

# بررسی تأثیر حرکت شتابدار جرم متحرک بر پاسخ دینامیکی خارج از صفحه تیرهای خمیده در صفحه افق

محمدعلی فیوضات<sup>۱</sup>، هاتف عبدوس<sup>۲</sup>، علیرضا خالو<sup>۳\*</sup>

- ۱- استادیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف
- ۲- دانشجوی دکتری سازه، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف
- ۳- استاد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

پست الکترونیکی نویسندگان:

- ۱) [m.foyouzat@sharif.edu](mailto:m.foyouzat@sharif.edu)
- ۲) [hatef.abdoos@sharif.edu](mailto:hatef.abdoos@sharif.edu)
- ۳) [khaloo@sharif.edu](mailto:khaloo@sharif.edu)

## چکیده:

این مطالعه به بررسی تأثیر حرکت شتابدار فزاینده/کاهنده ناشی از تحریک جرم متحرک بر پاسخ دینامیکی خارج از صفحه تیرهای خمیده می‌پردازد. بر اساس روش جداسازی متغیرها و با اتکا به توابع سینوسی متناظر با شرایط مرزی تیرهای خمیده، فرم ماتریسی معادلات تعادل دینامیکی تعیین گردید و طیف پاسخ تیرهای خمیده تحت تحریک ناشی از جرم متحرک بدست آمد. صحت‌سنجی مدل تحلیلی-عددی پیشنهادی با استناد به مطالعات موجود در ادبیات فنی صورت گرفت که نشانگر دقت بالای روش پیشنهادی است. در قالب مطالعات پارامتری، اثر پارامترهای کلیدی شامل زاویه مرکزی و طول تیر خمیده، و نیز جرم، سرعت اولیه، و شتاب فزاینده/کاهنده جرم متحرک در جابه‌جایی و لنگر خمشی خارج از صفحه ارزیابی شد. با افزایش اندازه شتاب در حالت فزاینده، مقادیر جابه‌جایی و لنگر خمشی بیشینه خارج از صفحه به ترتیب تا ۱۸٫۱۱ و ۲۷٫۵۳ درصد نسبت به حالت حرکت یکنواخت افزایش می‌یابد. در حالت شتاب کاهنده با کاهش اندازه شتاب، مقدار این دو طیف پاسخ به ترتیب تا ۴۱٫۵۹ و ۴۲٫۰۵ درصد نسبت به حالت متناظر در سرعت تقلیل می‌یابد.

**واژگان کلیدی:** تیرهای خمیده در صفحه افق، جرم متحرک، رفتار دینامیکی خارج از صفحه، حرکت شتابدار فزاینده/کاهنده، طیف پاسخ دینامیکی.

---

\* علیرضا خالو، استاد ممتاز دانشکده مهندسی عمران – دانشگاه صنعتی شریف  
ایمیل: [khaloo@sharif.edu](mailto:khaloo@sharif.edu) (نویسنده مسئول)

# Investigating the effect of accelerating/decelerating motion of a moving mass on the out-of-plane dynamics of horizontally curved beams

M. A. Foyouzat <sup>۱</sup>, H. Abdoos <sup>۲</sup>, A. R. Khaloo <sup>\*۳</sup>

۱- Assistant Professor, Faculty of Civil Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.

۲- Ph.D. Student of Structural Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.

۳- Distinguished Professor, Faculty of Civil Engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran.

## Abstract:

Horizontally curved beams (HCBs) not only are capable to meet some architectural and aesthetic requirements, but can also offer structural advantages in many engineering applications. Due to inherent complexities existing in the treatment of the problems dealing with dynamic actions on HCBs, the dynamic behavior of such salient elements is not essentially well understood. Therefore, in order to address the identified gap concerning the motion type effects of a moving mass on the dynamics of HCBs, the current study deals with assessing how the accelerating/decelerating conditions do contribute to the out-of-plane response of HCBs under the excitation of a moving mass. In this regard, the governing dynamic equations are developed by taking care of the centripetal force, Coriolis acceleration, and inertial actions of the moving mass. Employing the method of separation of variables, and exercising sinusoidal modal functions, the discretized system of differential equations in the matrix form are distilled and solved through application of standard numerical procedures. Spectral responses in terms of the out-of-plane displacement and bending moment are then obtained for various influential parameters. The veracity of the results is also validated against the available data addressed in the technical literature. Through a comprehensive parametric study, the effect of the key parameters, including the central subtended angle and length of the HCB, as well as the mass, initial velocity, and increasing/decreasing acceleration of the moving mass is evaluated on the out-of-plane displacement and bending moment of the supporting HCB. The results of this study suggest that in the accelerating mode, the out-of-plane displacement and bending moment spectra are magnified up to ۱۸,۱۱ and ۲۷,۵۳ percent in comparison with the spectral values corresponding to the constant-velocity mode. On the other hand, in the decelerating condition, the out-of-plane displacement and bending moment spectra are respectively alleviated up to ۴۱,۵۹ and ۴۲,۰۵ percent.

**Keywords:** Horizontally curved beam (HCB), Moving mass, Out-of-plane dynamic response, Accelerating/decelerating motion, Response spectra.

## ۱ - مقدمه و تاریخچه تحقیقات

المان‌های خمیده در صفحه افق علاوه بر زیبایی‌های بصری و معماری [۱]، کاربردهای گسترده‌ای در مهندسی عمران و راه‌آهن دارند که برای نمونه می‌توان به خطوط حمل‌ونقل ریلی، جاده‌ها، پل‌ها، قطارهای گرانشی و سازه‌های ترن‌های هوایی در شهرسازی‌ها اشاره کرد. یکی از موضوعات مورد توجه محققین در سال‌های اخیر، ارزیابی دقیق پاسخ دینامیکی این المان‌های سازه‌ای تحت بارهای متحرک بوده است که از دیدگاه دستیابی به یک طرح ایمن بسیار حائز اهمیت می‌باشد.

تاکنون اکثر پژوهش‌های انجام شده بر روی اثر بار و جرم متحرک بر روی رفتار دینامیکی تیرهای مستقیم، صفحات و کابل‌ها بوده که در مراجع [۲،۳] برجسته‌ترین این مطالعات اشاره و مرور شده‌اند. با وجود این، مطالعات انجام شده بر روی المان‌های خمیده در صفحه افق به مراتب محدودتر بوده است که در ادامه به برخی از مهم‌ترین آن‌ها اشاره می‌شود. لازم به ذکر است در بیشتر این مراجع، تحریکات ناشی از جسم متحرک به صورت یک نیروی متحرک مدلسازی شده و اثر اینرسی مربوط به جرم جسم و شتاب‌های انتقالی آن در پاسخ دینامیکی تیرهای خمیده در نظر گرفته نشده است [۴،۵].

در سال ۱۹۶۹، کریستیانو<sup>۱</sup> و کالور<sup>۲</sup> [۶] حل تحلیلی بسته‌ای را برای محاسبه پاسخ دینامیکی پل‌های تک دهانه خمیده در افق با تکیه‌گاه‌های ساده تحت نیروی متحرک ارائه کردند. با استفاده از روش شتاب خطی، چاودیوری<sup>۳</sup> و شور<sup>۴</sup> [۷] با در نظر گرفتن اثر تابیدگی<sup>۵</sup> مقطع، رفتار دینامیکی تیرهای خمیده در افق را به تحریکات یک بار متحرک به صورت عددی مورد مطالعه قرار دادند. تحلیل پایداری یک ریل راه‌آهن خمیده در افق تحت تحریک ناشی

از یک بار متحرک توسط نایر<sup>۶</sup> و همکاران [۸] مورد ارزیابی قرار گرفت. گالدوس<sup>۷</sup> و همکاران [۹] روشی را برای محاسبه ضریب ضربه دینامیکی پل‌های جعبه‌ای خمیده در افق تحت تأثیر یک جفت نیروی متحرک با فاصله ثابت از یکدیگر که با سرعت یکنواخت روی سطح فوقانی تیر حرکت می‌کنند، ارائه نمودند.

هولنگ<sup>۸</sup> و همکاران [۱۰] رفتار پل‌های جعبه‌ای خمیده در افق را با منظور کردن اثر تغییرشکل‌های تابیدگی در روابط تعادل دینامیکی حاکم بر آن مورد بررسی قرار دادند. با استفاده از روش سختی دینامیکی، هوسان<sup>۹</sup> و جما<sup>۱۰</sup> [۱۱] در سال ۱۹۹۹ فرکانس‌های ارتعاش آزاد تیرهای تیموشکنوی خمیده در صفحه افق را محاسبه کردند. در سال ۲۰۰۱، ینگ<sup>۱۱</sup> و همکاران [۱۲] با منظور کردن تنها یک مود دینامیکی، موفق شدند یک رابطه تقریبی برای تعیین جابجایی تیرهای خمیده در صفحه افق در اثر تحریک ناشی از نیروی متحرک پیشنهاد کنند. لی<sup>۱۲</sup> و همکاران [۱۳] پاسخ ارتعاش آزاد یک تیر دایروی متکی بر بستر الاستیک را با منظور کردن اثرات تغییرشکل‌های برشی بدست آوردند. زبونسکی<sup>۱۳</sup> و دوزا<sup>۱۴</sup> [۱۴] پایداری غیرخطی واگن‌های قطار را بر روی مسیر خمیده در افق به صورت کیفی مطالعه کردند و امکان رویداد دوشاخگی هاپف<sup>۱۵</sup> را بررسی نمودند.

دای<sup>۱۶</sup> و انگ<sup>۱۷</sup> [۱۵] در سال ۲۰۱۵ با ارائه یک راه‌حل تحلیلی، عملکرد دینامیکی خارج از صفحه تیرهای خمیده روی بستر وینلکر<sup>۱۸</sup> را تحت اثر نیروهای متمرکز متحدالفاصله و مبتنی بر توابع مثلثاتی ارزیابی کردند. در سال ۲۰۲۰، عبدوس و همکاران [۱۶] با در نظر گرفتن مؤلفه‌های شتاب انتقالی جرم متحرک، موفق شدند پاسخ دینامیکی خارج از صفحه تیرهای خمیده در صفحه افق را محاسبه کرده و با برآزش غیرخطی داده‌های مطالعه پارامتری،

<sup>۱۰</sup> Jemah

<sup>۱۱</sup> Yang

<sup>۱۲</sup> Lee

<sup>۱۳</sup> Zboinski

<sup>۱۴</sup> Dusza

<sup>۱۵</sup> Hopf bifurcation

<sup>۱۶</sup> Dai

<sup>۱۷</sup> Ang

<sup>۱۸</sup> Winkler foundation

<sup>۱</sup> Christiano

<sup>۲</sup> Culver

<sup>۳</sup> Chaudhuri

<sup>۴</sup> Shore

<sup>۵</sup> Warping

<sup>۶</sup> Nair

<sup>۷</sup> Galdos

<sup>۸</sup> Huang

<sup>۹</sup> Howsan

روابط کاربردی ساده‌شده‌ای برای تخمین ضرایب ضربه دینامیکی جلبه‌جایی و لنگر خمشی ارائه کنند. همچنین، در سال ۲۰۲۳ عبدوس و همکاران [۱۷] تأثیر مؤلفه لنگر پیچشی را بر پاسخ دینامیکی خارج از صفحه تیرهای خمیده در صفحه افق را تحت تحریک ناشی از جرم متحرک ارزیابی نمودند.

بررسی ادبیات فنی نشان می‌دهد که در مطالعات مربوط به اثر بارهای متحرک روی المان‌های خمیده در افق، سرعت بار در تمام مراجع به عنوان یک مقدار ثابت نظر گرفته شده است. این در حالی است که یک سیستم روسازی راه، مسیر راه‌آهن یا باند فرودگاه اغلب در معرض بارهای متحرک با سرعت فزاینده یا کاهنده قرار می‌گیرد. به عنوان مثال، هنگامی که یک قطار سریع‌السیر راه‌آهن به ایستگاه وارد یا از آن خارج می‌شود، یک هواپیما از باند فرودگاه بلند می‌شود یا در آن فرود می‌آید، یا اتومبیلی که سرعت خود را قبل از توقف کاهش می‌دهد یا از حالت توقف شروع به حرکت می‌کند، بستر محل اثر بار متحرک در موقعیت‌های فوق تحت سرعت فزاینده یا کاهنده جسم قرار می‌گیرد. در واقع، نه تنها وسیله نقلیه یا هواپیما هنگام توقف یا شروع حرکت با سرعت متغیر حرکت می‌کند، بلکه سرعت وسیله نقلیه در هنگام حرکت روی یک مسیر نیز عموماً در حال تغییر است.

طبق مطالعات لین<sup>۱</sup> و نیمیر<sup>۲</sup> [۱۸]، و هو<sup>۳</sup> و همکاران [۱۹]، در شرایط رانندگی وسایل نقلیه سبک در جاده‌های شهری، نسبت زمان رانندگی و طی مسیر با سرعت متغیر بسیار بیشتر از رانندگی با سرعت ثابت است. مقاله کخمانیوک<sup>۴</sup> و فیلیپوف<sup>۵</sup> [۲۰] به عنوان یکی از اولین مراجع در بررسی اثر سرعت متغیر نیروی متحرک بر رفتار دینامیکی تیرهای مستقیم شناخته می‌شود. کرلیف<sup>۶</sup> [۲۱]

ارتعاشات ایجاد شده در زمین ناشی از حرکت با سرعت فزاینده و کاهنده وسایل نقلیه را بررسی کرد. زیبده<sup>۷</sup> و رکویچ<sup>۸</sup> [۲۲] ارتعاش تیرهای مستقیم را تحت بارهای متحرک تصادفی با سرعت متغیر بررسی کردند. ابوהלلال<sup>۹</sup> و محسن [۲۳] رفتار دینامیکی تیرهای مستقیم با شرایط مرزی کلی را در اثر حرکت شتاب‌دار یک نیروی هارمونیک مورد مطالعه قرار دادند. دوگوش<sup>۱۰</sup> و آیزنبرگر<sup>۱۱</sup> [۲۴] پاسخ دینامیکی تیرهای چند دهانه پیوسته با صلبیت خمشی متفاوت در دهانه‌های مختلف را تحت حرکت شتاب‌دار نیروهای متحرک مورد بررسی قرار دادند.

میچالتسوس<sup>۱۲</sup> [۲۵] عملکرد دینامیکی تیرهای مستقیم با شرایط مرزی مفصلی نسبت به بار متحرک با سرعت متغیر را با منظور کردن اثر اینرسی دورانی جرم متحرک و تیر ارزیابی نمود. زیبده و ابوהלلال<sup>۱۳</sup> [۲۶] تأثیر بارهای متحرک شتاب‌دار بر پاسخ دینامیکی تیرهای مستقیم با طول متناهی را بررسی کردند. پنگ<sup>۱۴</sup> و همکاران [۲۷] تغییر شکل تیرهای مستقیم با تکیه‌گاه‌های ساده را تحت تحریکات یک جرم متحرک با سرعت متغیر با منظور کردن اثر اینرسی جرم مورد مطالعه قرار دادند. لی<sup>۱۵</sup> و همکاران [۲۸] پاسخ دینامیکی صفحات مستطیلی به نیروهای متحرک با سرعت متغیر را بررسی کردند. پاول<sup>۱۶</sup> و پالاسین<sup>۱۷</sup> [۲۹] پایداری سرنشینان قطار را تحت حرکت شتاب‌دار مورد مطالعه قرار دادند. بسکو<sup>۱۸</sup> و موهو<sup>۱۹</sup> [۳۰] پاسخ تیرهای متکی بر بستر الاستیک را به نیروی متحرک با سرعت متغیر ارزیابی کردند. لیو<sup>۲۰</sup> و همکاران [۳۱] رفتار دینامیکی روسازی‌های متکی بر بستر ویسکوالاستیک دو پارامتری را به بارهای متحرک با سرعت متغیر بدست آوردند.

<sup>۱۱</sup> Eisenberger

<sup>۱۲</sup> Michaltsos

<sup>۱۳</sup> Abu-Hilal

<sup>۱۴</sup> Peng

<sup>۱۵</sup> Li

<sup>۱۶</sup> Powel

<sup>۱۷</sup> Palacin

<sup>۱۸</sup> Beskou

<sup>۱۹</sup> Muho

<sup>۲۰</sup> Liu

<sup>۱</sup> Lin

<sup>۲</sup> Niemeier

<sup>۳</sup> Ho

<sup>۴</sup> Kokhmanyuk

<sup>۵</sup> Filippov

<sup>۶</sup> Krylov

<sup>۷</sup> Zibdeh

<sup>۸</sup> Rackwitz

<sup>۹</sup> Abu-Hilal

<sup>۱۰</sup> Dugush

با توجه به این که در هیچ یک از مطالعات موجود در ادبیات فنی تأثیر سرعت متغیر بر پاسخ دینامیکی خارج از صفحه تیرهای خمیده در صفحه افق تحت اثر جرم متحرک مطالعه نشده، در این پژوهش مد نظر است تا تأثیر حرکت شتابدار جرم متحرک بر رفتار دینامیکی این المان‌های سازه‌ای بر اساس مقادیر جابه‌جایی خارج از صفحه و نیز لنگر خمشی ارزیابی گردد.

## ۲- فرمول‌بندی مسئله

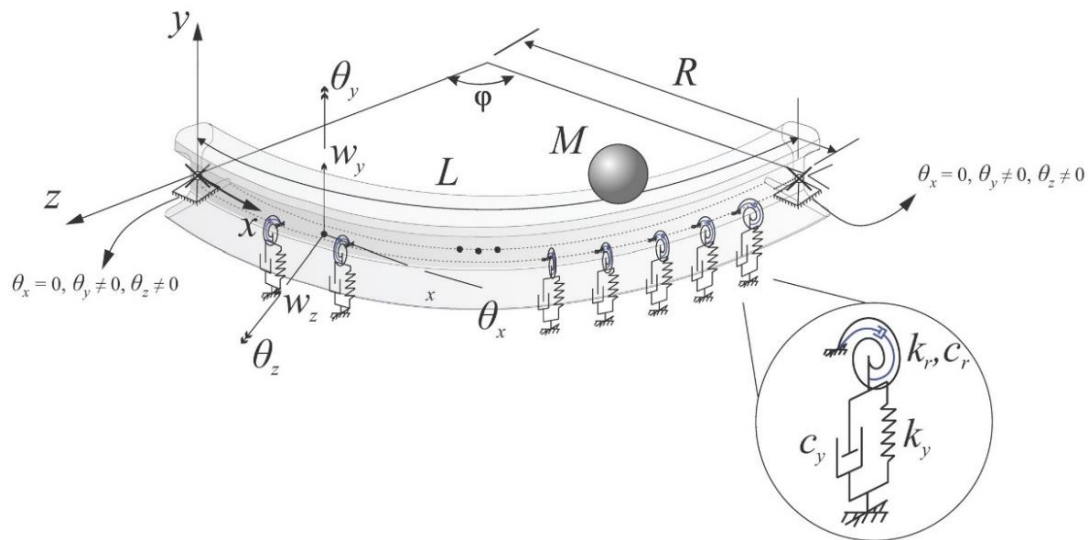
### ۱-۲- تعریف مسئله

مطابق شکل (۱)، یک تیر خمیده در صفحه افق را با زاویه مرکزی  $\varphi$  در نظر بگیرید که شعاع و طول آن به ترتیب  $R$  و  $L$  است. تیر به صورت دو سر ساده و با شرایط تکیه‌گاهی مفصلی بوده که امکان دوران پیچشی در دو انتهای آن وجود ندارد [۱۲، ۳۲]. با تعریف یک سیستم مختصات کارتزین راست‌گرد، محورهای  $x$ ،  $y$ ، و  $z$  به ترتیب مار بر محور عبوری از مرکز سطح مقطع، محور قائم و محور افقی تیر هستند که بر اساس آن، درجات آزادی دورانی  $(\theta_x, \theta_y, \theta_z)$  و جابه‌جایی  $(w_x, w_y, w_z)$  معرفی می‌شوند. کل طول تیر به صورت یکپارچه مبتنی بر یک بستر ویسکو-الاستیک بوده که در آن،  $k_r$  و  $k_y$  به ترتیب سختی راستای قائم و سختی پیچشی بستر الاستیک می‌باشند.  $c_y$  و  $c_r$  به ترتیب به عنوان میرایی بستر در راستای قائم و میرایی پیچشی هستند. همچنین، تیر خمیده تحت تحریک دینامیکی ناشی از جرم متمرکز  $M$  بوده که سطح فوقانی تیر را که فاقد اصطکاک است، با معادله حرکت دلخواه  $x_M(t)$  طی می‌کند.

### ۲-۲- فرضیات

پیش از فرمول‌بندی مسئله، ابتدا فرضیات حاکم بر مسئله معرفی و سپس در معادلات تعادل دینامیکی تیرهای خمیده در صفحه افق تحت اثر ارتعاش ناشی از جرم متمرکز متحرک در نظر گرفته می‌شوند:

- (الف) مشخصات مقطع تیر خمیده در سرتاسر طول آن ثابت است؛
- (ب) از تأثیر تغییرشکل‌های برشی صرف‌نظر می‌شود و فرض اویلر-برنولی برای تیرهای خمیده موضوعیت دارد؛ چرا که طول ریل‌ها در عمل از ابعاد مقطع ریل بسیار بیشتر است.
- (ج) تأثیر اعوجاج پیچشی صرف‌نظر می‌شود؛
- (د) امکان وقوع جداشدگی جرم متحرک از روی تیر خمیده وجود ندارد و تماس کامل در تمام مدت حرکت برقرار است؛
- (ه) حرکت جرم به صورت شتابدار با شتاب ثابت کاهنده/فزاینده است؛
- (و) در حرکت شتابدار کاهنده، جرم پیش از ترک تیر خمیده شرایط سکون را تجربه نمی‌کند.



شکل ۱: سیستم دینامیکی تیر خمیده در صفحه افق ممتنی بر بستر ویسکو-الاستیک و تحت تحریک ناشی از جرم متحرک.

### ۲-۳- فرمول بندی مسئله

استاتیکی حاکم بر تیرهای خمیده استفاده می‌شود که جزئیات دقیق مربوط به اثبات روابط حاصل به‌طور کامل در مقاله ینگ و همکاران [۳۳] آورده شده است. حال، کافی است بر اساس هندسه تعریف شده در زیربخش ۲-۱ و نیز با اعمال مفروضات مطرح شده در زیربخش ۲-۲، معادلات تعادل دینامیکی سیستم تیر خمیده در صفحه افق و جرم متحرک را بر اساس روابط (۱) و (۲) تعیین نمود [۱۵، ۱۶، ۳۳]:

در تعیین پاسخ دینامیکی و معادلات تعادل تیرهای خمیده در صفحه افق، روابط حاکم بر رفتار خارج صفحه و درون صفحه به صورت غیرهمبسته بوده، و لذا بررسی عملکرد خارج از صفحه این تیرها تحت تحریک ناشی از جرم متحرک مستقل از عملکرد درون صفحه انجام می‌شود [۴، ۱۶]. همچنین، به منظور تعیین معادلات تعادل دینامیکی سیستم سازه‌ای تحت بررسی، از معادلات تعادل

$$-\mu \frac{\partial^2 w_y}{\partial t^2} - EI_z \left( \frac{\partial^4 w_y}{\partial x^4} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} \right) + \frac{GJ}{R} \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} \right) = M \left( g + \frac{d^2 w_y}{dt^2} \right) \delta[x - x_M(t)] + k_y w_y + c_y \frac{\partial w_y}{\partial t} \quad (1)$$

$$-\rho I_o \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial t^2} + \frac{EI_z}{R} \left( \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} - \frac{\theta_x}{R} \right) + GJ \left( \frac{\partial^2 \theta_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} \right) = -\frac{MV^2}{R} y_s \delta[x - x_M(t)] - k_r \theta_x - c_r \frac{\partial \theta_x}{\partial t} \quad (2)$$

سطح فوقانی تیر خمیده،  $I_z$  ممان اینرسی مقطع حول محور  $z$  و  $J$  ثابت پیچشی، و نیز  $I_o$  به عنوان ممان اینرسی قطبی مقطع تیر خمیده هستند. همچنین،  $\delta$  تابع دلتای دیراک و  $d^2 w_y / dt^2$  بیانگر مشتق کامل مرتبه دوم نسبت به زمان بوده که مطابق رابطه (۳) تعریف می‌شود [۱۶]:

که در آن،  $w_y$  جابه‌جایی خارج از صفحه و  $\theta_x$  دوران پیچشی تیرهای خمیده در صفحه افق هستند. در این روابط،  $\mu$  و  $\rho$  به ترتیب جرم واحد طول و چگالی تیر خمیده، و نیز  $E$  مدول الاستیسیته و  $G$  مدول برشی مقطع می‌باشند.  $V$  سرعت لحظه‌ای جرم متحرک و نیز  $g$  شتاب جاذبه است. همچنین،  $y_s$  فاصله مرکز برش مقطع از

$$\theta_x(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \Theta_{xi}(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (7)$$

که در آن،  $W_{yi}(t)$  و  $\Theta_{xi}(t)$  به ترتیب توابع مجهول متناظر با جابه‌جایی در راستای محور  $y$  و دوران پیچشی متناظر با مود  $i$ -ام تیر خمیده هستند. با قرار دادن معادلات (۶) و (۷) در معادلات (۱) و (۲)، معادلات حاصل شامل توابع مجهول  $W_{yi}(t)$  و  $\Theta_{xi}(t)$  خواهند بود. حال با انتگرال‌گیری در طول تیر خمیده و با کمک خاصیت تعامد توابع  $\sin(i\pi x/L)$ ، می‌توان معادلات به‌دست آمده را به فرم ماتریسی معادله (۸)، که به شکل دستگاه  $2N$  معادله دیفرانسیل معمولی و  $2N$  تابع مجهول  $W_{yi}(t)$  و  $\Theta_{xi}(t)$  است، گسسته‌سازی کرد. ضرایب این دستگاه معادلات تابع زمان هستند و با استفاده از روش‌های عددی شناخته شده می‌توان آن را حل کرد.

$$\bar{\mathbf{M}}(t) \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{W}}(t) \\ \ddot{\Theta}(t) \end{Bmatrix} + \bar{\mathbf{C}}(t) \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{W}}(t) \\ \dot{\Theta}(t) \end{Bmatrix} + \bar{\mathbf{K}}(t) \begin{Bmatrix} \mathbf{W}(t) \\ \Theta(t) \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{P}}(t) \quad (8)$$

در رابطه (۸)، ضرایب  $\bar{\mathbf{M}}(t)$ ،  $\bar{\mathbf{C}}(t)$ ، و  $\bar{\mathbf{K}}(t)$  به ترتیب ماتریس‌های معادل متناظر با جرم، میرایی و سختی سیستم گسسته و نیز  $\bar{\mathbf{P}}(t)$  بیانگر بردار معادل نیروهای وارده به آن است. در مرجع [۱۶] جزئیات مربوط به نحوه محاسبه و مقادیر درایه‌های ماتریس‌های ضرایب مذکور ارائه شده است. یک روش متعارف برای تسهیل در روند حل عددی معادلات حاکم بر سیستم‌های دینامیکی در برنامه‌های رایانه‌ای، استفاده از نمایش فضای حالت<sup>۴۰</sup> است. شکل کلی این نحوه نمایش برای معادله نشان داده شده در رابطه (۷) عبارت است از [۳۶-۴۲]:

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{U}(t)\mathbf{Y}(t) + \mathbf{R}(t) \quad (9)$$

که در آن،

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{W}(t) \\ \Theta(t) \\ \dot{\mathbf{W}}(t) \\ \dot{\Theta}(t) \end{bmatrix}_{4N \times 1} \quad (10)$$

$$\frac{d^2 w_y}{dt^2} = \frac{\partial^2 w_y}{\partial t^2} + \dot{x}_M^2(t) \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + 2\dot{x}_M(t) \frac{\partial^2 w_y}{\partial x \partial t} + \ddot{x}_M(t) \frac{\partial w_y}{\partial x} \quad (3)$$

در این مطالعه، مد نظر است که تأثیر نوع حرکت بر رفتار خارج از صفحه تیرهای خمیده تحت تحریک ناشی از جرم متمرکز متحرک بررسی شود. در این راستا، از حرکت شتابدار با شتاب ثابت (فزاینده/کاهنده) که بر اساس رابطه (۴) تعریف می‌شود، به عنوان مبنای مطالعات خواهد بود.

$$x_M(t) = \frac{1}{2}at^2 + V_0t + x_0 \quad (4)$$

که در آن،  $a$  شتاب ثابت حرکت جرم،  $V_0$  سرعت لحظه ورود جرم بر روی تیر خمیده، و  $x_0$  مختصات لحظه شروع حرکت است. با جایگذاری مشتقات مرتبه اول و دوم رابطه (۴) در رابطه (۳)، می‌توان نوشت:

$$\frac{d^2 w_y}{dt^2} = \frac{\partial^2 w_y}{\partial t^2} + (at + V_0)^2 \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} + 2(at + V_0) \frac{\partial^2 w_y}{\partial x \partial t} + a \frac{\partial w_y}{\partial x} \quad (5)$$

حال، با جایگذاری رابطه (۵) در رابطه (۱) می‌توان شرایط حرکت شتابدار با شتاب ثابت را در مسئله پیاده‌سازی نمود.

### ۳- روش حل مسئله

یکی از روش‌های متداول برای تعیین پاسخ تیرهای خمیده به تحریکات جرم متحرک، روش تفکیک متغیرها است که در آن، با معرفی توابع مناسب مبتنی بر شرایط انتهایی تیر خمیده، پاسخ سیستم تعیین می‌شود. با توجه به معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت خارج از صفحه تیرهای خمیده در صفحه افق و نیز متکی بودن هر دو انتهای تیر بر تکیه‌گاه‌های مفصلی، می‌توان از توابع سینوسی برای نشان دادن شکل پاسخ دینامیکی تیر استفاده نمود [۴، ۱۵، ۳۴، ۳۵]:

$$w_y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} W_{yi}(t) \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) \quad (6)$$

<sup>۴۰</sup> State-space



به منظور حصول اطمینان از صحت حل نیمه تحلیلی پیشنهادی، بایستی نتایج حاصل از آن را با مطالعات موجود در ادبیات فنی مقایسه نمود. یکی از مطالعات برجسته‌ای که در زمینه تأثیر تحریک ناشی از بار متحرک بر پاسخ دینامیکی تیرهای خمیده در صفحه افق مطرح است، مربوط به مدل تحلیلی پیشنهادی ینگ و همکاران [۱۲،۳۴] می‌باشد. در این مطالعه، یک تیر بتنی با مقطع مستطیلی به عرض ۵/۰ و ارتفاع ۱/۸ متر و با شرایط تکیه‌گاهی مفصلی در دو انتها تحت تحریک ناشی از بار متمرکزی به جرم ۲۹/۹ تن قرار گرفته که با سرعت ثابت ۴۰ کیلومتر بر ساعت روی سطح فوقانی تیر در حال حرکت است. مشخصات هندسی و مکانیکی تیر خمیده در مطالعات صحت‌سنجی مطابق جدول (۱) می‌باشد.

$$U(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\bar{\mathbf{M}}^{-1}(t)\bar{\mathbf{K}}(t) & -\bar{\mathbf{M}}^{-1}(t)\bar{\mathbf{C}}(t) \end{bmatrix}_{4N \times 4N} \quad (11)$$

$$\mathbf{R}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{M}}^{-1}(t)\bar{\mathbf{P}}(t) \end{bmatrix}_{4N \times 1} \quad (12)$$

که در آن،  $\mathbf{I}$  بیانگر ماتریس یک‌ه از مرتبه  $2N$  است. برای حل عددی دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبه اول نشان داده شده در رابطه (۹)، می‌توان از روش ماتریس انتقال استفاده کرد که در این روش، بردار  $\mathbf{Y}(t)$  به فرم زیر بازنویسی می‌شود:

$$\mathbf{Y}(t) = \xi(t, t_0)\mathbf{Y}(t_0) + \int_{t_0}^t \xi(t, \tau)\mathbf{R}(\tau) d\tau \quad (13)$$

در رابطه (۱۳)، ماتریس  $\xi(t, t_0)$  به عنوان ماتریس انتقال با بعد مناسب انتخاب شده است و شرایط اولیه مسئله در زمان  $t_0$  مشخص می‌شود. سپس با طی یک روند گام‌به‌گام می‌توان شرایط اولیه گام-های زمانی بعدی ( $t_{k+1}$ ) را بر اساس وضعیت نهایی گام زمانی پیش از آن ( $t_k$ ) و با تعیین گام‌های به اندازه کافی کوچک برای افزایش دقت روش عددی، به دست آورد. برای این کار می‌توان رابطه (۱۳) را به شکل یک معادله تفاضلی در دامنه زمانی بر حسب بردار حالت  $\mathbf{Y}(t)$  نوشت:

$$\mathbf{Y}(t_{k+1}) = \xi(t_{k+1}, t_k)\mathbf{Y}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \xi(t_{k+1}, \tau)\mathbf{R}(\tau) d\tau \quad (14)$$

همچنین، می‌توان ماتریس انتقال  $\xi$  را به صورت زیر در زمان تقریب زد [۴۱]:

$$\xi(t_{k+1}, t_k) = \exp[(t_{k+1} - t_k)\mathbf{U}(t_k)] \quad (15)$$

با ادامه حل گام‌به‌گام، معادله (۱۳) به فرم کلی زیر قابل نمایش خواهد بود [۴۱]:

$$\mathbf{Y}(t_{k+1}) = \xi(t_{k+1}, t_k)\mathbf{Y}(t_k) + [\xi(t_{k+1}, t_k) - \mathbf{I}]\mathbf{U}^{-1}(t_k)\mathbf{R}(t_k) \quad (16)$$

برای اطمینان از عملکرد روند حل عددی و ارزیابی دقت این روش، مطالعه صحت‌سنجی در بخش ۴ این مقاله ارائه می‌شود.

#### ۴- صحت‌سنجی حل نیمه تحلیلی پیشنهادی

جدول ۳: مشخصات هندسی و مکانیکی تیر خمیده در مطالعات صحت‌سنجی [۱۲،۳۴].

واحد	کمیت	نماد	متغیر
متر	۲۴/۰	$L$	طول
متر	۴۵/۸۴	$R$	شعاع انحنا
درجه	۳۰	$\theta$	زاویه مرکزی
مترمربع	۹/۰۰	$A$	سطح مقطع
کیلوگرم بر مترمکعب	۲۴۰۰	$\rho$	چگالی
گیگاپاسکال	۳۲/۲	$E$	مدول الاستیسیته
گیگاپاسکال	۱۳/۸۳	$G$	مدول برشی
متر به توان ۴	۱۸/۷۵	$I_y$	ممان اینرسی حول محور $y$
متر به توان ۴	۲/۴۳	$I_z$	ممان اینرسی حول محور $z$
متر به توان ۴	۲۱/۱۸	$I_o$	ممان اینرسی قطبی

مقادیر جدول فوق در حل نیمه تحلیلی پیشنهادی در نظر گرفته شده و سپس پاسخ دینامیکی سیستم، بر مبنای فرضیات مطالعه ادبیات فنی، با در نظر گرفتن اولین مود ارتعاشی در قالب جابه‌جایی خارج از صفحه در وسط دهانه تیر خمیده محاسبه شده است. مقایسه جابه‌جایی خارج از صفحه مدل پیشنهادی ینگ و مدل نیمه تحلیلی این مطالعه در شکل (۲) ترسیم شده است.

مقایسه نمودارهای ترسیمی در این شکل نشانگر دقت بالای مدل پیشنهادی در برآورد پاسخ دینامیکی خارج از صفحه تیرهای خمیده در صفحه افق و تحت تحریک ناشی از بار متحرک است، چرا که نه تنها مقادیر جابه‌جایی حداکثر با اختلاف کمتر از ۳ درصد



کند، در پاسخ دینامیکی خارج از صفحه تیرهای خمیده ارزیابی گردد. همچنین، به منظور مقایسه تأثیر شتاب کاهنده/افزاینده، حالتی که جسم با سرعت ثابت (شتاب صفر) از تیر عبور می کند نیز در محاسبات منظور شده است.

جدول ۲: مشخصات مکانیکی و هندسی مقطع تیر خمیده [۴۷].

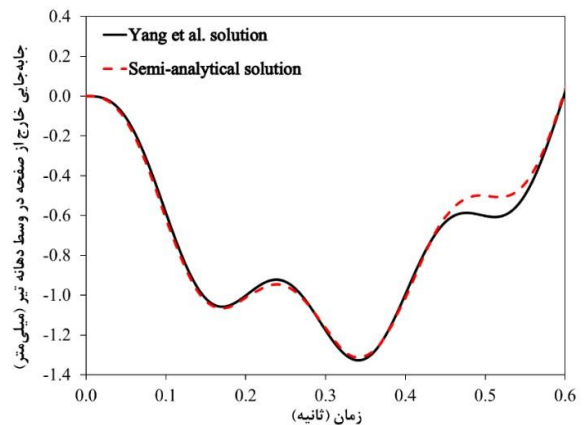
متغیر (واحد)	نماد	کمیت
طول (متر)	$L$	۱۰۰-۷۵-۵۰
زاویه مرکزی (رادیان)	$\varphi$	$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}$
سطح مقطع (سانتی متر مربع)	$A$	۷۶,۷۰
جرم واحد طول (کیلوگرم بر متر)	$\mu$	۶۰,۲۱
مدول الاستیسیته (گیگاپاسکال)	$E$	۲۱۰
ضریب پواسون	$\nu$	۰,۳۰
مدول برشی (گیگاپاسکال)	$G$	۸۰,۷۷
فاصله مرکز برش از سطح فوقانی تیر (سانتی متر)	$y_s$	۱۲,۴۹
ممان اینرسی حول محور $y$ (سانتی متر به توان چهار)	$I_y$	۵۱۲,۳۰
ممان اینرسی حول محور $z$ (سانتی متر به توان چهار)	$I_z$	۳۰۳۸,۳۰
ممان اینرسی قطبی (سانتی متر به توان چهار)	$I_o$	۳۵۵۰,۶۰

جدول ۳: مؤلفه های دینامیکی جسم متحرک [۴۷-۴۹].

متغیر (واحد)	نماد	کمیت
جرم جسم (کیلوگرم)	$M$	۱۶۰۰۰, ۱۲۰۰۰, ۸۰۰۰
سرعت اولیه حرکت شتابدار فزاینده (متر بر ثانیه)	$V$	۳۰ - ۰
سرعت اولیه حرکت شتابدار کاهنده (متر بر ثانیه)		۷۵ - ۴۵
شتاب فزاینده (متر بر مجذور بر ثانیه)		+۳, +۶, +۹
شتاب کاهنده (متر بر مجذور بر ثانیه)	$a$	-۳, -۶, -۹

جدول ۴: مؤلفه های مکانیکی بستر ویسکوالاستیک [۱۵, ۱۶, ۴۳, ۴۴, ۵۰].

قابل محاسبه بوده، بلکه سایر پاسخ های دینامیکی سیستم شامل دامنه و فاز ورودی و خروجی تحریک نیز با دقت مطلوبی حاصل شده است. لذا، مدل نیمه تحلیلی پیشنهادی قادر است تا برآورد مطلوبی از رفتار دینامیکی حاکم بر تیرهای خمیده و تحت تحریک ناشی از جرم متحرک به همراه داشته باشد.



شکل ۲: صحت سنجی مدل نیمه تحلیلی ارائه شده بر اساس مدل تحلیلی ینگ و همکاران [۱۲, ۳۴] بر مبنای مقایسه مقادیر جابه جایی خارج از صفحه در وسط دهانه تیر خمیده.

## ۵- مطالعات پارامتری

در این بخش، تأثیر متغیرهای کلیدی حاکم بر مسئله شامل (۱) طول تیر خمیده، (۲) زاویه مرکزی تیر خمیده، (۳) جرم جسم متحرک، (۴) سرعت اولیه ورود جسم به تیر خمیده، و (۵) شتاب کاهنده/افزاینده جسم ارزیابی می شود. سایر پارامترهای مسئله مانند مشخصات مکانیکی بستر ویسکو-الاستیک [۱۵, ۱۶, ۴۳, ۴۴]، مشخصات هندسی تیر خمیده [۴, ۱۶, ۴۵, ۴۶] با استناد به مقادیر کاربردی در ادبیات فنی بکار گرفته می شود.

این مقادیر در جدول (۲) تا جدول (۴) خلاصه شده که به ترتیب مربوط به مشخصات مکانیکی و هندسی تیر خمیده، مؤلفه های دینامیکی جرم متحرک، و نیز مشخصات مکانیکی خاک بستر می باشد. همان طور که در زیربخش ۲-۲ (فرضیات) اشاره شد، سرعت اولیه ورود جرم و نیز شتاب های کاهنده به گونه ای در نظر گرفته شده است که انواع حالت های محتمل شامل: (۱) جرم پیش از رسیدن به انتهای تیر بایستد، (۲) جرم دقیقاً در انتهای تیر متوقف شود، و (۳) جرم با سرعت  $V = \sqrt{V_0^2 \pm 2|a|L}$  از انتهای تیر عبور

متغیر (واحد)	نماد	کمیت
سختی بستر ارتجاعی (کیلو نیوتن بر مترمربع)	$k_y$	۳۴۲۶
سختی پیچشی (کیلو نیوتن بر رادیان)	$k_r$	۱۱۸،۳
میرایی بستر ارتجاعی (کیلو نیوتن ثانیه بر مترمربع)	$c_y$	۲،۴۵
میرایی پیچشی (نیوتون رادیان بر ثانیه)	$c_r$	۸،۰۶۷

## ۶- تحلیل و تفسیر نتایج

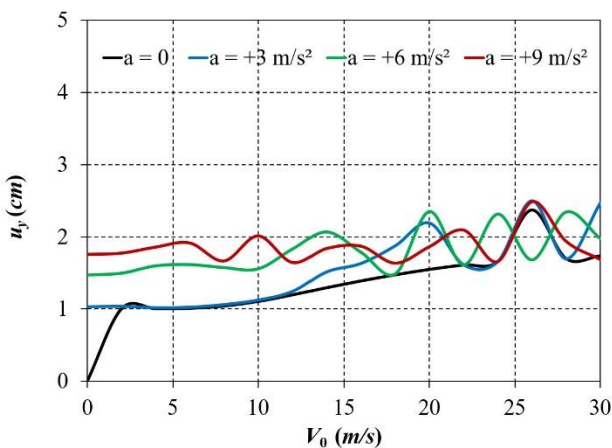
در شکل ۳ تا شکل ۶ طیف‌های پاسخ جابه‌جایی و لنگر خمشی خارج از صفحه تیرهای خمیده به ازای تغییرات پارامترهای مختلف بر حسب سرعت اولیه ورود به تیر ( $V_0$ ) ارائه شده است. منظور از طیف، نمودار بیشینه پاسخ سیستم بر حسب سرعت اولیه جرم متحرک است. به منظور سهولت، بیشینه جابه‌جایی خارج از صفحه با  $u_y$  نشان داده می‌شود تا تمایز آن با تاریخچه پاسخ جابه‌جایی،  $w_y$ ، مشخص شود.

در شکل ۳ و شکل ۴، اثر حرکت تندشونده (شتاب فزاینده) مطالعه شده و در شکل ۵ و شکل ۶، حرکت کندشونده (شتاب کاهنده) مورد بررسی قرار گرفته است. لازم به ذکر است که لنگر خمشی خارج از صفحه،  $m_z$  از رابطه زیر محاسبه می‌شود [۱۶]:

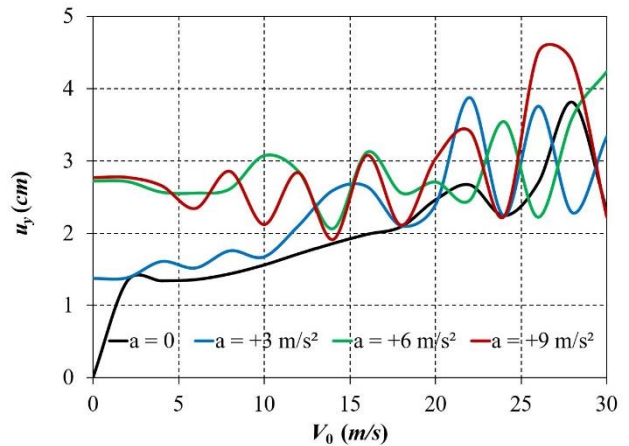
$$m_z = EI_z \left( \frac{\partial^2 w_y}{\partial x^2} - \frac{\theta_x}{R} \right) \quad (17)$$

برای سهولت، بیشینه مقادیر لنگر خمشی در شکل‌های مربوط به طیف لنگر خمشی خارج از صفحه با  $M_z$  نشان داده شده است تا تمایز آن با تاریخچه پاسخ مقادیر لنگر خمشی خارج از صفحه،  $m_z$ ، مشخص گردد. مطابق طیف‌های مربوط به شتاب فزاینده، اگر سرعت اولیه ورود جرم متحرک به تیر خمیده کمتر از ۵ متر بر ثانیه باشد، اثر سرعت اولیه در پاسخ دینامیکی سیستم، شامل جابه‌جایی و لنگر خمشی خارج از صفحه نامحسوس است. مطابق شکل ۳ و شکل ۴، پس از سرعت فوق، اثرات مؤلفه‌های دینامیکی در پاسخ سیستم تشدید شده، بطوری‌که حداکثر میزان افزایش طیف پاسخ جابه‌جایی نسبت به حالت سرعت ثابت، به ازای شتاب‌های فزاینده ۳، ۶، و ۹ متر بر مجذور ثانیه، به ترتیب ۱۵،۷۶، ۱۴،۴۵ و ۱۸،۱۱ درصد می‌باشد. مقادیر نظیر برای طیف لنگر نیز به ترتیب ۲۷،۰۳، ۲۷،۵۳ و ۱۸،۳۹ درصد است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، تأثیر اندازه شتاب فزاینده در طیف پاسخ لنگر خمشی نسبت به جابه‌جایی بیشتر است.

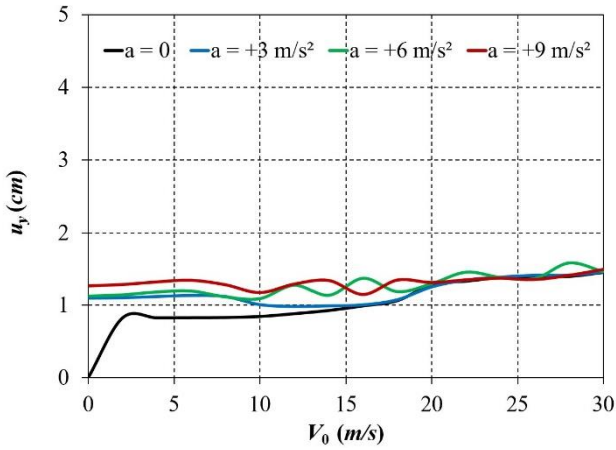
در حرکت کندشونده، مطابق شکل ۵ و شکل ۶، مشاهده می‌شود که بطوری‌که حداکثر مقدار کاهش بیشینه طیف جابه‌جایی نسبت به حالت سرعت ثابت، به ازای شتاب‌های کاهنده ۳، ۶، و ۹ متر بر مجذور ثانیه، به ترتیب ۲۱،۳۳، ۲۹،۷۸ و ۴۱،۵۹ درصد می‌باشد. در طیف لنگر خمشی، این مقادیر به ترتیب ۲۱،۶۴، ۳۰،۱۹ و ۴۲،۰۵ درصد هستند.



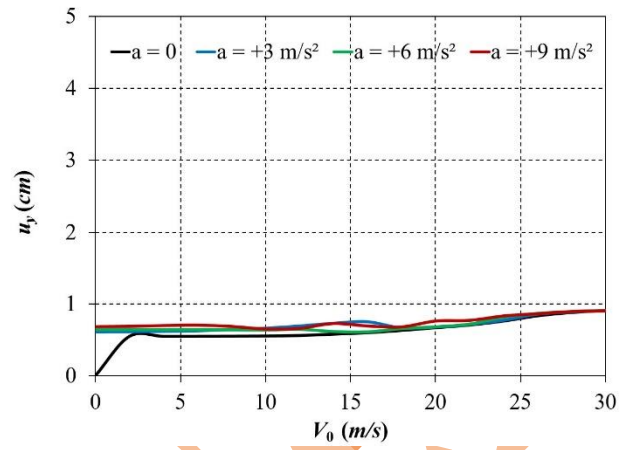
$M=1200 \text{ kg}$  ,  $\varphi = \pi/3 \text{ rad}$  ,  $L=50 \text{ m}$  (ب)



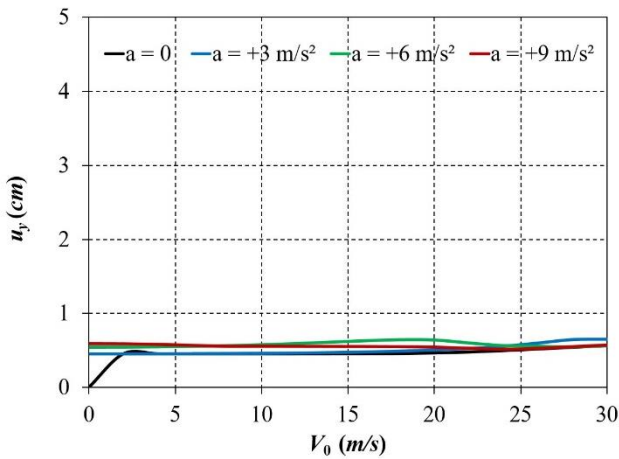
$M=1600 \text{ kg}$  ,  $\varphi = \pi/6 \text{ rad}$  ,  $L=50 \text{ m}$  (الف)



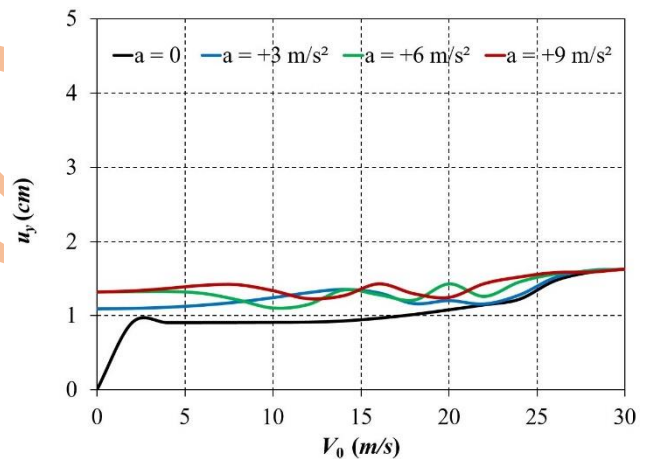
$M=12000 \text{ kg} , \varphi = \pi/3 \text{ rad} , L=75 \text{ m} (\text{د})$



$M=8000 \text{ kg} , \varphi = \pi/6 \text{ rad} , L=75 \text{ m} (\text{ج})$

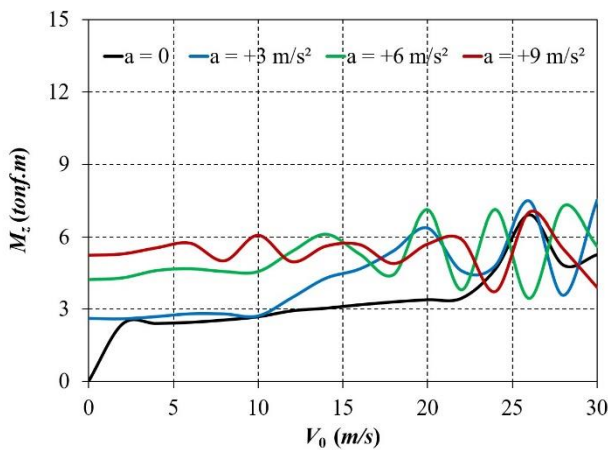


$M=8000 \text{ kg} , \varphi = \pi/3 \text{ rad} , L=100 \text{ m} (\text{ب})$

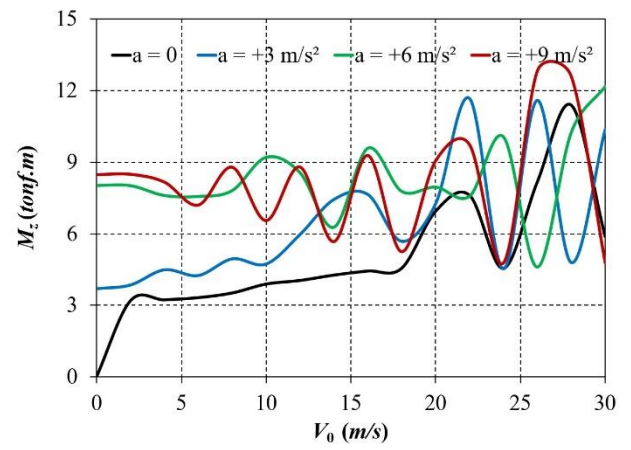


$M=16000 \text{ kg} , \varphi = \pi/6 \text{ rad} , L=100 \text{ m} (\text{ه})$

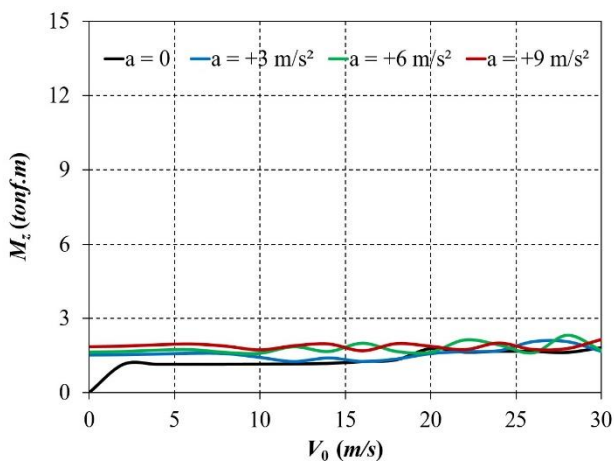
شکل ۳: نمودار طیف پاسخ جابه‌جایی خارج از صفحه در حالت شتاب فزاینده



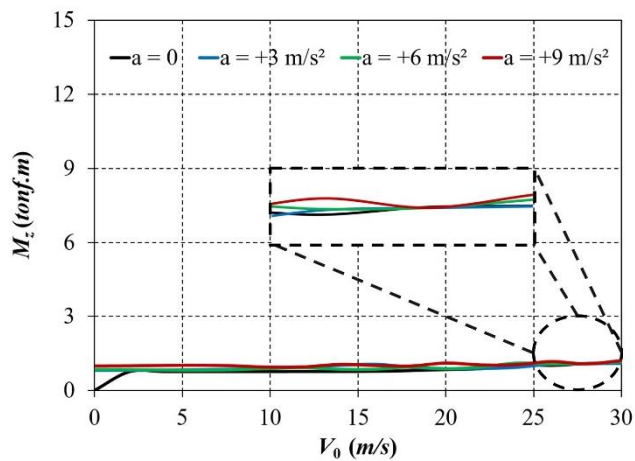
$M=12000 \text{ kg} , \varphi = \pi/3 \text{ rad} , L=50 \text{ m} (\text{ب})$



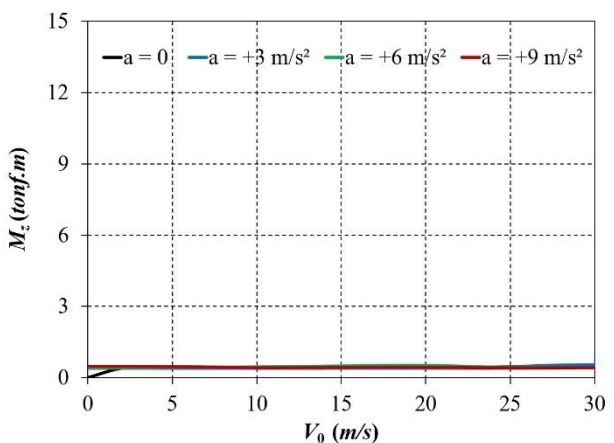
$M=16000 \text{ kg} , \varphi = \pi/6 \text{ rad} , L=50 \text{ m} (\text{الف})$



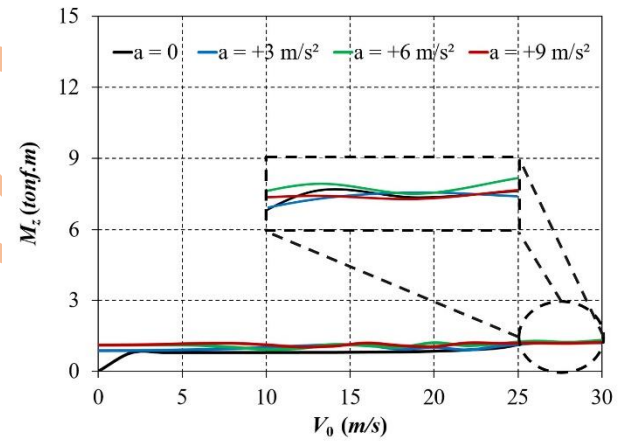
$M=12000 \text{ kg} , \varphi = \pi/3 \text{ rad} , L=75 \text{ m} (\text{د})$



$M=8000 \text{ kg} , \varphi = \pi/6 \text{ rad} , L=75 \text{ m} (\text{ج})$

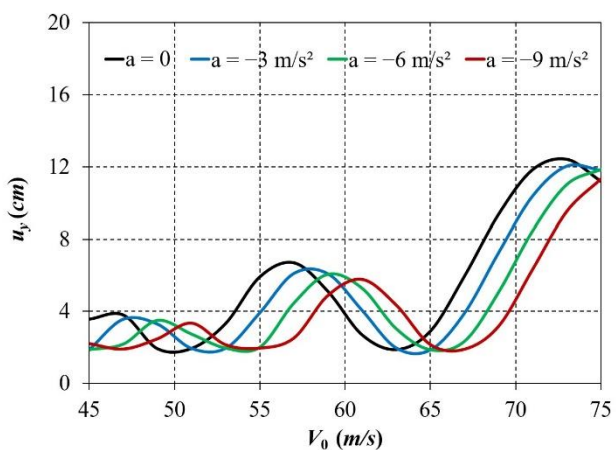


$M=8000 \text{ kg} , \varphi = \pi/3 \text{ rad} , L=100 \text{ m} (\text{و})$

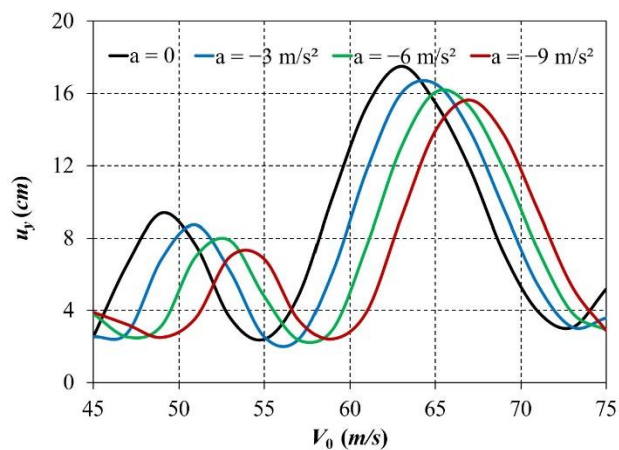


$M=16000 \text{ kg} , \varphi = \pi/6 \text{ rad} , L=100 \text{ m} (\text{ه})$

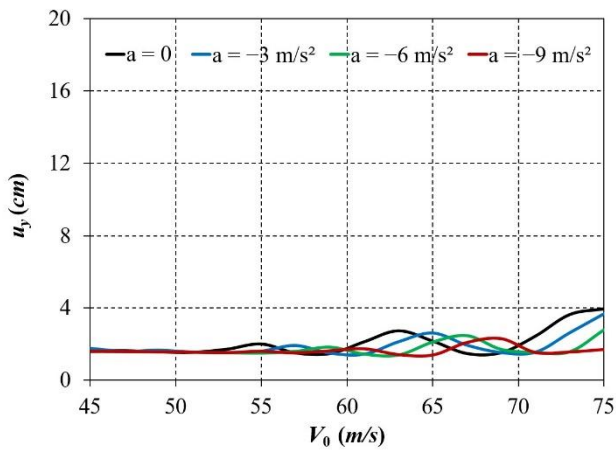
شکل ۴: نمودار طیف پاسخ لنگر خمشی در حالت شتاب فزاینده



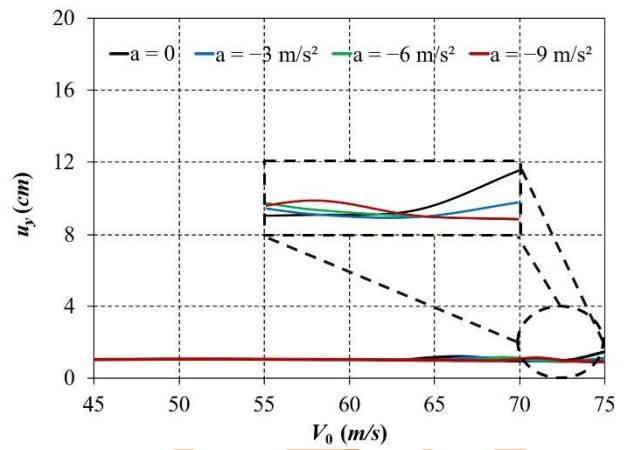
$M=12000 \text{ kg} , \varphi = \pi/3 \text{ rad} , L=50 \text{ m} (\text{ب})$



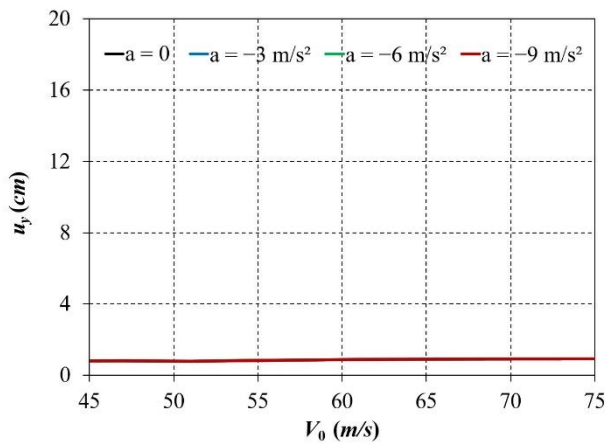
$M=16000 \text{ kg} , \varphi = \pi/6 \text{ rad} , L=50 \text{ m} (\text{الف})$



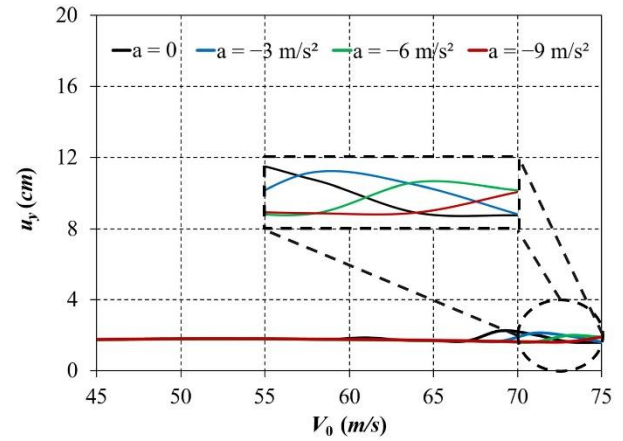
$M=12000 \text{ kg}$  ,  $\varphi = \pi/3 \text{ rad}$  ,  $L=75 \text{ m}$  (د)



$M=8000 \text{ kg}$  ,  $\varphi = \pi/6 \text{ rad}$  ,  $L=75 \text{ m}$  (ج)

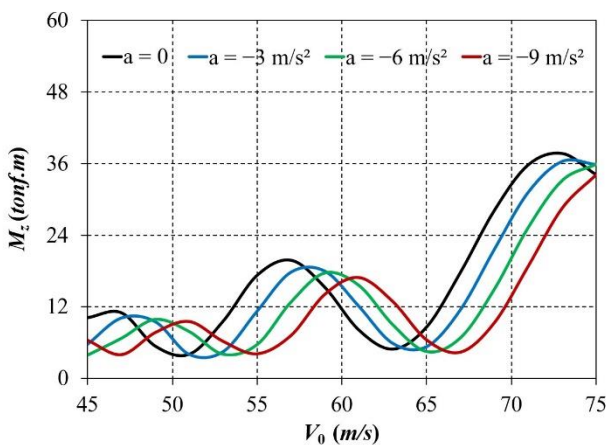


$M=8000 \text{ kg}$  ,  $\varphi = \pi/3 \text{ rad}$  ,  $L=100 \text{ m}$  (ب)

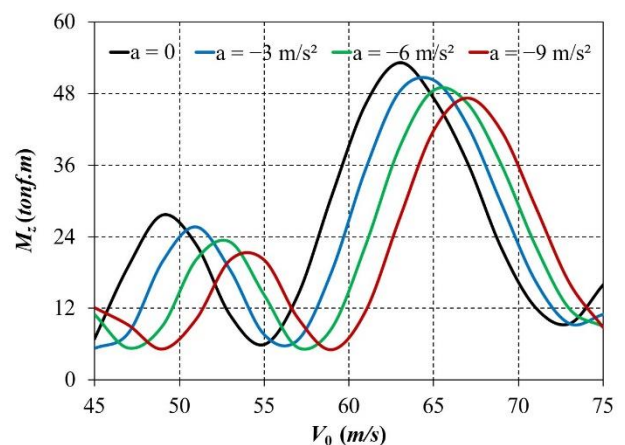


$M=16000 \text{ kg}$  ,  $\varphi = \pi/6 \text{ rad}$  ,  $L=100 \text{ m}$  (ه)

شکل ۵: نمودار طیف پاسخ جابه‌جایی خارج از صفحه در حالت شتاب کاهنده

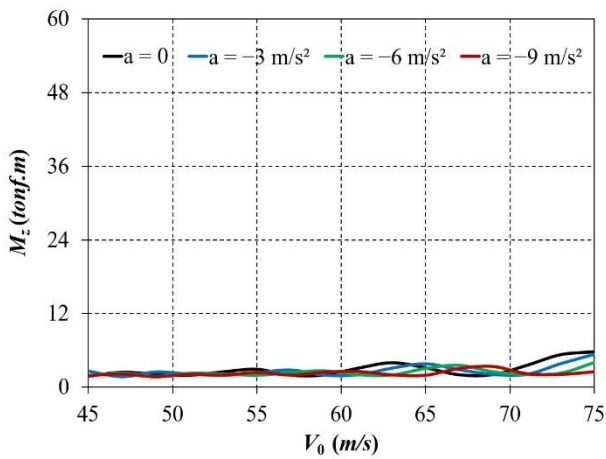


$M=12000 \text{ kg}$  ,  $\varphi = \pi/3 \text{ rad}$  ,  $L=50 \text{ m}$  (ب)

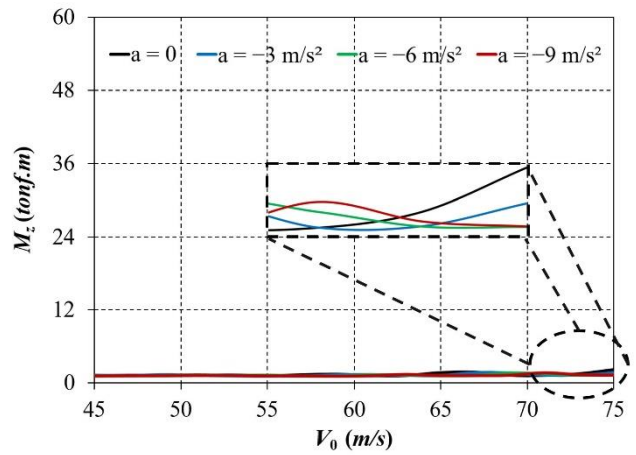


$M=16000 \text{ kg}$  ,  $\varphi = \pi/6 \text{ rad}$  ,  $L=50 \text{ m}$  (الف)

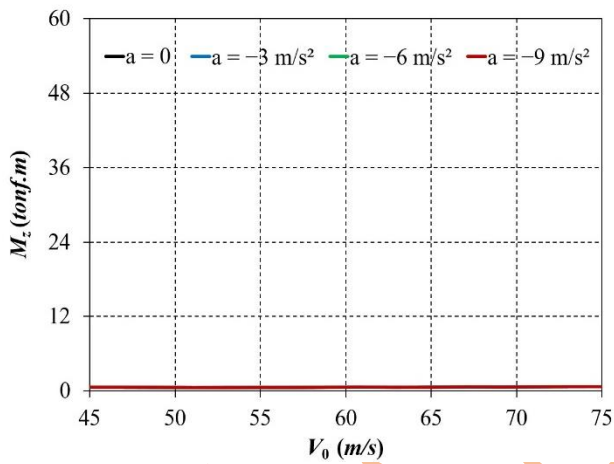




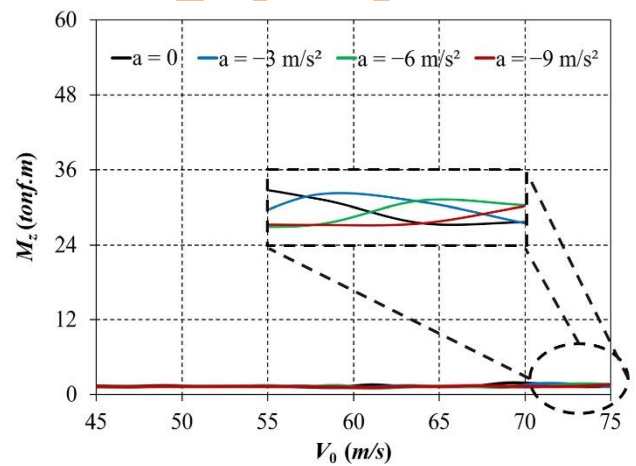
$M=12000 \text{ kg}$  ,  $\varphi = \pi/3 \text{ rad}$  ,  $L=75 \text{ m}$  (د)



$M=8000 \text{ kg}$  ,  $\varphi = \pi/6 \text{ rad}$  ,  $L=75 \text{ m}$  (ج)



$M=8000 \text{ kg}$  ,  $\varphi = \pi/3 \text{ rad}$  ,  $L=100 \text{ m}$  (و)



$M=16000 \text{ kg}$  ,  $\varphi = \pi/6 \text{ rad}$  ,  $L=100 \text{ m}$  (ه)

شکل ۶: نمودار طیف پاسخ لنگر خمشی در حالت شتاب کاهنده

جدول ۵: درصد افزایش بیشینه پاسخ طیف نسبت حالت سرعت ثابت ( $a=0$ )

$a=9 \text{ m/s}^2$	$a=6 \text{ m/s}^2$	$a=3 \text{ m/s}^2$	شماره شکل	$a=9 \text{ m/s}^2$	$a=6 \text{ m/s}^2$	$a=3 \text{ m/s}^2$	شماره شکل	حرکت تندشونده (شتاب فزاینده)
۱۲,۵۵	۶,۶۸	۲,۴۷	د-۵ الف	۱۸,۱۱	۱۱,۱۹	۱,۶۴	د-۴ الف	
۱,۵۹	۴,۹۲	۸,۸۸	د-۵ ب	۴,۷۱	۰,۸۹	۵,۳۴	د-۴ ب	
۱۰,۴۵	۵,۹۴	۰,۴۱	د-۵ ج	۰,۸۲	۰,۳۸	۰,۱۰	د-۴ ج	
۱۸,۳۹	۲۷,۵۳	۱۲,۹۱	د-۵ د	۲,۹۳	۸,۷۸	۰,۳۰	د-۴ د	
۰,۴۰	۵,۶۵	۰,۷۹	د-۵ ه	۰,۲۶	۰,۲۹	۰,۰۰	د-۴ ه	
۱۵,۹۸	۲۵,۱۴	۲۷,۰۳	د-۵ و	۵,۰۰	۱۴,۴۵	۱۵,۷۶	د-۴ و	

جدول ۶: درصد کاهش بیشینه پاسخ طیف نسبت حالت سرعت ثابت ( $a=0$ )

شماره شکل	$a=-3 \text{ m/s}^2$	$a=-6 \text{ m/s}^2$	$a=-9 \text{ m/s}^2$	شماره شکل	$a=-3 \text{ m/s}^2$	$a=-6 \text{ m/s}^2$	$a=-9 \text{ m/s}^2$	شماره شکل
۶- الف	۵,۵۶	۸,۱۸	۱۰,۷۲	۷- الف	۵,۵۴	۸,۶۶	۱۱,۱۵	۶- الف
۶- ب	۳,۰۷	۴,۳۴	۸,۷۲	۷- ب	۳,۴۳	۴,۶۲	۹,۳۸	۶- ب
۶- ج	۲۱,۳۳	۲۱,۹۱	۲۳,۳۰	۷- ج	۲۱,۶۴	۲۲,۲۴	۲۳,۶۳	۶- ج
۶- د	۷,۳۶	۲۹,۷۸	۴۱,۵۹	۷- د	۷,۶۴	۳۰,۱۹	۴۲,۰۵	۶- د
۶- هـ	۵,۴۹	۱۰,۷۷	۱۵,۸۲	۷- هـ	۵,۵۳	۱۰,۸۵	۱۵,۹۴	۶- هـ
۶- و	۰,۰۳	۰,۰۵	۰,۰۸	۷- و	۰,۰۱	۰,۰۴	۰,۰۴	۶- و

حرکت کندشونده (شتاب کاهنده)

سینوسی، با در نظر گرفتن شرایط تکیه‌گاهی ساده، برای تیرهای خمیده، فرم کلی آن تعیین شده است. سپس، طیف پاسخ دینامیکی این سیستم بر اساس بیشینه مقادیر جابه‌جایی خارج و لنگر خمشی از صفحه ارائه شده است.

بر اساس روابط نیمه‌تحلیلی حاصل، مطالعات پارامتریک برای در نظر گرفتن اثر هندسه‌های مختلف از تیرهای خمیده شامل طول و زاویه مرکزی و نیز پارامترهای دینامیکی تحریک خارجی شامل سرعت اولیه، جرم، و اندازه شتاب فزاینده/کاهنده جسم متحرک انجام گرفت.

بر اساس نتایج بدست آمده مشاهده گردید که بجز در سرعت‌های اولیه کمتر از حدود ۵ متر بر ثانیه، اثرات شتاب فزاینده در طیف پاسخ دینامیکی سیستم حائز اهمیت است. همچنین، با توجه به اینکه در شتاب‌های تندشونده، بازه سرعت اولیه بررسی شده به گونه‌ای است که شرایط سیستم در ناحیه انتقالی سرعت قرار می‌گیرد، لذا روند تغییرات مشخصی را از پاسخ سیستم نمی‌توان انتظار داشت. این در حالی است که، در حالت شتاب کندشونده، با توجه به بازه سرعت‌های اولیه ورود جرم متحرک به تیر خمیده، ماهیت نوسانی آن برجسته‌تر بوده و از روند مشخص‌تری برخوردار است.

با توجه به کاربری بودن بازه تغییرات متغیرهای در نظر گرفته شده در مطالعات پارامتریک، اثرات حرکت شتابدار جسم متحرک می‌تواند قابل‌ملاحظه باشد، بگونه‌ای که برای پاسخ جابه‌جایی و لنگر خمشی خارج از صفحه در حالت شتاب تند شونده به ترتیب ۱۸/۱۱ و ۲۷/۵۳ درصد افزایش، و برای حالت شتاب کندشونده، به ترتیب

بر اساس شکل ۳ تا شکل ۶، به دلیل قرار گرفتن سرعت‌های کمتر از ۳۰ متر بر ثانیه که در حرکت تندشونده منظور شده است، در ناحیه انتقالی که ماهیت نوسانی تیر تحت تحریک خارجی از فرم هارمونیک به دور است (به مرجع [۱۶] مراجعه شود)، تغییرات بیشینه طیف در شتاب‌های فزاینده از روند مشخصی پیروی نمی‌کند. اما، در حرکت کندشونده، با توجه به سرعت‌های منظور شده در نتایج عددی که خارج از ناحیه انتقالی قرار دارند و ماهیت پاسخ‌ها فرم هارمونیک داشته و روند تغییرات آن نسبت به حالت تندشونده و به ازای مقادیر بررسی شده معنی‌دار تر بوده است.

همچنین، جمع‌بندی درصد‌های افزایش و کاهش بیشینه پاسخ طیف جابه‌جایی و لنگر خمشی خارج از صفحه تیرهای خمیده بررسی شده تحت سرعت اولیه، جرم و شتاب‌های مختلف جسم متحرک در جدول ۵ و جدول ۶ خلاصه شده است.

شایان ذکر است که نتایج حاصل از مطالعات پارامتریک انجام‌شده در بازه در نظر گرفته شده برای مقادیر متغیرهای ورودی شامل طول و زاویه مرکزی تیر خمیده و نیز جرم، سرعت اولیه ورود به تیر و شتاب‌های کاهنده و فزاینده جرم متحرک معتبر می‌باشد.

## ۷- نتیجه‌گیری

در این مطالعه، به اثرات ناشی از حرکت شتابدار جرم متحرک بر پاسخ دینامیکی خارج از صفحه تیرهای خمیده در صفحه افق پرداخته شده است. در ابتدا، معادلات تعادل دینامیکی تیرهای خمیده در صفحه افق تحت تحریک ناشی از حرکت شتابدار با شتاب ثابت فزاینده/کاهنده یک جرم نوشته شده و با انتخاب توابع



due to vehicles. *Computers & structures*. ۶۸(۵), pp.۵۱۳-۵۲۸. doi.org/۱۰.۱۰۱۶/S۰۰۴۵-۷۹۴۹(۹۸)۰۰۰۶۵-۰.

- [۱۱] Howson, W.P. and Jemah, A.K., ۱۹۹۹. Exact out-of-plane natural frequencies of curved timoshenko beams. *Journal of Engineering Mechanics*. ۱۲۵(۱), pp.۱۹-۲۵. doi.org/۱۰.۱۰۶۱/(ASCE)۰۷۳۳-۹۳۹۹(۱۹۹۹)۱۲۵:۱(۱۹).
- [۱۲] Yang, Y.-B., Wu, C.-M. and Yau, J.-D., ۲۰۰۱. Dynamic response of a horizontally curved beam subjected to vertical and horizontal moving loads. *Journal of Sound and Vibration*. ۲۴۲(۳), pp.۵۱۹-۵۳۷. doi.org/۱۰.۱۰۰۶/j.svi.۲۰۰۰.۳۳۵۵.
- [۱۳] Lee, B.K., Oh, S.J. and Park, K.K., ۲۰۰۲. Free vibrations of shear deformable circular curved beams resting on elastic foundations. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*. ۰۲(۰۱), pp.۷۷-۹۷. doi.org/۱۰.۱۱۴۲/S۰۲۱۹۴۵۵۴۰۲۰۰۰۴۴۰.
- [۱۴] Zboinski, K. and Dusza, M., ۲۰۱۰. Self-exciting vibrations and Hopf's bifurcation in non-linear stability analysis of rail vehicles in a curved track. *European Journal of Mechanics. A, Solids*. ۲۹(۲), pp.۱۹۰-۲۰۳. doi.org/۱۰.۱۰۱۶/j.euromechsol.۲۰۰۹.۱۰.۰۰۱.
- [۱۵] Dai, J. and Ang, K.K., ۲۰۱۵. Steady-state response of a curved beam on a viscously damped foundation subjected to a sequence of moving loads. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*. ۲۲۹(۴), pp.۳۷۵-۳۹۴. https://doi.org/۱۰.۱۱۷۷/۰۹۵۴۴۰۹۷۱۴۵۶۳۳۶۶.
- [۱۶] Abdoos, H., Khaloo, A.R. and Foyouzat, M.A., ۲۰۲۰. On the out-of-plane dynamic response of horizontally curved beams resting on elastic foundation traversed by a moving mass. *Journal of Sound and Vibration*. ۴۷۹(۱۱۵۳۹۷), p.۱۱۵۳۹۷. doi.org/۱۰.۱۰۱۶/j.jsv.۲۰۲۰.۱۱۵۳۹۷.
- [۱۷] Abdoos, H., Foyouzat, M.A., Khaloo, A.R., ۲۰۲۳. Parametric study on the dynamics of horizontally curved beams due to a moving inertial load considering the induced torsional moment. *Journal of Structural and Construction Engineering*. doi.org/۱۰.۲۲۰۶۵/jsce.۲۰۲۳.۳۶۸۶۱۲.۲۹۶۴.[In Persian]
- [۱۸] Lin, J. and Niemeier, D.A., ۲۰۰۲. An exploratory analysis comparing a stochastic driving cycle to California's regulatory cycle. *Atmospheric Environment*. ۳۶(۳۸), pp.۵۷۵۹-۵۷۷۰. doi.org/۱۰.۱۰۱۶/S۱۳۵۲-۲۳۱۰(۰۲)۰۰۶۹۵-۷.
- [۱۹] Ho, S.-H., Wong, Y.-D. and Chang, V.W.-C., ۲۰۱۴.

۴۱/۵۹ و ۴۲/۰۵ درصد کاهش را نسبت به وضعیت سرعت ثابت در پاسخ دینامیکی سیستم مشاهده می‌شود.

## منابع

- [۱] Abdoos, H. and Khaloo, A., ۲۰۲۴. Failure mechanism of a curved RC shear wall subjected to cyclic loading: Experimental findings. *Engineering Structures*, ۳۰۴, p.۱۱۷۷۰۳. doi.org/۱۰.۱۰۱۶/j.engstruct.۲۰۲۴.۱۱۷۷۰۳.
- [۲] Beskou, N.D. and Theodorakopoulos, D.D., ۲۰۱۱. Dynamic effects of moving loads on road pavements: A review. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, ۳۱(۴), pp.۵۴۷-۵۶۷. doi.org/۱۰.۱۰۱۶/j.soildyn.۲۰۱۰.۱۱.۰۰۲.
- [۳] Fryba, L., ۲۰۱۴. *Vibration of solids and structures under moving loads*. New York, NY: Springer.
- [۴] Foyouzat, M.A., Abdoos, H., Khaloo, A.R. and Mofid, M., ۲۰۲۲. In-plane vibration analysis of horizontally curved beams resting on visco-elastic foundation subjected to a moving mass. *Mechanical Systems and Signal Processing*. ۱۷۲(۱۰۹۰۱۳), p.۱۰۹۰۱۳. doi.org/۱۰.۱۰۱۶/j.ymsp.۲۰۲۲.۱۰۹۰۱۳.
- [۵] Khaloo, A.R., Foyouzat, M.A., Abdoos, H. and Mofid, M., ۲۰۲۳. Axial force contribution to the out-of-plane response of horizontally curved beams under a moving mass excitation. *Applied Mathematical Modelling*. ۱۱۵, pp.۱۴۸-۱۷۲. doi.org/۱۰.۱۰۱۶/j.apm.۲۰۲۲.۱۰.۰۴۷.
- [۶] Christiano, P.P. and Culver, C.G., ۱۹۶۹. Horizontally Curved Bridges Subject to Moving Loads. *Journal of the Structural Division*, ۹۵(۸), pp.۱۶۱۵-۱۶۴۳. doi.org/۱۰.۱۰۶۱/jsdeag.۰۰۰۲۳۳۱.
- [۷] Chaudhuri, S.K. and Shore, S., ۱۹۷۷. Dynamic analysis of horizontally curved I-girder bridges. *Journal of the Structural Division*. ۱۰۳(۸), pp.۱۵۸۹-۱۶۰۴. doi.org/۱۰.۱۰۶۱/JSDEAG.۰۰۰۴۶۹۶.
- [۸] Nair, S., Garg, V.K. and Lai, Y.S. ۱۹۸۵. Dynamic stability of a curved rail under a moving load. *Applied Mathematical Modelling*. ۹(۳), pp.۲۲۰-۲۲۴. doi.org/۱۰.۱۰۱۶/۰۳۰۷-۹۰۴X(۸۵)۹۰۰۱۱-۳.
- [۹] Galdos, N.H., Schelling, D.R. and Sahin, M.A., ۱۹۹۳. Methodology for impact factor of horizontally curved box bridges. *Journal of Structural Engineering*. ۱۱۹(۶), pp.۱۹۱۷-۱۹۳۴. doi.org/۱۰.۱۰۶۱/(ASCE)۰۷۳۳-۹۴۴۵(۱۹۹۳)۱۱۹:۶(۱۹۱۷).
- [۱۰] Huang, D., Wang, T.-L. and Shahawy, M., ۱۹۹۸. Vibration of horizontally curved box girder bridges

foundation to a load moving on its surface with variable speed. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. 109, pp.222-226. doi.org/10.1016/j.soildyn.2018.02.033.

- [31] Liu, Y., Fang, H., Zheng, J.-J. and Wang, Y.-N., 2022. Dynamic behaviour of pavement on a two-parameter viscoelastic foundation subjected to loads moving with variable speeds. *International Journal of Pavement Engineering*. 23(10), pp.3425-3443. doi.org/10.1080/10298436.2021.1899178.
- [32] Piovan, M.T., Cortínez, V.H. and Rossi, R.E., 2000. Out-of-plane vibrations of shear deformable continuous horizontally curved thin-walled beams. *Journal of Sound and Vibration*. 237(1), pp.101-118. doi.org/10.1006/jsvi.2000.3055.
- [33] Yang, Y.-B. and Kuo, S.-R., 1987. Effect of curvature on stability of curved beams. *Journal of Structural Engineering*. 113(5), pp.1185-1202. doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1987)113:5(1185).
- [34] Yang, Y.-B., Yau, J.-D. and Wu, Y.-S., 2004. *Vehicle-bridge interaction dynamics: With applications to high-speed railways*. Singapore, Singapore: World Scientific Publishing.
- [35] Luo, J., Zhu, S. and Zhai, W., 2022. Formulation of curved beam vibrations and its extended application to train-track spatial interactions. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 165(108393), p.108393. doi.org/10.1016/j.ymssp.2021.108393.
- [36] Foyouzat, M.A., Estekanchi, H.E. and Mofid, M., 2018. An analytical-numerical solution to assess the dynamic response of viscoelastic plates to a moving mass. *Applied Mathematical Modelling*. 54, pp.670-696. doi.org/10.1016/j.apm.2017.07.037.
- [37] Hirzinger, B., Adam, C. and Salcher, P., 2020. Dynamic response of a non-classically damped beam with general boundary conditions subjected to a moving mass-spring-damper system. *International Journal of Mechanical Sciences*. 185(105877), p.105877. doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2020.105877.
- [38] Moradi, S., Eftekhar Azam, S. and Mofid, M., 2021. On Bayesian active vibration control of structures subjected to moving inertial loads. *Engineering Structures*. 239(112313), p.112313. doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112313.
- [39] Eftekhar Azam, S., Masanes Didyk, M., Linzell, D. and Rageh, A., 2022. Experimental validation and numerical investigation of virtual strain sensing Developing Singapore Driving Cycle for passenger cars to estimate fuel consumption and vehicular emissions. *Atmospheric Environment*. 97, pp.353-362. doi.org/10.1016/j.atmosenv.2014.08.042.
- [40] Kokhmanyuk, S.S., Filippov, A.P., 1997. Dynamic effects on a beam of a load moving at variable speed. *Stroit. Mekhanka i Raschet so-Oruzhenii*. 9, pp.36-39.
- [41] Krylov, V., 1996. Generation of ground vibrations by accelerating and braking road vehicles, *Acta Acustica United with Acustica*, 82, pp.642-649.
- [42] Zibdeh, H.S. and Rachwitz, R., 1996. Moving loads on beams with general boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*. 195(1), pp.85-102. doi.org/10.1006/jsvi.1996.0405.
- [43] Abu-Hilal, M. and Mohsen, M., 2000. Vibration of beams with general boundary conditions due to a moving harmonic load. *Journal of Sound and Vibration*. 232(4), pp.703-717. https://doi.org/10.1006/jsvi.1999.2771.
- [44] Dugush, Y.A. and Eisenberger, M., 2002. Vibrations of non-uniform continuous beams under moving loads. *Journal of Sound and Vibration*. 254(5), pp.911-926. doi.org/10.1006/jsvi.2001.4135.
- [45] Michaltsos, G.T., 2002. Dynamic behaviour of a single-span beam subjected to loads moving with variable speeds. *Journal of Sound and Vibration*. 258(2), pp.359-372. doi.org/10.1006/jsvi.2002.5141.
- [46] Zibdeh, H.S. and Abu-Hilal, M., 2003. Stochastic vibration of laminated composite coated beam traversed by a random moving load. *Engineering Structures*. 25(3), pp.397-404. doi.org/10.1016/S0141-0296(02)01811-5.
- [47] Xian, P., Zi-jian, L.I.U., Jia-wang, H., 2009. Vibration analysis of a simply supported beam under moving mass with uniformly variable speeds, *Engineering Mechanics*. 23, pp.25-29.
- [48] Li, M., Qian, T., Zhong, Y. and Zhong, H., 2014. Dynamic response of the rectangular plate subjected to moving loads with variable velocity. *Journal of Engineering Mechanics*. 140(4). doi.org/10.1061/(asce)em.1943-7889.0000687.
- [49] Powell, J.P. and Palacín, R., 2015. Passenger stability within moving railway vehicles: Limits on maximum longitudinal acceleration. *Urban Rail Transit*. 1(2), pp.95-103. doi.org/10.1007/s40864-015-012y-y.
- [50] Beskou, N.D. and Muho, E.V., 2018. Dynamic response of a finite beam resting on a Winkler

*Mechanics*. ۶۲(۴), pp.۴۳۱-۴۴۱.  
doi.org/۱۰.۱۲۹۸۹/sem.۲۰۱۷,۶۲,۴,۴۳۱.

methods for steel railway bridges. *Journal of Sound and Vibration*. ۵۳۷(۱۱۷۲.۷), p.۱۱۷۲.۷.  
doi.org/۱۰.۱۰۱۶/j.jsv.۲۰۲۲,۱۱۷۲.۷.

[۴۰] Alile, M.R., Foyouzat, M.A., Mofid, M., ۲۰۲۲. Vibration of a Circular plate on Pasternak foundation with variable modulus due to moving mass. *Structural Engineering and Mechanics*. ۸۳, pp.۷۵۷-۷۷۰.  
doi.org/۱۰.۱۲۹۸۹/sem.۲۰۲۲,۸۳,۶,۷۵۷.

[۴۱] Brogan, W.L., ۱۹۹۰. *Modern Control Theory*. Upper Saddle River, NJ: Pearson.

[۴۲] Foyouzat, M.A., ۲۰۲۳. Separation/recontact investigation of a travelling oscillator over a plate with inclusion of surface roughness. *Thin-Walled Structures*. ۱۸۳(۱۱.۳۷۳), p.۱۱.۳۷۳.  
doi.org/۱۰.۱۰۱۶/j.tws.۲۰۲۲,۱۱.۳۷۳.

[۴۳] Liu, Weifeng, Du, L., Liu, Weining and Thompson, D.J., ۲۰۱۸. Dynamic response of a curved railway track subjected to harmonic loads based on the periodic structure theory. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*. ۲۳۲(۷), pp.۱۹۳۲-۱۹۵۰.  
doi.org/۱۰.۱۱۷۷/۰۹۵۴۴۰۹۷۱۸۷۵۴۴۷۰.

[۴۴] Zarfam, R. and Khaloo, A.R., ۲۰۱۲. Vibration control of beams on elastic foundation under a moving vehicle and random lateral excitations. *Journal of Sound and Vibration*. ۳۳۱(۶), pp.۱۲۱۷-۱۲۳۲. doi.org/۱۰.۱۰۱۶/j.jsv.۲۰۱۱,۱۱,۰۰۱.

[۴۵] Chin, W.W., ۱۹۹۸. The partial least squares approach to structural equation modeling, *Modern Methods for Business Research*. ۲۹۵, pp.۲۹۵-۳۳۶.

[۴۶] Anon n.d., ۲۰۰۹. *MOD UK Railways Permanent Way Design and Maintenance Policy and Standards Issue 4*.

[۴۷] Vitez, I., Krumes, D. and Vitez, B., ۲۰۰۵. UIC-recommendations for the use of rail steel grades. *Metalurgija*, ۴۴(۲), pp.۱۳۷-۱۴۰.

[۴۸] Abdel-Rohman, M. and Al-Duaij, J., ۱۹۹۶. Dynamic response of hinged-hinged single span bridges with uneven deck. *Computers & Structures*. ۵۹(۲), pp.۲۹۱-۲۹۹. doi.org/۱۰.۱۰۱۶/۰۰۴۵-۷۹۴۹(۹۵).۰۰۲۶۲-۶.

[۴۹] He, W., ۲۰۱۸. Vertical dynamics of a single-span beam subjected to moving mass-suspended payload system with variable speeds. *Journal of Sound and Vibration*. ۴۱۸, pp.۳۶-۵۴.  
doi.org/۱۰.۱۰۱۶/j.jsv.۲۰۱۷,۱۲,۰۳۰.

[۵۰] Foyouzat, M.A. and Estekanchi, H.E., ۲۰۱۷. Dynamic response of thin plates on time-varying elastic point supports. *Structural Engineering and*

نشریه