

# مدل‌سازی عددی فرونشست زمین ناشی از استخراج آب‌های زیرزمینی با لحاظ کردن اثرات غیر اشباع به روش بدون‌المان گالرکین (EFG)

احمد تورئی<sup>۱</sup>، علی پاک<sup>۲\*</sup>، محمد علی ایرانمنش<sup>۳</sup>

۱. فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد ژئوتکنیک، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

۲. استاد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

۳. استادیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

## چکیده:

در این پژوهش، بکمک یک مدل عددی کاملاً همبسته هیدرومکانیکال، پدیده فرونشست ناشی از استخراج آب‌های زیرزمینی از آبخوان‌ها با در نظرگیری اثرات غیراشباع به روش بدون‌المان گالرکین (EFG) شبیه‌سازی شود. بکمک این مدل می‌توان یک پیش‌بینی مناسب برای تغییرات هد هیدرولیکی و میزان فرونشست زمین ارائه نمود. پس از حل مسائل محک، مدل نهائی برای حل مسئله فرونشست به کار گرفته شد و نتایج این پژوهش با نتایج روش المان محدود (FEM) برای یک آبخوان همسان و با در نظرگیری شرایط غیراشباع مقایسه گردید و خطای فرونشست زمین ۵/۵۱ درصد و خطای افت هد هیدرولیکی ۱۳/۳۵ درصد محاسبه شد که نشان از تطابق مناسب بین نتایج این دو روش است. نتایج نشان می‌دهد که روش EFG قابلیت مدل‌سازی پدیده فرونشست را دارد. همچنین اثرات غیرخطی استخراج آب‌های زیرزمینی بر کاهش هد هیدرولیکی و افزایش فرونشست قابل تعیین است. در نهایت، یک مطالعه‌ای پارامتری بمنظور بررسی میزان تاثیر ویژگی‌های ژئوتکنیکی آبخوان بر روی میزان فرونشست انجام شد. پارامترهای مدول الاستیک و ضریب پواسون بیش‌ترین تاثیر را بر میزان فرونشست زمین دارند و لازم است پیش از اجرای پروژه‌های برداشت آب‌های زیرزمینی، این پارامترها با دقت قابل قبول در نظر گرفته شود.

## واژگان کلیدی:

فرونشست زمین، استخراج آب‌های زیرزمینی، مدل‌سازی عددی، تحلیل همبسته جریان-تغییر شکل، روش بدون شبکه EFG، اثرات غیراشباع

---

\* فارغ‌التحصیل کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف  
ایمیل: [ahmad.tourei@alum.sharif.edu](mailto:ahmad.tourei@alum.sharif.edu) (نویسنده مسئول مقاله)

# Numerical modeling of land subsidence induced by groundwater extraction considering unsaturated effects and using element-free Galerkin (EFG) method

A. Tourei <sup>١</sup>, A. Pak <sup>٢</sup>, M. Iranmanesh <sup>٣</sup>

<sup>١</sup>- Graduated with a master's in Geotechnical Engineering, Civil Engineering Department, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.

<sup>٢</sup>- Professor, Civil Engineering Department, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.

<sup>٣</sup>- Assistant Professor, Civil Engineering Department, Khajeh Nasir Toosi University of Technology, Tehran, Iran

## Abstract:

This study aims to provide a coupled flow-deformation (hydromechanical) model for simulating land subsidence associated with groundwater extraction in aquifers. For this simulation, we have adopted the element-free Galerkin (EFG) method and considered the unsaturated effects in the aquifers based on the aquifer's hydrologic and geotechnical characteristics. This model gives us a better understanding of the aquifer's geological characteristics, enabling us to forecast changes in the hydraulic head and land subsidence.

To ensure the credibility of our model and to verify the code, we modeled unsaturated hydromechanical benchmark problems. Then, using the EFG method as a numerical tool, we modeled an isotropic aquifer to investigate the effects of groundwater pumping on land subsidence and hydraulic changes in the aquifer. To ascertain the reliability of the modeling, we compared EFG results with finite element method (FEM) models. The comparative analysis of EFG and FEM models demonstrates discrepancies of ٥,٥١% in land subsidence and ١٣,٣٥% in hydraulic head reduction, which are satisfying. The land subsidence and hydraulic head profiles demonstrate that the EFG method is capable of land subsidence simulation caused by water pumping. Furthermore, our findings highlight the nonlinear correlation between groundwater extraction and the subsequent decrease in hydraulic head and land subsidence augmentation. Finally, we performed a parametric study to better understand the effect of various characteristics of aquifers and observe the effect of the aquifer's parameters, such as hydraulic conductivity, elastic modulus, and Poisson's ratio. We investigated the effect of each parameter on land subsidence increase and hydraulic head decline. The results show that elastic modulus and Poisson's ratio have the most significant effect on land subsidence. Although hydraulic conductivity controls the hydraulic decrement and land subsidence increase time, it slightly affects the final hydraulic head and land subsidence at the steady-state stage. These results highlight the importance of in-situ measurement of elastic modulus and Poisson's ratio parameters with acceptable accuracy for groundwater extraction projects, as these parameters play a significant role in the feasibility studies.

**Keywords:** Land subsidence, Groundwater extraction, Numerical modeling, Coupled flow-deformation analysis, Element-free Galerkin method, Unsaturated effects

## ۱- مقدمه و تاریخچه تحقیقات

با رشد سریع جمعیت و گسترش فعالیت‌های صنعتی و کشاورزی بسیاری از نقاط جهان، نیاز به برداشت آب از منابع آب زیرزمینی افزایش پیدا کرده است. این موضوع در رابطه با ذخایر آب زیرزمینی به عنوان منبع اصلی تامین آب بخصوص در مناطق خشک و نیمه خشک به مسئله‌ای بحرانی تبدیل شده است؛ به طوری که استخراج بیش از حد آب از سفره‌های آب زیرزمینی سبب شده که امکان تغذیه منابع زیرزمینی تحت شرایط طبیعی پیشین وجود نداشته باشد. در دهه‌های اخیر، این برداشت بیش از حد اثرات زیست‌محیطی گسترده‌ای را در نقاط بسیاری از جهان ایجاد نموده است. بر اساس مشاهدات و مطالعات، فرونشست زمین یکی از عمده‌ترین و گسترده‌ترین خطرات ایجاد شده بر اثر استخراج بی‌رویه از منابع آب زیرزمینی می‌باشد. بطور کلی، فرونشست زمین می‌تواند ناشی از مخاطرات طبیعی (مانند زلزله یا روانگرایی) و یا فعالیت‌های انسانی (مانند استخراج سیالات مختلف از زمین) باشد. در گزارش مربوط به برنامه جهانی هیدرولوژی که توسط سازمان یونسکو در سال ۲۰۱۳ تهیه شده است، فرونشست ناشی از استخراج آب از آبخوان‌های زیرزمینی یکی از تهدیدات عمده توسعه پایدار عنوان شده است [۱]، [۲]. بنابراین لازم است عوامل موثر بر پدیده فرونشست بطور دقیق شناسایی شود و همچنین اقداماتی در جهت پیش‌بینی میزان فرونشست در آبخوان‌ها با شرایط بهره برداری مختلف جهت مدیریت بحران انجام شود. در این پژوهش قصد داریم تا مدلی برای پیش‌بینی فرونشست ناشی از استخراج آب از آبخوان‌ها با در نظرگیری اثرات غیراشباع به روش بدون‌المان‌گالرکین (EFG) ارائه دهیم تا درک بهتری از این پدیده بدست آید.

### ۱-۱- مروری بر تحقیقات قبلی در زمینه فرونشست ناشی

#### از برداشت آب‌های زیرزمینی

تراکم آبخوان از خروج آب و کاهش فضاها بین‌دانه‌ای در آبخوان حاصل می‌شود که باعث فرونشست زمین و عوارض جانبی ناشی از آن می‌شود. این تراکم با تغییر در فشار سیال منفذی بین

خلل و فرج دانه‌های جامد صورت می‌گیرد. کاهش سطح آب و یا تغییرات پروفیل رطوبتی در بالای سطح آب زیرزمینی ممکن است باعث آرایش مجدد دانه‌های خاک و یا تراکم کلی لایه حاکی موجود نظیر خاک رس شود. فرونشست ماندگار زمین عمدتاً به علت فشرده شدن و تحکیم لایه‌های رس و سیلت میان آبخوان است. لایه رسی که تحکیم می‌شود هرگز مجدداً آب از دست‌داده خود را بازخواهد یافت و در نتیجه فرونشست زمین ماندگار خواهد بود. بنابراین، تغذیه سفره آب زیرزمینی و رساندن آن به ترازهای اولیه، سبب بازگشت سطح زمین به تراز اولیه نخواهد شد [۳].

مطالعات صورت گرفته در سراسر جهان نشان می‌دهد که تغییر مکان در سطح زمین تابعی از تغییرات تراز آب‌های زیرزمینی می‌باشد. برای مثال دشت لاس‌وگاس<sup>۱</sup> در نوادا آمریکا، دشت آنتلپ<sup>۲</sup> و دشت سانتا کلارا<sup>۳</sup> در کالیفرنیا آمریکا، شهر جاکارتا<sup>۴</sup> در اندونزی و شهر پاریس در فرانسه نمونه‌هایی از این پدیده می‌باشند. نکته جالب توجه این است که موقعیت مکانی بیش‌ترین مقدار فرونشست همیشه منطبق بر موقعیت مکانی بیش‌ترین افت تراز آب‌های زیرزمینی مشاهده شده نمی‌باشد. مثلاً در لاس‌وگاس موقعیت بیش‌ترین افت تراز آب‌های زیرزمینی متفاوت از موقعیت بیش‌ترین فرونشست مشاهده شده است. همچنین در برخی از مکان‌ها، مانند ممفیس<sup>۵</sup> در آمریکا، علی‌رغم وجود افت شدید تراز آب‌های زیرزمینی هیچ فرونشست قابل ملاحظه‌ای گزارش نشده است [۴]؛ که علت آن می‌تواند تراکم بسیار بالای مخزن و یا وجود مخزن سنگی باشد. این موضوع حاکی از اهمیت مدل‌سازی پدیده فرونشست زمین است. پاسخ مکانیکی سازند به استخراج سیال توسط برخی از پژوهشگران مطالعه شده است و کاهش تراکم‌پذیری کل لایه با افزایش تنش مؤثر یا افزایش کرنش، در آزمایشگاه بررسی شده است. خطی بودن رابطه بین استخراج سیال و فرونشست منطقه نیز مطرح شده است. لازم به توضیح است که رابطه بین استخراج سیال و فرونشست منطقه گرچه ممکن است در موارد خاصی خطی باشد، ولی غالباً خطی نبوده و به دلیل

<sup>۴</sup> Jakarta

<sup>۵</sup> Memphis

<sup>۱</sup> Las Vegas

<sup>۲</sup> Antelope

<sup>۳</sup> Santa Clara

تأثیرات متقابل پارامترهای هیدرولیکی و فرونشست، غیرخطی است [۵].

## ۱ - ۲ - مرور تحقیقاتی در زمینه مدل‌سازی عددی فرونشست ناشی از برداشت آب‌های زیرزمینی

در این بخش به بررسی برخی از مطالعات صورت گرفته در زمینه مدل‌سازی عددی پدیده فرونشست می‌پردازیم. با توجه به اهمیت پیش‌بینی رفتار زمین در اثر برداشت آب‌های زیرزمینی و همچنین عدم امکان بررسی این پدیده در آزمایشگاه، محققین بسیاری از گذشته تاکنون به مدل‌سازی عددی پدیده فرونشست به روش المان محدود، روش حجم محدود، روش تفاضل محدود و برخی روش‌های بدون شبکه پرداخته‌اند. روش‌های بدون شبکه مزایای بسیاری از جمله توانایی استفاده از پیوستگی مرتبه بالاتر برای درون‌یابی، دستیابی به نمایش دقیق میدان‌های تنش، مدل‌سازی تغییر شکل‌های بزرگ و انتشار ترک را ارائه می‌دهند [۶]. اگرچه تاکنون از روش EFG برای مدل‌سازی عددی برخی از مسائل ژئوتکنیکی استفاده شده است [۶] - [۸]، تاکنون تحقیقی در زمینه مدل‌سازی همبسته جریان -

تغییر شکل (هیدرومکانیکال) برای بررسی و پیش‌بینی پدیده فرونشست به این روش صورت نگرفته است. در ادامه، تعدادی از مطالعات صورت گرفته در زمینه مدل‌سازی فرونشست زمین آورده شده است.

در سال ۲۰۱۰، خوش‌قلب و خلیلی [۹] بمنظور حل معادله بیو (Biot) [۱۰]، الگوریتمی کاملاً همبسته و بدون شبکه ارائه نمودند که این الگوریتم برای گسسته‌سازی مکانی از روش درون‌یابی نقطه‌شعاعی<sup>۱</sup> (RPIM) و برای گسسته‌سازی زمانی از روش تقریبی سه‌نقطه‌ای استفاده می‌کند. آن‌ها به کمک حل تعدادی مسئله تحلیلی، کاربرد مدل بدون شبکه خود را برای شبیه‌سازی مسائل همبسته جریان-تغییر مکان در محیط‌های متخلخل اشباع نشان دادند.

اسدی و عطائی‌آشتیانی [۱] در سال ۲۰۱۵ یک مدل مفهومی برای ترکیب معادلات یک‌بعدی-دوفاز و دوبعدی-تک‌فاز جهت محاسبه نشست به ترتیب در لایه‌های اشباع و غیراشباع در یک

محیط متخلخل الاستیک ارائه کرد. در این تحقیق، معادلات جریان و تعادل بصورت همبسته و به روش گسسته‌سازی حجم محدود مدل-سازی شده است. در نهایت، پس از ترکیب مدل عددی دوفاز هیدرومکانیکی با مدل عددی اشباع دوبعدی جهت مدل‌سازی لایه-های اشباع و غیراشباع، فرونشست ناحیه‌ای در دشت تهران به عنوان مطالعه موردی بررسی شد.

برای پیش‌بینی میزان فرونشست دشت علی‌آباد در استان‌های قم و مرکزی، نظری [۱۱] در سال ۲۰۱۷ با استفاده از نرم‌افزار المان محدود مادفلو<sup>۲</sup> به مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی پرداخت و سپس با وارد نمودن نتایج حاصل از بخش دیگری از پژوهش که در آن با استفاده از روش تداخل‌سنجی ماهواره‌ای میزان فرونشست در این دشت شبیه‌سازی گردیده است، شرایط فرونشست منطقه برای شرایط مختلف در آینده پیش‌بینی شد. در واقع به کمک تحلیلی غیرهمبسته و با استفاده از داده‌های ماهواره‌ای موجود، میزان فرونشست زمین بررسی شد.

در سال ۲۰۱۸، رجبی [۱۲] به کمک نرم‌افزار پلکسیس سه-بعدی<sup>۳</sup> به روش المان محدود و با در نظرگیری تغییرات فشار آبخوان، داده‌های هیدرولوژیکی و ژئوتکنیکی موجود به شبیه‌سازی پدیده فرونشست دشت علی‌آباد قم پرداخت. این مطالعه با استفاده از تئوری تحکیم و با در نظرگیری مدل الاستیک با رفتار پلاستیک ایده‌آل<sup>۴</sup> صورت گرفت.

به منظور شبیه‌سازی جریان آب‌های زیرزمینی در آبخوان‌های محصورنشده، پسانیا<sup>۵</sup> و همکاران [۱۳] در سال ۲۰۱۹ به مدل‌سازی عددی جریان به کمک روش بدون شبکه EFG برای گسسته‌سازی مکانی و رویکرد جابجایی حداقل مربعات (MLS)<sup>۶</sup> برای ساخت توابع شکل پرداختند. سایر مطالعات پیشین به کمک روش‌های عددی وابسته به مش مانند روش المان محدود و روش تفاضل محدود صورت گرفته بود و طبیعتاً این روش‌ها مستلزم وجود یک شبکه محاسباتی اولیه می‌باشند که تولید این مش می‌تواند در هندسه‌های پیچیده از لحاظ محاسباتی غیراقتصادی باشد و همچنین زمانی که

<sup>۴</sup> Elastic-perfectly plastic

<sup>۵</sup> Pathania

<sup>۶</sup> Moving Least Squares

<sup>۱</sup> Radial Point Interpolation Method

<sup>۲</sup> MODFLOW

<sup>۳</sup> Plaxis 3D

تبدیل شده و سپس فرم انتگرالی با انتگرال گیری عددی در نقاط گوسی<sup>۵</sup> در دامنه مسئله به دستگاه معادلات جبری تبدیل می شود. روش EFG به دلیل برقرار نبودن خاصیت تابع کرونگر دلتا<sup>۶</sup> برای توابع شکل از روش MLS، معمولاً از ضرایب لاگرانژ یا روش پنالتی استفاده می کند تا شرایط مرزی ضروری به درستی اعمال شوند.

## ۲- مبانی تئوریک و معادلات حاکم

در این بخش به بررسی مبانی تئوریک یک مدل عددی کاملاً همبسته هیدرومکانیکی در حالت غیراشباع جهت تحلیل پدیده فرونشست ناشی از استخراج آبهای زیرزمینی از آبخوانها می پردازیم. معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مسئله شامل معادله تعادل کل سیستم<sup>۷</sup>، معادله پیوستگی جریان<sup>۸</sup> سیال ترکننده و معادله پیوستگی سیال غیر ترکننده در محیط متخلخل می باشد. در رویکرد عددی EFG، فرم ضعیف معادلات حاکم با اعمال روش باقیمانده وزنی بر معادلات اصلی و با استفاده از روش پنالتی جهت وضع شرایط مرزی ضروری به دست می آید. معادلات جبری نیز از طریق مجزاسازی معادلات انتگرالی با به کارگیری روش EFG در مکان، و با استفاده از روش تفاضل محدود بصورت کاملاً ضمنی<sup>۹</sup> در زمان به دست می آیند. دستگاه معادلات جبری به دست آمده نیز با روش تکرار مستقیم حل شده و در نتیجه میدانهای جابجایی و فشار سیالات منفذی بطور همبسته بدست می آیند [۱۸].

### ۲-۱- معادلات حاکم

شرایط هیدرومکانیکی غیراشباع حفره های محیط متخلخل توسط دو یا چند سیال منفذی شامل یک فاز سیال ترکننده<sup>۱۰</sup> (مانند آب) و چند فاز سیال غیرترکننده<sup>۱۱</sup> (مانند هوا یا بخار آب) پر می شوند. لازم به ذکر است که در این تحقیق ضمن فرض ثابت بودن دما، از تبدیل فازها به یکدیگر صرف نظر شده است و همچنین هر

شبکه بندی انطباقی<sup>۱</sup> نیاز باشد، این روشها صرفه محاسباتی بالایی ندارند. از این رو، این مطالعه با روش EFG که یک روش بدون شبکه است صورت گرفت. پس از صحت سنجی مدل به کمک چند مثال یک بعدی و دوبعدی، مدل سازی جریان در آبخوان محصور بلو لیک<sup>۲</sup> در شمال کالیفرنیا آمریکا انجام شد و نتایج عددی با نتایج بدست آمده از نرم افزار مادفلو مقایسه گردید. لازم به ذکر است که این محققین در سال ۲۰۱۴ نیز به بررسی کارکرد روش EFG به منظور مدل سازی جریان آبهای زیرزمینی در آبخوانهای محصور شده پرداخته بودند [۱۱].

از مطالعات صورت گرفته پیشین نتیجه می شود که تاکنون مطالعه ای در زمینه مدل سازی همبسته تغییر شکل-جریان به منظور مدل سازی پدیده فرونشست به روش EFG انجام نشده است و تحقیق حاضر می تواند تکمیل کننده سایر مطالعات صورت گرفته در زمینه مدل سازی عددی پدیده فرونشست باشد.

### ۱-۲- روش بدون المان گالرکین (EFG)

روش بدون المان گالرکین (EFG) تکامل یافته روش DEM<sup>۳</sup> [۱۵] می باشد که توسط بلیشکو<sup>۴</sup> و همکاران [۱۶] ارائه شده است. مشخصه های اصلی این روش به شرح زیر است [۱۷]:  
 ۱. استفاده از تقریب MLS جهت ساخت توابع شکل  
 ۲. استفاده از فرم ضعیف معادله انتگرالی مقید گالرکین برای ایجاد سیستم معادلات مجزاسازی شده  
 ۳. ایجاد شبکه پس زمینه جهت انتگرال گیری بمنظور محاسبه ماتریس های سیستم

روش EFG مانند FEM از فرمول بندی هایی استفاده می کند که بر مبنای اصل کار مجازی یا روش های باقی مانده وزنی است. این فرمول بندی ها منجر به تشکیل فرم ضعیف معادلات دیفرانسیل می شود که پایدارتر از فرم قوی است. بنابراین در روش EFG نیز مانند FEM معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مسئله ابتدا به فرم انتگرالی

<sup>۱</sup> Momentum balance equation

<sup>۸</sup> Mass balance equation

<sup>۹</sup> Fully implicit scheme

<sup>۱۰</sup> Wetting phase

<sup>۱۱</sup> Non-wetting phase

<sup>۱</sup> Adaptive remeshing

<sup>۲</sup> Blue Lake

<sup>۳</sup> Diffuse element method

<sup>۴</sup> Belytschko

<sup>۵</sup> Quadrature points

<sup>۶</sup> Kronecker delta

با اعمال روش باقیمانده وزنی<sup>۳</sup> فرم انتگرالی معادلات دیفرانسیلی مربوطه به دست می‌آید. سپس با در نظر گرفتن جابجایی و فشار سیالات حفره‌ای به‌عنوان متغیرهای اصلی مسئله و استفاده از توابع شکل EFG برای تقریب زدن مقدار این متغیرها در هر نقطه دلخواه در بازه مکانی مسئله، معادلات انتگرالی حاصل به معادلات ماتریسی تبدیل می‌شوند. برای مجزا سازی دستگاه معادلات در زمان از تکنیک تفاضل محدود با رویکرد ضمنی استفاده می‌شود. بدین ترتیب دستگاه معادلات ماتریسی زیر مطابق آنچه در [۱۹] شرح داده شده است، بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} C_{11} + C_u^\alpha & -C_{1r} & -C_{1r} \\ C_{r1} & C_{rr} + \Delta t (K_{rr} + K_{pw}^\alpha) & C_{rr} \\ C_{r1} & C_{rr} & C_{rr} + \Delta t (K_{rr} + K_{pw}^\alpha) \end{bmatrix}^{n+1} \begin{Bmatrix} U \\ P_w \\ P_{nw} \end{Bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_u^\alpha & -C_{1r} & -C_{1r} \\ C_{r1} & C_{rr} & C_{rr} \\ C_{r1} & C_{rr} & C_{rr} \end{bmatrix}^n \begin{Bmatrix} U \\ P_w \\ P_{nw} \end{Bmatrix}^n + \Delta t \begin{Bmatrix} \partial/\partial t (F_u + F_u^\alpha) \\ (F_{pw} + F_{pw}^\alpha) \\ (F_{rpnw} + F_{rpnw}^\alpha) \end{Bmatrix}^{n+1} \quad (۴)$$

معادله ۴، سیستم معادلات مجزا سازی شده نهایی برای تحلیل هیدرومکانیکی کاملاً همبسته یک محیط متخلخل تغییر شکل پذیر غیراشباع به روش EFG می‌باشد که از حل آن مقادیر مجهول بردار جابجایی و فشار سیال ترکنده و غیرترکنده محاسبه خواهد شد. برای شرح کامل فرمول بندی و متغیرهای ماتریس ضرایب به مرجع [۱۹] مراجعه شود. از آنجایی که مؤلفه‌های تشکیل دهنده ماتریس‌های ضرایب در دستگاه معادلات جبری فوق خود توابعی از متغیرهای اصلی مسئله می‌باشند، این دستگاه معادلات یک دستگاه معادله غیرخطی می‌باشد و برای تعیین مقدار مجهولات در هر گام زمانی نیاز به استفاده از روش‌های تکرار می‌باشد. برای این منظور، در این تحقیق از یک روش حل از نوع نقطه ثابت<sup>۴</sup> جهت خطی سازی دستگاه معادلات جبری با فرم کلی زیر استفاده می‌گردد:

$$K(X_i^{n+1})(X_{i+1}^{n+1}) = F(X_i^{n+1}) \quad (۵)$$

که  $X_i^{n+1}$  بردار مجهولات در گام زمانی  $n+1$  و در تکرار شماره  $i$  می‌باشد. همچنین در معادله جبری فوق،  $K$  ماتریس ضرایب است. شرط همگرایی تکرار برای حل دستگاه معادله غیرخطی به صورت زیر تعیین شده است:

دو سیال ترکنده (آب) و غیرترکنده (هوا) لزج و امتزاج‌ناپذیر<sup>۱</sup> (مخلوط نشدنی) در نظر گرفته شده‌اند. سه معادله اصلی شامل معادله تعادل کل سیستم و دو معادله پیوستگی جریان برای سیالات ترکنده و غیرترکنده در محیط متخلخل به ترتیب عبارت‌اند از:

$$\sigma_{ij,j} + \rho g_i = 0 \quad (۱)$$

$$\left[ S_w \frac{\alpha - n}{K_s} (S_w + \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c) + \frac{n S_w}{K_w} - n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right] \frac{Dp_w}{Dt} + \left[ S_w \frac{\alpha - n}{K_s} (1 - S_w - \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c) + n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right] \frac{Dp_{nw}}{Dt} + \alpha S_w \dot{u}_{i,i} + \frac{1}{\rho_w} \left[ \rho_w \frac{k_{ij} k_{rw}}{\mu_w} (-p_{w,i} + \rho_w g_j) \right]_{,i} = 0 \quad (۲)$$

$$\left[ (1 - S_w) \frac{\alpha - n}{K_s} (S_w + \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c) + n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right] \frac{Dp_w}{Dt} + \left[ (1 - S_w) \frac{\alpha - n}{K_s} (1 - S_w - \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c) - n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} + \frac{n(1 - S_w)}{K_{nw}} \right] \frac{Dp_{nw}}{Dt} + \alpha (1 - S_w) \dot{u}_{i,i} + \frac{1}{\rho_w} \left[ \rho_w \frac{k_{ij} k_{rw}}{\mu_w} (-p_{w,i} + \rho_w g_j) \right]_{,i} = 0 \quad (۳)$$

در روابط ۱ الی ۳،  $\sigma_{ij}$  تانسور تنش کلی،  $\rho = (1 - n)\rho_s + n(S_w \rho_w + S_{nw} \rho_{nw})$  دانسیته متوسط محیط،  $n$  تخلخل،  $\rho_s$  دانسیته فاز جامد،  $\rho_w$  دانسیته فاز سیال ترکنده و غیرترکنده ( $\pi = w, nw$ )،  $\dot{u}_i$  سرعت فاز جامد،  $S_\pi$  درجه اشباع فازهای سیال،  $\mu_\pi$ ،  $\rho_\pi$  و  $p_\pi$  به ترتیب ویسکوزیته دینامیکی، فشار و دانسیته فازهای سیال،  $k_{r\pi}$  ضریب نفوذپذیری نسبی فاز سیال  $\pi$ ،  $k_{ij}$  تانسور نفوذپذیری ذاتی،  $g_j$  بردار شتاب زمین،  $\alpha$  ثابت Biot،  $p_c = p_{nw} - p_w$  مکش ساختاری<sup>۲</sup>،  $t$  زمان و  $K_\pi$  و  $K_s$  به ترتیب مدول بالک فاز جامد فازهای سیال می‌باشند [۱۹]. از حل همزمان روابط ۱ الی ۳، مقادیر مجهول بردار جابجایی و فشار سیال ترکنده و غیرترکنده محاسبه خواهد شد.

## ۲-۲- گسسته‌سازی مکانی و زمانی

به‌منظور مجزا سازی مکانی معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی حاکم بر مسئله با استفاده از روش بدون شبکه EFG، در ابتدا

<sup>۳</sup> Weighted residual method

<sup>۴</sup> Fixed point method

<sup>۱</sup> Immiscible

<sup>۲</sup> Capillary pressure

$$\varepsilon = \max \left( \frac{|X_{i+1}^{n+1} - X_i^{n+1}|}{X_{i+1}^{n+1}} \right) \quad (6)$$

ب) تعیین توابع شکل و مشتقات آن‌ها

برای هر گره همسایه

ج) تعیین مقدار متغیرهای مسئله در

نقطه انتگرال‌گیری و سپس محاسبه

ماتریس‌ها و بردارهای گرهی

د) برهم‌نهی ماتریس‌ها و بردارهای

گره‌ای و ایجاد ماتریس‌ها و بردارهای کل

آن‌ها

- تشکیل دستگاه معادلات و تحلیل آن جهت به‌دست‌آوردن مقادیر گره‌ای جابه‌جایی و فشار سیالات حفره‌ای در هر گره
- کنترل معیار همگرایی حلقه تکرار و شروع تکرار بعدی در صورت عدم ارضای معیار همگرایی
- پایان حلقه تکرار در صورت ارضای معیار همگرایی

۴-۵- تعیین میدان جابه‌جایی، فشار سیالات منفذی

و تنش مؤثر در گره‌ها

۶-۵- تعیین کرنش، تنش مؤثر و شار سیالات حفره‌ای

در نقاط انتگرال‌گیری المان‌های درون محیط

۷-۵- ثبت تاریخچه متغیرهای اصلی و مشتقات آن‌ها

و بازگشت به ۱-۵ و شروع گام زمانی بعدی

۶- پایان گام‌های زمانی (پایان تحلیل).

## ۲-۳ - روابط رفتاری سیستم‌های چندفازی

برای تحلیل عددی مسائل غیراشباع، لازم است روابط بین نفوذپذیری و درجه اشباع سیستم با فشار موئینگی مشخص باشد. برای سیال‌های منفذی، روابط مختلفی بین درجه اشباع، نفوذپذیری و فشار موئینگی پیشنهاد شده است. موارد استفاده شده در برنامه کامپیوتری مورد استفاده برحسب شرایط مسئله موردنظر در جدول ۱ بیان شده است.

جدول ۱ روابط بین نفوذپذیری، درجه اشباع و موئینگی

که در آن  $\varepsilon$  حد رواداری است که در این تحقیق به میزان  $10^{-4}$  تنظیم شده است. الگوریتم و حلقه‌های تکرار برنامه رایانه‌ای EFG به شرح زیر است [۲۰]، [۲۶]:

۱- تعریف هندسه مسئله، مرزها، شرایط اولیه و پارامترهای محیط

۲- تعیین مختصات گره‌ها و تعیین دامنه تأثیر هر گره

۳- تعیین المان‌های انتگرال‌گیری در محیط، روی مرزهای ضروری و طبیعی (جابه‌جایی و فشار حفره‌ای، تنش و شار جریان)

۴- تعیین مختصات، وزن و ژاکوبین نقاط انتگرال‌گیری برای هر المان درون محیط و روی مرز برای شبکه انتگرال‌گیری پس-زمینه

۵- پیمایش حلقه روی گام زمانی:

۱-۵- تعیین مقادیر شرایط مرزی ضروری و طبیعی

۲-۵- محاسبه ماتریس‌ها و بردارهای مرزی روی نقاط

انتگرال‌گیری المان‌های مرزی:

- انتخاب توابع شکل و مشتقات آن‌ها برای هر گره همسایه
- محاسبه ماتریس‌ها و بردارهای گرهی مرزی
- برهم‌نهی ماتریس‌ها و بردارهای گرهی مرزی و ایجاد ماتریس‌ها و بردارهای کل آن‌ها

۳-۵- شروع حلقه تکرار (حل دستگاه معادله

غیرخطی):

- پیمایش حلقه روی نقاط انتگرال‌گیری المان‌های درون محیط جهت محاسبه ماتریس‌ها و بردارهای مربوطه:
- الف) انتخاب گره‌های همسایه یک نقطه انتگرال‌گیری بر اساس دامنه تأثیر گره‌ها

ردیف	متغیر	واحد	توضیح
۱	$s_e$	-	درجه اشباع مؤثر یا نرمال شده <sup>۳</sup>
۲	$p_c$	Pa	فشار موینگی یا مکش: $p_c = p_{mw} - p_w$
۳	$\alpha$	m <sup>-1</sup>	ضریب تجربی مدل ون گنختن [۲۱]
۴	$\beta$	-	ضریب تجربی ون گنختن [۲۱]
۵	$\gamma$	-	ضریب تجربی ون گنختن [۲۱]
۶	$n$	-	ضریب تجربی مدل هویاکارن و همکاران [۲۲]
۷	$p_d$	Pa	فشار جابجایی <sup>۴</sup> یا حداقل فشار موینگی مدل مدل بروکس-کوری <sup>۵</sup> [۲۳]
۸	$\lambda$	-	شاخص توزیع اندازه منافذ <sup>۶</sup> یا ناهمگنی محیط مدل بروکس-کوری [۲۳]

ردیف	محقق	ضرایب نفوذپذیری و درجه اشباع
۱	ون گنختن <sup>۱</sup> [۲۱]	$k_{r_w} = \sqrt{s_e} [1 - (1 - s_e^{1/\gamma})^\gamma]^\gamma$ $k_{r_{mw}} = \sqrt{1 - s_e} (1 - s_e^{1/\gamma})^{2\gamma}$ $s_e = (1 + (\alpha p_c)^\beta)^{-\gamma}$
۲	هویاکارن <sup>۲</sup> و همکاران [۲۲]	$k_{r_w} = s_e^n$ $k_{r_{mw}} = (1 - s_e)^n$ $s_e = (1 + (\alpha p_c)^\beta)^{-\gamma}$

در جدول فوق،  $k_{r_w}$  و  $k_{r_{mw}}$  به ترتیب ضریب نفوذپذیری نسبی سیال ترکنده و سیال غیرترکنده است. سایر پارامترهای ذکر شده در روابط بالا نیز در جدول ۲ معرفی شده‌اند. جدول ۲ تعریف متغیرهای مورد استفاده در روابط جدول ۱

### ۳ - صحت‌سنجی نرم‌افزار EFG

به منظور صحت‌سنجی روش EFG برای حل همزمان معادلات پیوستگی جریان فازهای سیال ترکنده و غیرترکنده و معادله تعادل مومنتم در یک محیط متخلخل تغییرشکل‌پذیر، مطابق با مطالعه صمیمی و پاک [۱۹]، مسئله تحکیم یک ستون خاک غیر اشباع در اثر تبخیر از سطح بررسی می‌گردد. در این مسئله تبخیر سطحی از یک ستون خاک غیر اشباع تحت تنش

<sup>۴</sup> Displacement (Air entry) pressure

<sup>۵</sup> Brooks and Corey

<sup>۶</sup> Pore size distribution index

<sup>۱</sup> Van Genuchten

<sup>۲</sup> Huyakorn

<sup>۳</sup> Normalized saturation ratio

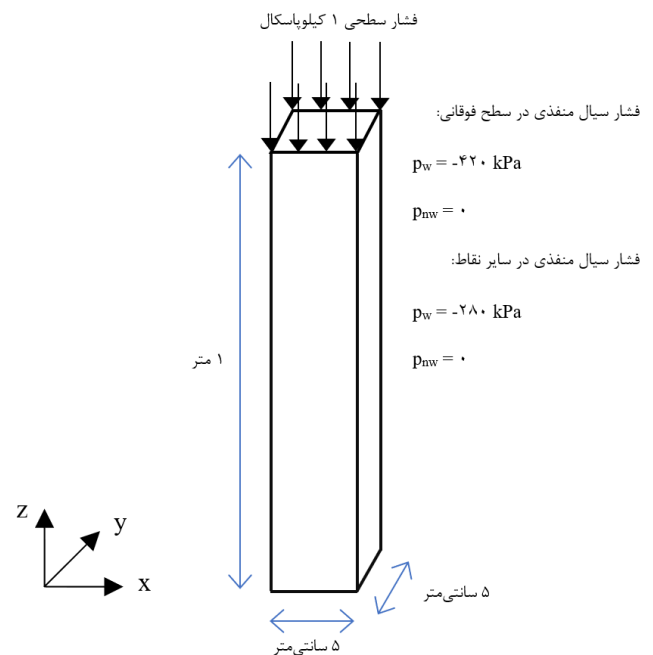


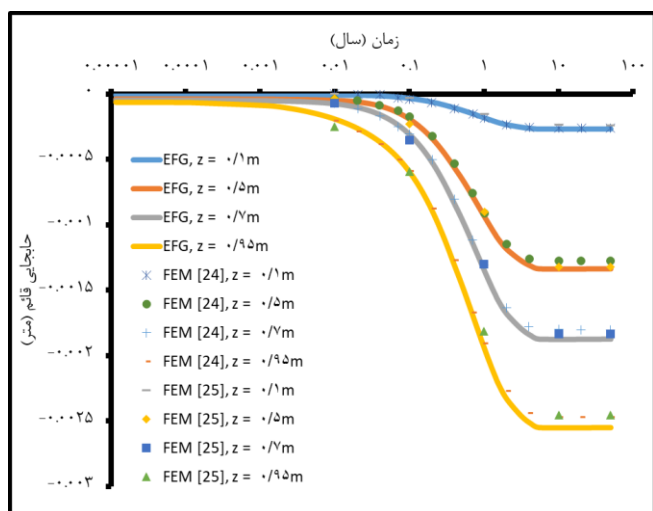
شکل ۱ هندسه و شرایط مرزی مسئله تحکیم خاک غیراشباع

جدول ۳ مشخصات خاک مسئله نفوذ ناشی از فشار [۲۴]

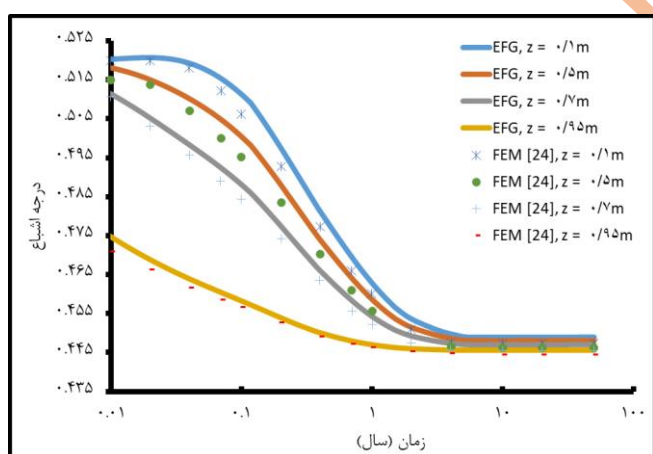
ردیف	متغیر	مقدار	واحد	توضیح
۱	$n$	۰/۳۶۸	-	پوکی
۲	$k$	$۴/۶ \times ۱۰^{-۱۲}$	$m^2$	نفوذپذیری ذاتی خاک
۳	$E$	$۶ \times ۱۰^۶$	Pa	مدول الاستیک
۴	$\nu$	۰/۴	-	ضریب پواسون
۵	$\rho_s$	۲۰۰۰	$kg/m^3$	چگالی دانه‌های جامد
۶	$\rho_w$	۱۰۰۰	$kg/m^3$	چگالی سیال ترکننده
۷	$\rho_{nw}$	۱/۲۲	$kg/m^3$	چگالی سیال غیر ترکننده
۸	$K_s$	$۱/۴ \times ۱۰^۹$	Pa	مدول بالک دانه‌های جامد
۹	$K_w$	$۴/۳ \times ۱۰^{۱۲}$	Pa	مدول بالک سیال ترکننده
۱۰	$K_{mw}$	$۱۰^{-۵}$	Pa	مدول بالک سیال غیر ترکننده
۱۱	$\mu_w$	$۱۰^{-۳}$	Pa.s	لزجت سیال ترکننده
۱۲	$\mu_{nw}$	$۱۰^{-۳}$	Pa.s	لزجت سیال غیر ترکننده
۱۳	$S_{w_r}$	۰/۳۹۶۶	-	درجه اشباع پسماند

سطحی ۱ کیلوپاسکالی با فشار آب منفذی مطلق اولیه ۲۸۰- کیلوپاسکال، متناظر با درجه اشباع اولیه ۵۲/۰ صورت می‌گیرد. هندسه مسئله در شکل ۱ آورده شده است. مرزهای کناری و مرز تحتانی نفوذناپذیر است و مرز فوقانی نفوذپذیر و دارای فشار آب منفذی ۴۲۰- کیلوپاسکال و فشار هوای منفذی صفر است. همچنین مرزهای جانبی مدل تنها اجازه جابجایی در راستای قائم را دارند و مرز پایینی در مقابل تمامی مولفه‌های جابجایی مقید شده است اما برای مرز بالایی قیدی وجود ندارد. در این مسئله از شتاب گرانش صرف نظر شده است. مجزاسازی مکانی دامنه مسئله به کمک ۸۴ گره به فاصله گره‌ای یکنواخت ۵ سانتی‌متر (۲۱ گره در راستای Z و ۲ گره در راستای X و Y) صورت می‌گیرد. مجزاسازی زمانی نیز در ابتدا بکمک بازه‌های زمانی ۱ ثانیه‌ای آغاز می‌شود و سپس با بازه‌های زمانی  $۱۰^۲$ ،  $۱۰^۳$  و  $۱۰^۴$  ثانیه‌ای ادامه می‌یابد. برای مدل‌سازی مکش و نفوذپذیری نسبی از روابط پیشنهادی بروکس-کوری [۲۳] که در جدول ۱ آورده شد استفاده می‌شود. پارامترهای این مدل و مشخصات خاک در جدول ۳ ارائه شده است. در ابتدا، فشار آب منفذی محیط بصورت یکنواخت و ۲۸۰- کیلوپاسکال است. سپس فشار آب منفذی مطلق در سطح فوقانی سریعاً به مقدار ۴۸۰- کیلوپاسکال کاهش می‌یابد و تبخیر هوا از سطح خاک آغاز می‌شود.





شکل ۲ نشست نقاط مختلف خاک بر حسب زمان در طی تحکیم خاک



شکل ۳ درجه اشباع نقاط مختلف خاک بر حسب زمان در طی تحکیم خاک

در شکل ۴ پروفیل فشار آب حفره‌ای در ستون خاک در زمان‌های ۰/۰۱، ۰/۱، ۰/۵، ۲ و روز رسم شده است و به منظور ارزیابی دقت کد رایانه‌ای EFG مورد استفاده، نتایج بدست آمده از روش EFG با نتایج روش المان محدود تحقیق [۲۴] و [۲۵] مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود با گذشت زمان و خروج هوا از سطح خاک، مقدار فشار آب حفره‌ای از ۲۸۰- کیلوپاسکال به ۴۲۰- کیلوپاسکال نزدیک می‌شود. ملاحظه

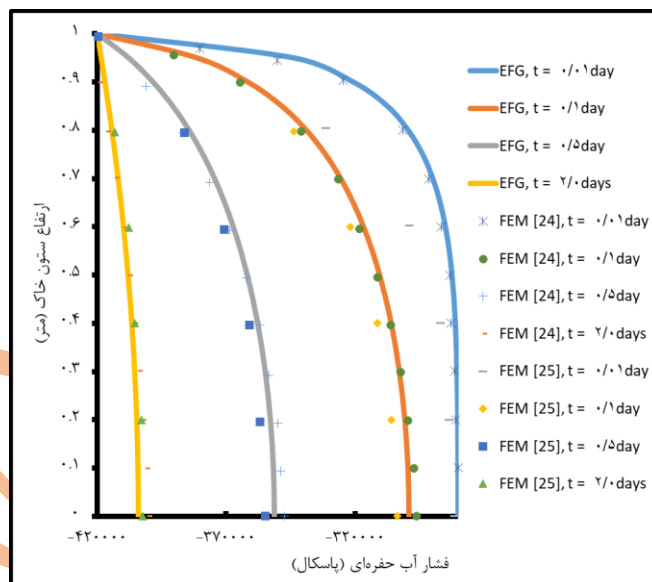
فشار جابجایی <sup>۱</sup> یا حداقل فشار مویبندی مدل بروکس-کوری [۲۳]	Pa	$2/25 \times 10^5$	$P_d$	۱۴
شاخص توزیع اندازه منافذ <sup>۲</sup> یا ناهمگنی محیط مدل بروکس- کوری [۲۳]	-		۳	۱۵

در شکل‌های ۲ و ۳ به ترتیب پروفیل‌های جابجایی قائم و درجه اشباع آب در نقاط مختلف ستون خاک بر حسب زمان نشان داده شده است و نتایج روش EFG با نتایج تحقیق رحمان و همکاران [۲۴] و خوئی و محمدنژاد [۲۵] که با استفاده از روش المان محدود این مسئله را حل نموده‌اند، مقایسه شده است. با توجه به این دو نمودار، تحکیم خاک تا حدود ۴ روز طول می‌کشد و پس از آن درجه اشباع خاک به مقدار ۰/۴۴۵ ثابت می‌ماند. مشاهده می‌شود که با وجود تفاوت در روش عددی مورد استفاده و تفاوت تکنیک مجزاسازی زمانی و مکانی استفاده شده در این تحقیق با روش المان محدود، پیش‌بینی‌های مدل تطابق بسیار خوبی با نتایج ارائه شده با روش المان محدود دارد و حداکثر خطای نسبی نشست ۴ درصد و حداکثر خطای نسبی درجه اشباع مربوط به آب کمتر از ۱ درصد است.

<sup>۲</sup> Pore size distribution index

<sup>۱</sup> Displacement (Air entry) pressure

می‌شود که تطابق بسیار خوبی بین نتایج این تحقیق و نتایج [۲۵] به روش المان محدود وجود دارد. مثال‌های دیگری از صحت‌سنجی نرم‌افزار مورد استفاده در مراجع [۱۸]، [۱۹]، [۲۶] و آورده شده است.



شکل ۴ پروفیل‌های فشار آب حفره‌ای در طی تحکیم خاک

#### ۴ - مدل‌سازی عددی فرونشست غیر اشباع به روش EFG

به منظور مدل‌سازی عددی فرونشست ناشی از استخراج آب‌های زیرزمینی به روش EFG، مسئله‌ای که پیش‌تر توسط کیم<sup>۱</sup> [۲۷] توسط برنامه هیدرومکانیکال کواد<sup>۲</sup> و به روش المان محدود مدل شد را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این مسئله، یک آبخوان به عمق ۵۰ متر مدنظر است. یک چاه قائم با بدنه متخلخل در میان سایت با هدف پایین آوردن سطح آب زیرزمینی و استخراج آب زیرزمینی منطقه حفر شده است. ابعاد مدل پس از آنالیز ابعادی مرزها، ۴۰۰ متر در ۴۰۰ متر در ۴۰۰ متر در نظر گرفته شده است. البته به علت تقارن، تنها یک چهارم سایت، یعنی ابعاد ۲۰۰ متر در ۲۰۰ متر) مدل‌سازی شده است. طرح شماتیک مدل و آرایش گره‌ای مورد استفاده در شکل ۵ آورده شده است. برای گسسته‌سازی

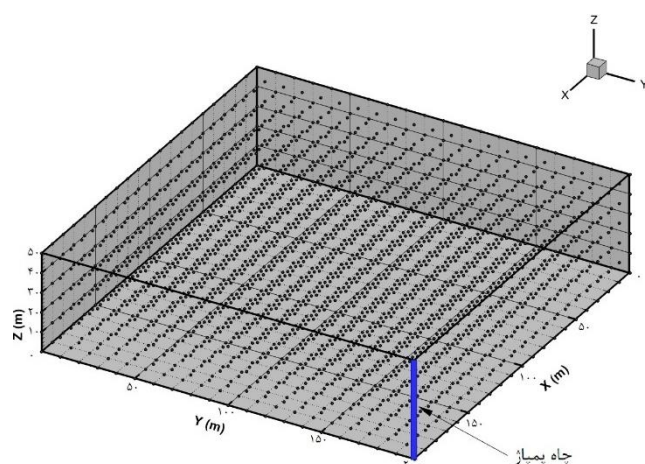
مکانی از ۲۶۴۶ گره و به فاصله گره‌ای ۱۰ متر در راستای  $x$  و  $y$  و  $z$  استفاده شد. این تعداد گره پس از تعدادی سعی و خطا بدست آمد. بدین صورت که اگر فاصله گره‌ای بیش از این میزان باشد، مقادیر مجهول در گره‌ها همگرا نشده یا دارای خطای قابل توجهی می‌شوند. از طرفی تعداد گره بیشتر باعث افزایش غیرمنطقی هزینه محاسباتی می‌شود. در شکل ۶ مدل دو بعدی در صفحه  $Y-Z$  آورده شده است و نقاط مشاهده‌ای نشان داده شده است.

سطح اولیه آبخوان در ۴۵ متری از کف (۵ متری از سطح زمین) قرار دارد و ۵ متر فوقانی آبخوان در حالت غیراشباع قرار دارد. بنابراین، فشار آب منفذی هیدرواستاتیک منفی برای عمق ۰ تا ۵ متر و فشار آب منفذی هیدرواستاتیک مثبت برای عمق ۵ تا ۴۵ متری آبخوان به عنوان شرایط اولیه بر مدل اعمال شد. همچنین فشار هوای منفذی برابر با فشار اتمسفر (صفر) فرض شد. آبخوان بر روی سنگ بستر (صلب و نفوذناپذیر) قرار گرفته است. میزان بارش سالانه منطقه ۱۵۳۹ میلی‌متر برطبق آمار اداره هواشناسی سنول در کره جنوبی در نظر گرفته شد [۲۷]. بنابراین سطح فوقانی آبخوان نفوذپذیر فرض شده و میزان بارش مشخصی بر آن اعمال شده است. همچنین سطح بالایی مدل در مقابل هرگونه جابجایی آزاد فرض شده است. مرزهای جانبی مدل بصورت نفوذناپذیر و مقید در برابر جابجایی در راستای بردار عمود بر صفحه خود در نظر گرفته شدند. همچنین فرض می‌شود پمپ درون کیسینگ (لوله جدار چاه) قرار دارد و در نتیجه در راستای  $x$  و  $y$  مقید شده است. در هنگام شروع پمپاژ، به یکباره سطح آب در داخل چاه از ۴۵ متری به ارتفاع ۲۰ متری سطح نفوذناپذیر کاهش داده می‌شود و نرخ پمپاژ طوری تنظیم می‌گردد که این میزان ثابت باقی بماند. بنابراین، به منظور مدل‌سازی پمپاژ آب، هد هیدرولیکی ثابتی برابر با ۲۰ متر بر ارتفاع ۲۰-۰ متری پمپ اعمال شده است. برای در نظرگیری شرایط غیراشباع در ۵ متر بالای مدل از روابط درجه اشباع و ضریب نفوذپذیری نسبی ارائه شده توسط هویاکان و همکاران [۲۲] که در جدول ۱ آورده شده است استفاده شد.

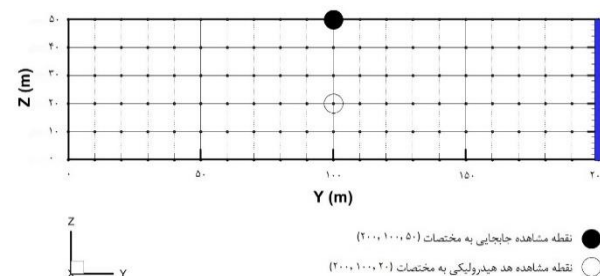
<sup>۲</sup> COWADE ۱۲۳D

<sup>۱</sup> Kim

ضریب هدایت هیدرولیکی	m/s	$3/65 \times 10^{-5}$	$k$	۲
مدول الاستیک	Pa	$1/47 \times 10^7$	$E$	۳
مدول برشی	Pa	$5/88 \times 10^6$	$G$	۴
ضریب پواسون	-	۰/۲۵	$\nu$	۵
ضریب پواسون دانه‌های جامد	-	۰/۲۵	$\nu_s$	۶
چگالی دانه‌های جامد	kg/m <sup>۳</sup>	$2/65 \times 10^3$	$\rho_s$	۷
مدول الاستیک دانه‌های جامد	Pa	$1/67 \times 10^9$	$E_s$	۸
درجه اشباع پسماند	-	۰/۰۵	$S_{wr}$	۹
هد فشار ورود هوا	m	.	$h_a$	۱۰
ضریب مدل غیراشباع هویاکارن و همکاران	m <sup>-۱</sup>	۰/۵	$\alpha_{BV}$	۱۱
ضریب مدل غیراشباع هویاکارن و همکاران [۲۲]	-	۲	$\beta_{BV}$	۱۲
ضریب مدل غیراشباع هویاکارن و همکاران [۲۲]	-	۱	$\gamma_{BV}$	۱۳
ضریب مدل غیراشباع هویاکارن و همکاران [۲۲]	-	۲	$n_{BV}$	۱۴



شکل ۵ مدل سه‌بعدی و آرایش گره‌های مسئله



شکل ۶ سطح جانبی مدل (سطح  $Y-Z$ ) و نقاط مورد بررسی برای مشاهده تغییرات هد هیدرولیکی و فرونشست

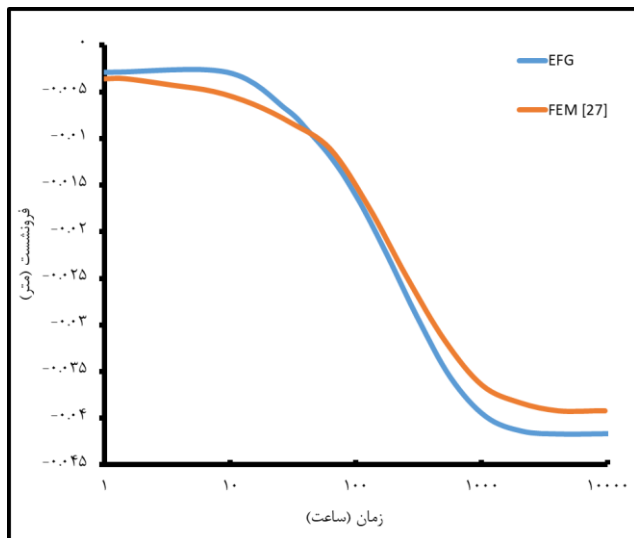
مشخصات و ویژگی‌های مصالح آبخوان همسان در جدول ۴ آورده شده است. لازم به ذکر است که تراکم پذیری و وزن مخصوص آب به ترتیب  $4/4 \times 10^{-10}$  مترمربع بر نیوتن و  $9/81$  متر بر مجذور ثانیه در نظر گرفته شد [۲۷]. همچنین حد رواداری برای ارضای شرط همگرایی تحلیل غیرخطی مقدار  $10^{-4}$  در هر تکرار در نظر گرفته شد. زمان نهایی تحلیل ۱۰ سال در نظر گرفته شد تا از برقراری حالت پایدار<sup>۱</sup> اطمینان حاصل شود.

جدول ۴ مشخصات آبخوان [۲۷]

ردیف	متغیر	مقدار	واحد	توضیح
۱	$n$	۰/۲۵	-	پوکی

<sup>۱</sup> Steady-state

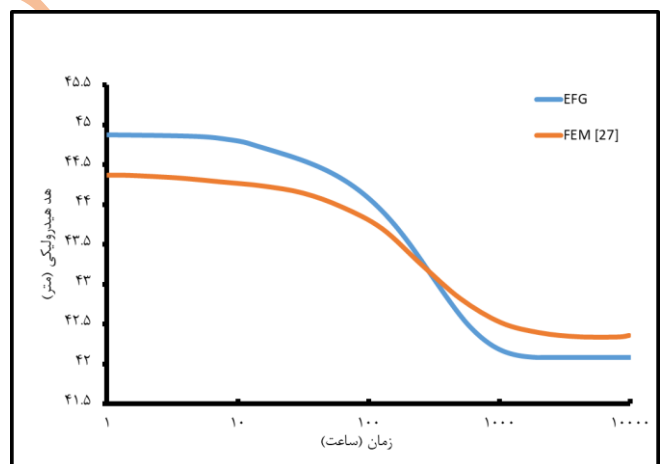
همانطور که مشاهده می‌شود نتایج روش EFG با دقت بسیار خوبی به نتایج روش FEM نزدیک است و  $RMSE$  فرونشست زمین ۵/۵۱ درصد بدست آمد که نشان دهنده تطابق بسیار خوب نتایج مدل‌سازی است.



شکل ۸ نمودار فرونشست در نقطه DO برحسب زمان در آبخوان

در شکل ۹، تغییرات سطح آب نسبت به بستر نفوذناپذیر با گذشت ۱، ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ ساعت از آغاز پمپاژ بر حسب فاصله از چاه نشان داده شده است. همانطور که انتظار می‌رفت، با گذشت زمان سطح آب به تدریج کاهش می‌یابد. با توجه به نتایج مشخص است که تغییر اساسی سطح آب در آبخوان پس از گذشت ۱۰۰ ساعت ایجاد می‌شود و سطح آب در نقطه‌ای در راستای پمپ به ۲۰ متر می‌رسد. پس از گذشت ۱۰۰۰ ساعت و برقراری حالت جریان دائمی، سطح آب در نقطه‌ای در راستای پمپ به ۲۰ متر می‌رسد و پس از آن سطح آب ثابت می‌ماند.

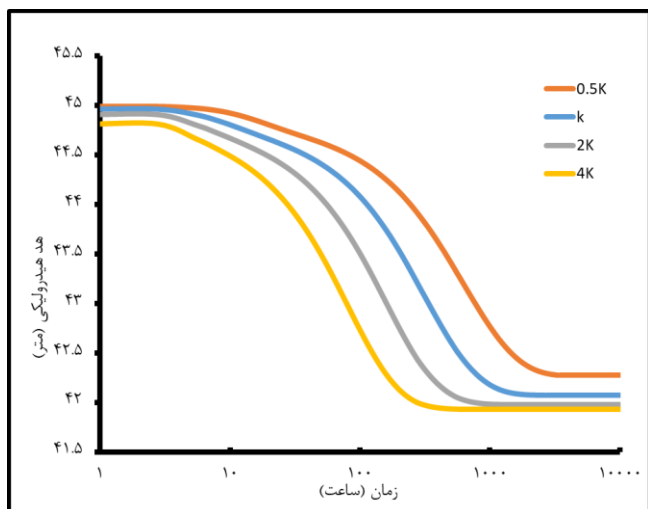
در شکل ۷ نمودار تغییرات هد هیدرولیکی برحسب زمان پمپاژ در نقطه مشاهده‌ای HO به مختصات (۰,۱۰۰,۲۰) و در فاصله ۱۰۰ متری از چاه ارائه شده است و نتایج این تحقیق با نتایج تحقیق کیم [۲۷] به روش المان محدود برای آبخوان مقایسه گردیده است. همانطور که مشاهده می‌شود، با وجود یکسان بودن شرایط اولیه در هر دو روش، در ساعات ابتدایی پمپاژ نتایج این تحقیق مقادیر کمتری برای میزان کاهش هد هیدرولیکی گزارش می‌دهد. برای مثال، پس از گذشت تنها یک ساعت از شروع پمپاژ، مقدار هد هیدرولیکی گزارش شده توسط روش EFG در نقطه مورد بررسی و از ۴۵ متر به ۴۴/۹ متر می‌رسد اما نتایج روش المان محدود [۲۷] بیان می‌کند که در یک ساعت ابتدایی بیش از ۰/۶ متر تغییر هد رخ می‌دهد. پس از گذشت زمان، نتایج نهایی هد هیدرولیکی در روش EFG به نتایج روش FEM بسیار نزدیک می‌شود. برای مقایسه کمی نتایج EFG و FEM،  $RMSE$  افت هد هیدرولیکی ۱۳/۳۵ درصد بدست آمد که نشان دهنده تطابق قابل قبول نتایج مدل‌سازی است.



شکل ۷ نمودار تغییرات هد هیدرولیکی در نقطه HO برحسب زمان

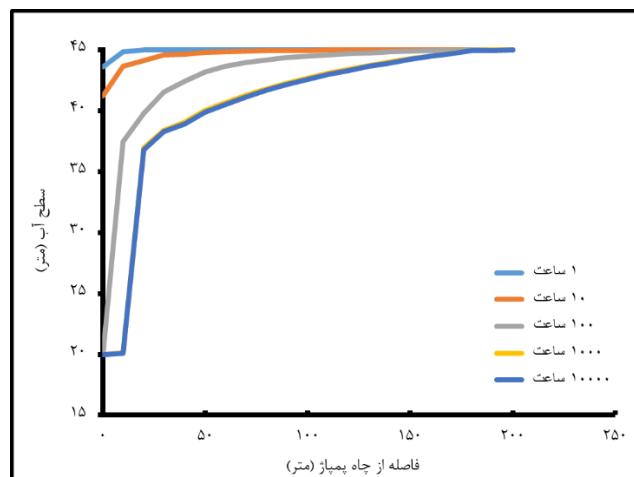
در شکل ۸ میزان فرونشست زمین در طول زمان پمپاژ در نقطه مشاهده‌ای DO به مختصات (۰,۱۰۰,۵۰) در سطح زمین گزارش شده است و نتایج روش EFG و FEM مقایسه گردیده است.

<sup>۱</sup> Root Mean Square Error



شکل ۱۰ نمودار تاثیر ضریب هدایت هیدرولیکی بر هدیهیدرولیکی در نقطه DO بر حسب زمان ( $K = 3/65 \times 10^{-5} \text{ m/s}$ )

در شکل ۱۱، فرونشست آبخوان برای مقادیر مختلف ضریب نفوذپذیری در نقطه مورد بررسی در فاصله ۱۰۰ متری از چاه بر حسب زمان مشاهده می‌شود. مشخص است که تغییر نفوذپذیری آبخوان تاثیر چندانی در میزان فرونشست نهایی آبخوان ندارد و تاثیر آن تنها در میزان زمان لازم برای رسیدن به فرونشست مشخص است. بدین صورت که هرچه ضریب هدایت هیدرولیکی آبخوان بیشتر باشد، در بازه زمانی کوتاه‌تری فرونشست رخ می‌دهد. بنابراین، می‌توان نتیجه‌گیری نمود که این پارامتر تاثیر چندانی در میزان فرونشست نهایی ندارد.



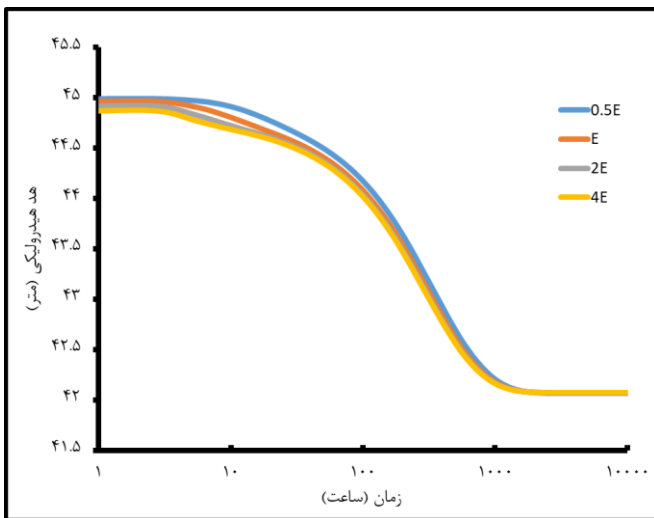
شکل ۹ تغییرات سطح آب نسبت به بستر نفوذناپذیر بر حسب فاصله از چاه و با گذشت ۱، ۱۰، ۱۰۰، ۱۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ ساعت

## ۵- تحلیل پارامتریک

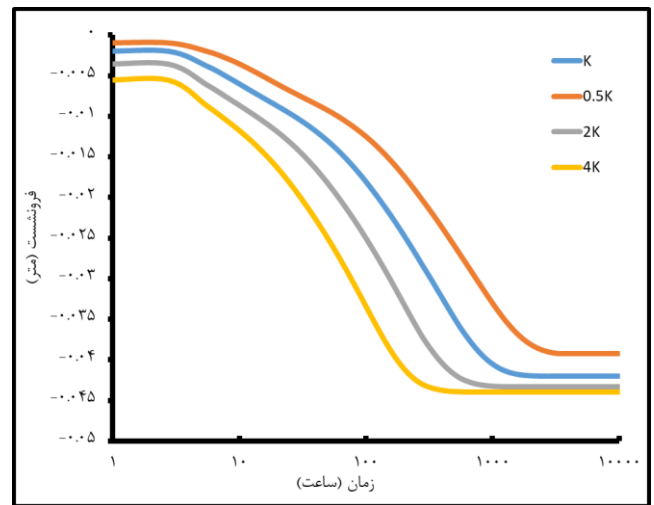
به منظور بررسی تاثیر پارامترهای مختلف بر روی فرونشست ناشی از استخراج آب‌های زیرزمینی، یک سری تحلیل پارامتریک انجام شد و تاثیر ضریب هدایت هیدرولیکی، مدول الاستیک و ضریب پواسون آبخوان بر فرونشست زمین و تغییرات هدیهیدرولیکی بررسی گردید.

### ۵-۱- ضریب هدایت هیدرولیکی

برای بررسی تاثیر ضریب هدایت هیدرولیکی آبخوان بر میزان فرونشست و تغییرات هدیهیدرولیکی در آبخوان، مسئله مورد بررسی برای چهار مقدار نفوذپذیری مختلف مدل‌سازی شد. در شکل ۱۰ تغییرات هدیهیدرولیکی برای مقادیر مختلف نفوذپذیری در نقطه مورد بررسی HO در فاصله ۱۰۰ متری از چاه بر حسب زمان مشاهده می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود، مقادیر نفوذپذیری آبخوان تنها در زمان رسیدن به حالت پایدار تاثیر دارد و تاثیر چندانی در میزان کاهش نهایی هدیهیدرولیکی آبخوان ندارد.

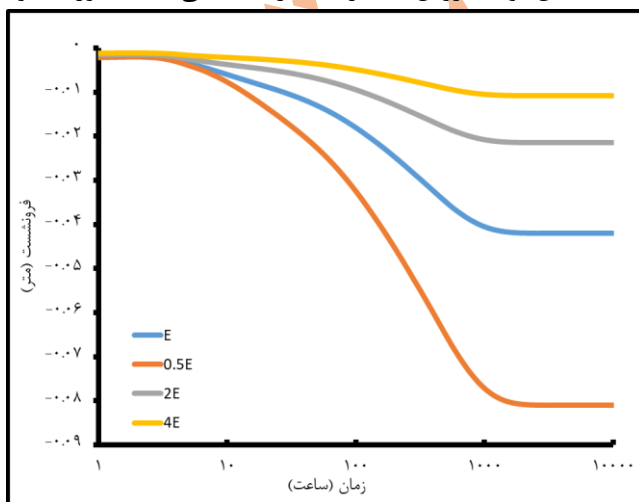


شکل ۱۲ نمودار تاثیر مدول الاستیک بر تغییرات هدیدرولیکی در نقطه HO برحسب زمان ( $E = 14/7 \text{ GPa}$ )



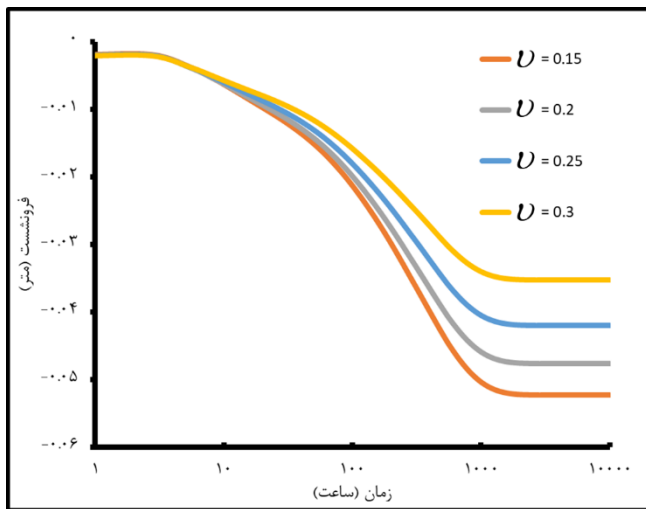
شکل ۱۱ نمودار تاثیر ضریب هدایت هدیدرولیکی بر فرانشست در نقطه DO برحسب زمان ( $K = 3/65 \times 10^{-5} \text{ m/s}$ )

در شکل ۱۳ تاثیر مدول الاستیک آبخوان بر فرانشست آبخوان مشاهده می شود. همانطور که مشاهده می شود، مدول الاستیک آبخوان تاثیر چشمگیری بر روند و میزان نهایی فرانشست آبخوان دارد. همانطور که انتظار می رفت، با افزایش میزان مدول الاستیک سیستم آبخوان، میزان فرانشست کاهش می یابد. مشاهده می شود که با نصف شدن مدول الاستیک آبخوان، فرانشست به میزان قابل توجهی افزایش می یابد و بنابراین لازم است این پارامتر با حداکثر دقت ممکن توسط روش های برجا یا آزمایشگاهی بدست آورده شود.



#### ۲-۵- مدول الاستیک آبخوان

مسئله مورد بررسی مجدداً برای مقادیر مختلف مدول الاستیک مدل شد و تاثیر این پارامتر بر میزان فرانشست و تغییرات هدیدرولیکی آبخوان مشاهده شد. در شکل ۱۲ تاثیر مدول الاستیک آبخوان بر کاهش هدیدرولیکی آبخوان ارائه شده است. همانطور که مشاهده می شود، مدول الاستیک آبخوان تاثیر بسیار کمی بر روند کاهش هدیدرولیکی آبخوان دارد. مشاهده می شود که با برقراری شرایط پایدار، هدیدرولیکی برای مقادیر مختلف مدول الاستیک یکسان بدست می آید. بنابراین، می توان نتیجه گیری کرد که مدول الاستیک آبخوان تاثیر چندانی در میزان کاهش نهایی هدیدرولیکی ندارد.



شکل ۱۵ نمودار تاثیر ضریب پواسون ( $U$ ) بر فرونشست در نقطه DO برحسب زمان

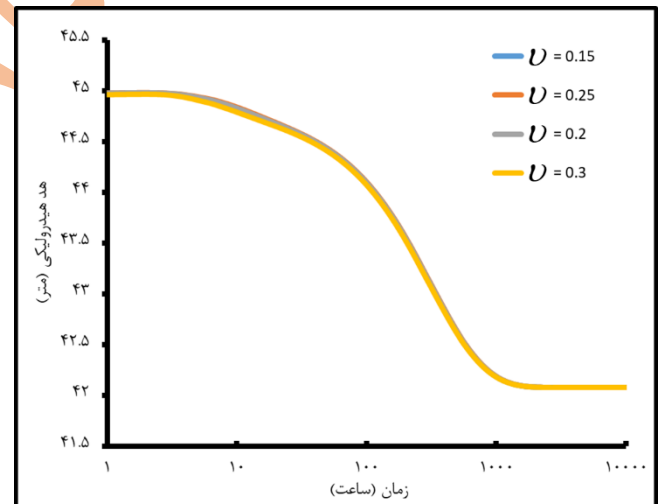
### ۶ - نتیجه گیری

با رشد جمعیت و افزایش تقاضا برای آب شیرین، استفاده از سفره‌های آب زیرزمینی روند رو به افزایشی در چند دهه گذشته داشته است. از آنجا که برداشت آب از آبخوان‌ها باعث تحکیم لایه‌های آبخوان می‌شود، لازم است پیش از اجرای پروژه‌های استخراج آب‌های زیرزمینی مطالعاتی در رابطه با میزان فرونشست احتمالی انجام شود تا از آسیب به محیط طبیعی و رخداد بحران فرونشست در سطح کلان جلوگیری شود. در این پژوهش، به کمک یک مدل هیدرومکانیکی سه بعدی کاملاً همبسته، پدیده فرونشست ناشی از استخراج آب‌های زیرزمینی از آبخوان‌های غیراشباع همسان با فرض برقراری رابطه الاستیک خطی به روش EFG شبیه‌سازی شد و نتایج مدل‌سازی عددی با نتایج روش FEM مقایسه گردید. افت نهایی هدیدرولیکی و فرونشست نهایی ناشی از استخراج آب با دقت بسیار خوبی پیش بینی شد. بنابراین، مدل ارائه شده به خوبی توانایی مدل‌سازی پدیده فرونشست در آبخوان‌ها با در نظر گرفتن اثرات لایه غیر اشباع را دارد. در بخش پایانی تحقیق، مطالعه پارامتریک انجام شد و تاثیر پارامترهای ضریب هدایت هیدرولیکی آبخوان، مدول الاستیک آبخوان و ضریب پواسون بر فرونشست زمین بررسی گردید. تاثیرگذارترین پارامتر، ضریب الاستیک آبخوان است و پس از آن ضریب پواسون تاثیر نسبتاً قابل توجهی بر فرونشست

شکل ۱۳ نمودار تاثیر مدول الاستیک بر فرونشست در نقطه DO برحسب زمان ( $E = 14/7 \text{ GPa}$ )

۳-۵- ضریب پواسون آبخوان

در شکل ۱۴ و ۱۵، به ترتیب تاثیر پارامتر ضریب پواسون بر تغییرات هدیدرولیکی و فرونشست مشاهده می‌شود. مشخص است که ضریب پواسون تقریباً تاثیری در روند کاهش هدیدرولیکی و مقدار نهایی هدیدرولیکی در حالت جریان پایدار ندارد. اما این پارامتر تاثیر نسبتاً مهمی در میزان فرونشست نهایی آبخوان دارد. بدین صورت که هرچه ضریب پواسون بیشتر باشد، فرونشست ایجاد شده نیز بیشتر است. این نتیجه مطابق با رابطه مدول بالک با ضریب پواسون است ( $K = E / 3(1-2U)$ ). با توجه به رابطه عکس تراکم پذیری و مدول بالک، می‌توان نتیجه گرفت که هرچه ضریب پواسون به  $0/5$  نزدیک تر شود، تراکم‌پذیری مدول و در نتیجه میزان تغییر شکل قائم (با توجه به مقید بودن سطوح جانبی مدول) کمتر می‌شود.



شکل ۱۴ نمودار تاثیر ضریب پواسون ( $U$ ) بر تغییرات هدیدرولیکی در نقطه HO برحسب زمان



- [۵] Mousavi, M., ۱۹۹۸. Analysis of mutual effects of hydraulic parameters and ground subsidence due to groundwater extraction. Sharif University of Technology. (In Persian) Available: <https://shorturl.at/oLMP^>
- [۶] Tey, W. Y., Asako, Y., Ng, K. C., & Lam, W. H., ۲۰۲۰. A review on development and applications of element-free galerkin methods in computational fluid dynamics. <https://doi.org/10.1080/15502287.2020.1821126>
- [۷] Iranmanesh, M. A., & Pak, A., ۲۰۲۳. Three-dimensional numerical simulation of hydraulically driven cohesive fracture propagation in deformable reservoir rock using enriched EFG method. *Computational Geosciences*, ۲۷(۲), ۳۱۷–۳۳۵. <https://doi.org/10.1007/S10596-023-10198-2/METRICS>
- [۸] Dinesh, P., Ranjith, P. G., Behera, M. R., & Muthu, N., ۲۰۲۱. Experimental and numerical (EFG method) studies on sedimentary rock under varied salinity conditions. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*, ۱۴۸, ۱۰۴۹۰۹. <https://doi.org/10.1016/J.IJRMMS.2021.104909>
- [۹] Khoshghalb, A., & Khalili, N., ۲۰۱۰. A stable meshfree method for fully coupled flow-deformation analysis of saturated porous media. *Computers and Geotechnics*, ۳۷(۶), ۷۸۹–۷۹۵. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2010.06.005>
- [۱۰] Biot, M. A., ۱۹۴۱. General theory of three-dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, ۱۲(۲), ۱۵۵–۱۶۴. <https://doi.org/10.1063/1.1712886>
- [۱۱] Nazari, A., & Haji Hosseini Mesgar, A., ۲۰۱۷. Prediction of subsidence caused by exploitation of underground water resources using mathematical modeling

زمین دارد. بدین صورت که با کاهش مدول الاستیک و ضریب پواسون، فرونشست زمین افزایش می‌یابد. همچنین مشاهده گردید اگرچه ضریب هدایت هیدرولیکی آبخوان بر روند فرونشست تاثیرگذار است، این پارامتر بر میزان فرونشست نهایی زمین در حالت پایدار تاثیر چندانی ندارد. بنابراین، پارامترهای مدول الاستیک و ضریب پواسون بیشترین تاثیر را بر میزان فرونشست نهایی زمین دارند و لازم است پیش از اجرای پروژه‌های برداشت آب‌های زیرزمینی، این پارامترها با دقت قابل قبول در نظر گرفته شود.

## منابع

- [۱] Asadi, R., & Ataie-Ashtiani, B., ۲۰۱۵. A comparison of finite volume formulations and coupling strategies for two-phase flow in deforming porous media. *Computers and Geotechnics*, ۶۷, ۱۷–۳۲. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2015.02.004>
- [۲] Donoso, M., Di Baldassarre, G., Boegh, E., Browning, A., Oki, T., Tindimugaya, C., Vairavamorthy, K., Vrba, J., Zalewski, M., & Zubari, W. K., ۲۰۱۲. International Hydrological Programme (IHP) eighth phase: Water security: responses to local, regional and global challenges. Strategic plan, IHP-VIII (۲۰۱۴-۲۰۲۱). vol. Catalog number ۲۱۸۰۶۱, UNESCO. <https://unesdoc.unesco.org/images/0021/002180/218061e.pdf>
- [۳] Fulton, A., ۲۰۰۶. Land subsidence: What is it and why is it an important aspects of groundwater management. Sacramento: California Department of Water Resources. Available: <https://shorturl.at/euGYV>
- [۴] Motagh, M., Djamour, Y., Walter, T. R., Wetzel, H. U., Zschau, J., & Arabi, S., ۲۰۰۷. Land subsidence in Mashhad Valley, northeast Iran: Results from InSAR, levelling and GPS. *Geophysical Journal International*, ۱۶۸(۲), ۵۱۸–۵۲۶. <https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2006.03246.x>

- [۱۸] Samimi, S., & Pak, A., ۲۰۱۴. A novel three-dimensional element free Galerkin (EFG) code for simulating two-phase fluid flow in porous materials. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, ۳۹(۱). <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2013.10.011>
- [۱۹] Samimi, S., & Pak, A., ۲۰۱۶. A three-dimensional mesh-free model for analyzing multi-phase flow in deforming porous media. *Meccanica*, ۵۱. <https://doi.org/10.1007/s11012-015-0231-z>
- [۲۰] Iranmanesh, M. A., Pak, A., & Samimi, S., ۲۰۱۸. Non-isothermal simulation of the behavior of unsaturated soils using a novel EFG-based three dimensional model. *Computers and Geotechnics*, ۹۹, ۹۳-۱۰۳. <https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2018.02.024>
- [۲۱] van Genuchten, M. Th., ۱۹۸۰. A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils. *Soil Science Society of America Journal*, ۴۴(۵), ۸۹۲-۸۹۸. <https://doi.org/10.2136/sssaj1980.036159950044005002x>
- [۲۲] Huyakorn, P.S., Thomas, B. M., Thompson, B. M., ۱۹۸۴. Techniques for Making Finite Elements Competitive in Modeling Flow in Variably Saturated Porous Media. *Water Resources Research*, ۲۰(۸), ۱۰۹۹-۱۱۱۵. <https://doi.org/10.1029/WR020i08p01099>
- [۲۳] Brooks, R., & Corey, A., ۱۹۶۴. Hydraulic properties of porous media. *Hydrology Papers*, Colorado State University, ۳(March), ۳۷ pp. [Online]. Available: <http://www.citeulike.org/group/1336/article/711012>
- [۲۴] Rahman, N. A., & Lewis, R. W., ۱۹۹۹. Finite element modelling of multiphase immiscible flow in deforming porous (case study: Aliabad Plain). The ۱۶th Iranian Hydraulic Conference, Mohaghegh Ardabili University, ۱, ۱-۸ (In Persian)
- [۱۲] Rajabi, A. M., ۲۰۱۸. A numerical study on land subsidence due to extensive overexploitation of groundwater in Aliabad plain, Qom-Iran. *Natural Hazards*, ۹۳(۲), ۱۰۸۵-۱۱۰۳. <https://doi.org/10.1007/s11069-018-3448-z>
- [۱۳] Pathania, T., Eldho, T. I., & Bottacin-Busolin, A., ۲۰۲۰. Coupled simulation of groundwater flow and multispecies reactive transport in an unconfined aquifer using the element-free Galerkin method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, ۱۲۱, ۳۱-۴۹. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.08.019>
- [۱۴] Pathania, T., & Rastogi, A. K., ۲۰۱۷. Groundwater Flow Simulation in Confined Aquifer by Meshless Element Free Galerkin Method. *European Water*, ۵۷(۲۰۰۰), ۵۰۵-۵۱۲. <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2020.08.019>
- [۱۵] Nayroles, B., Touzot, G., & Villon, P., ۱۹۹۲. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements. *Computational Mechanics*, ۱۰(۵). <https://doi.org/10.1007/BF00364252>
- [۱۶] Belytschko, T., Lu, Y. Y., & Gu, L., ۱۹۹۴. Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, ۳۷(۲), ۲۲۹-۲۵۶. <https://doi.org/10.1002/nme.1620370205>
- [۱۷] Liu, G. R., ۲۰۰۲. Mesh free methods: Moving beyond the finite element method. In *Mesh Free Methods: Moving beyond the Finite Element Method*. <https://doi.org/10.1299/jsmecmd.2003.16.937>

extraction in aquifers, considering the unsaturated effects and using the element-free Galerkin method. Sharif University of Technology. (In Persian). Available:

<https://shorturl.at/blqvQ>

- [۲۷] Kim, J. M., ۲۰۰۵. Three-dimensional numerical simulation of fully coupled groundwater flow and land deformation in unsaturated true anisotropic aquifers due to groundwater pumping. *Water Resources Research*, ۴۱(۱), ۱-۱۶.

<https://doi.org/10.1029/2003WR002941>

media for subsurface systems. *Computers and Geotechnics*, ۲۴(۱), ۴۱-۶۳.

[https://doi.org/10.1016/S0266-352X\(98\)00029-9](https://doi.org/10.1016/S0266-352X(98)00029-9)

- [۲۵] Khoei, A. R., & Mohammadnejad, T., ۲۰۱۱. Numerical modeling of multiphase fluid flow in deforming porous media: A comparison between two- and three-phase models for seismic analysis of earth and rockfill dams. *Computers and Geotechnics*, ۳۸(۲), ۱۴۲-۱۶۶.

<https://doi.org/10.1016/j.compgeo.2010.01.010>

- [۲۶] Tourei, A., ۲۰۲۱. Numerical modelling of land subsidence induced by groundwater

دانشگاه شهید بهشتی