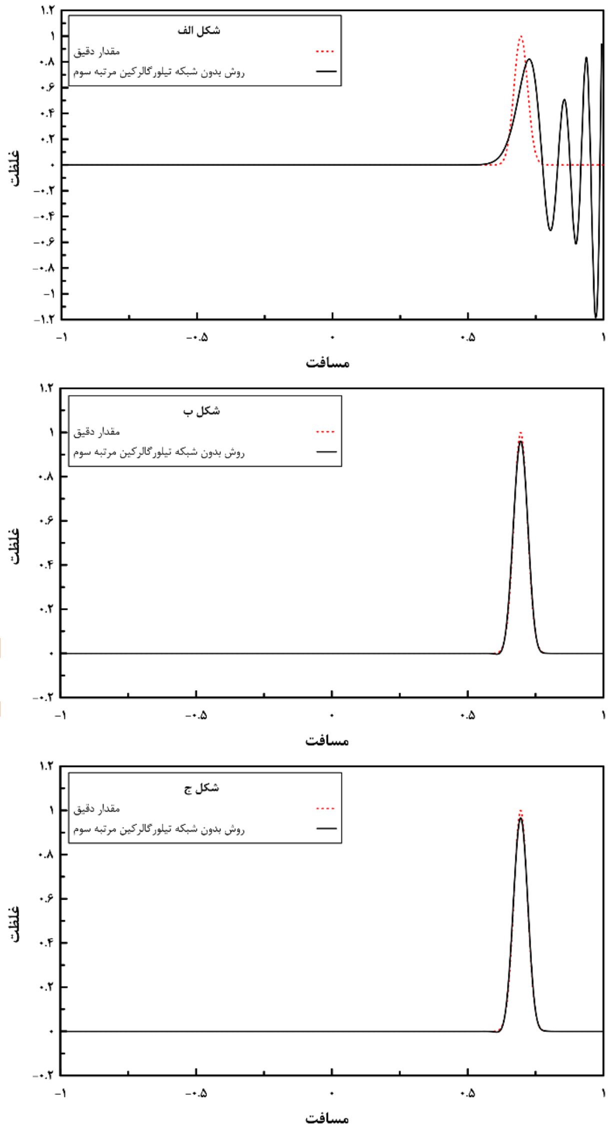
جدول ۱: مقادیر خطای روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه دوم در حالت آلفا برابر ۰/۰۲۵

مقدار خطا	مقدار شعاع تاثیر
۰/۵۰۳۸۳۷۰۷۹	دو برابر فاصله گره‌ها

از آنجایی که روش اجزای‌محدود مشخصه گالرکین از فرم ضعیف معادلات مرتبه دوم استفاده می‌کند، بنابراین انتظار می‌رود که لازم به بیان است که در روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین، پارامتر شعاع تاثیر بسیار مورد اهمیت است و عدم انتخاب صحیح این پارامتر منجر به نتایج نامناسب می‌شود. لذا باید نتیجه‌ی روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه دوم در شعاع تاثیر مناسب (در اینجا دو برابر فاصله گرهی) با روش اجزای‌محدود مشخصه گالرکین مقایسه شود.

نتایج برای روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه سوم با سه شعاع تاثیر مختلف در شکل ۷ آمده است. با بررسی شکل ۷ جدول خطای

حالت مرتبه سوم نسبت به جواب دقیق در سه حالت شعاع تاثیر متفاوت آمده است (جدول ۲).



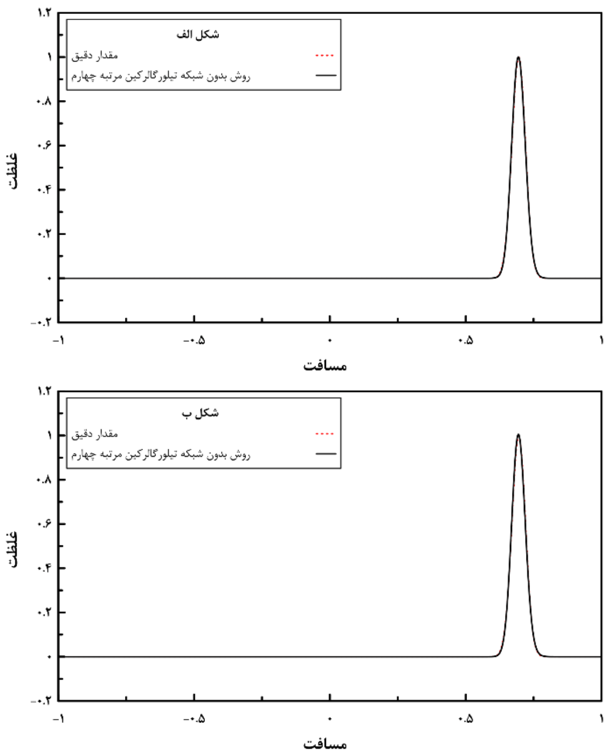
شکل ۷: مقایسه نتایج جواب دقیق و روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه سوم با کورانت ۰/۵ در زمان ۱.۲ ثانیه و نسبت شعاع تاثیر به فاصله گرهی: (الف) دو برابر؛ (ب) سه برابر؛ (ج) چهار برابر

جدول ۲: مقادیر خطای روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه سوم در حالت آلفا برابر ۰/۰۲۵ در مقادیر مختلف شعاع تاثیر

مقدار شعاع تاثیر	مقدار خطا
دو برابر فاصله گره‌ها	۹/۴۹۵۲۲۱۶۶۶
سه برابر فاصله گره‌ها	۰/۲۳۴۱۶۳۱۹۷
چهار برابر فاصله گره‌ها	۰/۲۰۴۶۵۵۲۱۱

نتایج نشان می‌دهد که با افزایش جملات پایداری مرتبه سوم، تاثیر جملات جابجایی بر معادله کاهش پیدا کرده و دقت به میزان قابل توجهی نسبت به حالت مرتبه دوم افزایش یافته است؛ اما همچنان مقداری هموارشدگی مشاهده می‌شود، به طوری که قله‌ی موج در حالت دقیق اندکی بالاتر از حالت مرتبه سوم است. همچنین این موضوع قابل مشاهده است که برخلاف حالت مرتبه دوم که در شعاع تاثیر دو برابر فاصله‌ی گرهی نتایج مناسبی نشان می‌داد، در حالت مرتبه سوم نیاز به شعاع تاثیر بزرگ‌تری برای ارائه‌ی نتایج مناسب می‌باشد؛ زیرا با افزایش دقت مرتبه، نیاز به نقاط بیشتری برای تحلیل می‌باشد.

نتایج برای روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه چهارم با دو شعاع تاثیر مختلف به صورت شکل ۸ است. با بررسی شکل ۸ جدول خطای حالت مرتبه چهارم نسبت به جواب دقیق در سه حالت شعاع تاثیر متفاوت آمده است (جدول ۳). این نکته نیز قابل ذکر است که نتایج در شعاع تاثیر دو برابری، به علت ناپایدار شدن شبیه‌سازی، نشان داده نشده است؛ زیرا برای محاسبه تابع مرتبه چهارم به تعداد نقاط بیشتری احتیاج است که در شعاع‌های تاثیر پایین تامین نمی‌شود.



شکل ۸: مقایسه نتایج جواب دقیق و روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه چهارم با کورانت ۰/۵ در زمان ۱.۲ ثانیه و نسبت شعاع تاثیر به فاصله گرهی: (الف) سه برابر؛ (ب) چهار برابر

جدول ۳: مقادیر خطای روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه چهارم در حالت آلفا برابر ۰/۰۲۵ در مقادیر مختلف شعاع تاثیر

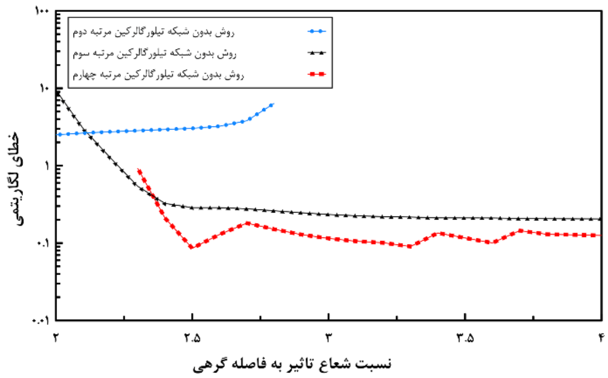
مقدار شعاع تاثیر	مقدار خطا
دو برابر فاصله گره‌ها	-
سه برابر فاصله گره‌ها	۰/۱۱۴۷۱۹۰۹۰
چهار برابر فاصله گره‌ها	۰/۱۲۵۴۲۴۳۶۵

دقیق‌ترین نتایج در حالت مرتبه چهارم مشاهده می‌شود. این دقت به میزانی افزایش یافته است که هموارشدگی در نتایج رخ نداده است و جواب به میزان نسبتا زیادی منطبق بر نتایج دقیق است. در نهایت مقدار خطای بدست آمده از نتایج روش بدون شبکه تیلور گالرکین مرتبه بالا، به صورت خلاصه در جدول ۴ آمده است.

جدول ۴- مقادیر خطای روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه دوم، سوم و چهارم دقت در مقادیر مختلف شعاع تاثیر

مرتبه روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین	مقدار خطا در آلفا برابر با ۰/۰۲۵		
	شعاع تاثیر دو برابر فاصله گرهی	شعاع تاثیر سه برابر فاصله گرهی	شعاع تاثیر چهار برابر فاصله گرهی
مرتبه دوم	۲/۵۰۳۸۳۷۰۷۹	-	-
مرتبه سوم	۹/۴۹۵۲۲۱۶۶۶	۰/۲۳۴۱۶۳۱۹۷	۰/۲۰۴۶۵۵۲۱۱
مرتبه چهارم	-	۰/۱۱۴۷۱۹۰۹۰	۰/۱۲۵۴۲۴۳۶۵

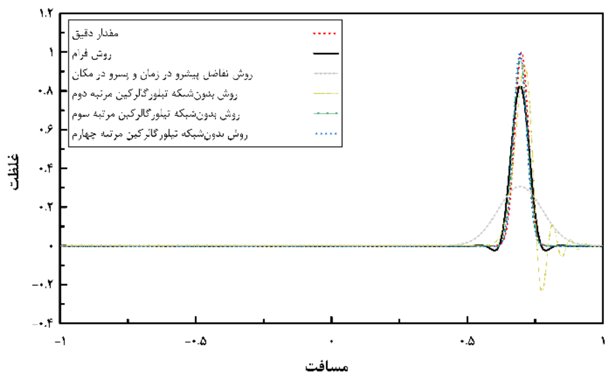
همانطور که در جدول ۴ مشخص است، روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین در مرتبه چهارم با انتخاب حداقل شعاع تاثیر مورد نیاز، جواب‌های به نسبت دقیق‌تری از سایر مرتبه‌های پایین‌تر ارائه می‌دهد. برای یافتن شعاع تاثیر بهینه برای هر مرتبه‌ی دقت، مقدار خطای هر شعاع تاثیر از بازه‌ی دو تا چهار برابر فاصله گره‌ها محاسبه شده است. شکل ۹ مربوط به مقادیر خطا می‌باشد. لازم به ذکر است که نتایج ناپایدار تحلیل در شکل زیر نیامده و برای بهبود تفکیک خطاها، از مقیاس لگاریتمی استفاده شده است.



شکل ۹: مقادیر خطای لگاریتمی روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه بالا در نسبت شعاع‌های تاثیر به فاصله گرهی مختلف

این نکته نیز باید بیان شود که روش‌های بدون‌شبکه به علت استفاده از تابع شکل حداقل مربعات متحرک، نیاز به زمان بیشتری برای محاسبات نسبت به تابع شکل اجزای‌محدود دارند. این هزینه محاسباتی زمانی محسوس می‌شود که از جملات مرتبه‌ی بالاتری در معادلات استفاده شود؛ زیرا لازم است علاوه بر محاسبه‌ی تابع شکل در هر نقطه، مشتقات آن نیز طبق رابطه (۲۸) استفاده شود. لذا پیشنهاد می‌شود برای مسائلی که پیچیدگی محاسبات بالایی دارند، از جملات مرتبه‌ی بالا استفاده شود.

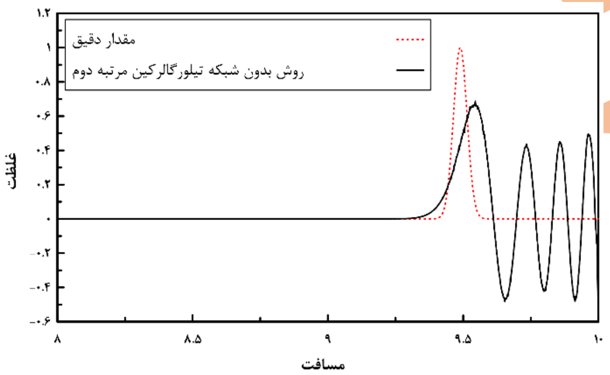
در انتهای تحلیل مسئله در حالت اول، نتایج حاصل شده قبلی با روش فرام و روش پیشرو در زمان و پسرو در مکان با ۲۰۱ گره و در گام زمانی ۰/۰۰۵ ثانیه (کورانت ۰/۵) در شکل ۱۰ آورده شده است.



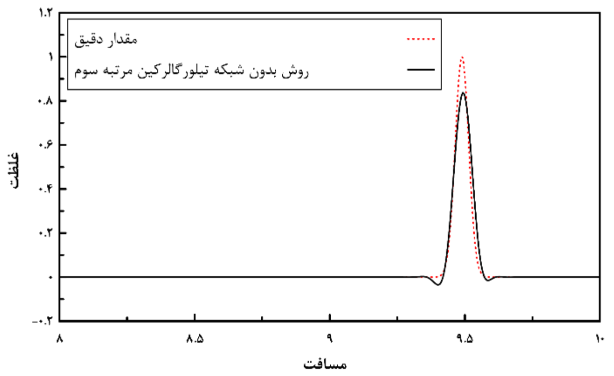
شکل ۱۰- مقایسه نتایج روش بدون شبکه تیلورگالرکین مرتبه بالا با روش فرام و روش پیشرو در زمان و پسرو در مکان با کورانت ۰/۵ در مسئله با دامنه کوچک

با مشاهده شکل ۱۰ می‌توان نتیجه گرفت که در کورانت برابر، روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه بالا نتایج بهتری نسبت به دو روش دیگر می‌دهد. البته ذکر این نکته نیز ضروری است که روش فرام و روش پیشرو در زمان و پسرو در مکان به علت سادگی در گسسته‌سازی مکانی نسبت به روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه بالا به طور قبل ملاحظه‌ای مسائل را سریع‌تر تحلیل می‌کنند. به عنوان مثال در مسئله حل شده، هر گام زمانی در تحلیل عددی با روش بدون شبکه تیلورگالرکین مرتبه چهارم برابر با ۰/۱۴۰۶ ثانیه می‌باشد؛ در حالی که هر گام زمانی در روش فرام تنها ۰/۰۰۰۳ ثانیه زمان می‌برد. بکارگیری روش با درجه دقت بالا بی‌شک از روش‌های عددی ساده‌تر مانند روش فرام و روش پیشرو در زمان و پسرو در مکان زمان‌برتر است؛ اما دقتی که این روش در اختیار می‌گذارد چه بسا با چندین برابر کردن شبکه در روش‌های عددی ساده‌تر بدست نمی‌آید؛ هر چند که در کاربردهایی ممکن است حتی کاهش ابعاد شبکه عملی نباشد.

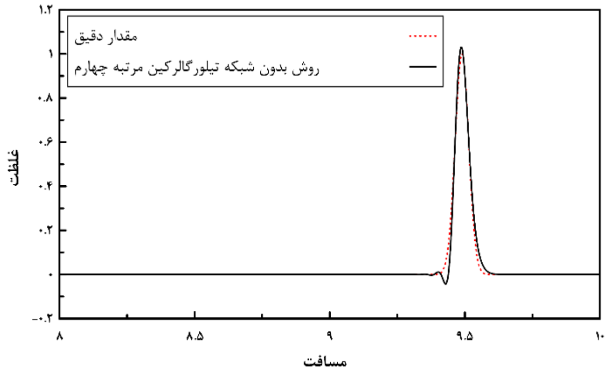
در حالت دوم تحلیل مسئله موج گوسی، دامنه محاسباتی افزایش پیدا کرده است. نتایج حاصل شده پس از گذشت ۱۰ ثانیه برای مرتبه دوم دقت در شکل ۱۱، مرتبه سوم دقت در شکل ۱۲ و مرتبه چهارم دقت در شکل ۱۳ آمده است. در این حالت دامنه محاسباتی به ۱۱۰۰ سلول پس‌زمینه تقسیم شده که شامل ۱۱۰۱ گره با فاصله‌های Δx برابر ۰/۰۱ است و به مانند قبل گام زمانی ۰/۰۰۵ می‌باشد (کورانت ۰/۵).



شکل ۱۱- مقایسه نتایج جواب دقیق و روش بدون شبکه تیلورگالرکین مرتبه دوم با کورانت ۰/۵ در زمان ۱۰ ثانیه و نسبت شعاع تاثیر به فاصله گرهی دو برابر



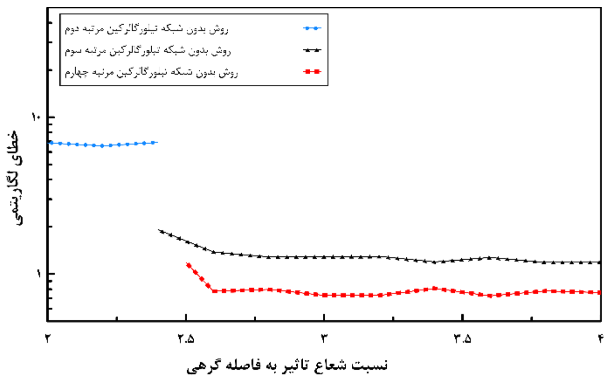
شکل ۱۲- مقایسه نتایج جواب دقیق و روش بدون شبکه تیلورگالرکین مرتبه سوم با کورانت ۰/۵ در زمان ۱۰ ثانیه و نسبت شعاع تاثیر به فاصله گرهی سه برابر



شکل ۱۳- مقایسه نتایج جواب دقیق و روش بدون شبکه تیلورگالرکین مرتبه سوم با کورانت ۰/۵ در زمان ۱۰ ثانیه و نسبت شعاع تاثیر به فاصله گرهی چهار برابر

با مقایسه نتایج می‌توان مشاهده کرد که با گذشت زمان ۱۰ ثانیه همچنان روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه چهارم نتایج قابل قبول‌تری نسبت به باقی روش‌ها می‌دهد.

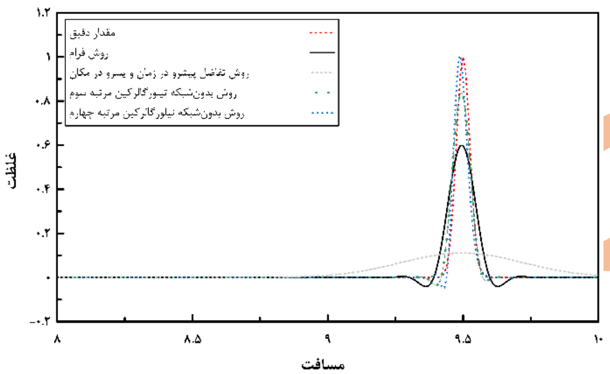
مقدار خطای هر شعاع تاثیر از بازه‌ی دو تا چهار برابر فاصله گره‌ها محاسبه شده است. شکل ۱۴ مربوط به مقادیر خطا می‌باشد. لازم به ذکر است که نتایج ناپایدار تحلیل در شکل زیر نیامده و برای بهبود تفکیک خطاها، از مقیاس لگاریتمی استفاده شده است.



شکل ۱۴- مقادیر خطای لگاریتمی روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه بالا در نسبت شعاع‌های تاثیر به فاصله گرهی مختلف در مسئله گوسی با دامنه بزرگ‌تر

با توجه به شکل ۱۴ می‌توان مشاهده کرد با افزایش دقت مرتبه، خطای حاصل شده کمتر خواهد شد؛ اما همچنان می‌توان نوسانات خطا را در شعاع‌های تاثیر مختلف مشاهده کرد.

در انتهای تحلیل مسئله در حالت دوم، نتایج حاصل شده قبلی با روش فرام و روش پیشرو در زمان و پسرو در مکان با ۱۱۰۱ گره و در گام زمانی ۰/۰۰۵ ثانیه (کورانت ۰/۵) در شکل ۱۵ آورده شده است.



شکل ۱۵- مقایسه نتایج روش بدون شبکه تیلورگالرکین مرتبه بالا با روش فرام و روش پیشرو در زمان و پسرو در مکان با کورانت ۰/۵ در مسئله با دامنه بزرگ

در این مسئله نیز به عنوان مثال هر گام زمانی در تحلیل عددی با روش بدون شبکه تیلورگالرکین مرتبه چهارم برابر با ۰/۷۱۸۷ ثانیه می‌باشد؛ در حالی که هر گام زمانی در روش فرام تنها ۰/۰۰۱۴ ثانیه زمان می‌برد. با مقایسه نتایج شکل ۱۵ می‌توان نتیجه گرفت که به ازای صرف هزینه محاسباتی بیشتر برای روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه بالا، نتایج مطلوب‌تری بدست می‌آید.

۳ ـ ۱ ـ مسئله دوم (ضربه قوچ کلاسیک):

مسئله ضربه قوچ نیز یک مسئله جابجایی خالص یک بعدی است که متغیر Φ در آن، یک متغیر برداری شامل سرعت و فشار است. پدیده‌ی ضربه قوچ از تغییر ناگهانی سرعت در لوله به وجود می‌آید که به همین علت، سبب افزایش یا کاهش ناگهانی فشار در لوله می‌شود. حل عددی مسئله‌ی ضربه‌ی قوچ از آن جهت حائز اهمیت است که به علت ناگهانی و لحظه‌ای بودن تغییرات سرعت در لوله، تغییرات هد در لوله نیز بسیار سریع می‌باشد که سبب به وجود آمدن ناپیوستگی در هد می‌شود. این ناپیوستگی به وجود آمده، شبیه‌سازی عددی را با دشواری روبرو می کند.

متغیر معادله حاکم مسئله ضربه قوچ کلاسیک بدون در نظرگیری اصطکاک به صورت رابطه (۳۳) و (۳۴) است.

$$\frac{\partial V}{\partial t}+g\frac{\partial H}{\partial x}=0 \qquad (۳۳)$$

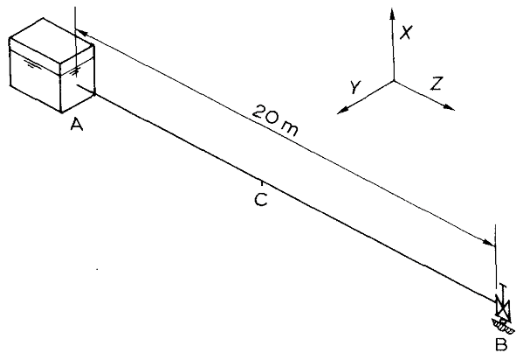
$$\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{g}{c_f^{\,2}}\frac{\partial H}{\partial t}=0 \qquad (۳۴)$$

که در این روابط V بیانگر سرعت سیال، H هد سیال، c_f سرعت موج سیال و g شتاب گرانشی زمین است. معادله حاکم این مسئله را می‌توان به صورت رابطه (۳۵) نوشت:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\mathrm{U}\frac{\partial \Phi}{\partial x}=0 \qquad (۳۵)$$

که در این رابطه، $\Phi=\begin{bmatrix}V\\H\end{bmatrix}$ و $\mathrm{U}=\begin{bmatrix}0 & g\\ \frac{c_f^{\,2}}{g} & 0\end{bmatrix}$ است.

مسئله‌ی دوم مورد بررسی در این پژوهش، مسئله مرجع دلفت می‌باشد (شکل ۱۶) که مشخصات آن در جدول ۵ آمده است [۲۲].



شکل ۱۶: سیستم مخزن-لوله-شیر مسئله معیار دلفت

جدول ۵: مشخصات مسئله ضربه قوچ کلاسیک مرجع دلفت

مشخصات مسئله	مقادیر
طول لوله (متر)	۲۰
قطر خارجی لوله (میلی‌متر)	۸۱۳
ضخامت جداره لوله (میلی‌متر)	۸
مدول یانگ (گیگا پاسکال)	۲۱۰
مدول بالک (گیگا پاسکال)	۲/۱
سرعت سیال (متر بر ثانیه)	۱
چگالی سیال (کیلوگرم بر متر مکعب)	۱۰۰۰
ضریب پواسون	۰/۳

دامنه مسئله به صورت $x=(0,+20)$ است. شرایط مرزی دریچله در مرزها نیز به صورت رابطه (۳۶) است:

$$V(20,t)=0 \qquad H(0,t)=0 \qquad x\in\Gamma \qquad (۳۶)$$

همچنین شرایط اولیه نیز برابر است با:

$$V(x,t=0)=1.0 \qquad H(x,t=0)=0.0 \qquad (۳۷)$$

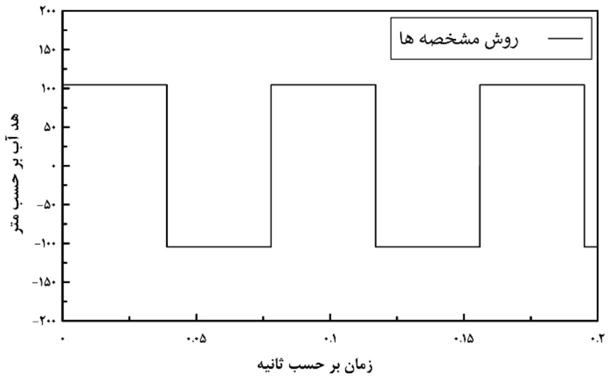
سرعت موج سیال طبق رابطه هلمهولتز-کورتوگ محاسبه می‌شود که به صورت رابطه (۳۸) می‌باشد:

$$a_{HK}=\sqrt{\frac{K}{\rho_f\left(1+\frac{DK}{eE}\right)}} \qquad (۳۸)$$

در این رابطه K مدول بالک، ρ_f چگالی سیال، D قطر لوله، e ضخامت جداره لوله و E مدول یانگ است. سرعت موج سیال طبق رابطه (۳۸) برابر با ۱۰۲۵ می‌باشد.

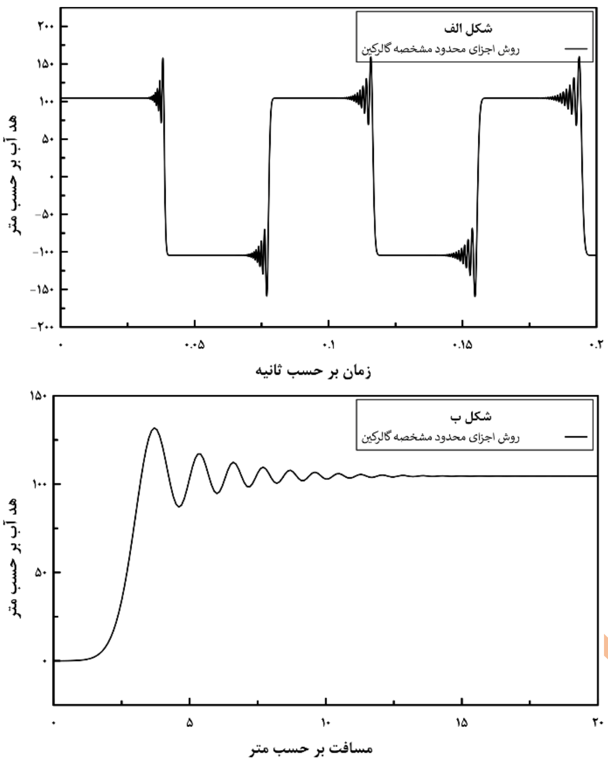
مسئله با دو روش اجزای‌محدود مشخصه گالرکین و روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه سوم و چهارم حل شده است. دامنه محاسباتی به ۲۰۰ سلول پس‌زمینه تقسیم شده که شامل ۲۰۱ گره با فاصله‌های Δx برابر ۰/۱ است. درون هر کدام از این سلول‌های پس‌زمینه، از ۵ نقطه‌ی گوس استفاده شده است. همچنین گام زمانی در حالت اول برابر با ۰/۰۰۰۰۵ ثانیه (کورانت ۰/۵) و در حالت دوم برابر با

۰/۰۰۰۰۷۵ ثانیه (کورانت ۰/۷۵)، $p^T(x)=\{1,x\}$ و شعاع تاثیر برابر با ۲/۲ برابر فاصله‌ی گره‌ها در نظر گرفته شده است. نتایج مسئله تا زمان ۰/۲ ثانیه تحلیل شده است. همچنین مقدار تاریخچه زمانی هد در ناحیه شیر با استفاده از روش مشخصه‌ها در شکل ۱۷ آمده است.



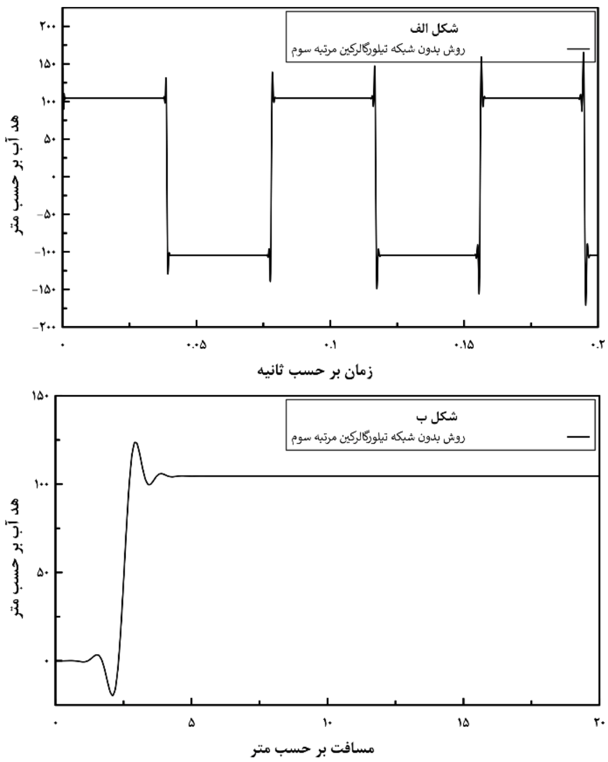
شکل ۱۷: مقدار تاریخچه زمانی هد در ناحیه شیر برای ضربه قوچ کلاسیک

نتایج بدست آمده با روش اجزای‌محدود مشخصه گالرکین در شکل ۱۸ نشان داده شده است که شکل ۱۸-الف مربوط به تاریخچه‌ی زمانی هد در ناحیه شیر و شکل ۱۸-ب مربوط به هد-مکان در زمان ۰/۱ ثانیه است.



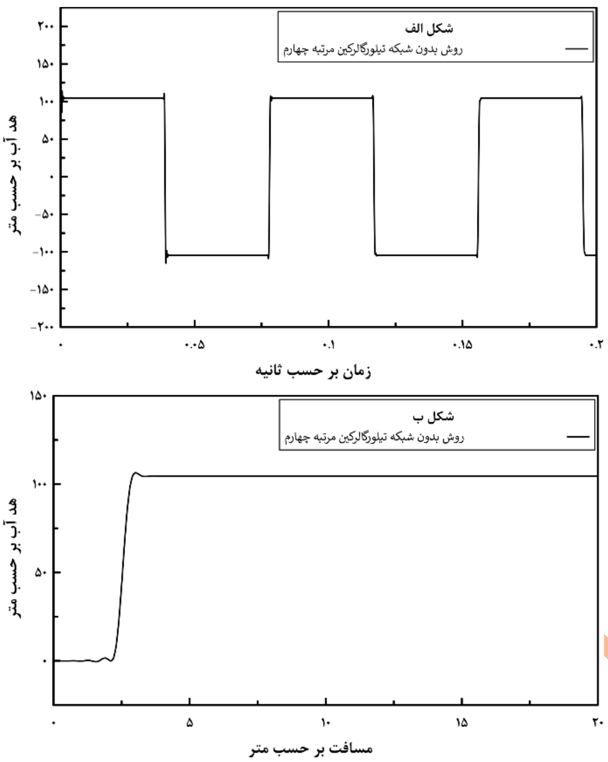
شکل ۱۸: نتایج تحلیل عددی مسئله ضربه قوچ کلاسیک با روش اجزای‌محدود مشخصه گالرکین (با کورانت ۰/۵): (الف) تاریخچه زمانی هد در ناحیه شیر؛ (ب) هد-مکان در زمان ۰/۱ ثانیه

مقدار نوسانات حاصل شده در روش اجزای‌محدود مشخصه گالرکین بسیار قابل ملاحظه است. بنابراین برای افزایش دقت، جملات مرتبه‌ی بالاتر به معادله اضافه می‌شود. با حل حالت اول این مسئله با روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه سوم، نتایج شکل ۱۹ حاصل شده است. شکل ۱۹-الف مربوط به تاریخچه‌ی زمانی هد در ناحیه شیر و شکل ۱۹-ب مربوط به هد-مکان در زمان ۰/۱ ثانیه است.



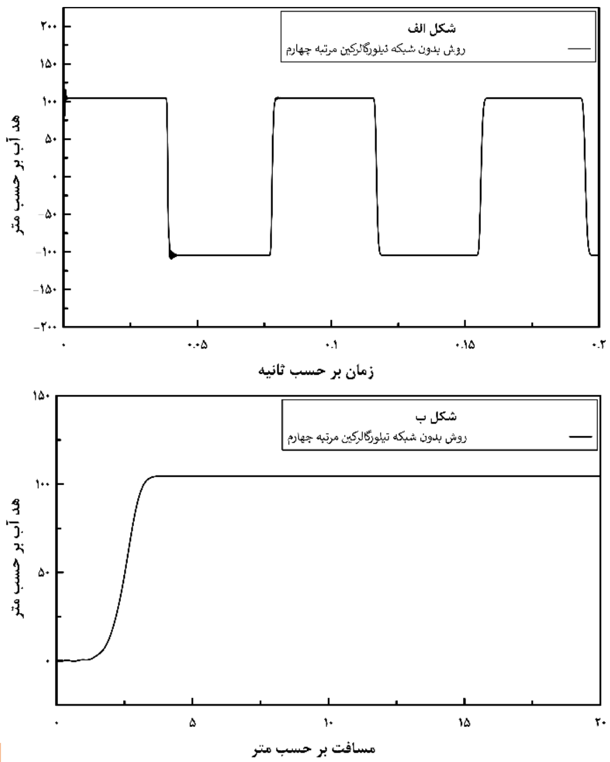
شکل ۱۹: نتایج تحلیل عددی مسئله ضربه قوچ کلاسیک با روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه سوم (با کورانت ۰/۵): (الف) تاریخچه زمانی هد در ناحیه شیر؛ (ب) هد-مکان در زمان ۰/۱ ثانیه

با مقایسه نتایج حاصل شده نسبت به روش اجزای‌محدود مشخصه گالرکین می‌توان مشاهده کرد نوسانات کاهش یافته و حل عددی با دقت بیشتری انجام می‌شود؛ اما همچنان این پتانسیل وجود دارد تا نتایج به دقت و پایداری مناسب‌تری برسند. بنابراین حالت اول مسئله با روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه چهارم حل شده که نتایج آن در شکل ۲۰ آمده است. شکل ۲۰-الف مربوط به تاریخچه‌ی زمانی هد در ناحیه شیر و شکل ۲۰-ب مربوط به هد-مکان در زمان ۰/۱ ثانیه است. مقادیر بدست آمده در حالت مرتبه چهارم، نوسانات بسیار اندکی نسبت به باقی روش‌ها نشان می‌دهد و با توجه به پیچیدگی شبیه‌سازی ناپیوستگی، می‌توان تاثیر جملات پایداری مرتبه‌ی چهارم را در نتایج مشاهده کرد.



شکل ۲۰: نتایج تحلیل عددی مسئله ضربه قوچ کلاسیک با روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه چهارم (با کورانت ۰/۵): (الف) تاریخچه زمانی هد در ناحیه شیر؛ (ب) هد-مکان در زمان ۰/۱ ثانیه

با حل حالت دوم این مسئله با روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه چهارم، نتایج شکل ۲۱ اصل شده است. شکل ۲۱-الف مربوط به تاریخچه‌ی زمانی هد در ناحیه شیر و شکل ۲۱-ب مربوط به هد-مکان در زمان ۰/۱ ثانیه است. شایان ذکر است در این کورانت روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه سوم نتایج ناپایداری از خود نشان می‌دهد.



شکل ۲۱- نتایج تحلیل عددی مسئله ضربه قوچ کلاسیک با روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه چهارم (با کورانت ۰/۷۵): (الف) تاریخچه زمانی هد در ناحیه شیر؛ (ب) هد-مکان در زمان ۰/۱ ثانیه

۴ ـ نتیجه‌گیری

در این پژوهش روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه بالا برای حل مسائل جابجایی خالص ارائه گردید. در این روش با بهره‌گیری از جملات مشتق مرتبه بالا در بسط تیلور و گسسته‌سازی زمانی آن، این امکان به وجود آمد تا پایداری تحلیل و دقت شبیه‌سازی افزایش یابد. بر خلاف محدودیت روش گالرکین استاندارد که استفاده از جملات مرتبه بالا حداکثر تا مرتبه دو ممکن است، این روش با بهره‌گیری از تابع شکل حداقل مربعات متحرک و تابع وزن نمایی، امکان استفاده از جملات با مشتق مرتبه‌ی بالا را در معادله مقدور می‌سازد. دو مسئله مرجع برای بررسی توانمندی روش ارائه شده، مورد بررسی قرار گرفته است. با توجه به خروجی‌های حاصل شده، ملاحظه گردید که با هر مرحله افزایش مرتبه‌ی روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین، خطاهای به وجود آمده به میزان قابل توجهی کاهش یافته است .تابع شکل حداقل مربعات متحرک این قابلیت را ممکن ساخت تا بتوان از جملات مرتبه بالا استفاده کرد و دقت تحلیل را افزایش داد؛ هرچند پیچیدگی این تابع نسبت به تابع شکل اجزای‌محدود باعث شده است که مدت زمان محاسبه آن طولانی‌تر شود. طبیعتا افزایش مرتبه معادله، نیاز به محاسبات مشتقات مرتبه بالای تابع شکل دارد و باعث طولانی‌تر شدن زمان تحلیل عددی می‌شود. در انتها می‌توان بیان کرد که روش بدون‌شبکه تیلورگالرکین مرتبه بالا، روش مناسبی برای حل مسائل جابجایی خالص می‌باشد که بسته به نیاز مسئله می‌توان جملات مراتب بالاتری استفاده کرد. همچنین برای مسائل دو بعدی نیز می‌توان با بازنویسی روابط برای حالت دو بعدی، مسائل پیچیده‌تری را حل کرد.

منابع

[۱] O.C. Zienkiewicz, R. Gallagher, P. Hood, Newtonian and non-Newtonian viscous incompressible flow. Temperature induced flows. Finite element solutions, The Mathematics of Finite Elements and Applications II, (۱۹۷۵).
[۲] R.L. Taylor, O.C. Zienkiewicz, The finite element method, Butterworth-Heinemann Oxford, ۲۰۱۳.
[۳] G.L. Guymon, V. Scott, L. Herrmann, A general numerical solution of the two-dimensional diffusion-convection equation by the finite element method, Water Resources Research, ۶(۶) (۱۹۷۰) ۱۶۱۱-۱۶۱۷.
[۴] T. J. Hughes, A multidimentional upwind scheme with no crosswind diffusion, Finite element methods for convection dominated flows, AMD ۳۴, (۱۹۷۹).
[۵] T. J. Hughes, A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions: Application to the streamline-upwind procedure, Finite element in fluids, ۴ (۱۹۸۲) Chapter ۳.
[۶] C. Johnson, J. Saranen, Streamline diffusion methods for the incompressible Euler and Navier-Stokes equations, Mathematics of Computation, ۴۷(۱۷۵) (۱۹۸۶) ۱-۱۸.
[۷] C. Johnson, U. Navert, J. Pitkaranta, Finite element methods for linear hyperbolic problems, Computer methods in applied mechanics and engineering, ۴۵ (۱۹۸۴) ۲۸۵-۳۱۲.
[۸] J. Douglas Jr, T.F. Russell, Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures, SIAM Journal on Numerical Analysis, ۱۹(۵) (۱۹۸۲) ۸۷۱-۸۸۵.
[۹] M. A. Celia, T.F. Russell, I. Herrera, R.E. Ewing, An Eulerian-Lagrangian localized adjoint method for the advection-diffusion equation, Advances in water resources, ۱۳(۴) (۱۹۹۰) ۱۸۷-۲۰۶.
[۱۰] T. J. Hughes, L.P. Franca, G.M. Hulbert, A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII.

The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations, Computer methods in applied mechanics and engineering, ۷۳(۲) (۱۹۸۹) ۱۷۳-۱۸۹.
[۱۱] O.C. Zienkiewicz, Finite elements in fluid mechanics: A decade of progress, Institute for Numerical Methods in Engineering, University College of SWansea, ۱۹۸۳.
[۱۲] R. Löhner, K. Morgan, O.C. Zienkiewicz, The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the finite element method, International Journal for Numerical Methods in Fluids, ۴(۱۱) (۱۹۸۴) ۱۰۴۳-۱۰۶۳.
[۱۳] J. Donea, A Taylor–Galerkin method for convective transport problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, ۲۰(۱) (۱۹۸۴) ۱۰۱-۱۱۹.
[۱۴] X.H. Zhang, J. Ouyang, L. Zhang, Element-free characteristic Galerkin method for Burgers' equation, Engineering Analysis with Boundary Elements, ۳۳(۳) (۲۰۰۹) ۳۵۶-۳۶۲.
[۱۵] X. Wang, H. Wang, Y. Liu, A semi-Lagrangian meshfree Galerkin method for convection-dominated partial differential equations, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, ۳۹۱ (۲۰۲۲) ۱۱۴۵۴۶.
[۱۶] Y. Liu, W. Zhang, Y. Jiang, Z. Ye, A high-order finite volume method on unstructured grids using RBF reconstruction, Computers & Mathematics with Applications, ۷۲(۴) (۲۰۱۶) ۱۰۹۶-۱۱۱۷.
[۱۷] R. Li, Q. Wu, S. Zhu, Proper orthogonal decomposition with SUPG-stabilized isogeometric analysis for reduced order modelling of unsteady convection-dominated convection-diffusion-reaction problems, Journal of Computational Physics, ۳۸۷ (۲۰۱۹) ۲۸۰-۳۰۲.
[۱۸] S. Grimberg, C. Farhat, N. Youkilis, On the stability of projection-based model order reduction for convection-dominated laminar and turbulent flows, Journal of Computational Physics, ۴۱۹ (۲۰۲۰) ۱۰۹۶۸۱.
[۱۹] V. Singh, R. Mohanty, Local meshless method for convection dominated steady and unsteady partial differential equations, Engineering with Computers, ۳۵ (۲۰۱۹) ۸۰۳-۸۱۲.
[۲۰] A. Javed, F. Mazhar, T.A. Shams, M. Ayaz, N. Hussain, A stabilized RBF finite difference method for convection dominated flows over meshfree nodes, Engineering Analysis with Boundary Elements, ۱۰۷ (۲۰۱۹) ۱۵۹-۱۶۷.
[۲۱] G.-R. Liu, Y.-T. Gu, An introduction to meshfree methods and their programming, Springer Science & Business Media, ۲۰۰۵.
[۲۲] A.S. Tijsseling, Exact solution of linear hyperbolic four-equation system in axial liquid-pipe vibration, Journal of Fluids and Structures, ۱۸(۲) (۲۰۰۳) ۱۷۹-۱۹۶.