

حل عددی مسائل جابجایی خالص یک بُعدی با استفاده از روش بدون شبکه‌ی تیلور - گالرکین مرتب‌ی بالا

سامان اسپهبدی نیا (کارشناس ارشد)

علی رحمانی فیروزجانی* (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، ایران

مهندسی عمران شریف، تابستان ۱۴۰۳ (۳۹-۵، پژوهشی)
دوری ۳۰، شماره ۲، صص. ۳۹-۵ (پژوهشی)

در پژوهش حاضر، روش بدون شبکه‌ی تیلور - گالرکین مرتب‌ی بالا برای حل مسائل جابجایی خالص یک بُعدی ارائه شده است. در حل عددی این گونه مسائل با روش گالرکین استاندارد، به علت غلبه‌ی جمله‌های جابجایی بر جمله‌های پخش، نتایج تحلیل ناپایدار می‌شوند. لذا می‌توان با افزودن جمله‌ی با عنوان جمله‌ی پایداری به معادله، تأثیر جمله‌های جابجایی را کاهش داد. محدودیت توابع شکل گالرکین استاندارد در مشتق‌پذیری سبب شده است که فقط استفاده از جملات پایداری با مشتق مرتب‌ی اول در معادله میسر باشد. در روش ارائه شده، با استفاده از تابع شکل کمینه‌ی مربعات متحرک و تابع وزن نمایی، از جملات پایداری با مشتقات مرتب‌ی بالا در معادلات استفاده شده است. برای بررسی روش مذکور، دو مسئله‌ی مرجع جابجایی خالص یک بُعدی، یعنی حرکت موج گوسی و ضربه‌ی قوچ کلاسیک، شبیه‌سازی شده‌اند. نتایج نشان داده‌اند که با هر مرحله افزایش مرتب‌ی جمله‌ی پایداری، دقت نتایج افزایش و نوسان‌های آن کاهش یافته است.

واژگان کلیدی: مسائل جابجایی خالص، روش بدون شبکه‌ی تیلور - گالرکین مرتب‌ی بالا، روش اجزاء محدود، جملات دقت مرتب‌ی بالا.

samanesp@yahoo.com
rahmani@nit.ac.ir

۱. مقدمه و تاریخچه‌ی تحقیقات

از طرفی، عدم تأمین خصوصیت اخیر، باعث ارائه‌ی نوسان‌ها در نتایج و در ادامه ناپایدار شدن جواب در روش گالرکین استاندارد می‌شود. وجود جمله‌ی جابجایی در معادله‌ی انتقال سیالات سبب می‌شود که خاصیت خودالحاقی معادله از بین برود. در نتیجه، روش‌های رایج عددی از جمله روش گالرکین استاندارد، امکان تحلیل عددی مناسب این گونه مسائل را ندارند و با مشکلات عددی مواجه می‌شوند. این اتفاق در حالی می‌افتد که معمولاً معادله‌های سازه‌ی با جابجایی‌های کوچک، به علت نبود جمله‌ی جابجایی در معادله‌های خود، خودالحاق هستند و روش گالرکین استاندارد با کمینه‌ی میزان خطا نتیجه می‌دهد.

راهکارهای متنوعی برای از بین بردن تأثیر جمله‌ی جابجایی بر معادله‌ها ارائه شده است. زینکوویچ^۵ و همکاران (۱۹۷۵)، با اصلاح تابع وزن، روش پتروف - گالرکین^۶ را پیشنهاد کردند؛^[۱] که ماهیت آن، افزودن یک وزن مجازی مناسب به تابع وزن گالرکین استاندارد است، که سبب پایدار شدن جواب و از بین رفتن نوسان‌ها می‌شود. افزودن مفرط وزن مجازی ذکر شده، باعث هموار^۷ شدن بیش از اندازه‌ی

معادله‌های کلی انتقال سیالات، شامل دو جمله‌ی جابجایی^۱ و پخش^۲ هستند، که به صورت دیفرانسیلی نمایش داده می‌شوند. جمله‌ی جابجایی مرتبط با حرکت سیال از مکانی به مکان دیگر است، که هسته‌ی اصلی آن مؤلفه‌ی سرعت و در طرف مقابل، جمله‌ی پخش مرتبط با حرکت نامنظم مولکول‌های سیال است، که از نقطه‌ی با غلظت بالا به نقطه‌ی با غلظت پایین‌تر جریان پیدا می‌کنند. مشتق‌های اول معادله‌ی انتقال سیالات مربوط به جمله‌های جابجایی و مشتق‌های دوم آن مربوط به جمله‌های پخش هستند. با توجه به دشواری‌های موجود در حل تحلیلی این گونه معادله‌ها، روش‌های عددی بسیاری گسترش پیدا کرده‌اند، تا تخمین مناسبی از جواب را به دست آورند. یکی از ویژگی‌های مهم یک معادله‌ی دیفرانسیل در حل عددی، خاصیت خودالحاقی^۳ آن است. خودالحاق بودن معادله سبب می‌شود که تقریب معادله‌ها با روش گالرکین^۴ استاندارد (اجزاء محدود) با کمینه‌ی خطا صورت گیرد.

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۳/۲۹، اصلاحیه ۱۴۰۲/۷/۲۷، پذیرش ۱۴۰۲/۷/۳۰.

استاد به این مقاله:

اسپهبدی نیا، سامان و رحمانی فیروزجانی، علی، ۱۴۰۳. حل عددی مسائل جابجایی خالص یک بُعدی با استفاده از روش بدون شبکه‌ی تیلور - گالرکین مرتب‌ی بالا. مهندسی عمران شریف، ۳۹(۲)، صص. ۵۱-۳۹. DOI:10.24200/J30.2023.62549.3232

نتایج می‌شود، به همین علت رابطه‌ی برای یافتن مقدار بهینه‌ی آن ارائه شده است. مقدار وزن مجازی اخیر با یک ضریب کنترل می‌شود و طبعاً با در نظر گرفتن ضریب صفر، هیچ مقداری از آن به وزن گالرکین استاندارد اضافه نمی‌شود و روش، همان روش گالرکین استاندارد باقی می‌ماند.^[۱۲] گامیون^۸ و همکاران (۱۹۷۰)، برای حذف جمله‌ی جابجایی از معادله، راه مستقیمی را ارائه و در آن از دو تابع دلخواه استفاده کردند، که ضرب آن‌ها در یکدیگر برابر با تابع وزن می‌شود. سپس با در نظر گرفتن یک مقدار مناسب برای تابع اول، جمله‌ی جابجایی را صفر و معادله را خودالحاق کردند و تابع دوم را به‌عنوان تابع شکل در نظر گرفتند. در نتیجه با خودالحاق شدن معادله، توانستند با همان تابع وزن گالرکین استاندارد معادله را بدون نوسان حل کنند.^[۱۳] هیوز^۹ (۱۹۷۹)، روش پخش خطی^{۱۰} را که یک روش اجزاء محدودی برای مسائل جابجایی -- پخش و جابجایی خالص است، را ارائه کردند.^[۱۵] چندی بعد جانسون^{۱۱} (۱۹۸۴ و ۱۹۸۶)، روش اصلاح پتروف گالرکین از روش استاندارد گالرکین را توسعه داد، که در آن جمله‌ی پخش مجازی در جهت جریان اضافه می‌شود. این کار سبب می‌شود که پخش عمود بر جریان^{۱۲} کمتری نسبت به روش‌های کلاسیک پخش مجازی ایجاد شود.^[۱۶] داگلاس و راسل^{۱۳} (۱۹۸۲)، روش مشخصه‌ی اصلاح شده را برای معادله‌های دیفرانسیل جزئی جابجایی -- پخش در حالت غیربایستار^{۱۴} ارائه کردند، که روشی ترکیبی از روش اجزاء محدود و اختلاف محدود با روش مشخصه‌هاست. روش مذکور، مشکل اعوجاج شبکه، که در روش‌های جابجایی مسیر^{۱۵} مشاهده می‌شوند، را ندارد و معادله‌های دیفرانسیل جزئی را متقارن و پایدار می‌کند؛ بنابراین می‌توان از گام‌های زمانی بزرگ بدون از دست دادن پایداری استفاده کرد.^[۱۸] سیلیا^{۱۶} و همکاران (۱۹۹۰)، روش الحاق موضعی اولبری -- لاگرانژی^{۱۷} را برای حل معادله‌های دیفرانسیل جزئی جابجایی -- پخش یک بُعدی معرفی کردند؛ که یک راهکار کلی حل مشخص برای معادله‌های دیفرانسیل جزئی جابجایی -- پخش ایجاد می‌کند و راه‌حل‌های عددی با دقت بالایی را بدون ایجاد نوسان‌های غیرفیزیکی اضافی حتی در گام‌های زمانی بزرگ ارائه می‌دهد.^[۱۹] هیوز و همکاران (۱۹۸۹)، روش کمینه‌ی مربعات گالرکین (GLS)^{۱۸} را برای مسائل جابجایی -- پخش معرفی کردند، که یک روش ترکیبی از دو روش مجزاء گالرکین استاندارد و روش کمینه‌ی مربعات است. نتایج عددی نشان می‌دهند که اگر از روش گالرکین استاندارد برای حل معادله‌های جابجایی -- پخش استفاده شود، جواب‌ها نوسانی می‌شوند و اگر از روش کمینه‌ی مربعات استفاده شود، جواب‌ها بیش از اندازه هموار می‌شوند. بنابراین ترکیب دو روش مذکور با نسبت مناسب توسط ضریب کنترلی، می‌تواند دقت قابل قبولی در جواب حل عددی ایجاد کند.^[۱۹]

بیشتر روش‌های ارائه شده که از وزن مجازی برای افزایش جمله‌ی پخش و کم اثر کردن جمله‌ی جابجایی استفاده می‌کنند، با استفاده از آزمون و خطاهای عددی و به صورت غیرمستقیم، به ضریب مناسب و نتیجه‌ی دلخواه رسیده‌اند. در کنار روش‌های غیرمستقیم ذکر شده، روش‌های مستقیم برای حل معادله‌های جابجایی پخش وجود دارد، که می‌توان برای نمونه به روش مشخصه‌ی گالرکین^{۱۹} اشاره کرد، که با استفاده از خطوط مشخصه، معادله را خودالحاق می‌سازد. بدین صورت می‌توان با استفاده از روش اجزاء محدود بدون افزودن وزن مجازی، به جواب پایدار رسید.^[۲۰] یکی دیگر از روش‌های مستقیم استفاده شده، روش تیلور -- گالرکین^{۲۰} است، که توسط دنیا^{۲۱} (۱۹۸۴) معرفی شده است؛ که در آن، از بسط‌های تیلور پیشرو^{۲۲} برای تولید تفاضل زمانی با دقت بالا استفاده می‌شود.^[۱۳] از آنجایی امکان نوشتن بی‌شمار جمله در بسط تیلور پیشرو وجود دارد، می‌توان از جمله‌های مرتبه‌ی بالاتر برای افزایش دقت نتایج استفاده کرد، اما با توجه به محدودیت مشتق‌پذیری تابع شکل گالرکین استاندارد، حل معادله فقط تا جملات مرتبه‌ی دوم ممکن است

که پس از به شکل ضعیف^{۲۳} درآوردن، به جمله‌های مرتبه‌ی اول تبدیل می‌شود. ژانگ^{۲۴} و همکاران (۲۰۰۹)، روش بدون شبکه‌ی مشخصه‌ی گالرکین را برای حل معادله‌ی برگرا ارائه کردند. با استفاده از روش مشخصه‌ها، معادله خودالحاق می‌شود و امکان گسسته‌سازی مکانی با استفاده از روش گالرکین استاندارد فراهم می‌شود.^[۱۴] وانگ^{۲۵} و همکاران (۲۰۲۲)، یک روش گالرکین بدون شبکه‌ی نیمه لاگرانژی ارائه کردند، که ترکیبی از روش بدون شبکه‌ی گالرکین (EFG)^{۲۶} و روش نیمه لاگرانژی است.^[۱۵] روش EFG برای حل معادله‌های مشتق جزئی با جمله‌ی جابجایی خالص گسترش داده شده است و از تمام مزیت‌های روش‌های بدون شبکه بهره می‌برد. بنابراین، مشکلات پیاده‌سازی روش نیمه لاگرانژی در ردیابی به عقب و درون‌یابی نقطه‌ی خروج تا حد زیادی کاهش می‌یابد.^[۱۷] لیو^{۲۷} و همکاران (۲۰۱۶)، روش حجم محدود مرتبه‌ی بالا در شبکه‌های بدون ساختار را با استفاده از بازسازی تابع پایه‌ی شعاعی (RBF)^{۲۸} ارائه کرده‌اند؛ که در آن، دقت بهبود و پراکندگی و اتلاف عددی نیز کاهش یافته و آن را به یک رویکرد امیدوارکننده برای به دست آوردن نتایج دقیق‌تر در شبیه‌سازی دینامیک سیالات محاسباتی تبدیل کرده است.^[۱۶] لی^{۲۹} و همکاران (۲۰۱۹)، روشی را پیشنهاد کرده‌اند که تجزیه‌ی متعامد مناسب (POD)^{۳۰} را با تحلیل ایزوهندسی پایدار با روش خط جریان رو به باد پتروف گالرکین (SUPG)^{۳۱} ترکیب می‌کند. این رویکرد امکان نمونه‌سازی کارآمد مرتبه‌ی کاهش یافته‌ی مسائل پیچیده‌ی جابجایی خالص، شامل جابجایی، پخش و اندرکنش را فراهم می‌کند. با گرفتن حالت‌های غالب و ترکیب شیوه‌های پایداری، روش پیشنهادی، دقت و کارایی محاسباتی بهبود یافته‌ی را ارائه می‌دهد.^[۱۷] گریمرگ^{۳۲} و همکاران (۲۰۲۰)، این ادعا را به چالش کشیدند که نمونه‌های مرتبه‌ی کاهش یافته‌ی مبتنی بر طرح‌ریزی (PROMs)^{۳۳} برای دینامیک سیالات محاسباتی از نظر عددی ناپایدار هستند. ایشان بیان کردند که بی‌ثباتی به دلیل برش مدال^{۳۴} (فرآیند کاهش ابعاد یک سیستم با کنارگذاشتن برخی از حالت‌های مرتبه‌ی بالاتر) نیست، بلکه به دلیل چارچوب گالرکین استفاده می‌شود. با استفاده از چارچوب پتروف -- گالرکین، می‌توان نمونه‌های مرتبه‌ی کاهش یافته‌ی مبتنی بر طرح‌ریزی پایدار و دقیقی را برای جریان‌های جابجایی خالص بدون نمونه‌های اضافی یا طراحی زیرفضا ساخت، که منجر به عوامل افزایش سرعت قابل توجهی می‌شود.^[۱۸] سینت^{۳۵} و همکاران (۲۰۱۹)، روش بدون شبکه‌ی محلی تثبیت شده (SLMM)^{۳۶} با ناپیوستگی^{۳۷} خفیف را برای معادلات دیفرانسیل جزئی ثابت و ناپایدار تحت جابجایی ارائه کرده است. آزمایش‌های عددی دقت و کارایی روش مذکور را نشان می‌دهند و آن را به یک رویکرد امیدوارکننده برای حل معادلات دیفرانسیل جزئی جابجایی خالص با گوشه‌های تیز و ناپیوستگی پرش و عملکرد بهتر در مقایسه با روش‌های قدیمی مبتنی بر شبکه تبدیل می‌کند.^[۱۹] جاود^{۳۸} و همکاران (۲۰۱۹)، یک راه‌حل تثبیت شده با استفاده از توابع پایه‌ی شعاعی در روش تفاضل محدود (RBF-FD)^{۳۹} برای معادله‌های جریان جابجایی بر روی توزیع گره‌ی بدون شبکه ارائه کردند، که شامل تقریب‌های مرتبه‌ی بالاتر، تعادل نیرو و تکانه و طول مشخصه براساس عدد رینولدز و سرعت جریان بوده است. آزمون‌های عددی، اثربخشی آن را دراز بین بردن نوسان‌های عددی و بهبود دقت، به ویژه در جریان‌های جابجایی خالص و اطراف ایرفویل در رینولدز ۱۰۰۰۰ نشان می‌دهند.^[۲۰]

در روش‌هایی که از توابع شکل گالرکین استاندارد بهره می‌برند، امکان توسعه‌ی جمله‌های معادله به مرتبه‌های بالاتر وجود ندارد. با این حال، روش ارائه شده در پژوهش حاضر با عنوان روش بدون شبکه‌ی تیلور -- گالرکین مرتبه‌ی بالا^{۴۰}، این امکان را فراهم می‌کند تا دقت و پایداری تحلیل، با افزودن جملات پایداری با مرتبه‌های بالا در گسسته‌سازی زمانی افزایش یابد. این روش با حل مستقیم و ارائه‌ی جملات پایداری به تعداد دلخواه در معادله، این امکان را فراهم می‌سازد که دقت تحلیل

حال می‌توان طبق رابطه ۳، مجموعه عبارت‌های ۵ را نوشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^n}{\partial t} &= \left[-U \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^n \\ \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \left[-U \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^n \\ \frac{\partial^3 \phi^n}{\partial t^3} &= \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[-U \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^n \\ \frac{\partial^4 \phi^n}{\partial t^4} &= \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left[-U \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^n \end{aligned} \quad (5)$$

با جای‌گذاری روابط ۵ در رابطه‌ی ۴ و با فرض U به‌عنوان مقداری ثابت، جمله‌ی $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ را می‌توان با جمله‌ی $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ جای‌جا کرد. رویکرد جای‌گذاری جمله‌ی $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ با جمله‌ی $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ و همین‌طور بازنویسی رابطه‌ی ۳ به‌جای $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ تا جایی ادامه پیدا می‌کند که تمام جملات دارای مشتق‌های زمانی تبدیل به جملاتی با مشتق‌های مکانی شوند. در نهایت، رابطه‌ی ۶ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} - \phi^n &= -\Delta t \left[U \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left[U^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right]^n \\ &\quad - \frac{\Delta t^3}{6} \left[U^3 \frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right]^n + \frac{\Delta t^4}{24} \left[U^4 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} \right]^n \end{aligned} \quad (6)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، جمله‌های مرتبه‌های بالای دوم، سوم و چهارم به معادله‌ی مرتبه‌ی اول اضافه شده است.

۲.۲. گسسته‌سازی مکانی

۱.۲.۲. تابع شکل کمینه‌ی مربعات متحرک

پیش از گسسته‌سازی مکانی، لازم است روابط تابع شکل کمینه‌ی مربعات متحرک و تابع وزن استفاده‌شده بحث و بررسی شوند. برای تقریب تابع مجهول u^h ، رابطه‌ی ۷ در نظر گرفته شده است:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{n_p} p_i(x) a_i(x) \equiv p^T(x) a(x) \quad (7)$$

که در آن، بردار توابع پایه و $a(x)$ بردار ضرایب هستند. بردار ضرایب $a(x)$ را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۸ نوشت:

$$a^T(x) = \{a_1(x), a_2(x), a_3(x), \dots, a_{n_p}(x)\} \quad (8)$$

در رابطه‌ی ۷، n_p تعداد جمله‌های بردار توابع پایه‌ی $p^T(x)$ است، که معمولاً با استفاده از چندجمله‌یی‌های خیام -- پاسکال نوشته می‌شود. بردار توابع پایه‌ی چندجمله‌یی از مرتبه‌ی n_p در فضای یک بُعدی به‌صورت رابطه‌ی ۹ است:

$$\begin{aligned} p^T(x) &= \{p_0(x), p_1(x), p_2(x), \dots, p_{n_p}(x)\} \\ &= \{1, x, x^2, \dots, x^{n_p}\} \end{aligned} \quad (9)$$

برای محاسبه‌ی بردار ضرایب $a(x)$ ، تابع خطای وزن‌دار (رابطه‌ی ۱۰) کمینه می‌شود:

$$\begin{aligned} J &= \sum_I \widehat{W}(x - x_I) \left[u^h(x, x_I) - u(x_I) \right]^2 \\ &= \sum_I \widehat{W}(x - x_I) \left[p^T(x_I) a(x) - u(x_I) \right]^2 \end{aligned} \quad (10)$$

افزایش باید. در روش ارائه‌شده‌ی حاضر با بهره‌گیری از تابع شکل کمینه‌ی مربعات متحرک (MLS)^{۴۱}، جمله‌های پایداری مرتبه‌ی بالا ساخته می‌شود؛ زیرا تابع شکل کمینه‌ی مربعات متحرک محدودیت مشتق‌پذیری ندارد و برای هر نقطه‌ی دلخواه قابل محاسبه است. بهره‌گیری از تابع وزن نمایی در محاسبه‌های تابع شکل کمینه‌ی مربعات متحرک این امکان را می‌دهد تا به‌علت پیوستگی تمام مشتقات آن، مشتق‌پذیری بدون محدودیت انجام شود. به همین علت می‌توان دقت گسسته‌سازی زمانی را تا میزان موردنیاز افزایش داد، که این مزیت بسته به پیچیدگی مسئله، بسیار کاربردی است.

در ادامه، ابتدا معادله‌ی انتقال سیال و نحوه‌ی گسسته‌سازی زمانی و مکانی توسط روش تیلور -- گالرکین بیان شده است. سپس نتایج حاصل از حل دو مسئله‌ی جابجایی خالص یک بُعدی بررسی شده است. مسئله‌ی اول، مربوط به حرکت یک موج گوسی و مسئله‌ی دوم مربوط به پدیده‌ی ضربه‌ی قوچ کلاسیک است. هر دو مسئله با روش بدون‌شبکه‌ی تیلور -- گالرکین مرتبه‌ی بالا شبیه‌سازی و با روش اجزاء محدود مشخصه‌ی گالرکین مقایسه شده‌اند.

۲. معادلات حاکم

در بخش کنونی، برای گسسته‌سازی زمانی و مکان، ابتدا معادله‌ی جابجایی خالص استخراج و سپس با معرفی تابع شکل و وزن استفاده‌شده، گسسته‌سازی صورت پذیرفته است. در حالت کلی، قالب معادله‌ی انتقال سیال یک بُعدی با جابجایی خالص به‌صورت رابطه‌ی ۱ است:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial (U\phi)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

که در آن، U سرعت معلوم، ϕ کمیت اسکالر منتقل‌شده توسط سرعت معلوم، x متغیر مکان و t متغیر زمان هستند. با بسط مشتق در رابطه‌ی ۱ می‌توان رابطه‌ی ۲ را نوشت:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

عبارتی که در رابطه‌ی اخیر، زیر آن خط کشیده شده است، جمله‌یی است که معادله را از خودالحاقی خارج می‌کند. حال برای ساده‌سازی بیشتر معادله می‌توان فرض کرد که واگرایی^{۴۲} جریان برابر صفر باشد. بنابراین، جمله‌ی سوم رابطه‌ی ۲ برابر با صفر می‌شود؛ لذا می‌توان آن را به‌صورت رابطه‌ی ۳ ساده کرد:

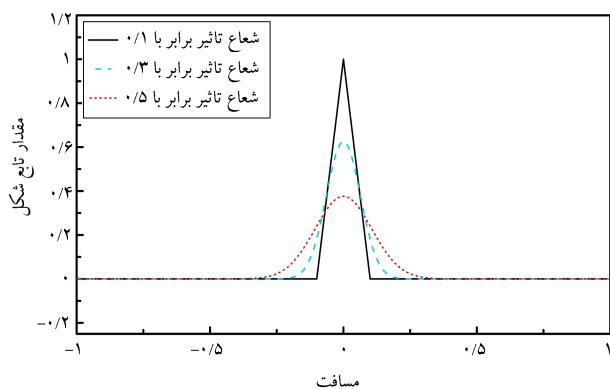
$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

رابطه‌ی اخیر، نشان‌دهنده‌ی معادله‌ی جابجایی خالص یک بُعدی با یک متغیر وابسته است.

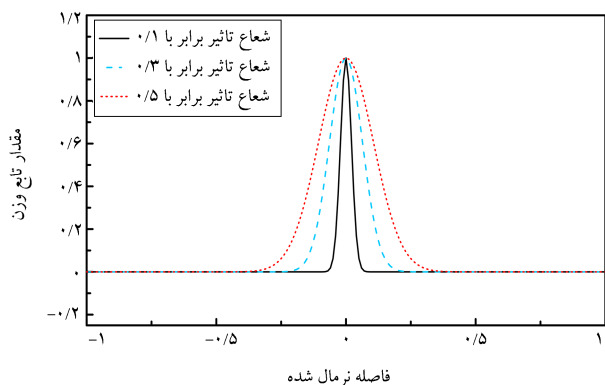
۱.۲. گسسته‌سازی زمانی

در روش بدون‌شبکه‌ی تیلور -- گالرکین مرتبه‌ی بالا، برای گسسته‌سازی زمانی از بسط تیلور استفاده می‌شود. بسط تیلور در حالت صریح^{۴۳} برای جملات تا مشتق مرتبه‌ی چهارم به‌صورت رابطه‌ی ۴ است:

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} &= \phi^n + \Delta t \frac{\partial \phi^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 \phi^n}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 \phi^n}{\partial t^3} \\ &\quad + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 \phi^n}{\partial t^4} + O(\Delta t^5) \end{aligned} \quad (4)$$



شکل ۱. تابع شکل کمیته‌ی مربعات متحرک با شعاع‌های تأثیر مختلف برای گرهی $x = 0$.



شکل ۲. تابع وزن نمایی با شعاع‌های تأثیر مختلف.

-- برای نقاط درون دامنه‌ی تأثیر، بزرگ‌تر از صفر باشد.

-- برای نقاط خارج از دامنه‌ی تأثیر، برابر با صفر باشد.

-- با دور شدن از نقطه‌ی موردنظر، تابع به شکل یک‌نواخت و هموار کاهش یابد.

-- تابع به اندازه‌ی کافی، خصوصاً در مرزها هموار باشد.

در پژوهش حاضر، پیوستگی مرتبه‌ی چهارم تابع شکل نیاز است، لذا تابع وزن نمایی استفاده شده است، که تمامی مشتق‌های آن پیوسته است؛ بدین صورت امکان حل معادله‌های مرتبه‌ی بالا ممکن می‌شود. روابط تابع وزن نمایی به صورت رابطه‌ی ۱۹ است:

$$\widehat{W}(x - x_I) \equiv \widehat{W}(\bar{d}) = \begin{cases} e^{-\left(\frac{\bar{d}}{r}\right)^r} & \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (19)$$

که در آن، \bar{d} با عنوان فاصله‌ی نرمال‌شده، به‌عنوان پارامتری است که به صورت رابطه‌ی ۲۰ تعیین می‌شود:

$$\bar{d} = \frac{|x - x_I|}{d_w} = \frac{d}{d_w} \quad (20)$$

که در آن، d_w بیانگر شعاع تأثیر نقطه‌ی موردنظر است.^[۱۱] در شکل ۲، تابع وزن نمایی با شعاع‌های تأثیر مختلف در دامنه‌ی ۱- تا ۱+ مشاهده می‌شود.

که در آن، x_I به‌عنوان مختصات گره‌ی موردنظر، x به‌عنوان مختصات نقطه‌ی موردنظر، m تعداد گره‌ها، u_I مقدار پارامتر گره‌ی در گره‌ی x_I و $\widehat{W}(x - x_I)$ تابع وزن است. حال با قراردادن $\frac{\partial J}{\partial a} = 0$ می‌توان رابطه‌ی ۱۱ را نوشت:

$$A(x) a(x) = B(x) U_s \quad (11)$$

که در آن، U_s برداری است که شامل تمام پارامترهای گره‌ی نقاط درون شعاع مؤثر (مطابق رابطه‌ی ۱۲) است:

$$U_s = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_m\}^T \quad (12)$$

ماتریس‌های $A(x)$ و $B(x)$ به صورت رابطه‌های ۱۳ و ۱۴ تعریف می‌شوند:

$$A(x) = \sum_{I=1}^m \widehat{W}(x - x_I) p(x_I) p^T(x_I) \quad (13)$$

$$B(x) = [B_1, B_2, B_3, \dots, B_m], \quad B_I = \widehat{W}(x - x_I) p(x_I) \quad (14)$$

این تذکر لازم است با توجه به اینکه $p(x_I)$ یک بردار $1 \times n$ و $p^T(x_I)$ یک بردار $n \times 1$ است، $A(x)$ یک ماتریس $n \times n$ خواهد شد. با حل معادله‌ی ۱۱، $a(x)$ به صورت رابطه‌ی ۱۵ به دست می‌آید.

$$a(x) = A^{-1}(x) B(x) U_s \quad (15)$$

با جای‌گذاری معادله‌ی ۱۵ در معادله‌ی ۷، تابع تقریب به شکل رابطه‌ی ۱۶ نوشته می‌شود:

$$u^h(x) = \sum_{I=1}^m \sum_{j=1}^{n_p} p_j(x) \left(A^{-1}(x) B(x) \right)_{jI} u_I = \sum_{I=1}^m N_I(x) u_I = N^T(x) U_s \quad (16)$$

که در آن، $p_j(x)$ مربوط به جمله‌ی j ام $p(x)$ است. $N_I(x)$ تابع شکل کمیته‌ی مربعات متحرک گره‌ی I است و به صورت رابطه‌ی ۱۷ تعریف می‌شود:

$$N_I(x) = \sum_{j=1}^{n_p} p_j(x) \left(A^{-1}(x) B(x) \right)_{jI} = p^T A^{-1} B_I \quad (17)$$

به این ترتیب، بردار توابع شکل کمیته‌ی مربعات متحرک برای m گره به صورت رابطه‌ی ۱۸ تعریف می‌شود:

$$N(x) = [N_1(x), N_2(x), N_3(x), \dots, N_m(x)] \quad (18)$$

شایان ذکر است که به‌طور کلی تابع شکل کمیته‌ی مربعات متحرک، شرط دلتای کرونگر را برآورده نمی‌سازد.^[۱۱]

در شکل ۱، تابع شکل کمیته‌ی مربعات متحرک با شعاع‌های تأثیر مختلف برای گره‌ی $x = 0$ رسم شده است. تعداد ۲۱ گره با فواصل مکانی ۰/۱ در دامنه‌ی ۱- تا ۱+ قرار گرفته و بردار تابع پایه به صورت $p^T(x) = \{1, x\}$ در نظر گرفته شده است.

۲.۲.۲. تابع وزن

تابع وزن، پارامتری مؤثر در تابع شکل کمیته‌ی مربعات متحرک است، که مستقیماً در ماتریس‌های $A(x)$ و $B(x)$ و در پیوسته و هموار بودن تابع شکل نقش دارد. تابع وزن، باید ۴ ویژگی داشته باشد:^[۱۱]

۳.۲.۲. گسسته‌سازی مکانی گالرکین

گسسته‌سازی مکانی با روش گالرکین انجام می‌شود. ابتدا برای تقریب متغیر می‌توان روابط ۲۱ را نوشت:

$$\phi^{n+1} = \sum N_b \bar{\phi}^{n+1} \quad \phi^n = \sum N_b \bar{\phi}^n \quad (21)$$

رابطه ۶ را می‌توان به صورت رابطه ۲۲ نوشت:

$$\begin{aligned} \phi^{n+1} - \phi^n + \Delta t \left[U \frac{\partial \phi}{\partial x} \right]^n - \frac{\Delta t^\tau}{2} \left[U^\tau \frac{\partial^\tau \phi}{\partial x^\tau} \right]^n + \frac{\Delta t^\tau}{6} \left[U^\tau \frac{\partial^\tau \phi}{\partial x^\tau} \right]^n \\ - \frac{\Delta t^\tau}{24} \left[U^\tau \frac{\partial^\tau \phi}{\partial x^\tau} \right]^n = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

حال باید مقادیر روابط ۲۱ در رابطه ۲۲ جایگذاری شوند. صورت کلی رابطه ۲۳ باقی‌مانده‌ی وزن‌دار به شکل رابطه ۲۳ است:

$$\int N_a R(x) dx = 0 \quad (23)$$

که در آن، در وضعیتی که هیچ‌گونه جمله‌ی منبع در مسئله وجود نداشته باشد، $(Q = 0)$ ، $R(x)$ برابر با رابطه ۲۴ است.

$$\begin{aligned} R(x) = \sum N_b \bar{\phi}^{n+1} - \sum N_b \bar{\phi}^n + \Delta t \left[U \frac{\partial \left(\sum N_b \bar{\phi}^n \right)}{\partial x} \right]^n \\ - \frac{\Delta t^\tau}{2} \left[U^\tau \frac{\partial^\tau \left(\sum N_b \bar{\phi}^n \right)}{\partial x^\tau} \right]^n \\ + \frac{\Delta t^\tau}{6} \left[U^\tau \frac{\partial^\tau \left(\sum N_b \bar{\phi}^n \right)}{\partial x^\tau} \right]^n \\ - \frac{\Delta t^\tau}{24} \left[U^\tau \frac{\partial^\tau \left(\sum N_b \bar{\phi}^n \right)}{\partial x^\tau} \right]^n = 0 \end{aligned} \quad (24)$$

با حل انتگرال باقی‌مانده‌ی وزن‌دار و مرتب‌سازی آن می‌توان رابطه ۲۵ را نوشت:

$$\begin{aligned} \int N_a N_b dx \times \Delta \bar{\phi}^n = -\Delta t \left(\int N_a \left[U \frac{\partial N_b \bar{\phi}^n}{\partial x} \right]^n dx \right) \bar{\phi}^n \\ + \frac{\Delta t^\tau}{2} \left(\int N_a \left[U^\tau \frac{\partial^\tau \left(N_b \bar{\phi}^n \right)}{\partial x^\tau} \right]^n dx \right) \bar{\phi}^n \\ + \frac{\Delta t^\tau}{6} \left(\int N_a \left[U^\tau \frac{\partial^\tau \left(N_b \bar{\phi}^n \right)}{\partial x^\tau} \right]^n dx \right) \bar{\phi}^n \\ - \frac{\Delta t^\tau}{24} \left(\int N_a \left[U^\tau \frac{\partial^\tau \left(N_b \bar{\phi}^n \right)}{\partial x^\tau} \right]^n dx \right) \bar{\phi}^n \end{aligned} \quad (25)$$

رابطه ۲۵ را می‌توان به شکل رابطه ۲۶ نوشت:

$$\begin{aligned} M \times \Delta \bar{\phi}^n = -\Delta t (C) \bar{\phi}^n + \frac{\Delta t^\tau}{2} (K_u) \bar{\phi}^n - \frac{\Delta t^\tau}{6} (K_{uu}) \bar{\phi}^n \\ + \frac{\Delta t^\tau}{24} (K_{uuu}) \bar{\phi}^n \end{aligned} \quad (26)$$

که طبق رابطه ۲۷ برابر هستند با:

$$\begin{aligned} M &= \int N_a N_b dx \\ C &= \int N_a U \frac{\partial N_b}{\partial x} dx \\ K_u &= \int N_a U^\tau \frac{\partial^\tau N_b}{\partial x^\tau} dx \\ K_{uu} &= \int N_a U^\tau \frac{\partial^\tau N_b}{\partial x^\tau} dx \\ K_{uuu} &= \int N_a U^\tau \frac{\partial^\tau N_b}{\partial x^\tau} dx \end{aligned} \quad (27)$$

رابطه ۲۶ به شکل رابطه ۲۸ ساده می‌شود:

$$M \times \Delta \bar{\phi}^n = \left[-\Delta t C + \frac{\Delta t^\tau}{2} K_u - \frac{\Delta t^\tau}{6} K_{uu} + \frac{\Delta t^\tau}{24} K_{uuu} \right] \bar{\phi}^n \quad (28)$$

عبارتی که در رابطه ۲۸ زیر آن خط کشیده شده است، بیانگر جمله‌های مرتبه‌ی دقت بالای معادله است. همان‌طور که بیشتر گفته شد، روش گالرکین استاندارد با معادله‌های مرتبه‌ی اول، توانایی حل مسائل جابجایی خالص را ندارد و همیشه ناپایدار است. این نکته نیز قابل توجه است که در روش اجزاء محدود مشخصه‌ی گالرکین، قابلیت توسعه‌ی معادله‌ها تا مرتبه‌ی چهارم (و به‌طورکلی تا مرتبه‌های بالاتر از ۲) وجود ندارد و فقط ممکن است که تا جمله‌ی مرتبه دوم نوشته شود. این جمله پس از به شکل ضعیف درآمدن، به مرتبه‌ی اول تبدیل می‌شود و با تابع شکل اجزاء محدود قابل حل است. اما با استفاده از روش توسعه داده‌شده‌ی بدون‌شبکه‌ی تیلور -- گالرکین مرتبه‌ی بالا، می‌توان جمله‌ها را تا مرتبه‌ی دلخواه نوشت و دقت تحلیل را افزایش داد. با توجه به پیچیدگی مسئله و نیاز به دقت بالاتر، می‌توان جمله‌های مرتبه‌ی بالا را افزایش یا کاهش داد. در روش اجزاء محدود مشخصه‌ی گالرکین به‌علت ساده‌تر بودن تابع شکل، محاسبات عددی بسیار سریع‌تر از روش بدون‌شبکه‌ی تیلور -- گالرکین صورت می‌پذیرد. همچنین استفاده از مرتبه‌های دقت بالاتر به حجم محاسبات عددی می‌افزاید. شایان ذکر است برای حالت‌های دو و سه بُعدی نیاز است که توابع شکل به همراه مشتق‌های آن‌ها، دو و سه بُعدی شوند، که به‌طور قابل ملاحظه‌یی به فرآیند زمان محاسبات می‌افزایند. با این حال، پرداختن این هزینه‌ی محاسباتی موجب افزایش دقت در تحلیل عددی مسائل نسبت به روش مشخصه‌ی گالرکین می‌شود.

۳. نتایج و بحث

برای بررسی تأثیر جمله‌های مرتبه‌ی بالای روش تیلور -- گالرکین و مقایسه‌ی آن با روش اجزاء محدود مشخصه‌ی گالرکین، ابتدا مسئله‌ی مرجع موج گوسی تحلیل شده است.^[۲۱] این مسئله با مرتبه‌های مختلف جمله‌ی جمله‌ی پایداری، در شعاع‌های تأثیر متفاوت حل شده است؛ تا اثر جمله‌ها با مشتق مرتبه‌ی بالا را در روش بدون‌شبکه‌ی تیلور -- گالرکین نشان دهد. در انتهای مسئله‌ی اول نیز خط‌های هر روش نشان داده شده است. مسئله‌ی دوم بررسی شده، مسئله‌ی مرجع ضربه‌ی قوج کلاسیک است. نتایج روش بدون‌شبکه‌ی تیلور -- گالرکین مرتبه‌ی بالا و روش اجزاء محدود مشخصه‌ی گالرکین مقایسه شده‌اند.

۱.۳. مسئله‌ی موج گوسی

مسئله‌ی اول، مربوط به حرکت یک موج گوسی است، که متغیر ϕ در آن، یک متغیر اسکالر و نشان‌دهنده‌ی غلظت سیال است. از آنجایی که هدف پژوهش حاضر، بررسی روش بدون شبکه‌ی تیلور -- گالرکین مرتبه‌ی بالا در یک بعد است، بنابراین حرکت موج در بعد افقی با سرعت ثابت در نظر گرفته شده است. معادله‌ی حاکم این مسئله در یک بعد به صورت رابطه‌ی ۲۹ است:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad (29)$$

که در آن، U برابر با واحد در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی در یک‌گانه در مرزها نیز به صورت رابطه‌ی ۳۰ است:

$$\phi(x, t) = 0, \quad x = 0 \quad (30)$$

همچنین دامنه‌ی مسئله در حالت اول به صورت $x = (-1, +1)$ و در حالت دوم مسئله، برای شرایط طولانی $x = (-1, +10)$ است. شرایط اولیه نیز مطابق رابطه‌ی ۳۱ است:

$$\phi(x, t = 0) = e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \quad (31)$$

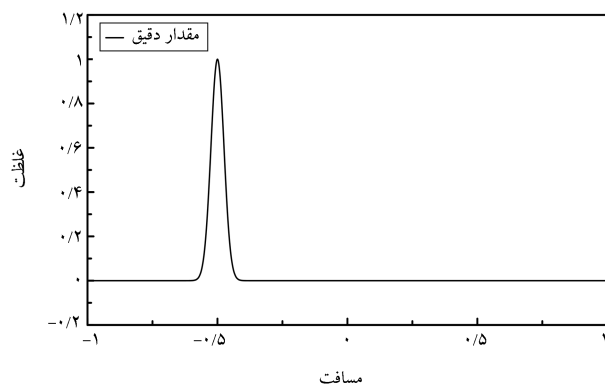
که در آن، $r = x - x_0$ ، فاصله‌ی بین نقطه‌ی x و نقطه‌ی x_0 برابر 0.5 است. همچنین ضریب α مقدار ثابتی است که اندازه‌ی موج گوسی را کنترل می‌کند، که برابر با 0.25 در نظر گرفته شده است. این تذکر لازم است که هر چه مقدار α کمتر باشد، موجی با شیب تندتر در تحلیل تشکیل و شبیه‌سازی عددی آن سخت‌تر می‌شود. برای تحلیل، در حالت اول پس از گذشت مدت زمان $1/2$ ثانیه و در حالت دوم پس از گذشت 10 ثانیه، نتایج روش‌های مختلف با مقدار دقیق مقایسه شده‌اند تا میزان خطای تحلیل عددی آن‌ها مشخص شود. برای اندازه‌گیری خطا، از نرم خطای L_2 مطابق رابطه‌ی ۳۲ استفاده شده است:

$$L_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N (\phi_i^{exact} - \phi_i^{numerical})^2} \quad (32)$$

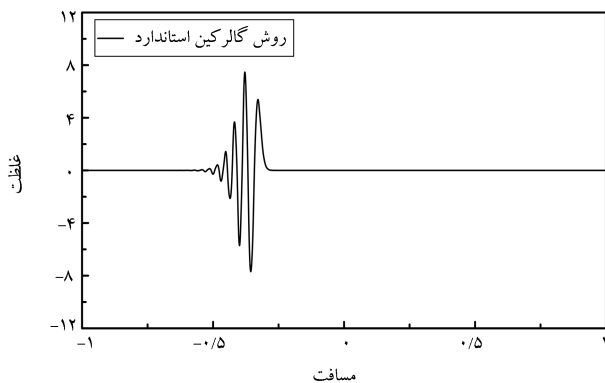
دامنه‌ی محاسباتی به 200 سلول پس‌زمینه تقسیم شده است، که شامل 201 گره با فاصله‌های Δx برابر 0.1 بوده و درون هر کدام از آن‌ها، از 10 نقطه‌ی گوس استفاده شده است. همچنین گام زمانی (Δt) برابر با 0.05 ثانیه در نظر گرفته شده است. برای برداشت جامع‌تر از نتایج، نسبت عدد کورانت هر مسئله بیان شده است. در ادامه، نتایج روش اجزاء محدود مشخصه‌ی گالرکین و روش بدون شبکه‌ی تیلور -- گالرکین مرتبه‌های دوم، سوم و چهارم در حالت آلفا برابر با 0.25 پس از گذشت $1/2$ ثانیه از حالت اولیه نمایش داده شده است. هر مرحله با سه شعاع تأثیر متفاوت تحلیل و میزان خطای هر شعاع تأثیر مشخص شده است. همچنین نتایج روش مذکور با روش فرام 4^4 و روش پیشرو در زمان و پسرو در مکان (FTBS) 4^5 مقایسه شده است.

برای بررسی، ابتدا نتایج اجزاء محدود مشخصه‌ی گالرکین تحلیل شده است. در حالت ابتدایی با اعمال شرایط اولیه، شکل ۳ به دست آمده است.

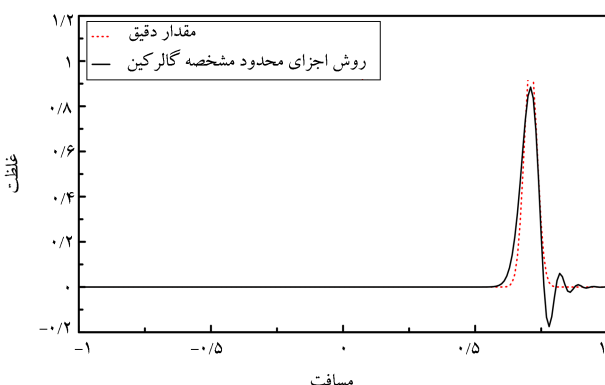
در روش‌های معمول، مانند روش گالرکین استاندارد (اجزاء محدود)، نتایج پس از گذشت چند گام زمانی نوسانی و در نهایت ناپایدار می‌شوند. در شکل ۴، نتیجه‌ی روش گالرکین استاندارد پس از گذشت فقط 0.2 ثانیه مشخص شده است.



شکل ۳. شرایط اولیه در مسئله‌ی حرکت موج گوسی.



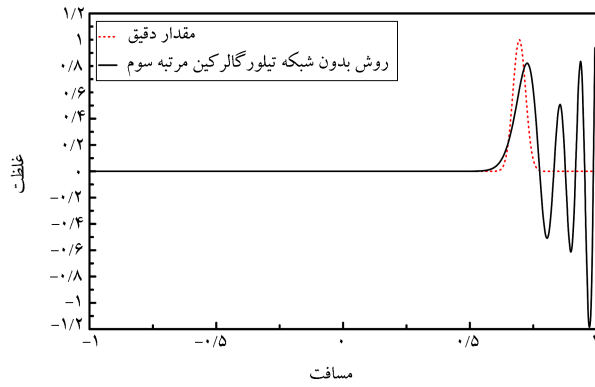
شکل ۴. نتیجه‌ی جواب روش گالرکین استاندارد گالرکین با کورانت 0.25 پس از گذشت 0.2 ثانیه در مسئله‌ی حرکت موج گوسی.



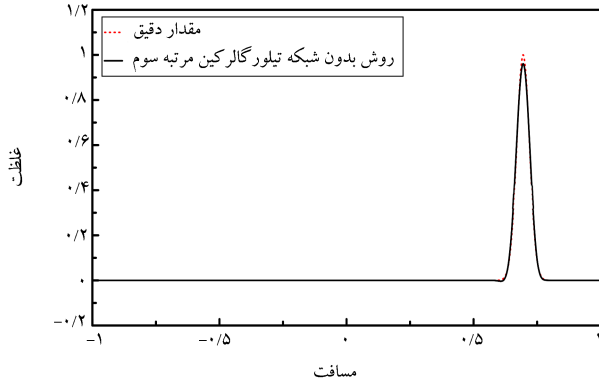
شکل ۵. مقایسه‌ی جواب دقیق و اجزاء محدود مشخصه‌ی گالرکین با کورانت 0.25 پس از گذشت $1/2$ ثانیه در مسئله‌ی حرکت موج گوسی.

در ادامه، نتیجه‌ی جواب روش اجزاء محدود مشخصه‌ی گالرکین پس از گذشت $1/2$ ثانیه در شکل ۵ مشاهده می‌شود.

مقدار خطای روش اجزاء محدود مشخصه‌ی گالرکین براساس رابطه‌ی ۳۲، برابر با 0.532 بوده است. با توجه به شکل مذکور می‌توان مشاهده کرد که روش اجزاء محدود مشخصه‌ی گالرکین با گذشت زمان، مقدار زیادی هموارشدگی قبل از رسیدن به غلظت بیشینه و مقداری نوسان بعد از آن داشته و توان شبیه‌سازی موج با دقت بالا را نداشته است؛ اما با وجود این، اضافه‌کردن جمله‌ی مرتبه‌ی دوم به معادله‌ها سبب پایداری نتایج برای این مسئله شده است و بهبود قابل توجهی نسبت به روش گالرکین استاندارد مشاهده می‌شود. در ادامه، با استفاده از روش بدون شبکه‌ی تیلور --



الف) فاصله ی گره ای ۲ برابر؛



ب) فاصله ی گره ای ۳ برابر؛



ج) فاصله ی گره ای ۴ برابر.

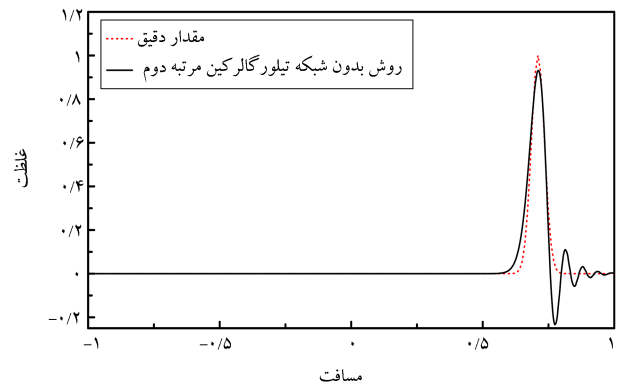
شکل ۷. مقایسه ی نتایج جواب دقیق و روش بدون شبکه ی تیلور – گالرکین مرتبه ی سوم با کورانت ۰/۵ در زمان ۱/۲ ثانیه و نسبت شعاع تأثیر به فاصله ی گره یی.

جدول ۲. مقادیر خطای روش بدون شبکه ی تیلور – گالرکین مرتبه ی سوم در حالت آلفا برابر ۰/۲۵ در مقادیر مختلف شعاع تأثیر.

مقدار شعاع تأثیر	مقدار خطا
۲ برابر فاصله ی گره ها	۹/۴۹۵۲۲۱۶۶۶
۳ برابر فاصله ی گره ها	۰/۲۳۴۱۶۳۱۹۷
۴ برابر فاصله ی گره ها	۰/۲۰۴۶۵۵۲۱۱

تأثیر بزرگ تری برای ارائه ی نتایج مناسب است؛ زیرا با افزایش دقت مرتبه، نیاز به نقاط بیشتری برای تحلیل است.

نتایج برای روش بدون شبکه ی تیلور – گالرکین مرتبه ی چهارم با دو شعاع تأثیر



شکل ۶. مقایسه ی نتایج جواب دقیق و روش بدون شبکه ی تیلور – گالرکین مرتبه ی دوم در زمان ۱/۲ ثانیه و نسبت شعاع تأثیر به فاصله ی گره یی ۲ برابر (کورانت ۰/۵).

جدول ۱. مقادیر خطای روش بدون شبکه ی تیلور – گالرکین مرتبه ی دوم در حالت آلفا برابر ۰/۲۵.

مقدار شعاع تأثیر	مقدار خطا
دو برابر فاصله ی گره ها	۰/۵۰۳۸۳۷۰۷۹

گالرکین مرتبه ی بالا، مرحله به مرحله با افزایش مرتبه ی جمله ها در معادله، بررسی شده است که نتایج چگونه تغییر می کنند.

مقادیر خروجی برای روش بدون شبکه ی تیلور – گالرکین مرتبه ی دوم با شعاع تأثیر دو برابر در شکل ۶ مشاهده می شود. معمولاً مقدار ذکر شده ی شعاع تأثیر، نتایج خوبی برای مسائل حاصل می کند.^[۱۶] طبق تجربه ی استفاده از شعاع های تأثیر بزرگ به علت درگیر کردن نقاط دورتر در محاسبات، دقت نتایج کاهش می یابد؛ با این حال این موضوع به پیچیدگی مسئله و دقت مرتبه ی استفاده شده بستگی دارد. همچنین استفاده از شعاع های تأثیر بسیار کوچک، باعث بد وضع شدن ماتریس A و خطای زیاد وارون آن و حتی در شرایطی، وارون ناپذیر شده است.

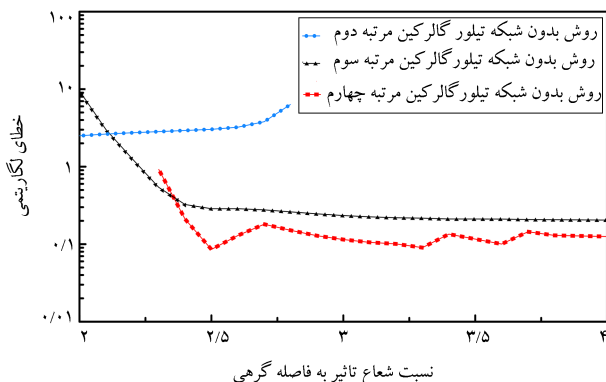
همچنین با بررسی شکل ۶، جدول خطای حالت مرتبه ی دوم در حالت شعاع تأثیر دو برابر ارائه شده است (جدول ۱).

از آنجایی که روش اجزاء محدود مشخصه ی گالرکین از فرم ضعیف معادلات مرتبه ی دوم استفاده می کند، بنابراین انتظار می رود که در روش بدون شبکه ی تیلور – گالرکین، پارامتر شعاع تأثیر بسیار مهم باشد و انتخاب نکردن صحیح پارامتر شعاع منجر به نتایج نامناسب شود. لذا باید نتیجه ی روش بدون شبکه ی تیلور – گالرکین مرتبه ی دوم در شعاع تأثیر مناسب (در اینجا ۲ برابر فاصله ی گره یی) با روش اجزاء محدود مشخصه ی گالرکین مقایسه شود.

نتایج برای روش بدون شبکه ی تیلور – گالرکین مرتبه ی سوم با سه شعاع تأثیر مختلف در شکل ۷ مشاهده می شود؛ که مطابق آن، خطای حالت مرتبه ی سوم نسبت به جواب دقیق در سه حالت شعاع تأثیر متفاوت در جدول ۲ ارائه شده است. نتایج نشان می دهند که با افزایش جمله های پایداری مرتبه ی سوم، تأثیر جمله های جابجایی در معادله، کاهش پیدا کرده و دقت به میزان قابل توجهی نسبت به حالت مرتبه ی دوم افزایش یافته است؛ اما همچنان مقداری هموارشدگی مشاهده می شود، به طوری که قله ی موج در حالت دقیق، اندکی بالاتر از حالت مرتبه ی سوم است. همچنین شایان ذکر است که برخلاف حالت مرتبه ی دوم، که در شعاع تأثیر دو برابر فاصله ی گره یی، نتایج مناسبی نشان می داد، در حالت مرتبه ی سوم نیاز به شعاع

جدول ۴. مقادیر خطای روش بدون شبکه‌ی تیلور-- گالرکین مرتبه‌های دوم، سوم و چهارم دقت در مقادیر مختلف شعاع تأثیر.

مرتبه‌ی روش بدون شبکه‌ی گالرکین	مقدار خطا در آلفا برابر با 0.25		
	نسبت شعاع تأثیر بر فاصله‌ی گره‌ی ۲ برابر	نسبت شعاع تأثیر بر فاصله‌ی گره‌ی ۳ برابر	نسبت شعاع تأثیر بر فاصله‌ی گره‌ی ۴ برابر
مرتبه‌ی دوم	۲,۵۰۳۸۳۷۰۷۹	—	—
مرتبه‌ی سوم	۹,۴۹۵۲۲۱۶۶۶	۰,۲۳۴۱۶۳۱۹۷	۰,۲۰۴۶۵۵۲۱۱
مرتبه‌ی چهارم	—	۰,۱۱۴۷۱۹۰۹۰	۰,۱۲۵۴۲۴۳۶۵



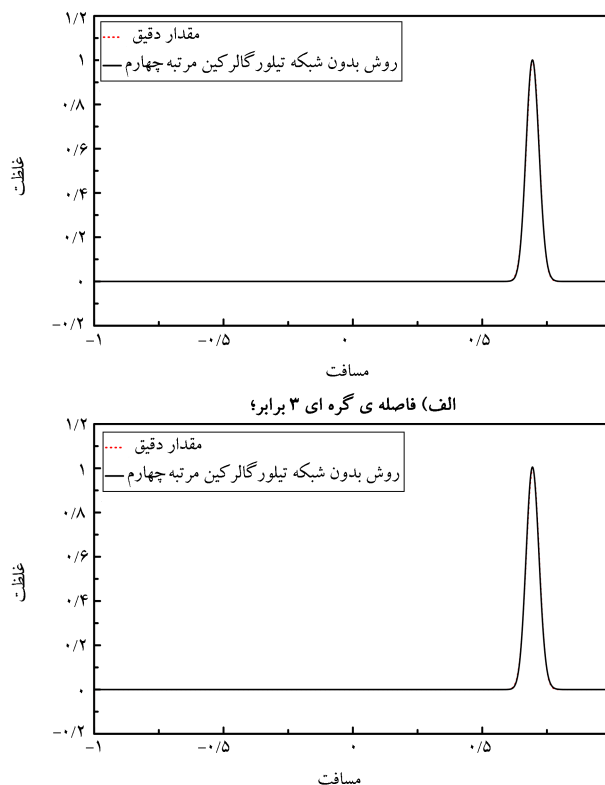
شکل ۹. مقادیر خطای لگاریتمی روش بدون شبکه‌ی تیلور-- گالرکین مرتبه‌ی بالا در نسبت شعاع‌های تأثیر به فاصله‌ی گره‌ی مختلف.

تحلیل در شکل ۹ ارائه نشده و برای بهبود تفکیک خطاها، از مقیاس لگاریتمی استفاده شده است.

این نکته نیز باید بیان شود که روش‌های بدون شبکه به علت استفاده از تابع شکل کمینه‌ی مربعات متحرک، نیاز به زمان بیشتری برای محاسبات نسبت به تابع شکل اجزاء محدود دارند. این هزینه‌ی محاسباتی زمانی محسوس می‌شود که از جمله‌های مرتبه‌ی بالاتری در معادله‌ها استفاده شود؛ زیرا لازم است علاوه بر محاسبه‌ی تابع شکل در هر نقطه، مشتق‌های آن نیز طبق رابطه‌ی ۲۸ استفاده شود. لذا پیشنهاد می‌شود برای مسائلی که پیچیدگی محاسبات بالایی دارند، از جمله‌های مرتبه‌ی بالا استفاده شود.

در انتهای تحلیل مسئله در حالت اول، نتایج حاصل‌شده‌ی قبلی با روش فرام و روش پیشرو در زمان و پسرود در مکان با 201 گره و در گام زمانی 0.05 ثانیه (کورانت 0.5) در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود.

مطابق شکل ۱۰ می‌توان نتیجه گرفت که در کورانت برابر، روش بدون شبکه‌ی تیلور-- گالرکین مرتبه‌ی بالا نتایج بهتری نسبت به دو روش دیگر ارائه کرده است. البته ذکر این نکته نیز ضروری است که روش فرام و روش پیشرو در زمان و پسرود در مکان به علت سادگی در گسسته‌سازی مکانی نسبت به روش بدون شبکه‌ی تیلور-- گالرکین مرتبه‌ی بالا به طور قابل ملاحظه‌ی مسائل را سریع‌تر تحلیل می‌کنند. به عنوان مثال، در مسئله‌ی حل‌شده، هر گام زمانی در تحلیل عددی با روش بدون شبکه‌ی تیلور-- گالرکین مرتبه‌ی چهارم برابر با 0.1406 ثانیه است؛ در حالی که هر گام زمانی در روش فرام فقط 0.0003 ثانیه زمان می‌برد. به کارگیری روش با درجه‌ی دقت بالا، بی‌شک از روش‌های عددی ساده‌تر مانند روش فرام و روش پیشرو در زمان و پسرود در مکان زمان‌برتر است؛ اما دقتی که روش مذکور در اختیار می‌گذارد، چه بسا با چند برابرکردن شبکه در روش‌های عددی ساده‌تر به دست نمی‌آید؛ هر چند که در کاربردهایی ممکن است حتی کاهش ابعاد شبکه عملی نباشد.



ب) فاصله‌ی گره‌ای ۴ برابر.

شکل ۸. مقایسه‌ی نتایج جواب دقیق و روش بدون شبکه‌ی تیلور-- گالرکین مرتبه‌ی چهارم با کورانت 0.5 در زمان $1/2$ ثانیه و نسبت شعاع تأثیر به فاصله‌ی گره‌ی ۳ برابر.

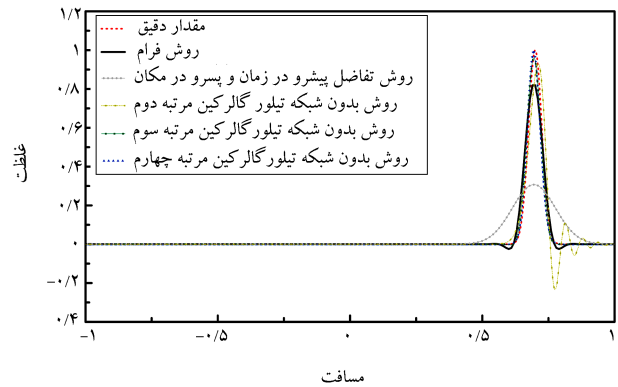
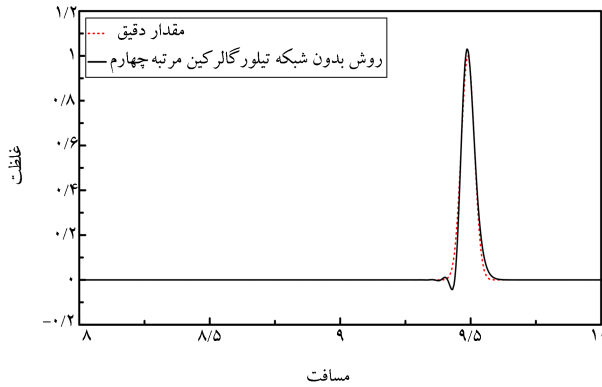
جدول ۳. مقادیر خطای روش بدون شبکه‌ی تیلور-- گالرکین مرتبه‌ی چهارم در حالت آلفا برابر 0.25 در مقادیر مختلف شعاع تأثیر.

مقدار شعاع تأثیر	مقدار خطا
۲ برابر فاصله‌ی گره‌ها	—
۳ برابر فاصله‌ی گره‌ها	۰,۱۱۴۷۱۹۰۹۰
۴ برابر فاصله‌ی گره‌ها	۰,۱۲۵۴۲۴۳۶۵

مختلف در شکل ۸ مشاهده می‌شود؛ که مطابق آن، در جدول ۳، خطای حالت مرتبه‌ی چهارم نسبت به جواب دقیق در سه حالت شعاع تأثیر متفاوت ارائه شده است. این نکته نیز شایان ذکر است که نتایج در شعاع تأثیر دو برابر، به علت ناپایداری شدن شبیه‌سازی نشان داده نشده است؛ زیرا برای محاسبه‌ی تابع مرتبه‌ی چهارم به تعداد نقاط بیشتری احتیاج است، که در شعاع‌های تأثیر پایین تأمین نمی‌شود.

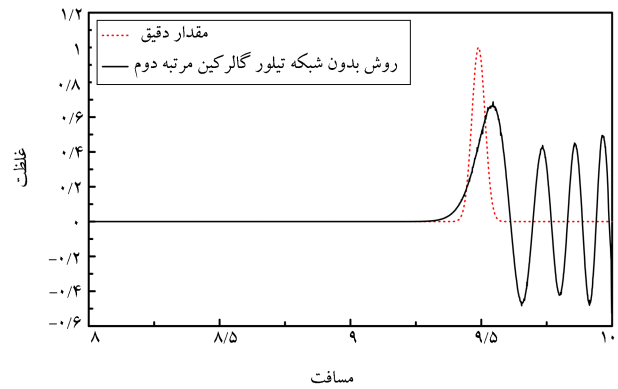
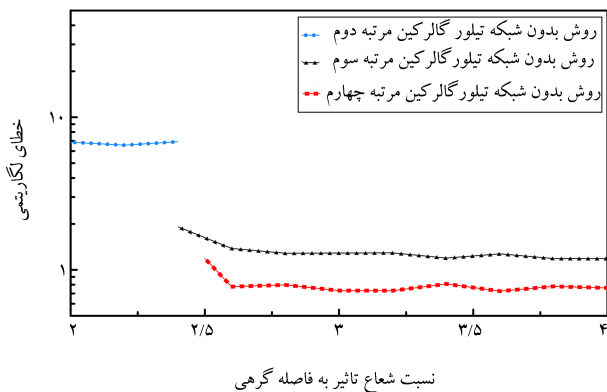
دقیق‌ترین نتایج در حالت مرتبه‌ی چهارم مشاهده می‌شود؛ که به میزانی افزایش یافته است که هموارشدگی در نتایج رخ نداده و جواب به میزان نسبتاً زیادی منطبق بر نتایج دقیق بوده است. در نهایت، مقدار خطای به دست‌آمده از نتایج روش بدون شبکه‌ی تیلور-- گالرکین مرتبه‌ی بالا، به صورت خلاصه در جدول ۴ ارائه شده است.

همان‌طور که در جدول ۴ مشخص است، روش بدون شبکه‌ی تیلور-- گالرکین در مرتبه‌ی چهارم با انتخاب کمینه‌ی شعاع تأثیر موردنیاز، جواب‌های به نسبت دقیق‌تری از سایر مرتبه‌های پایین‌تر ارائه داده است. برای یافتن شعاع تأثیر بهینه برای هر مرتبه‌ی دقت، مقدار خطای هر شعاع تأثیر از بازه‌ی ۲ تا ۴ برابر فاصله‌ی گره‌ها محاسبه شده است. در شکل ۹، مقداری خطا مشاهده می‌شود. شایان ذکر است که نتایج ناپایدار



شکل ۱۰. مقایسه‌ی نتایج روش بدون شبکه‌ی تیلور - گالرکین مرتبه‌ی بالا با روش فرام و روش پیشرو در زمان و پسرو در مکان
شکل ۱۱. مقایسه‌ی نتایج روش بدون شبکه‌ی تیلور - گالرکین مرتبه‌ی دوم با روش بدون شبکه‌ی تیلور گالرکین مرتبه دوم و روش بدون شبکه تیلور گالرکین مرتبه سوم و روش بدون شبکه تیلور گالرکین مرتبه چهارم

شکل ۱۲. مقایسه‌ی نتایج جواب دقیق و روش بدون شبکه‌ی تیلور - گالرکین مرتبه‌ی بالا در زمان و پسرو در مکان با کورانت ۰/۵ در مسئله با دامنه‌ی کوچک.



شکل ۱۳. مقایسه‌ی نتایج جواب دقیق و روش بدون شبکه‌ی تیلور - گالرکین مرتبه‌ی دوم با روش بدون شبکه تیلور گالرکین مرتبه سوم و روش بدون شبکه تیلور گالرکین مرتبه چهارم

شکل ۱۴. مقادیر خطای لگاریتمی روش بدون شبکه‌ی تیلور - گالرکین مرتبه‌ی بالا در نسبت شعاع‌های تأثیر به فاصله‌ی گره‌ی مختلف در مسئله‌ی گوسی با دامنه‌ی بزرگ‌تر.

قبل، با گام زمانی ۰/۰۰۵ بوده است (کورانت ۰/۵).

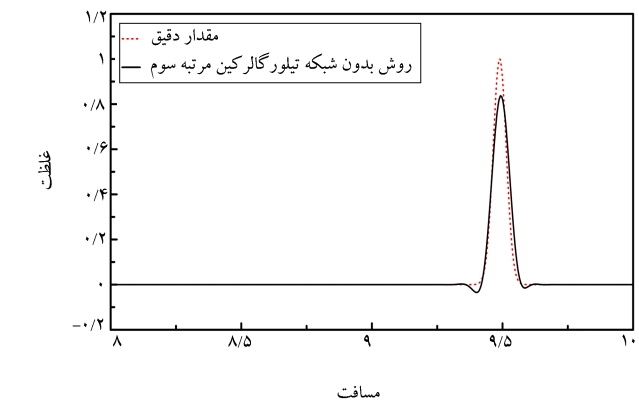
با مقایسه‌ی نتایج می‌توان مشاهده کرد که با گذشت زمان ۱۰ ثانیه، همچنان روش بدون شبکه‌ی تیلور - گالرکین مرتبه‌ی چهارم، نتایج قابل قبول‌تری نسبت به باقی روش‌ها ارائه داده است.

مقدار خطای هر شعاع تأثیر از بازه‌ی ۲ تا ۴ برابر فاصله‌ی گره‌ها محاسبه شده است. شکل ۱۴، مربوط به مقادیر خطاست. شایان ذکر است که نتایج ناپایدار تحلیل در شکل ۱۴ ارائه نشده و برای بهبود تفکیک خطاها، از مقیاس لگاریتمی استفاده شده است.

با توجه به شکل ۱۴ می‌توان مشاهده کرد با افزایش دقت مرتبه، خطای حاصل شده کمتر خواهد شد؛ اما همچنان می‌توان نوسان‌های خطا را در شعاع‌های تأثیر مختلف مشاهده کرد.

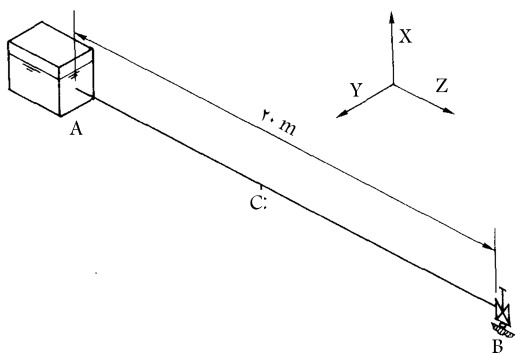
در انتهای تحلیل مسئله در حالت دوم، نتایج حاصل‌شده‌ی قبلی با روش فرام و روش پیشرو در زمان و پسرو در مکان با ۱۱۰۱ گره و در گام زمانی ۰/۰۰۵ ثانیه (کورانت ۰/۵) در شکل ۱۵ مشاهده می‌شود.

در این مسئله نیز به‌عنوان مثال، هر گام زمانی در تحلیل عددی با روش بدون شبکه‌ی تیلور - گالرکین مرتبه‌ی چهارم برابر با ۰/۷۱۸۷ ثانیه بوده است؛ در حالی که هر گام زمانی در روش فرام فقط ۰/۰۱۴ ثانیه زمان برده است. با مقایسه‌ی نتایج شکل ۱۵ می‌توان نتیجه گرفت که به ازاء صرف هزینه‌ی محاسباتی بیشتر برای



شکل ۱۱. مقایسه‌ی نتایج جواب دقیق و روش بدون شبکه‌ی تیلور - گالرکین مرتبه‌ی دوم با کورانت ۰/۵ در زمان ۱۰ ثانیه و نسبت شعاع تأثیر به فاصله‌ی گره‌ی دو برابر.

در حالت دوم تحلیل مسئله‌ی موج گوسی، دامنه‌ی محاسباتی افزایش پیدا کرده است. نتایج حاصل‌شده پس از گذشت ۱۰ ثانیه برای مرتبه‌ی دوم دقت در شکل ۱۱، مرتبه‌ی سوم دقت در شکل ۱۲ و مرتبه‌ی چهارم دقت در شکل ۱۳ مشاهده می‌شوند. در این حالت، دامنه‌ی محاسباتی به ۱۱۰۰ سلول پس‌زمینه تقسیم شده است، که شامل ۱۱۰۱ گره با فاصله‌های Δx برابر ۰/۰۱ و به مانند



شکل ۱۶. سیستم مخزن -- لوله -- شیر مسئله‌ی معیار دلفت.

جدول ۵. مشخصات مسئله‌ی ضربه‌ی قوچ کلاسیک مرجع دلفت.

مشخصات مسئله	مقادیر
طول لوله (متر)	۲۰
قطر خارجی لوله (میلی‌متر)	۸۱۳
ضخامت جداره‌ی لوله (میلی‌متر)	۸
مدول یانگ (گیگاپاسکال)	۲۱۰
مدول بالک (گیگاپاسکال)	۲/۱
سرعت سیال (متر بر ثانیه)	۱
چگالی سیال (کیلوگرم بر مترمکعب)	۱۰۰۰
ضریب پواسون	۰/۳

سرعت موج سیال طبق رابطه‌ی هلمهولتز -- کورتوگ محاسبه می‌شود، که به صورت رابطه‌ی ۳۸ است:

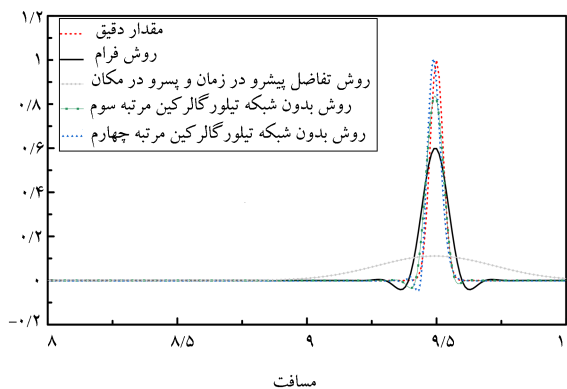
$$a_{HK} = \sqrt{\frac{K}{\rho_f \left(1 + \frac{DK}{eE}\right)}} \quad (38)$$

که در آن، K مدول بالک، ρ_f چگالی سیال، D قطر لوله، e ضخامت جداره‌ی لوله و E مدول یانگ است. سرعت موج سیال طبق رابطه‌ی ۳۸ برابر با ۱۰۲۵ است. مسئله با دو روش اجزاء محدود مشخصه‌ی گالرکین و روش بدون شبکه‌ی تیلور --

گالرکین مرتبه‌های سوم و چهارم حل شده است. دامنه‌ی محاسباتی به ۲۰۰ سلول پس‌زمینه تقسیم شده است، که شامل ۲۰۱ گره با فاصله‌های Δx برابر ۰/۱ بوده و درون هر کدام از آن‌ها، از ۵ نقطه‌ی گوس استفاده شده است. همچنین گام زمانی در حالت اول برابر با ۰/۰۰۰۰۵ (کورانت ۰/۷) و در حالت دوم برابر با ۰/۰۰۰۰۷۵ (کورانت ۰/۷۵)، $p^T(x) = \{1, x\}$ و شعاع تأثیر برابر با ۲/۲ برابر فاصله‌ی گره‌ها در نظر گرفته شده است. نتایج مسئله تا زمان ۰/۲ ثانیه تحلیل شده است. همچنین مقدار تاریخچه‌ی زمانی هد در ناحیه‌ی شیر با استفاده از روش مشخصه‌ها در شکل ۱۷ مشاهده می‌شود.

نتایج به‌دست‌آمده با روش اجزاء محدود مشخصه‌ی گالرکین در شکل ۱۸ مشاهده می‌شود، که شکل ۱۸ - الف، مربوط به تاریخچه‌ی زمانی هد در ناحیه‌ی شیر و شکل ۱۸ - ب، مربوط به هد -- مکان در زمان ۰/۱ ثانیه است.

مقدار نوسان‌های حاصل‌شده در روش اجزاء محدود مشخصه‌ی گالرکین بسیار قابل‌ملاحظه است. بنابراین، برای افزایش دقت، جملات مرتبه‌ی بالاتر به معادله



شکل ۱۵. مقایسه‌ی نتایج روش بدون شبکه‌ی تیلور -- گالرکین مرتبه‌ی بالا با روش فرام و روش پیشرو در زمان و پسرو در مکان با کورانت ۰/۵ در مسئله با دامنه‌ی بزرگ.

روش بدون شبکه‌ی تیلور -- گالرکین مرتبه‌ی بالا، نتایج مطلوب‌تری به‌دست می‌آید.

۲.۳. مسئله‌ی دوم (ضربه‌ی قوچ کلاسیک)

مسئله‌ی ضربه‌ی قوچ نیز یک مسئله‌ی جابجایی خالص یک بعدی است، که متغیر Φ در آن، یک متغیر برداری شامل سرعت و فشار است. پدیده‌ی ضربه‌ی قوچ از تغییر ناگهانی سرعت در لوله به‌وجود می‌آید، که سبب افزایش یا کاهش ناگهانی فشار در لوله می‌شود. حل عددی مسئله‌ی ضربه‌ی قوچ از آن جهت حائز اهمیت است که به‌علت ناگهانی و لحظه‌ی بودن تغییرات سرعت در لوله، تغییرات هد در لوله نیز بسیار سریع است، که سبب به‌وجود آمدن ناپوستگی در هد می‌شود. این ناپوستگی به‌وجود آمده، شبیه‌سازی عددی را با دشواری روبرو می‌کند.

متغیر معادله‌ی حاکم مسئله‌ی ضربه‌ی قوچ کلاسیک بدون در نظر گرفتن اصطکاک به‌صورت رابطه‌های ۳۳ و ۳۴ است:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{g}{c_f^2} \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (34)$$

که در آن‌ها، V بیانگر سرعت سیال، H هد سیال، c_f سرعت موج سیال و g شتاب گرانشی زمین است. معادله‌ی حاکم این مسئله را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۳۵ نوشت:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + U \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0 \quad (35)$$

$$\text{که در آن، } U = \begin{bmatrix} g & \\ c_f^2 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } \Phi = \begin{bmatrix} V \\ H \end{bmatrix} \text{ است.}$$

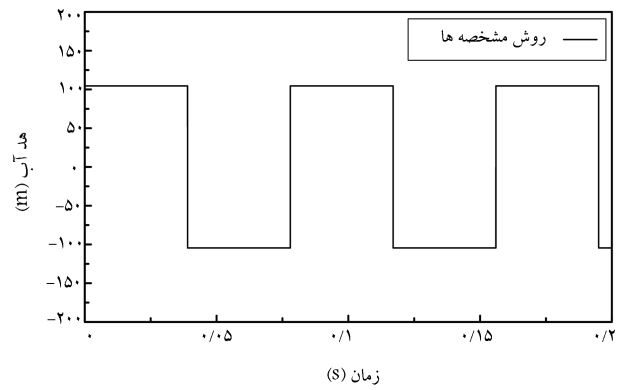
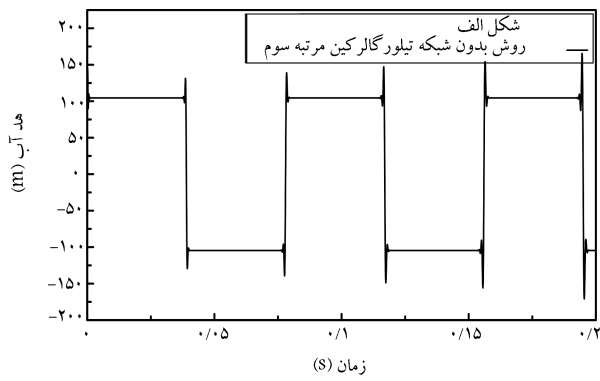
مسئله‌ی دوم بررسی‌شده در پژوهش حاضر، مسئله‌ی مرجع دلفت است (شکل ۱۶)، که مشخصات آن در جدول ۵ ارائه شده است. [۲۱]

دامنه‌ی مسئله به‌صورت $x = (0, +20)$ بوده است. شرایط مرزی در پیچله در مرزها نیز به‌صورت رابطه‌ی ۳۶ است:

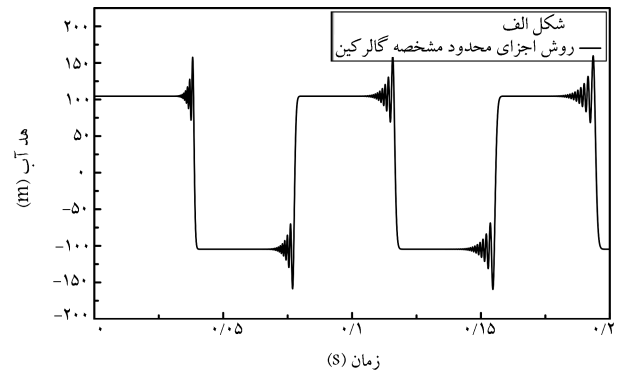
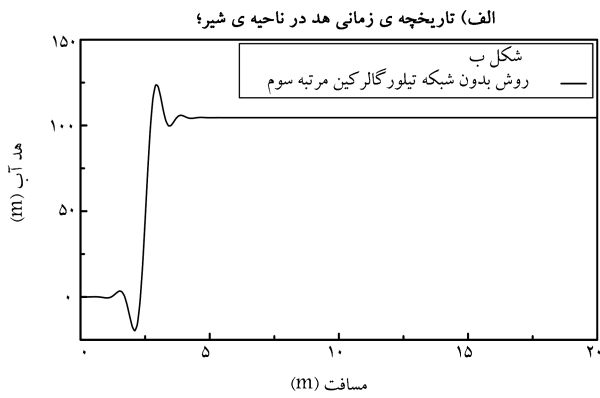
$$V(20, t) = 0 \quad H(0, t) = 0 \quad x \in \Gamma \quad (36)$$

همچنین شرایط اولیه نیز مطابق رابطه‌ی ۳۷ برقرار است:

$$V(x, t=0) = 1/0 \quad H(x, t=0) = 0/0 \quad (37)$$



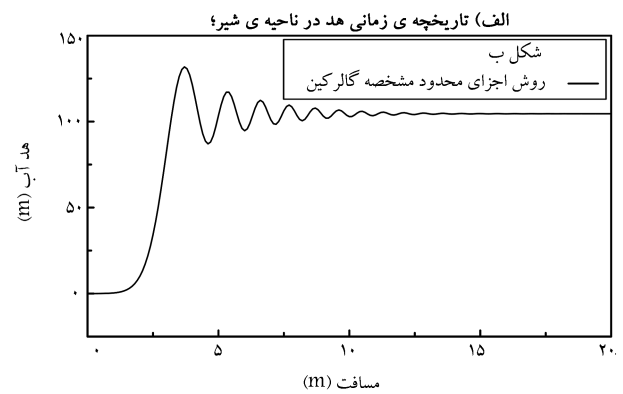
شکل ۱۷. مقدار تاریخی زمانی هد در ناحیه‌ی شیر برای ضربه‌ی قوج کلاسیک.



ب) هد- مکان در زمان ۰/۱ s

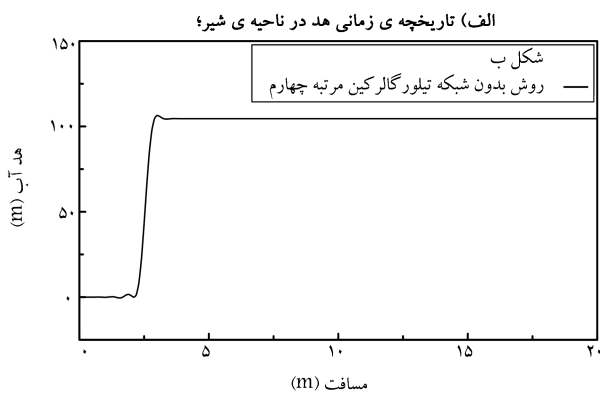
ب) هد- مکان در زمان ۰/۱ s

شکل ۱۹. نتایج تحلیل عددی مسئله‌ی ضربه‌ی قوج کلاسیک با روش بدون شبکه‌ی تیلور -- گالرکین مرتبه‌ی سوم (با کورانت ۰/۵).



ب) هد- مکان در زمان ۰/۱ s

شکل ۱۸. نتایج تحلیل عددی مسئله‌ی ضربه‌ی قوج کلاسیک با روش اجزاء محدود مشخصه‌ی گالرکین (با کورانت ۰/۵).



ب) هد- مکان در زمان ۰/۱ s

شکل ۲۰. نتایج تحلیل عددی مسئله‌ی ضربه‌ی قوج کلاسیک با روش بدون شبکه‌ی تیلور -- گالرکین مرتبه‌ی چهارم (با کورانت ۰/۵).

اضافه شده است. با حل حالت اول مسئله‌ی ذکر شده با روش بدون شبکه‌ی تیلور -- گالرکین مرتبه‌ی سوم، نتایج در شکل ۱۹ مشاهده می‌شود؛ که در آن، شکل ۱۹ - الف، مربوط به تاریخی زمانی هد در ناحیه‌ی شیر و شکل ۱۹ - ب، مربوط به هد -- مکان در زمان ۰/۱ ثانیه است.

با مقایسه‌ی نتایج حاصل شده نسبت به روش اجزاء محدود مشخصه‌ی گالرکین می‌توان مشاهده کرد نوسان‌ها کاهش یافته و حل عددی با دقت بیشتری انجام شده است؛ اما همچنان این پتانسیل وجود دارد تا نتایج به دقت و پایداری مناسب‌تری برسند. بنابراین حالت اول مسئله با روش بدون شبکه‌ی تیلور -- گالرکین مرتبه‌ی چهارم حل شده است، که نتایج آن در شکل ۲۰ مشاهده می‌شود. شکل ۲۰ - الف، مربوط به تاریخی زمانی هد در ناحیه‌ی شیر و شکل ۲۰ - ب، مربوط به هد -- مکان در زمان ۰/۱ ثانیه است. مقادیر بدست آمده در حالت مرتبه‌ی چهارم، نوسان‌های

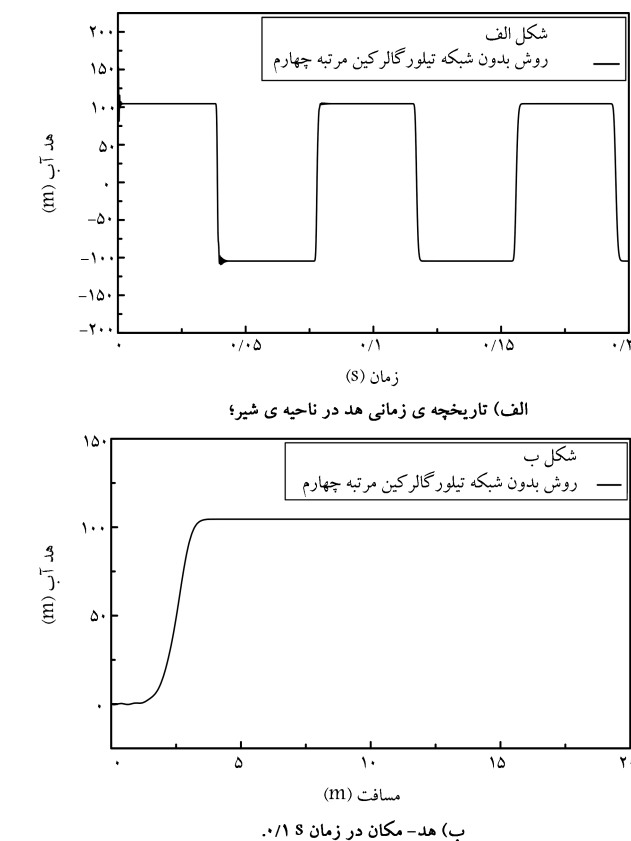
چهارم، نتایج حاصل شده در شکل ۲۱ مشاهده می شود؛ که مطابق آن، شکل ۲۱ - الف، مربوط به تاریخچه ی زمانی هد در ناحیه ی شیرو و شکل ۲۱ - ب، مربوط به هد - مکان در زمان ۰/۱ ثانیه است. شایان ذکر است در کورانت ۰/۷۵، روش بدون شبکه ی تیلور - گالرکین مرتبه ی سوم نتایج ناپایداری از خود نشان می دهد.

۴. نتیجه گیری

در پژوهش حاضر، روش بدون شبکه ی تیلور - گالرکین مرتبه ی بالا برای حل مسائل جابجایی خالص ارائه شده است. در روش اخیر، با بهره گیری از جملات مشتق مرتبه ی بالا در بسط تیلور و گسسته سازی زمانی آن، این امکان به وجود آمد تا پایداری تحلیل و دقت شبیه سازی افزایش یابد. برخلاف محدودیت روش گالرکین استاندارد، که استفاده از جملات مرتبه ی بالای بیشینه تا مرتبه ی دو ممکن است، این روش با بهره گیری از تابع شکل کمینه ی مربعات متحرک و تابع وزن نمایی، امکان استفاده از جملات با مشتق مرتبه ی بالا را در معادله مقدر می سازد. دو مسئله ی مرجع برای بررسی توانمندی روش ارائه شده، بررسی شده است. با توجه به خروجی های حاصل شده، ملاحظه شد که با هر مرحله افزایش مرتبه ی روش بدون شبکه ی تیلور - گالرکین، خطاهای به وجود آمده به میزان قابل توجهی کاهش یافته است. تابع شکل کمینه ی مربعات متحرک این قابلیت را ممکن ساخت تا بتوان از جملات مرتبه ی بالا استفاده کرد و دقت تحلیل را افزایش داد؛ هر چند پیچیدگی این تابع نسبت به تابع شکل اجزاء محدود باعث شده است که مدت زمان محاسبه ی آن طولانی تر شود. طبیعتاً افزایش مرتبه ی معادله، نیاز به محاسبه های مشتق های مرتبه ی بالای تابع شکل دارد و باعث طولانی تر شدن زمان تحلیل عددی می شود. در انتها می توان بیان کرد که روش بدون شبکه ی تیلور - گالرکین مرتبه ی بالا، روش مناسبی برای حل مسائل جابجایی خالص است، که بسته به نیاز مسئله می توان جملات مراتب بالاتری استفاده کرد. همچنین برای مسائل دو بُعدی نیز می توان با بازنویسی روابط برای حالت دو بُعدی، مسائل پیچیده تری را حل کرد.

پانویس ها

1. Convection
2. Diffusion
3. Self-Adjoint
4. Galerkin
5. Zienkiewicz
6. Petrov-Galerkin Method
7. Damp
8. Guymon
9. Hughes
10. Streamline Diffusion
11. Johnson
12. Crosswind Diffusion
13. Douglas & Russell
14. Non-Conservative
15. Forwarding Track
16. Celia



شکل ۲۱. نتایج تحلیل عددی مسئله ی ضربه ی کوچ کلاسیک با روش بدون شبکه ی تیلور - گالرکین مرتبه ی چهارم (با کورانت ۰/۷۵).

بسیار اندکی نسبت به باقی روش ها نشان می دهند و با توجه به پیچیدگی شبیه سازی ناپیوستگی، می توان تأثیر جملات پایداری مرتبه ی چهارم را در نتایج مشاهده کرد. با حل حالت دوم مسئله ی اخیر با روش بدون شبکه ی تیلور - گالرکین مرتبه ی

17. Eulerian-Lagrangian Localized Adjoint
18. Galerkin Least-Squares
19. Characteristic-Galerkin
20. Taylor-Galerkin
21. Donea
22. Forward-Time Taylor Series Expansions
23. Weak Form
24. Zhang
25. Wang
26. Element Free Galerkin
27. Liu
28. Radial Basis Function
29. Li
30. Proper Orthogonal Decomposition
31. Streamline Upwind Petrov-Galerkin
32. Grimberg
33. Projection-Based Reduced-Order Models
34. Modal Truncation

35. Singh
36. Stabilized Local Meshless Method
37. Shock
38. Javed
39. Radial Basis Functions in Finite Difference Method
40. High-Order Taylor-Galerkin Meshless Method
41. Moving Least-Squares
42. Divergence
43. Explicit
44. Fromm
45. Forward Time Backward Space

منابع (References)

1. Zienkiewicz, O.C., Gallagher, R.H. and Hood, P., 1975. *Newtonian and non-Newtonian Viscous Incompressible Flow. Temperature Induced Flows. Finite Element Solutions*. The Mathematics of Finite Elements and Applications II.
2. Taylor, R.L. and Zienkiewicz, O.C., 2013. *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann Oxford.
3. Guymon, G.L., Scott, V.H. and Herrmann, L.R., 1970. A general numerical solution of the two-dimensional diffusion-convection equation by the finite element method. *Water Resources Research*, 6(6), pp. 1611-1617. <https://doi.org/10.1029/WR006i006p01611>.
4. Hughes, T.J., 1979. A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion. *Finite Element Methods for Convection Dominated Flows*, AMD 34.
5. Hughes, T.J., 1982. A theoretical framework for Petrov-Galerkin methods with discontinuous weighting functions: Application to the streamline-upwind procedure. *Finite Element in Fluids*, 4, pp. Chapter-3.
6. Johnson, C. and Saranen, J., 1986. Streamline diffusion methods for the incompressible Euler and Navier-Stokes equations. *Mathematics of Computation*, 47(175), pp. 1-18. <https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1986-0842120-4>.
7. Johnson, C., Navert, U. and Pitkaranta, J., 1984. Finite element methods for linear hyperbolic problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 45, pp. 285-312. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(84\)90158-0](https://doi.org/10.1016/0045-7825(84)90158-0).
8. Douglas, Jr, J. and Russell, T.F., 1982. Numerical methods for convection-dominated diffusion problems based on combining the method of characteristics with finite element or finite difference procedures. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 19(5), pp. 871-885. <https://doi.org/10.1137/0719063>.
9. Celia, M.A., Russell, T.F., Herrera, I. and Ewing, R.E., 1990. An Eulerian-Lagrangian localized adjoint method for the advection-diffusion equation. *Advances in Water Resources*, 13(4), pp. 187-206. [https://doi.org/10.1016/0309-1708\(90\)90041-2](https://doi.org/10.1016/0309-1708(90)90041-2).
10. Hughes, T.J., Franca, L.P. and Hulbert, G.M., 1989. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73(2), pp. 173-189. [https://doi.org/10.1016/0045-7825\(89\)90111-4](https://doi.org/10.1016/0045-7825(89)90111-4).
11. Zienkiewicz, O.C., 1983. *Finite Elements in Fluid Mechanics: A Decade of Progress*. Institute for Numerical Methods in Engineering, University College of Swansea.
12. Löhner, R., Morgan, K. and Zienkiewicz, O.C., 1984. The solution of non-linear hyperbolic equation systems by the finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 4(11), pp. 1043-1063. <https://doi.org/10.1002/flid.1650041105>.
13. Donea, J., 1984. A Taylor-Galerkin method for convective transport problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 20(1), pp. 101-119. <https://doi.org/10.1002/nme.1620200108>.
14. Zhang, X.H., Ouyang, J. and Zhang, L., 2009. Element-free characteristic Galerkin method for Burgers' equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33(3), pp. 356-362. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2008.07.001>.
15. Wang, X., Wang, H. and Liu, Y., 2022. A semi-Lagrangian meshfree Galerkin method for convection-dominated partial differential equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 391, p. 114546. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2021.114546>.
16. Liu, Y., Zhang, W., Jiang, Y. and Ye, Z., 2016. A high-order finite volume method on unstructured grids using RBF reconstruction. *Computers & Mathematics with Applications*, 72(4), pp. 1096-1117. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2016.06.024>.
17. Li, R., Wu, Q. and Zhu, S., 2019. Proper orthogonal decomposition with SUPG-stabilized isogeometric analysis for reduced order modelling of unsteady convection-dominated convection-diffusion-reaction problems. *Journal of Computational Physics*, 387, pp. 280-302. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2019.02.051>.
18. Grimberg, S., Farhat, C. and Youkilis, N., 2020. On the stability of projection-based model order reduction for convection-dominated laminar and turbulent flows. *Journal of Computational Physics*, 419, p. 109681. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109681>.
19. Singh, V. and Mohanty, R.K., 2019. Local meshless method for convection dominated steady and unsteady partial differential equations. *Engineering with Computers*, 35, pp. 803-812. <https://doi.org/10.1007/s00366-018-0632-4>.
20. Javed, A., Mazhar, F., Shams, T.A., Ayaz, M. and Hussain, N., 2019. A stabilized RBF finite difference method for convection dominated flows over meshfree nodes. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 107, pp. 159-167. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.07.008>.
21. Liu, G.R. and Gu, Y.T., 2005. *An Introduction to Mesh-free Methods and Their Programming*. Springer Science & Business Media. <https://doi.org/10.1007/1-4020-3468-7>.
22. Tijsseling, A.S., 2003. Exact solution of linear hyperbolic four-equation system in axial liquid-pipe vibration. *Journal of Fluids and Structures*, 18(2), pp. 179-196. <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2003.07.001>.