تحلیل قاب‌های صفحه‌ای دو بعدی با روشِ تحلیلی ترکیب نیرو-جابجایی

امیرحسین بحرینی[۱]، علی عسگری[۲*] ، علیرضا خبیری[۳]، رضا تقی‌پور[۴]

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه، دانشکدهٔ مهندسی و فناوری، دانشگاه مازندران

۲- استادیار، دانشکدهٔ مهندسی و فناوری، دانشگاه مازندران

۳- دانشجوی دکتری سازه، دانشکدهٔ مهندسی و فناوری، دانشگاه مازندران

۴- استادیار، دانشکدهٔ مهندسی و فناوری، دانشگاه مازندران

پست الکترونیکی نویسندگان:

a.bahreini۰۳@umail.umz.ac.ir-۱

۲- **a.asgari@umz.ac.ir**

۳- **a.khabiri۰۵@umail.umz.ac.ir**

۴- **r.taghipour@umz.ac.ir**

چکیده:

تلاش حاضر به‌بررسی کارایی یک روش پیشنهادی برای حل قاب‌های صفحه‌ای نامعین می‌پردازد که از ترکیب روابط نیرو و جابه‌جایی بر اساس رفتار تغییر شکل محوری و خمشی تیر به طور همزمان بهره می‌برد. در این روش، ابتدا معادلات دیفرانسیلی اعضای سازه‌ای براساس تئوری کلی تیر اویلر-برنولی با درنظرگیری اثرات محوری تعیین می‌شوند و سپس با کمک حل تحلیلی و اعمال شرایط مرزی، ثابت‌های انتگرالی معادلات مرتبط با قاب‌ها بدست می‌آیند. برای میزان کارآیی روش پیشنهادی، سه مثال از قاب‌های صفحه‌ای متداول تحلیل شده است و با کمک روش اجزا محدود اعتبار سنجی انجام شده است. نتایج نشان می‌دهد که پاسخ‌های تعیین شده از دو روش تطابق خوبی دارند. از مزیت روش ترکیبی نیرو-جابجایی، تعیین حل پارامتریک است و همچنین قابلیت دستیابی به پاسخ‌ها در هر نقطهٔ دلخواه از سازه با دقت بالا دارد. علاوه بر آن برای یافتن کمیت پاسخ سینماتیکی و استاتیکی نیازی به پس پردازش ندارد. لذا این روش می‌تواند به عنوان یک رویکرد جایگزینی برای روش‌های رایج در حل قاب‌های صفحه‌ای چند محوری مورد استفاده قرارگیرد.

واژگان کلیدی:

قاب‌های صفحه ای، سازه‌های نامعین، روش ترکیبی نیرو-جابه‌جایی، معادلات تیر اویلر-برنولی، روش تحلیلی.

Analysis of plane multi-span frames with the analytical method of force-displacement combination

Amirhosein Bahreini [۱], Ali Asgari [۲], Alireza Khabiri [۳], Reza Taghipour [۴]

۱- Master Student in Structural Engineering, University of Mazandaran, Mazandaran, Iran.

۲- Assistant Professor, Faculty of Engineering and Technology, University of Mazandaran, Mazandaran, Iran.

۳- Ph.D. student in Structural Engineering, University of Mazandaran, Mazandaran, Iran.

۴- Assistant Professor, Faculty of Engineering and Technology, University of Mazandaran, Mazandaran, Iran.

Abstract:

This paper investigates the effectiveness of the mixed forced-displacement method for solving indeterminate plane frames that combine force and displacement relations based on the beam’s axial and bending deformation behavior simultaneously. In this method, the differential equations of all structural members are determined based on the general theory of the Bernoulli beam by considering the axial effects, in the following with the help of an analytical solution and application of boundary conditions, the integral constants of the equations related to the uniaxial frames of the structure are obtained. For the effectiveness of the proposed method, three examples of common frames have been analyzed and validated with the finite element method. The results show that the answers determined by the two methods are completely consistent. One of the advantages of the combined displacement-force method is determining the parametric solution as well as the high accuracy of this method. In addition, it does not need post-processing to find the quantity of kinematic and static responses. Therefore, this method can be used as an alternative approach to the finite element method in solving multi-axial plane frames. Moreover, its capability to handle intricate loading and various boundary condition configurations highlights the method's efficiency. Furthermore, the method simplifies the simultaneous influences of material and geometric nonlinearities in the analysis process. Material nonlinearities, such as yielding and hardening, are accommodated by adjusting the stiffness matrix. In contrast, geometric nonlinearities arising from significant displacements are addressed through iterative updates of the displacement field until convergence is achieved. In summary, the mixed displacement-force method is a comprehensive and efficient tool for the ۲D frames analysis. The ability to provide accurate results without the need for complex numerical simulations increases the importance of this method in the range of structural analysis techniques. Future research efforts could examine developing the process to three-dimensional frames and investigating its application in the performance-based design and analysis areas.

Keywords: Plane frames, indeterminate structures, mixed force-displacement method, Euler–Bernoulli beam equation, analytical method.

۱ـ مقدمه و اهمیت پژوهش

یکی از مهم‌ترین مسائل تحلیل‌سازه‌ها یافتن روش تحلیلی دقیق قاب‌های صفحه‌ای نامعین می‌باشد. بهره گیری از رویکرد معادلات دیفرانسیل می‌تواند به عنوان یک ابزار کلی برای حل قاب‌های صفحه‌ای درنظرگرفته‌شود. تعمیم روش‌های مبتنی بر معادلات دیفرانسیل برای قاب‌های چندمحوری موضوعی درخور توجه است. بعضی معادلات حاکم بر سازه دارای تکینگی می‌باشند که حل آن‌ها با رویکرد تک محوری قابل حل نیست. آثار مکالی [۱]، برونگرابر [۲]، کار فالسون [۳] و دیگر پژوهشگران [۴-۱۴] استفاده از رویکردهای ترکیبی را توصیه می‌کند.

به منظور یافتن پاسخ‌های این نوع معادلات تلاش‌های بسیاری صورت پذیرفته است. پژوهشگران با استفاده از روش‌های تحلیلی، نیمه تحلیلی و عددی به حل این معادلات می‌پردازد، اما یافتن یک روش دقیق و ساده که بتواند تمامی مسائل را پوشش دهد، می‌تواند جایگزین مناسبی برای روش‌های عددی مانند اجزا محدود، کانی، شیب افت و غیره باشد[۱۵]. کارهای انجام شده در این زمینه بسیار گسترده است. تحلیل دینامیکی غیر خطی قاب پرتال[۱۶]، پیش بینی تغییر شکل قاب های ساده بتنی با استفاده از یک رویکرد غیر مستقیم[۱۷]، تحلیل غیر خطی قاب های ساده با تعامل بین تغییرشکل برشی و خمشی[۱۸]، محاسبه تغییر مکان سازه تحت اثر پیچش با فرض رفتار غیر خطی سازه[۱۹]، طراحی دال های دو طرفه و بهینه سازی آن با استفاده از معادلات ریاضی[۲۰]، تحلیل و طراحی قاب‌های فولادی[۲۱]، تحلیل دینامیکی سازه با استفاده از رویکرد های انتگرالگیری عددی[۲۲]، تحلیل سازه های بتنی با استفاده از روش نیرو و جابجایی[۲۳]، شبیه سازی پاسخ سازه‌ها در برابر زمین لرزه با استفاده از روابط ترکیب نیرو–جابه‌جایی[۲۴, ۲۵]، طراحی لرزه‌ای سازه بتنی و فولادی با استفاده از روش نیرو و جلبه‌جایی[۲۶]، تحلیل قاب‌های دوگلنه به روش کانی[۲۷]، تحلیل ارتعاش خطوط لوله با استفاده از روش تبدیل دیفرانسیل به عنوان یک روش نیمه تحلیلی[۲۸]، تحلیل عددی و مطالعه پارامتریک بر قاب‌های چند درجه آزادی[۲۹]، حل قاب‌های پیچیده[۳۰]، روش جلبه‌جایی اجزا محدود برای قاب‌ها[۳۱]، روش جلبه‌جایی از تونیولو و کارنوسکی[۳۲, ۳۳]، تحلیل المان تیر قاب‌های الاستو پلاستیک برای یک جابه‌جایی بزرگ[۳۴]، روش‌های تغییرشکل و المان برای قاب‌ها[۳۵]، تحلیل قاب‌های غیرخطی با استفاده از روش نیرو[۳۶, ۳۷]، روش نیرویی توسعه یافته برای تحلیل سازه‌های دارای پیش تنیدگی استاتیکی و سینماتیکی نامعین پایدار[۳۸]، روش ماتریس انتقال برای قاب های دیوار برشی [۳۹]، طراحی لرزه ای به روش ترکیبی نیرو–جلبه‌جایی برای قاب‌های فولادی[۴۰] از جمله مواردی است که در راستای تحلیل و طراحی تیرها و تعمیم آن برای قاب‌های صفحه‌ای صورت پذیرفته است.

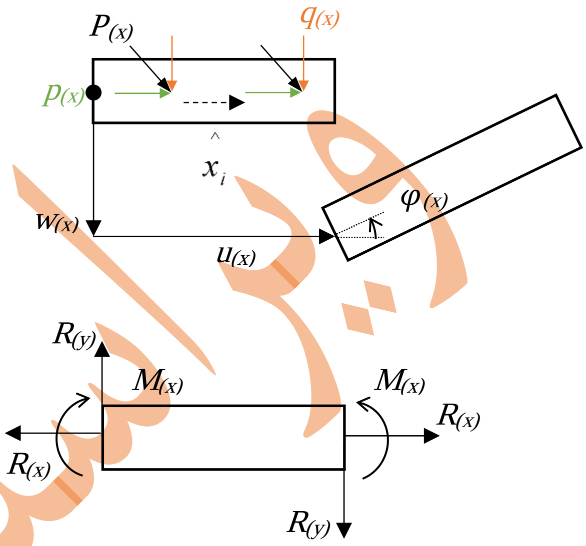
روش‌های مرسوم معمولاً فقط یکی از روش‌های جابه‌جایی و یا نیرویی را به کار می‌گیرند. تحلیل با روش‌های مبتنی بر سختی با افزایش نامعینی سازه‌ها به روش‌های نرمی ترجیح داده می‌شود، قابل ذکر است که روش‌های نیرویی برای سازه‌ها با درجه نامعینی کمتر کاربردی است. ترکیب روش‌های مبتنی بر نیرو و جلبه‌جایی می‌تواند محدودیت هر یک از روش‌های مستقل نیرویی یا جابه‌جایی را مرتفع کند. در روش ترکیبی نیرو–جابه‌جایی، مدل‌سازی معادلات حاکم (خمشی و محوری) هر عضو صورت پذیرفته و پس از تحلیل اولیه، ۶ مجهول بصورت ثوابت انتگرال ظاهر می‌شود. به طورکلی، برای تعیین ۶ ثابت انتگرالی باید شرایط مرزی متناظر با هر یک از المان‌ها اعمال گردد. از نظر مزایای محاسباتی در روش پیشنهادی می‌توان گفت که در نهایت باید معادله ماتریسی حل شود تا به مجهولات مسئله رسید و محاسبات پیچیده‌ای در کار نیست اما در مورد معایب محاسباتی این روش می‌توان گفت که هرچه سازه بزرگتر باشد ماتریس نهایی به نسبت بزرگ می‌شود و صرفا زمان و حجم محاسبات بالا می‌رود. لازم به ذکر است که این مورد در روش‌های دیگر نیز صادق است.

در مقایسه با روش پیشنهادی، آنالیز ماتریسی متداول برای تحلیل سازه‌ها فقط با استفاده از یک ماتریس سختی و یا نرمی بهره می‌برد و می‌تواند برای سازه‌های ساده‌تر مناسب باشد اما روش ترکیبی نیرو–جابجایی به صورت خاص برای تحلیل سازه‌های پیچیده‌تر و نامعین استفاده می‌شود و از ترکیب دو روش سختی و نرمی استفاده می‌کند. در مورد حجم و سرعت، آنالیز ماتریسی معمولاً کمتر و سریع‌تر است، اما دقت آن ممکن است در برخی موارد محدود باشد در حالیکه حجم محاسبات روش ترکیبی نیرو–جابجایی بیشتر است اما دقیق است و می‌تواند نتایج بهتری برای سازه‌های پیچیده ارائه دهد. از طرفی دیگر اعمال شرایط مرزی بر معادلات حاکم در روش پیشنهادی در مقایسه با تحلیل ماتریسی ساده‌تر است. به طور کلی، انتخاب بین این دو روش به نوع سازه، درجه نامعینی آن، دقت مورد نیاز و منابع محاسباتی در دسترس بستگی دارد.

هدف از این پژوهش توسعه‌ی رویکرد معادلات دیفرانسیل در مورد قاب‌های چند محوری است. در تلاش حاضر، ابتدا به روابط روش نیرو–جابجایی پرداخته شده است و سپس سه قاب استاتیکی با افزایش تدریجی تعداد اعضا و دهانه‌ها برای نشان دادن کارایی روش ارائه شد. به منظور اعتبار سنجی این روش، قاب‌ها به کمک روش اجزا محدود تحلیل و پاسخ‌ها با روش پیشنهادی نیرو–جابجایی مقایسه شده‌اند. در پایان، به نتیجه‌گیری پژوهش حاضر پرداخته شده است.

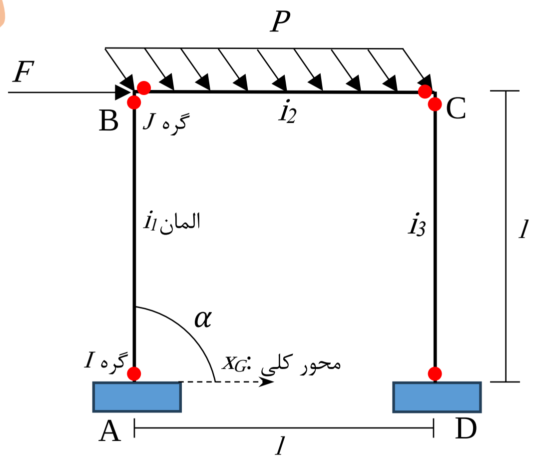
۲ ــ روش ترکیب نیرو-جابه‌جایی:

برای هر عضو از سازه ابتدا مختصات محلی و درجات آزادی مطابق شکل ۱ معرفی شده است[۱۵].



شکل ۱: درجات آزادی و محور مختصات محلی

شکل ۲ را درنظر بگیرید:



شکل ۲: قاب ساده یک دهنه دارای ۳ المان تحت نیروی گسترده و متمرکز جانبی

برای اعضا تیرستون به صورت افقی یا عضو ستون به صورت قائم معادلات تغییرشکل به صورت زیر تعریف می‌گردد[۱۵].

$$u_{(\hat{x}_i)} = -\frac{1}{(EA)_i} p^{(2)}_{(\hat{x}_i)} + c_{i,1}\hat{x}_i + c_{i,2} \qquad (۱)$$

$$w_{(\hat{x}_i)} = \frac{1}{(EI)_i} q^{(4)}_{(\hat{x}_i)} + c_{i,3}\frac{\hat{x}_i^3}{6} + c_{i,4}\frac{\hat{x}_i^2}{2} + c_{i,5}\hat{x}_i + c_{i,6} \qquad (۲)$$

در روابط فوق E مدول الاستیسیته، A مساحت سطح مقطع، I ممان دوم سطح، i شماره المان، p شدت بار محوری وارد بر المان و q شدت بار قائم وارده بر المان و c_i ها ثابت‌های انتگرالی یا مجهولات مسئله هستند. لازم به ذکر است که در روابط (۱) و (۲) و روابط بعد از این‌ها $p^{(2)}_{(\hat{x}_i)}$ و $q^{(4)}_{(\hat{x}_i)}$ و از این دسته روابط از علائم اختصاری برای انتگرالگیری استفاده شده است. $p^{(2)}_{(\hat{x}_i)}$ به معنای $\iint p_{\hat{x}_i}\,dx$ و $q^{(4)}_{(\hat{x}_i)}$ به معنای $\iiiint q_{\hat{x}_i}\,dx$ است. حال به منظور اعمال شرایط مرزی نیاز است تا معادلات را برای هر یک از دو گره ابتدایی و انتهایی المان بسط داد که معادلات فوق به صورت زیر درمی‌آید. لازم است قبل از این کار به منظور تفکیک بارهای گسترده‌ی محوری و قائم از یکدیگر، شدت بار گسترده‌ی اعمال شده بر روی المان(P) را به دو بار p که شدت بار محوری و q (رو به پایین مثبت) شدت بار قائم است، تجزیه کرد. همچنین زاویه بار با محورعضو(θ) از سمت چپ به صورت ساعتگرد مثبت در نظر گرفته می‌شود.

$$P \times \cos\theta = p$$
$$P \times \sin\theta = q$$

نکتهٔ دیگری که باید درنظرگرفته‌شود، این است که برای بدست‌آوردن تغییرشکل‌های قاب به سه مجهول تغییرشکل و سه مجهول واکنش تکیه‌گاهی در هرگره نیاز است. برای گره‌های I و J معادلات مسئله به شکل زیر می‌باشد.

$$u_i^{(I)} = u_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} = -\frac{1}{(EA)_i} p^{(2)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} + c_{i,2} \qquad (۳)$$

$$w_i^{(I)} = w_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} = \frac{1}{(EI)_i} q^{(4)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} + c_{i,6} \qquad (۴)$$

$$\varphi_i^{(I)} = \varphi_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} = -\frac{1}{(EI)_i} q^{(3)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} + c_{i,5} \qquad (۵)$$

$$R^{(I)}_{\hat{x}_i} = -(EA)u'_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} = p^{(1)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} - (EA)_i c_{i,1} \qquad (۶)$$

$$R_{\hat{y}_i}^{(I)} = (EI)_i\, w'''_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} = q^{(1)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} + (EI)_i\, c_{i,3} \qquad (۷)$$

$$M_i^{(I)} = (EI)_i\, w''_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} = q^{(2)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} + (EI)_i\, c_{i,4} \qquad (۸)$$

$$u_i^{(J)} = u_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} = -\frac{1}{(EA)_i}\, p^{(2)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} + l_i c_{i,1} + c_{i,2} \qquad (۹)$$

$$w_i^{(J)} = w_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} = \frac{1}{(EI)_i}\, q^{(4)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} + \frac{l_i^3}{6} c_{i,3} + \frac{l_i^2}{2} c_{i,4} + l_i c_{i,5} + c_{i,6} \qquad (۱۰)$$

$$\varphi_i^{(J)} = \varphi_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} = -\frac{1}{(EI)_i}\, q^{(3)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} - \frac{l_i^2}{2} c_{i,3} - l_i c_{i,4} - c_{i,5} \qquad (۱۱)$$

$$R_{\hat{x}_i}^{(J)} = -p^{(1)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} + (EA)_i\, c_{i,1} \qquad (۱۲)$$

$$R_{\hat{y}_i}^{(J)} = -q^{(1)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} - (EI)_i\, c_{i,3} \qquad (۱۳)$$

$$M_i^{(J)} = -q^{(2)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} - (EI)_i\, l_i c_{i,3} - (EI)_i\, c_{i,4} \qquad (۱۴)$$

معادلات (۵) و (۱۱) تغییرشـــکل دورانی در گروه‌های I و J، معادلات (۶) و (۱۲) نیروی داخلی محوری، معـادلات (۷) و (۱۳) نیروی داخلی برشـــی و معادلات (۸) و (۱۴) لنگر به‌وجود آمده در گروه‌ها هستند. به منظور ساده‌نویسی هر یک از معادلات تغییر شکل‌ها و نیرویی را می‌توان بصورت گروه‌های ماتریسی نوشت. لازم به ذکر است که در ماتریس‌های زیر $K=I,J$ شماره گروه‌ها می‌باشد.

$$\hat{u}_i^{(K)} = \hat{A}_i^{(K)} c_i - \hat{a}_i^{(K)} \qquad (۱۵)$$

$$\hat{r}_i^{(K)} = \hat{B}_i^{(K)} c_i - \hat{b}_i^{(K)} \qquad (۱۶)$$

$$\hat{u}_i^{(K)} = [u_i^{(K)} \quad w_i^{(K)} \quad \varphi_i^{(K)}]^T \qquad (۱۷)$$

$$\hat{r}_i^{(K)} = [R_{\hat{x}_i}^{(K)} \quad R_{\hat{y}_i}^{(K)} \quad M_i^{(K)}]^T \qquad (۱۸)$$

نکته‌ی دیگر در معادلات ماتریســی فوق علامت (^) می‌باشـد که نشـانگر محلی[۱] بودن معادلات هرالمان اســت. همچنین $\hat{u}_i^{(K)}$ و $\hat{r}_i^{(K)}$ به ترتیب معـادلات تغییرشـــکـل‌ها و واکنش‌های نیرویی تکیه‌گاهی را ارائه می‌کنند. c_iها همان مجهولات موجود در معادله تغییرشـــکل اســـت که از انتگرالگیری به‌وجود آمده‌اند و تعداد آن‌ها برای هر المان ۶ ثابت انتگرالی اسـت ولی تعداد مجهولات کلی برای المان‌ها ۱۲ ثابت انتگرالی اســـت، یعنی هرگره ۶ ثابت که همان تغییرشـــکل و واکنش‌ها اســـت. $\hat{A}_i^{(K)}$ ضــرایب c_iها یا ثابت‌های انتگرالی در معادلات تغییرشـکل هسـتند و $\hat{B}_i^{(K)}$ ضـرایب c_i ها یا ثابت‌های انتگرالی در معادلات واکنش‌ها هســتند که مقدار آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\hat{A}_i^{(I)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۱۹)$$

$$\hat{A}_i^{(J)} = \begin{bmatrix} l_i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{l_i^3}{6} & \frac{l_i^2}{2} & l_i & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{l_i^2}{2} & -l_i & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۲۰)$$

$$\hat{B}_i^{(I)} = \begin{bmatrix} -(EA)_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (EI)_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (EI)_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۲۱)$$

$$\hat{B}_i^{(J)} = \begin{bmatrix} (EA)_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(EI)_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(EI)_i l_i & -(EI)_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (۲۲)$$

در حالت کلی $\hat{A}_i^{(K)}$ تابعی از طول المان‌ها و عدد هســـتند و $\hat{B}_i^{(K)}$ تابعی از سختی محوری، سختی خمشی، طول و عدد است. $\hat{a}_i^{(K)}$ و $\hat{b}_i^{(K)}$ بستگی به بارهای خارجی وارد بر المان دارد.

$$\hat{a}_i^{(I)} = [\frac{1}{(EA)_i} p^{(2)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} \quad -\frac{1}{(EI)_i} q^{(4)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} \quad \frac{1}{(EI)_i} q^{(3)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0}]^T \qquad (۲۳)$$

$$\hat{a}_i^{(J)} = [\frac{1}{(EA)_i} p^{(2)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} \quad -\frac{1}{(EI)_i} q^{(4)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} \quad \frac{1}{(EI)_i} q^{(3)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i}]^T \qquad (۲۴)$$

$$\hat{b}_i^{(I)} = [-p^{(1)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} \quad -q^{(1)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0} \quad -q^{(2)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=0}]^T \qquad (۲۵)$$

[۱] Local

$$\hat{b}_i^{(J)} = [p^{(1)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} \quad q^{(1)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i} \quad q^{(2)}_{(\hat{x}_i)/\hat{x}_i=l_i}]^T \qquad (۲۶)$$

جالب است که در $\hat{a}_i^{(K)}$ سختی‌ها هم دخیل هستند ولی در $\hat{b}_i^{(K)}$ که مربوط به واکنش‌های تکیه‌گاهی است، اثری از سختی دیده نمی‌شود. اگر این دو ضرب با هم مقایسه شوند رابطه‌ای مشخص می‌شود که نیرو و جابه‌جایی را به هم مرتبط می‌کند. در واقع ۱۲ مجهولی که ۶ مجهول در هر گره بود را به ۳ مجهول در هر گره که همان c_iها هستند تبدیل می‌کند.یا به عبارتی دیگر روشی که از آن به عنوان روش ترکیب نیرو-جابه‌جایی[۲] یاد می‌شود با ترکیب معادلات تغییرشکل و نیرویی مجهولات معادلات (u و w و φ و $\hat{R}_x$ و $\hat{R}_y$ و M) را به ۶ مجهول c_i تبدیل می‌کند. حال برای سادگی کار می‌توان شرایط مرزی را برای گره‌هایی که تکیه‌گاه بسته[۳] دارند به دلیل اینکه ماتریس دوران[۴] روی آن اثر نمی‌گذارد, اعمال کرد. نکته‌ی دیگری که باید در نظرگرفت این است که اگر این کار برای حالت‌های کلی بسط داده شود باید ماتریس دوران را در هر یک از گره‌ها بدست آورد و این ماتریس بدست‌آمده باید شرایط مرزی را ارضا کند. فرض شود در گره I تکیه‌گاه گیردار باشد، در این صورت روابط تغییر شکل را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\hat{u}_1^{(I)} = 0 \rightarrow \hat{A}_1^{(I)} c_1 = \hat{a}_1^{(I)} \qquad (۲۷)$$

$$\hat{u}_3^{(I)} = 0 \rightarrow \hat{A}_3^{(I)} c_3 = \hat{a}_3^{(I)} \qquad (۲۸)$$

چهار گروه معادلات که در رابطه‌های (۱۵) و (۱۶) بیان شد خود شامل ۱۲ معادله و ۱۲ مجهول است. همانطور که استنباط می‌شود در یک المان تعداد مجهولات تغییرمکان و نیرویی برای دو گره ۱۲ عدد است اما با توجه به معادله دیفرانسیل حاکم بر کل المان می‌توان این ۱۲ مجهول را به ۶ مجهول که همان ثابت‌های معادله دیفرانسیل است تبدیل نمود. اگر به معادله دیفرانسیل حاکم برتیرتوجه شود، برای نمونه در روابط (۱) و (۲)، تغییر شکل با رابطه‌ای به نیرو ارتباط یافته است. رابطهٔ بین تغییرشکل و نیرو هنگامی حاصل می‌شود که سه رابطه‌ی ساختاری، سینماتیکی و استاتیکی با هم ترکیب شوند.

مجهولات مسئله به بردار $\{c_1^j, c_2^j, ..., c_n^j\}^T$ تبدیل شده است که در آن n تعداد المان و j=۱,۲,...,۶ مجهولات مسئله هستند. برای حل این سیستم باید شرایط سازگاری و تعادل گره‌های آزاد نوشته‌شود. برای نوشتن معادلات تعادل و سازگاری، ابتدا نیاز است که همه‌ی کمیت‌های استاتیکی و سینماتیکی به یک محور کلی ارجاع گردد. ماتریس G یا دوران به منظور عبور از مختصات محلی به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$G_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha_i & \sin\alpha_i & 0 \\ -\sin\alpha_i & \cos\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (۲۹)$$

α_i زاویه بین محور محلی و کلی[۵](x_G) است. محور محلی در راستای المان و محور کلی در راستای افق می‌باشد. شرط سازگاری در گره‌های غیر مقید باید نوشته شود. از نظر فیزیکی در گره‌هایی که دو المان به هم متصل هستند و قید خارجی ندارند، تغییرشکل‌ها باهم برابر هستند. همچنین با نوشتن معادلات تعادل در آن گره‌ها مجموع واکنش‌های داخلی اعضا نیز با نیروی وارده بر آن گره باهم برابر هستند. به عنوان مثال $u_1^{(J)} = u_2^{(I)}$ بدان معناست که تغییرشکل انتهای المان ۱ با تغییرشکل ابتدای المان ۲ برابر است. روابط زیر برای گره های غیر مقید شکل ۲ نوشته شده‌است.

$$u_1^{(J)} = u_2^{(I)} \rightarrow G_1 \hat{u}_1^{(J)} = G_2 \hat{u}_2^{(I)} \qquad (۳۰)$$

$$G_1 \hat{A}_1^{(J)} c_1 - G_2 \hat{A}_2^{(I)} c_2 = G_1 \hat{a}_1^{(J)} - G_2 \hat{a}_2^{(I)} \qquad (۳۱)$$

$$A_1^{(J)} c_1 - A_2^{(I)} c_2 = a_1^{(J)} - a_2^{(I)} \qquad (۳۲)$$

$$r_1^{(J)} + r_2^{(I)} = f^B \rightarrow G_1 \hat{r}_1^{(J)} + G_2 \hat{r}_2^{(I)} = f^B \qquad (۳۳)$$

$$G_1 \hat{B}_1^{(J)} c_1 + G_2 \hat{B}_2^{(I)} c_2 = G_1 \hat{b}_1^{(J)} + G_2 \hat{b}_2^{(I)} + f^B \qquad (۳۴)$$

$$B_1^{(J)} c_1 + B_2^{(I)} c_2 = b_1^{(J)} + b_2^{(I)} + f^B \qquad (۳۵)$$

$$u_2^{(J)} = u_3^{(J)} \rightarrow G_2 \hat{u}_2^{(J)} = G_3 \hat{u}_3^{(J)} \qquad (۳۶)$$

$$G_2 \hat{A}_2^{(J)} c_2 - G_3 \hat{A}_3^{(J)} c_3 = G_2 \hat{a}_2^{(J)} - G_3 \hat{a}_3^{(J)} \qquad (۳۷)$$

$$A_2^{(J)} c_2 - A_3^{(J)} c_3 = a_2^{(J)} - a_3^{(J)} \qquad (۳۸)$$

$$r_2^{(J)} + r_3^{(J)} = f^C \rightarrow G_2 \hat{r}_2^{(J)} + G_3 \hat{r}_3^{(J)} = f^C \qquad (۳۹)$$

$$G_2 \hat{B}_2^{(J)} c_2 + G_3 \hat{B}_3^{(J)} c_3 = G_2 \hat{b}_2^{(J)} + G_3 \hat{b}_3^{(J)} + f^C \qquad (۴۰)$$

[۲] Mixed Force-Displacement Method

[۳] Fixed

[۴] Rotation Matrix

[۵] Global

$$B_2^{(J)} c_2 + B_3^{(J)} c_3 = b_2^{(J)} + b_3^{(J)} + f^C \qquad (۴۱)$$

لازم به ذکر است که در معادلات بالا ماتریس f تشکیل شده از نیروهای خارجی وارد بر هر گره از سازه و نام هر گره در بالای آن نوشته می‌شود. حال شکل ماتریسی معادلات (۲۷)، (۲۸)، (۳۲)، (۳۵)، (۳۸) و (۴۱) را به صورت زیر نوشته می‌شود، که با حل آن مجهولات مسئله بدست می‌آید.

$$Dc = d \qquad (۴۲)$$

$$D = \begin{bmatrix} A_1^{(I)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3^{(I)} \\ A_1^{(J)} & -A_2^{(I)} & 0 \\ B_1^{(J)} & B_2^{(I)} & 0 \\ 0 & A_2^{(J)} & -A_3^{(J)} \\ 0 & B_2^{(J)} & B_3^{(J)} \end{bmatrix} \qquad (۴۳)$$

$$d = \begin{bmatrix} a_1^{(I)} \\ a_3^{(I)} \\ a_1^{(J)} - a_2^{(I)} \\ b_1^{(J)} + b_2^{(I)} + f^B \\ a_2^{(J)} - a_3^{(J)} \\ b_2^{(J)} + b_3^{(J)} + f^C \end{bmatrix} \qquad (۴۴)$$

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \qquad (۴۵)$$

لازم به ذکر است که معادله (۴۲) خود وابسته به روابط (۱۹-۲۶) است. مجهولات این معادلات ماتریس c می‌باشد که هر درایه آن تشکیل شده از ماتریس‌های c_1 ، c_2 و c_3 است. هر یک از ماتریس‌های c_i یک بردار ستونی ۶ مولفه‌ای است که در نهایت برای مثال ماتریس c یک بردار ستونی ۱۸ مجهولی برای یک قاب ساده سه المانی است.

۳- الگوریتم حل برای قاب های با تعداد اعضای دلخواه

با توسعه این روش پیشنهادی در نهایت معادله (۴۲) بدست می‌آید که یک معادله ماتریسی است که برای حل این معادله می‌توان از نرم‌افزارهای مخصوص حل معادلات ریاضی استفاده کرد. معادله (۴۲) را، که معادله نهایی برای حل قاب‌های چند دهانه دو بعدی به روش ترکیب نیرو-جابه‌جایی است، می‌توان برای هر قابی با تعداد n عضو توسعه داد. به طور کلی ماتریس D خود متشکل از ماتریس‌های دیگری از جمله ماتریس‌های $\hat{A}_i^{(K)}$ ، $\hat{B}_i^{(K)}$ و ماتریس صفر است. تعداد ستون های ماتریس D برابر با n (تعداد المان) است و تعداد سطر های آن برابر با ۲n است. از آنجایی که ماتریس‌های $\hat{A}_i^{(K)}$ و $\hat{B}_i^{(K)}$ ۳×۶ هستند درنهایت ماتریس D به یک ماتریس ۶n×۶n تبدیل می‌شود. ترتیب قرارگیری ماتریس‌های $\hat{A}_i^{(K)}$ و $\hat{B}_i^{(K)}$ اینگونه است که ابتدا با شماره گذاری المان‌ها از سمت چپ به راست در سطرهای اول، گره‌هایی که در آن‌ها تکیه‌گاه وجود دارد(مقید) نوشته می‌شود، سپس با نوشتن معادلات تعادل در گره‌های دیگر با رعایت کردن حرکت از سمت چپ به راست دیگر سطرهای ماتریس هم نوشته می‌شود. معادلات (۳۲)، (۳۵)، (۳۸) و (۴۱) از نوشتن معادلات تعادل برای شکل ۲ در گره‌های غیر مقید B و C بدست‌آمدند که به ترتیب در ماتریس D قرارگرفتند. ماتریس c که از مجهولات مسئله تشکیل شده‌است با حل معادله (۴۲) بدست می‌آید. ماتریس d که تعداد سطر های آن ۲n و تعداد ستون آن همیشه ۱ است، از ماتریس های $\hat{a}_i^{(K)}$ و $\hat{b}_i^{(K)}$ تشکیل شده‌است که اینها خود ماتریس‌های ۱×۳ هستند در نتیجه ماتریس d تبدیل به یک ماتریس ۱×۶n می‌شود.

ترتیب نوشتن آن هم مانند ماتریس D است یعنی ابتدا از سمت چپ گره‌های مقید و بعد از آن گره‌های غیرمقید نوشته می‌شود. در نهایت برای حل معادله (۴۲) بردار مجهولات، از ضرب ماتریس d با معکوس ماتریس D حاصل می‌شود.

۴- مثال های عددی و بررسی نتایج

در این بخش به منظور نشان دادن کارایی روش پیشنهادی، سه قاب صفحه‌ای با افزایش تدریجی اعضا و دهانه‌ها تحلیل می‌گردد لازم به ذکر است روش پیشنهادی تحت کدی در محیط نرم‌افزار Mathematica ver ۱۲،۰،۰ و روش اجزا محدود در بستر نرم‌افزار OpenSees [۴۱, ۴۲] توسعه داده شده‌اند. به منظور شبکه بندی روش اجزا محدود در هر سه قاب انتخاب شده اعضا از نوع beam element و در شبکه بندی به ازای هر ۰.۵ متر یک المان در نظر گرفته شد.

۴-۱- مثال اول

قاب سه عضوی را مطابق شکل ۲
شکل ۲ با مشخصات زیر در نظر بگیرید:

$$P = 3.0\times10^{3}\ \frac{N}{m}\qquad l = 5m$$

$$A = 0.12m^{2}$$

$$F = 15000N\qquad I = 1.6\times10^{-3}\,m^{4}$$

$$E = 2.0\times10^{10}\ \frac{N}{m^{2}}$$

۴- ۱- ۱- معادلات حاکم بر هر المان: (i شماره المان می‌باشد)

$$W_{x_i} = \frac{P_i\times \mathrm{Sin}(\theta_i)}{EI}\times\frac{x_i^4}{24}+c_{i,3}\times\frac{x_i^3}{6}+c_{i,4}\times\frac{x_i^2}{2}+c_{i,5}\times x_i+c_{i,6}$$

$$M_{x_i} = -P_i\times \mathrm{Sin}(\theta_i)\times\frac{x_i^2}{2}-(c_{i,3}\times x_i+c_{i,4})\times EI$$

$$T_{x_i} = -P_i\times \mathrm{Sin}(\theta_i)\times x_i-c_{i,3}\times EI$$

که در معادلات بالا W خیز، M لنگر و T برش است. با حل معادله (۴۲) برای شکل ۲ مقدار ماتریس c بدست می‌آید که در پیوست ۱ (مقادیر به‌دست‌آمده ماتریس c برای مثال اول) به آن اشاره شده است.

۴- ۱- ۲- با قرار دادن مقادیر ماتریس c در معادلات حاکم بر هر المان در زیربخش قبل معادلات خیز، لنگر و برش هر المان بدست می‌آید. مقادیر این معادلات در بازه ۰ تا l (طول المان) تعیین می‌شود و با مقادیر محاسبه شده لنگر در جدول ۱، برش در جدول ۲ و خیز در جدول ۳ از روش اجزا محدود مقایسه شده‌است. همان‌طور که در بالا اشاره شد هر عضو از قاب در تحلیل به روش عددی اجزای محدود (به عنوان یک روش جابجایی مرسوم) به ۱۰ المان تقسیم‌بندی می‌شود که هر یک از المانهای تیر-ستون[۶] دارای دو گره و هر گره نیز دارای سه مجهول اصلی یا سه درجه آزادی(جابجایی در راستای المان و عمود بر آن و دوران) شامل می‌شود. بنابراین برای یک قاب ساده، ۳۰ المان و ۳۱ گره ایجاد شده است. با توجه به تعداد گره‌ها، تعداد درجات آزادی کل ۹۳ تا می‌باشد. این درجات آزادی با اعمال شرایط تکیه‌گاهی و سازگاری به ۸۱ عدد کاهش می‌یابند. برای تحلیل به روش عددی نیاز به تشکیل ماتریس مجهولات با ابعاد ماتریس ۱×۸۱ است. سپس بعد از تحلیل به روش عددی مجهولات (جابجایی ها و دوران) فقط در هر یک از گره‌های فرض شده تعیین می‌شوند و برای نقاط دیگر از توابع شکل به کارگرفته و تحلیل ثانویه امکان‌پذیر است. همچنین برای تعیین نیروهای تکیه‌گاهی نیز به تحلیل ثانویه نیاز است. درحالیکه به کمک روش پیشنهادی در این پژوهش، تعداد مجهولات ۱۸ تا می‌باشند که پس از تحلیل پاسخها در هر نقطه بصورت دقیق قابل حصول است. لازم به ذکر است اگر در روش عددی اجزا محدود افزایش دقت مدنظر باشد، باید تعداد شبکه‌بندی المان‌ها نیز افزایش داده شود که خود منجر به تشکیل ماتریس مجهولات بزرگتری می‌شود و لذا زمان تلاش محاسباتی جهت تحلیل را بالا می‌برد. نمودارهای مربوط به مقادیر لنگر، برش و خیز تعیین شده از روش ترکیبی در شکل ۳ ارائه شده است. با مقایسه جواب‌های بدست‌آمده از دو روش پیشنهادی نیرو-جابه‌جایی و اجزامحدود مشاهده می‌شود که تفاوت ناچیزی باهم دارند.

جدول ۱: مقایسهٔ لنگر بدست آمده از روش ترکیب نیرو-جابه‌جایی با روش اجزا محدود

شماره المان	لنگر					
	روش ترکیب نیرو - جابه‌جایی			روش اجزا محدود		
	گره ابتدا	گره انتها	مقدار max	گره ابتدا	گره انتها	مقدار max
المان ۱	-۳۵۲۰۲.۴	۲۴۴۶۱.۶	۳۵۲۰۲.۴	-۳۵۲۰۲	۲۴۴۶۲	۳۵۲۰۲
المان ۲	-۲۴۴۶۱.۶	۳۰۳۰۹.۵	۵.۳۰۳۰۹	-۲۴۴۶۲	۳۰۳۱۰	۳۰۳۱۰
المان ۳	-۳۸۰۵۹.۴	۳۰۳۰۹.۵	۳۰۳۰۹.۵	-۳۸۰۵۹	۳۰۳۱۰	۳۰۳۱۰

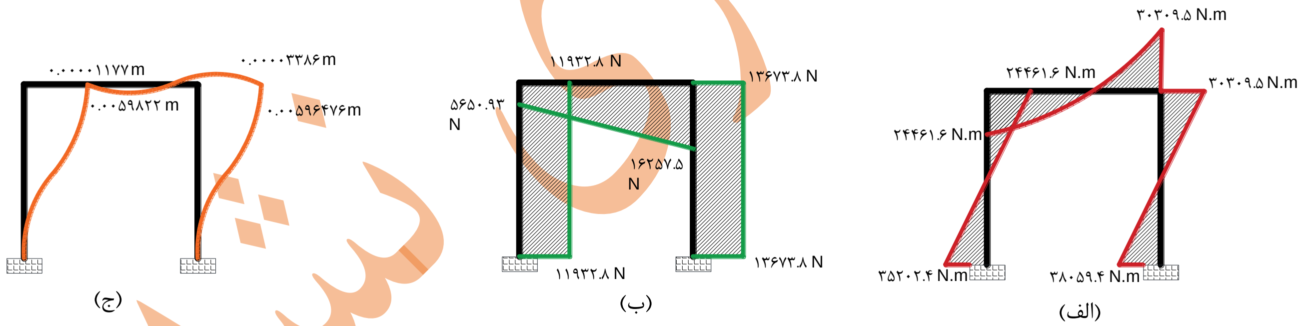
[۶] Beam-column

جدول ۲: مقایسهٔ برش بدست آمده از روش ترکیب نیرو-جابه‌جایی با روش اجزا محدود

شماره المان	برش			
	روش اجزا محدود		روش ترکیب نیرو - جابه‌جایی	
	گره انتها	گره ابتدا	گره انتها	گره ابتدا
المان ۱	۱۱۹۳۳	۱۱۹۳۳	۱۱۹۳۲.۸	۱۱۹۳۲.۸
المان ۲	-۱۶۲۵۸	-۵۶۵۱	-۱۶۲۵۷.۵	-۵۶۵۰.۹۳
المان ۳	۱۳۶۷۴	۱۳۶۷۴	۱۳۶۷۳.۸	۱۳۶۷۳.۸

جدول ۳: مقایسهٔ خیز بدست آمده از روش ترکیب نیرو-جابه‌جایی با روش اجزا محدود

شماره المان	خیز					
	روش اجزا محدود			روش ترکیب نیرو - جابه‌جایی		
	مقدار max	گره انتها	گره ابتدا	مقدار max	گره انتها	گره ابتدا
المان ۱	۰.۰۰۵۹۸۲	۰۰۵۹۸۲.۰	۰	۰.۰۰۵۹۸۲۲	۰.۰۰۵۹۸۲۲	۰
المان ۲	۰.۰۰۰۰۱۸	-۰.۰۰۰۰۰۳۴	۰.۰۰۰۰۰۱۲	۰.۰۰۰۰۱۸	-۳.۳۸۶۹۹e-۰۵	۱.۱۷۷۲۸e-۰۵
المان ۳	۰.۰۰۳۴۹	۰.۰۰۵۹۶۵	۰	۰.۰۰۳۴۹۰۰۸۲	۰.۰۰۵۹۶۴۷۶	۰



شکل ۳: (الف): نمودار لنگر قاب ساده دارای ۳ المان (ب): نمودار برش قاب ساده دارای ۳ المان (ج): نمودار خیز قاب ساده دارای ۳ المان

۴- ۲- مثال دوم

قابی دارای پنج عضو را مطابق شکل ۴ با مشخصات زیر در نظر بگیرید.

$$l = 5m$$
$$A = 0.12m^2$$
$$I = 1.6\times10^{-3}\,m^4$$
$$E = 2.0\times10^{10}\,\frac{N}{m^2}$$
$$q = 3.0\times10^3\,\frac{N}{m}$$
$$F = 15000N$$

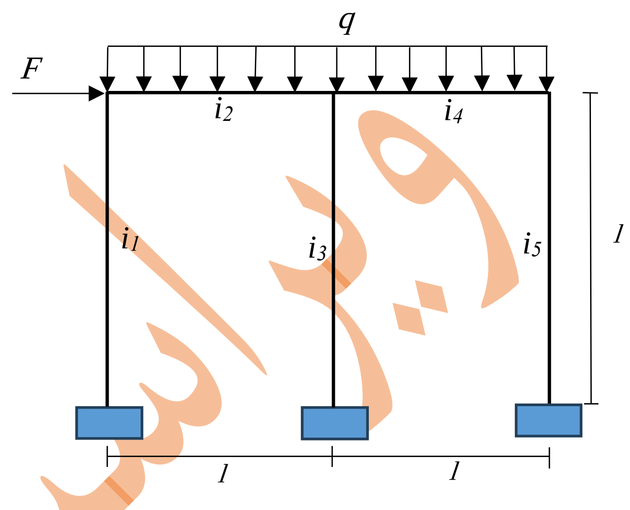
۴- ۲- ۱- معادلات حاکم بر هر المان:

$$W_{x_i} = \frac{q_i}{EI}\times\frac{x_i^4}{24} + c_{i,3}\times\frac{x_i^3}{6} + c_{i,4}\times\frac{x_i^2}{2} + c_{i,5}\times x_i + c_{i,6}$$

$$M_{x_i} = -q_i\times\frac{x_i^2}{2} - (c_{i,3}\times x_i + c_{i,4})\times EI$$

$$T_{x_i} = -q_i\times x_i - c_{i,3}\times EI$$

با حل معادله (۴۲) برای شکل ۴ مقدار ماتریس c بدست می‌آید که در پیوست ۲ (مقادیر به‌دست‌آمده ماتریس c برای مثال دوم) به آن اشاره شده‌است.



شکل ۴: قاب ساده دو دهنه دارای ۵ المان تحت بار گسترده و متمرکز جانبی

با قرار دادن مقادیر ماتریس c در معادلات حاکم بر هر المان در زیربخش قبل ۴-۲-۲- معادلات خیز، لنگر و برش هر المان بدست تعیین می‌شود و با مقادیر *ا*می‌آید. مقادیر این معادلات در بازه ۰ تا محاسبه شده لنگر در جدول ۴، برش در جدول ۵ و خیز در جدول ۶ از روش اجزا محدود(با فرض مش‌های ۰.۵ متری) مقایسه شده‌است. نمودارهای مربوط به مقادیر لنگر، برش و خیز حاصله از روش ترکیبی در شکل ۵ نشان داده شده است. با مقایسهٔ جواب‌های بدست‌آمده از دو روش ترکیب نیرو-جابه‌جایی و اجزامحدود تطابق پاسخ‌ها مشهود است.

جدول ۴: مقایسهٔ لنگر بدست آمده از روش ترکیب نیرو-جابه‌جایی با روش اجزا محدود

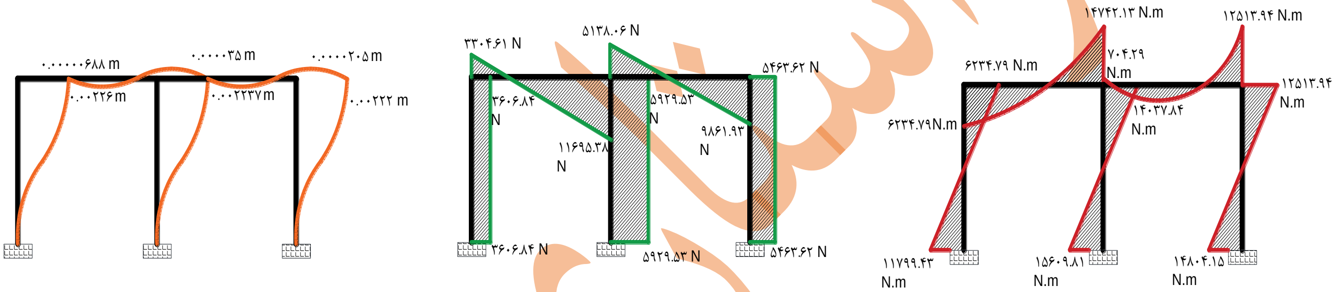
شماره المان	*لنگر*					
	روش ترکیب نیرو - جابه‌جایی			*روش اجزا محدود*		
	گره ابتدا	*گره انتها*	*مقدار max*	*گره ابتدا*	*گره انتها*	*مقدار max*
المان ۱	-۱۱۷۹۹.۴۳۹۷۵	۶۲۳۴.۷۹۷۸۵۲	۶۲۳۴.۷۹۷۸۵۲	۱۱۷۹۹	۶۲۳۵	۶۲۳۵
المان ۲	-۶۲۳۴.۷۹۷۸۵۲	۱۴۷۴۲.۱۳۱۴۶	۱۴۷۴۲.۱۳۱۴۶	-۶۲۳۵	۱۴۷۴۲	۱۴۷۴۲
المان ۳	-۱۵۶۰۹.۸۱۵۷	۱۴۰۳۷.۸۴۰۲	۱۴۰۳۷.۸۴۰۲	۱۵۶۱۰	۱۴۰۳۸	۱۴۰۳۸
المان ۴	۷۰۴.۲۹۱۲۶۲۸	۱۲۵۱۳.۹۴۶۵۸	۱۲۵۱۳.۹۴۶۵۸	۷۰۴	۱۲۵۱۴	۱۲۵۱۴
المان ۵	-۱۴۸۰۴.۱۵۹۹۲	۱۲۵۱۳.۹۴۶۵۸	۱۲۵۱۳.۹۴۶۵۸	۱۴۸۰۴	-۱۲۵۱۴	۱۲۵۱۴

جدول ۵: مقایسهٔ برش بدست آمده از روش ترکیب نیرو-جابه‌جایی با روش اجزا محدود

شماره المان	*برش*			
	روش ترکیب نیرو - جابه‌جایی		*روش اجزا محدود*	
	گره ابتدا	*گره انتها*	*گره ابتدا*	*گره انتها*
المان ۱	۳۶۰۶.۸۴۷۵۲	۳۶۰۶.۸۴۷۵۲	۳۶۰۷	۳۶۰۷
المان ۲	۳۳۰۴.۶۱۴۱۳۸	-۱۱۶۹۵.۳۸۵۸۶	۳۳۰۵	-۱۱۶۹۵
المان ۳	۵۹۲۹.۵۳۱۱۸	۵۹۲۹.۵۳۱۱۸	۵۹۳۰	۵۹۳۰
المان ۴	۵۱۳۸.۰۶۸۹۳۷	-۹۸۶۱.۹۳۱۰۶۳	۵۱۳۸	-۹۸۶۲
المان ۵	۵۴۶۳.۶۲۱۳	۵۴۶۳.۶۲۱۳	۵۴۶۴	۵۴۶۴

جدول ۶: مقایسهٔ خیز بدست آمده از روش ترکیب نیرو–جابه‌جایی با روش اجزا محدود

شماره المان	خیز					
	روش ترکیب نیرو - جابه‌جایی			روش اجزا محدود		
	گره ابتدا	گره انتها	مقدار max	گره ابتدا	گره انتها	مقدار max
المان ۱	۰	۰.۰۰۲۲۶۰۹۴۸	۰.۰۰۲۲۶۰۹۴۸	۰	۰.۰۰۲۲۶۱	۰.۰۰۲۲۶۱
المان ۲	-۶.۸۸۴۶۱×۱۰^{-۶}	-۳.۵۰۶۹۷×۱۰^{-۵}	-۶.۸۸۴۶۱×۱۰^{-۶}	-۰.۰۰۰۰۰۷	-۰.۰۰۰۰۳۵	-۰.۰۰۰۰۰۷
المان ۳	۰	۰.۰۰۲۲۳۷۲۱۲	۰.۰۰۲۲۳۷۲۱۲	۰	۰.۰۰۲۲۳۷	۰.۰۰۲۲۳۷
المان ۴	-۳.۵۰۶۹۷×۱۰^{-۵}	-۲.۰۵۴۵۷×۱۰^{-۵}	۱.۰۳۰۴۸×۱۰^{-۵}	-۰.۰۰۰۰۳۵	-۰.۰۰۰۰۲۱	۰.۰۰۰۰۲۶
المان ۵	۰	۰.۰۰۲۲۲۵۸۳	۰.۰۰۲۲۲۵۸۳	۰	۰.۰۰۲۲۲۶	۰.۰۰۲۲۲۶



(ج) (ب) (الف)

شکل ۵: (الف): نمودار لنگر قاب ساده دارای ۵ المان (ب): نمودار برش قاب ساده دارای ۵ المان (ج): نمودار خیز قاب ساده دارای ۵ المان

لازم‌به ذکر است اگر لندازه مش‌بندی در تحلیل اجزای محدود ۵ متر (به اندازه‌ی طول عضو) لحاظ شود، قاب دودهانه از مثال دوم به ۵ المان و ۶ گره تفکیک می‌شود. با توجه به تعداد گره‌ها، تعداد درجات آزادی کل ۱۸ درجه‌ی آزادی خواهد شد. این درجات آزادی با اعمال شرایط تکیه‌گاهی و سازگاری به ۹ عدد می‌رسند. بنابراین برای تحلیل با کمک روش عددی نیاز به تشکیل ماتریس مجهولات با ابعاد ۱×۹ است. سپس بعد از تحلیل، مجهولات (جابجایی‌ها و دوران) فقط در هر یک از گره‌های فرض شده تعیین می‌شوند و برای تعیین جابجایی‌های نقاط دیگر باید از توابع شکل به کارگرفته شده بهره جست. درحالیکه به کمک روش پیشنهادی در این پژوهش با همان تعداد المان‌ها (۵ عضو)، تعداد مجهولات ۳۰ تا می‌باشند که پس از تحلیل، پاسخ‌ها در هر نقطه از قاب بصورت دقیق قابل حصول است. بنابراین حجم و تلاش محاسبات در روش پیشنهادی با شروط ذکر شده نسبت به روش اجزا محدود بیشتر خواهد شد اما دقت روش پیشنهادی همچنان بیشتر است.

۴- ۳- مثال سوم

قابی دارای ده عضو را مطابق شکل ۶ با مشخصات زیر در نظر بگیرید.

$$l = 5m \qquad q = 3.0\times10^{3}\ \frac{N}{m}$$

$$A = 0.12m^{2} \qquad F = 15000N$$

$$I = 1.6\times10^{-3}\ m^{4}$$

$$E = 2.0\times10^{10}\ \frac{N}{m^{2}}$$

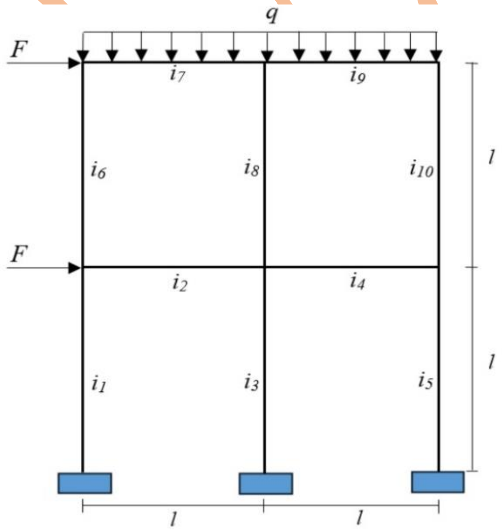
۴- ۳- ۱- معادلات حاکم بر هر المان:

$$W_{x_i}=\frac{q_i}{EI}\times\frac{x_i^4}{24}+c_{i,3}\times\frac{x_i^3}{6}+c_{i,4}\times\frac{x_i^2}{2}+c_{i,5}\times x_i+c_{i,6}$$

$$M_{x_i}=-q_i\times\frac{x_i^2}{2}-(c_{i,3}\times x_i+c_{i,4})\times EI$$

$$T_{x_i}=-q_i\times x_i-c_{i,3}\times EI$$

با حل معادله (۴۲) برای شکل ۶ مقدار ماتریس c بدست می‌آید که در پیوست ۳ (مقادیر به‌دست‌آمده ماتریس c برای مثال سوم)
به آن اشاره شده‌است.



شکل ۶: قاب ساده دو دهنه و دو طبقه دارای ۱۰ المان تحت بار گسترده و متمرکز جانبی

با قرار دادن مقادیر ماتریس C در معادلات حاکم بر هر ۴- ۳- ۲- المان در زیربخش قبل معادلات خیز، لنگر و برش هر المان بدست (طول المان) تعیین امی‌آید. مقادیر این معادلات در بازه ۰ تا می‌شود و با مقادیر محاسبه شده لنگر در جدول ۷، برش در جدول ۸ و خیز در جدول ۹ از روش اجزا محدود مقایسه شده‌است که تطابق خوبی دارند. در شکل ۷ نمودارهای مربوط به مقادیر لنگر، برش و خیز حاصله از روش پیشنهادی ارائه شده است. از مزیت روش پیشنهادی می‌توان به حل دقیق قاب، سهولت استفاده و در دسترس بودن پاسخ در هر نقطه بدون نیاز به انتخاب گره و درنظرگرفتن اثرات محوری اعضای قاب اشاره نمود.

۵ ــ نتیجه‌گیری

در این تلاش روشِ ترکیبی نیرو-جابه‌جایی به‌منظور تحلیل قاب‌های صفحه‌ای دو بعدی ارائه شده‌است. این روش با در نظر گرفتن همزمان شرایط تعادل و سازگاری دستگاه معادلات حاکم بر قاب‌های صفحه‌ای را تشکیل می‌دهد. ابتدا معادلات دیفرانسیل حاکم بر اعضا تک‌محوری در مختصات محلی تولید و با انتگرال‌گیری، ثوابت انتگرالی به عنوان متغیرهای مجهول مسئله در نظر گرفته می‌شود. الگوریتمِ روش پیشنهادی به سادگی قابل پیاده‌سازی در قالب کد رایانه‌ای است و می‌تواند به عنوان جایگزینی برای روش‌های مرسوم تحلیل قاب‌ها بهره‌گیری شود. از مزیت‌های روش ترکیبی می‌توان به یافتن پاسخِ دقیق در هر نقطه از سازه بدون نیاز به شبکه‌بندی، الگوریتم ساده و قابل تعمیم، سادگی حل برای قاب‌های نامعین و عدم نیاز به پس پردازش اشاره نمود. به منظور روشن سازی کارایی روش سه قاب صفحه‌ای با افزایش تدریجی اعضا و دهانه‌ها تحلیل شد. راستی آزمایی روش با مقایسهٔ پاسخ ها با روش اجزا محدود صورت پذیرفت. نتایج تطابق پاسخها را نشان می‌دهد. نمودارهای برش، خمش و تغییر مکانِ قاب های انتخابی رسم گردیده است.

جدول ۷: مقایسهٔ لنگر بدست آمده از روش ترکیب نیرو-جابه‌جایی با روش اجزا محدود

شماره المان	لنگر					
	روش اجزا محدود			روش ترکیب نیرو - جابه‌جایی		
	مقدار max	گره انتها	گره ابتدا	مقدار max	گره انتها	گره ابتدا
المان ۱	۱۸۷۶۲	۱۸۷۶۲	-۲۸۳۰۳	۱۸۷۶۱.۵۲۳۳۱	۱۸۷۶۱.۵۲۳۳۱	-۲۸۳۰۲.۵۸۵۰۷
المان ۲	۲۰۹۷۴	۲۰۹۷۴	-۲۴۶۱۲	۲۰۹۷۳.۷۹۳۷۶	۲۰۹۷۳.۷۹۳۷۶	-۲۴۶۱۱.۹۹۱۶۳
المان ۳	۲۵۹۰۱	۲۵۹۰۱	-۳۱۸۰۴	۲۵۹۰۱.۳۵۳۲۲	۲۵۹۰۱.۳۵۳۲۲	-۳۱۸۰۴.۲۱۷۱۱
المان ۴	۲۵۸۶۶	۲۵۸۶۶	-۲۱۷۵۴	۲۵۸۶۶.۲۱۵۱۳	۲۵۸۶۶.۲۱۵۱۳	-۲۱۷۵۴.۲۶۸۲۸
المان ۵	۱۷۶۰۸	۱۷۶۰۸	-۲۷۶۲۳	۱۷۶۰۷.۷۵۵۲۷	۱۷۶۰۷.۷۵۵۲۷	-۲۷۶۲۲.۵۶۶۰۲
المان ۶	۸۸۹۰	۸۸۹۰	-۵۸۵۰	۸۸۹۰.۴۶۳۵۵	۸۸۹۰.۴۶۳۵۵	-۵۸۵۰.۴۶۸۳۱۹

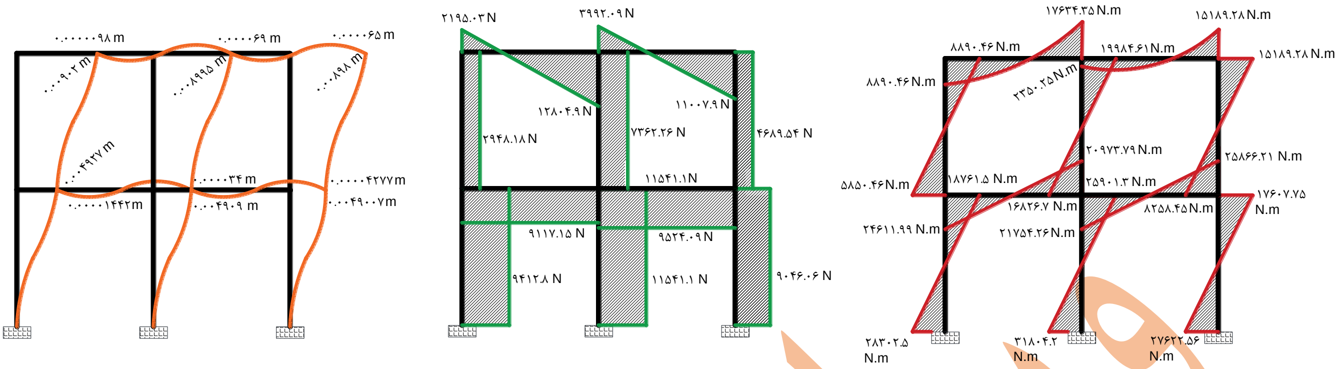
المان ۷	-۸۸۹۰.۴۶۳۵۵	۱۷۶۳۴.۳۵۵۵۹	۱۷۶۳۴.۳۵۵۵۹	-۸۸۹۰	۱۷۶۳۴	۱۷۶۳۴
المان ۸	-۱۶۸۲۶.۷۰۸۸۳	۱۹۹۸۴.۶۱۴۱۵	۱۹۹۸۴.۶۱۴۱۵	-۱۶۸۲۷	۱۹۹۸۵	۱۹۹۸۵
المان ۹	-۲۳۵۰.۲۵۸۵۵۶	۱۵۱۸۹.۲۸۵۲۹	۱۵۱۸۹.۲۸۵۲۹	-۲۳۵۰	۱۵۱۸۹	۱۵۱۸۹
المان ۱۰	-۸۲۵۸.۴۵۹۸۵۸	۱۵۱۸۹.۲۸۵۲۹	۱۵۱۸۹.۲۸۵۲۹	-۸۲۵۸	۱۵۱۸۹	۱۵۱۸۹

جدول ۸: مقایسهٔ برش بدست آمده از روش ترکیب نیرو-جابه‌جایی با روش اجزا محدود

شماره المان	برش			
	روش ترکیب نیرو - جابه‌جایی		روش اجزا محدود	
	گره ابتدا	گره انتها	گره ابتدا	گره انتها
المان ۱	۹۴۱۲.۸۲۱۶۷۷	۹۴۱۲.۸۲۱۶۷۷	۹۴۱۳	۹۴۱۳
المان ۲	-۹۱۱۷.۱۵۷۰۷۹	-۹۱۱۷.۱۵۷۰۷۹	-۹۱۱۷	-۹۱۱۷
المان ۳	۱۱۵۴۱.۱۱۴۰۶	۱۱۵۴۱.۱۱۴۰۶	۱۱۵۴۱	۱۱۵۴۱
المان ۴	-۹۵۲۴.۰۹۶۶۸۴	-۹۵۲۴.۰۹۶۶۸۴	-۹۵۲۴	-۹۵۲۴
المان ۵	۹۰۴۶.۰۶۴۲۵۸	۹۰۴۶.۰۶۴۲۵۸	۹۰۴۶	۹۰۴۶
المان ۶	۲۹۴۸.۱۸۶۳۷۴	۲۹۴۸.۱۸۶۳۷۴	۲۹۴۸	۲۹۴۸
المان ۷	۲۱۹۵.۰۳۶۱۷۱	-۱۲۸۰۴.۹۶۳۸۳	۲۱۹۵	-۱۲۸۰۵
المان ۸	۷۳۶۲.۲۶۴۵۹۶	۷۳۶۲.۲۶۴۵۹۶	۷۳۶۲	۷۳۶۲
المان ۹	۳۹۹۲.۰۹۱۲۳۱	-۱۱۰۰۷.۹۰۸۷۷	۳۹۹۲	-۱۱۰۰۸
المان ۱۰	۴۶۸۹.۵۴۹۰۳	۴۶۸۹.۵۴۹۰۳	۴۶۹۰	۴۶۹۰

جدول ۹: مقایسهٔ خیز بدست آمده از روش ترکیب نیرو-جابه‌جایی با روش اجزا محدود

شماره المان	خیز					
	روش ترکیب نیرو - جابه‌جایی			روش اجزا محدود		
	گره ابتدا	گره انتها	مقدار max	گره ابتدا	گره انتها	مقدار max
المان ۱	۰	۰.۰۰۴۹۲۷۵۵۸	۰.۰۰۴۹۲۷۵۵۸	۰	۰.۰۰۴۹۲۸	۰.۰۰۴۹۲۸
المان ۲	۱.۴۴۲۱۱$\times$ ۱۰$^{-۵}$	-۳.۴۱۴۶۱$\times$ ۱۰$^{-۵}$	۰.۰۰۰۱۴۶۷۸۵	۰.۰۰۰۰۱۴	-۰.۰۰۰۰۳۴	۰.۰۰۰۱۴۷
المان ۳	۰	۰.۰۰۴۹۰۹۷۷۶	۰.۰۰۴۹۰۹۷۷۶	۰	۰.۰۰۴۹۱	۰.۰۰۴۹۱
المان ۴	-۳.۴۱۴۶۱$\times$ ۱۰$^{-۵}$	-۴.۲۷۷۵$\times$ ۱۰$^{-۵}$	۰.۰۰۰۳۸۵۰۷۷	-۰.۰۰۰۰۳۴	-۰.۰۰۰۰۴۳	۰.۰۰۰۳۸۵
المان ۵	۰	۰.۰۰۴۹۰۰۷	۰.۰۰۴۹۰۰۷	۰	۰.۰۰۴۹۰۱	۰.۰۰۴۹۰۱
المان ۶	۰.۰۰۴۹۲۷۵۵۸	۰.۰۰۹۰۲۰۴۸۲	۰.۰۰۹۰۲۰۴۸۲	۰.۰۰۴۹۲۸	۰.۰۰۹۰۲	۰.۰۰۹۰۲
المان ۷	۹.۸۴۸۰۹$\times$ ۱۰$^{-۶}$	-۶.۹۱۳۹۹$\times$ ۱۰$^{-۵}$	۹.۸۴۸۰۹$\times$ ۱۰$^{-۶}$	۰.۰۰۰۰۱	-۰.۰۰۰۰۶۹	۰.۰۰۰۰۱
المان ۸	۰.۰۰۴۹۰۹۷۷۶	۰.۰۰۸۹۹۵۳۷۵	۰.۰۰۸۹۹۵۳۷۵	۰.۰۰۴۹۱	۰.۰۰۸۹۹۵	۰.۰۰۸۹۹۵
المان ۹	-۶.۹۱۳۹۹$\times$ ۱۰$^{-۵}$	-۶.۵۷۰۸۲$\times$ ۱۰$^{-۵}$	۴.۰۰$\times$ ۱۰$^{-۶}$	-۰.۰۰۰۰۶۹	-۰.۰۰۰۰۶۶	۰.۰۰۰۰۰۴
المان ۱۰	۰.۰۰۴۹۰۰۷	۰.۰۰۸۹۸۵۶۰۵	۰.۰۰۸۹۸۵۶۰۵	۰.۰۰۴۹۰۱	۰.۰۰۸۹۸۶	۰.۰۰۸۹۸۶



(ج) (ب) (الف)

شکل ۷: (الف): نمودار لنگر قاب ساده دارای ۱۰ المان (ب): نمودار برش قاب ساده دارای ۱۰ المان (ج): نمودار خیز قاب ساده دارای ۱۰ المان

منابع

۱. Macaulay, W. ۱۹۱۹. Note on the deflection of beams. *The Messenger of Mathematics*, ۴۸, ۱۲۹-۱۳۰.

۲. Brungraber, R. ۱۹۶۵. Singularity functions in the solution of beam-deflection problems. *Journal of Engineering Education (Mechanics Division Bulletin)*, ۱, ۲۷۸-۲۸۰.

۳. Falsone, G. ۲۰۰۲. The use of generalised functions in the discontinuous beam bending differential equations. *International Journal of Engineering Education*, ۱۸, ۳۳۷-۳۴۳.

۴. Rahami, H., et al. ۲۰۱۵. Finite element analysis using mixed force-displacement method via singular value decomposition. *Iranian Journal of Science and Technology. Transactions of Civil Engineering*, ۳۹, .https://doi.org/۱۰,۲۲۰۹۹/ijstc.۲۰۱۵,۲۷۳۶.

۵. Xu, G., Chen, Q., Zhu, S., Wang, Z., & Wu, B. ۲۰۱۸. Force-Displacement Mixed Control Method for ۳-DOFs Loading System. *Journal of Shenyang Jianzhu University (Natural Science)*, ۳۴, ۵۸۶-۵۹۵. https://doi.org/۱۰,۱۱۷۱۷/j.issn:۲۰۹۵-۱۹۲۲,۲۰۱۸,۰۴,۰۲.

۶. Pan, P., et al. ۲۰۱۴. Force–displacement mixed control for collapse tests of multistory buildings using quasi-static loading systems. *Earthquake engineering & structural dynamics*, ۴۳, ۲۸۷-۳۰۰. https://doi.org/۱۰,۱۰۰۲/eqe.۲۳۴۴.

۷. Pan, P., M. Nakashima, and H. Tomofuji ۲۰۰۵. Online test using displacement–force mixed control. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, ۳۴, ۸۶۹-۸۸۸.

۸. Zhou, H., et al. ۲۰۲۱. Multi-degree-of-freedom force-displacement mixed control strategy for structural testing. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, ۵۰, ۳۵۴-۳۷۴.https://doi.org/۱۰,۱۰۰۲/eqe.۳۳۳۴.

۹. Jiang, Z. Programming for matrix displacement method based on MATLAB. Proceedings of the ۲۰۲۱ ۴th International Conference on Mathematics and Statistics, ۲۰۲۱. ۳۵-۴۱.https://doi.org/۱۰,۱۱۴۵/۳۴۷۵۸۲۷,۳۴۷۵۸۳۳.

۱۰. Li, Z. Development of Program for Solving Plane Rigid Frame Based on MATLAB. ۲۰۲۱ IEEE ۱۲th International Conference on Mechanical and Intelligent Manufacturing Technologies (ICMIMT), ۲۰۲۱. IEEE, ۶۴-۶۷. https://doi.org/۱۰,۱۱۰۹/ICMIMT۵۲۱۸۶,۲۰۲۱,۹۴۷۶۱۴۸.

۱۱. Khennane, A. ۲۰۱۳. *Introduction to finite element analysis using MATLAB® and abaqus*, CRC Press.

۱۲. McNeice, G. and S. Hunnisett ۱۹۷۲. Mixed-displacement finite-element analysis with particular application using plane-stress triangles. *Journal of Strain Analysis*, ۷, ۲۴۳-۲۵۲.https://doi.org/ ۱۰,۱۲۴۳/۰۳۰۹۳۲۴۷V۰۷۲۴۳.

۱۳. Liu, H. Internal Force Solution of Plane Rigid Frame Based on Matrix Displacement Method. International Conference on Architecture, Materials and Construction, ۲۰۲۱. Springer, ۵۸-۶۴.https://doi.org/۱۰,۱۰۰۷/۹۷۸-۳-۰۳۰-۹۴۵۱۴-۵_۷.

۱۴. Qi, H. Calculation of Frame Internal Force Based on MATLAB Matrix Displacement Method. ۲۰۲۰ International Conference on Computing and Data Science (CDS), ۲۰۲۰. IEEE, ۳۶۷-۳۷۲.https://doi.org/ ۱۰,۱۱۰۹/CDS۴۹۷۰۳,۲۰۲۰,۰۰۰۷۷.

۱۵. Falsone, G. and D. Settineri ۲۰۱۳. A Mixed Force-Displacement Method for the Exact Solution of Plane Frames. *American Journal of Civil Engineering and Architecture*, ۱, ۸۲. https://doi.org/۱۰,۱۲۶۹۱/ajcea-۱-۴-۳.

۱۶. Shahabian, F. and J. Alamatian ۲۰۱۲. Stochastic Nonlinear Dynamic Analysis of Portal Frames in Random Fields. *Journal of Civil and Surveying Engineering*, ۴۵, ۶۵۹-۶۷۰. [In Persian].https://jcse.ut.ac.ir/article_۲۴۹۲۱_en.html.

۱۷. Mohemmi, M., V. Broujerdian, and P. Rajaeian ۲۰۲۰. An equivalent method for bar slip simulation in reinforced concrete frames. *International Journal of Civil*

Mechanics, ۱۷۵, ۸۳ https://doi.org/۱۰,۱۶۸۰/jencm.۲۱,۰۰۰۱۳.

۲۹. Alaneme, G.U., et al. ۲۰۲۳. Numerical Analysis and Parametric Study on Multiple Degrees-of-Freedom Frames. *Civil Engineering Journal*, ۹, ۱۷۰۹-۱۷۳۶,۱۰,۲۸۹۹۱/CEJ-۲۰۲۳-۰۹-۰۷-۰۱۲.

۳۰. Colombo, I.G., et al. ۲۰۲۳. Solution of Complex Frames. *Structural Analysis of Plane Frames: Solved Examples with Force and Displacement Methods.* Springer.

۳۱. Connor, J.J., et al. ۲۰۱۶. Finite Element Displacement Method for Framed Structures. *Fundamentals of Structural Engineering*, ۸۰۵-۸۶۹.https://doi.org/۱۰,۱۰۰۷/۹۷۸-۳-۳۱۹-۲۴۳۳۱-۳_۱۲.

۳۲. Karnovsky, I.A., et al. ۲۰۲۱. The Displacement Method. *Advanced Methods of Structural Analysis*, ۳۶۷-۴۰۳.https://doi.org/۱۰,۱۰۰۷/۹۷۸-۳-۰۳۰-۴۴۳۹۴-۸_۱۰.

۳۳. Toniolo, G. and G. Toniolo ۲۰۱۹. Displacement Method. *Introduction to Frame Analysis: First and Second Order Theories*, ۱۵۷-۲۷۵.https://doi.org/۱۰,۱۰۰۷/۹۷۸-۳-۰۳۰-۱۴۶۶۴-۱_۳.

۳۴. Kien, N.D. ۲۰۰۴. Beam element for large displacement analysis of elasto-plastic frames. *Vietnam Journal of Mechanics*, ۲۶, ۳۹-۵۴.https://doi.org/۱۰,۱۵۶۲۵/۰۸۶۶-۷۱۳۶/۲۶/۱/۵۶۸۸.

۳۵. Krenk, S., et al. ۲۰۱۳. Deformation and Element Methods for Frames. *Statics and Mechanics of Structures*, ۲۶۷-۳۲۰.https://doi.org/۱۰,۱۰۰۷/۹۷۸-۹۴-۰۰۷-۶۱۱۳-۱_۷.

۳۶. Rezaiee-Pajand, M. and N. Gharaei-Moghaddam ۲۰۱۷. Frame nonlinear analysis by force method. *International Journal of Steel Structures*, ۱۷, ۶۰۹-۶۲۹.https://doi.org/۱۰,۱۰۰۷/s۱۳۲۹۶-۰۱۷-۰۶۱۹-۳.

۳۷. Raju, N.K. and J. Nagabhushanam ۲۰۰۰. Nonlinear structural analysis using integrated force method. *Sadhana*, ۲۵, ۳۵۳-۳۶۵. https://doi.org/۱۰,۱۰۰۷/BF۰۳۰۲۹۷۲۰.

۳۸. Wang, Y. and G. Senatore ۲۰۲۰. Extended integrated force method for the analysis of prestress-stable statically and kinematically indeterminate structures. *International Journal of Solids and Structures*, ۲۰۲, ۷۹۸-۸۱۵.https://doi.org/۱۰,۱۰۱۶/j.ijsolstr.۲۰۲۰,۰۵,۰۲۹.

۳۹. Zhang, S.Y. and M.H. Dong ۲۰۱۴. A Transfer Matrix Method for Frame Shear Wall Structures. *Applied Mechanics and Materials*, ۴۸۲, ۲۰۷-۲۱۲. https://doi.org/۱۰,۴۰۲۸/www.scientific.net/AMM.۴۸۲,۲۰۷.

۴۰. Tzimas, A.S., et al. ۲۰۱۳. A hybrid force/displacement seismic design method for steel building frames. *Engineering Structures*, ۵۶, ۱۴۵۲-۱۴۶۳.https://doi.org/۱۰,۱۰۱۶/j.engstruct.۲۰۱۳,۰۷,۰۱۴.

۴۱. Mazzoni, S., et al. ۲۰۰۶. OpenSees command language manual. *Pacific earthquake engineering research (PEER) center*, ۲۶۴, ۱۳۷-۱۵۸.

Engineering, ۱۸, ۸۵۱-۸۶۳. https://doi.org/۱۰,۱۰۰۷/s۴۰۹۹۹-۰۲۰-۰۰۵۰۷-۶.

۱۸. Sae-Long, W., et al. ۲۰۲۰. Forced-based shear-flexure-interaction frame element for nonlinear analysis of non-ductile reinforced concrete columns. *Journal of Applied and Computational Mechanics*. ۱۰,۲۲۰۵۵/JACM.۲۰۲۰,۳۲۷۳۱,۲۰۶۵

۱۹. Sabet Rasekh, M. and F. Behnamfar ۲۰۲۰. Displacement-based design of torsional buildings considering two-way nonlinearities. *Sharif Journal of Civil Engineering*, ۳۶,۲, ۶۹-۷۷. [In Persian].۱۰,۲۴۲۰۰/j۳۰,۲۰۱۸,۵۷۱۳,۲۲۶۹.

۲۰. M Kani, I. and N. Moghaddasi Bonab ۲۰۰۹. Computer program for analysis of substitute frame of flat slabs and supported on beams. *Sharif Journal of Civil Engineering*, ۲۴, ۹۵-۱۰۲. [In Persian].https://sjce.ournals.sharif.edu/article_۴۷.html.

۲۱. Thai, H.-T., et al. ۲۰۲۰. Review of nonlinear analysis and modeling of steel and composite structures. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, ۲۰, ۲۰۳۰۰۰۳.https://doi.org/۱۰,۱۱۴۲/S۰۲۱۹۴۵۵۴۲۰۳۰۰۰۳۷.

۲۲. Namadchi, A., J. Alamatian, and H. Mohammadelahi Arehkamar ۲۰۲۲. Semi-explicit Unconditionally Stable Time Integration method based on Generalized-α technique. *Sharif Journal of Civil Engineering*, ۳۷, ۱۳۵-۱۴۵. [In Persian] https://doi.org/۱۰,۲۴۲۰۰/j۳۰,۲۰۲۱,۵۵۹۵۸,۲۷۹۲.

۲۳. Limkatanyu, S. and E. Spacone ۲۰۰۲. Reinforced concrete frame element with bond interfaces. I: Displacement-based, force-based, and mixed formulations. *Journal of Structural Engineering*, ۱۲۸, ۳۴۶-۳۵۵.https://doi.org/۱۰,۱۰۶۱/(ASCE)۰۷۳۳-۹۴۴۵(۲۰۰۲)۱۲۸:۳(۳۴۶).

۲۴. Sepulveda, C. and G. Mosqueda. Performance assessment of a mixed displacement and force control mode for hybrid simulation. ۱۳th Chilean Conference of Seismology and Earthquake Engineering, ۲۰۲۳.

۲۵. Sepulveda, C., et al. ۲۰۲۴. Hybrid simulation framework with mixed displacement and force control for fully compatible displacements. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, ۵۳, ۸۳۸-۸۵۵.https://doi.org/۱۰,۱۰۰۲/eqe.۴۰۴۸.

۲۶. Pian, C., et al. ۲۰۲۰. A hybrid force/displacement seismic design method for reinforced concrete moment resisting frames. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, ۱۲۹.

۲۷. Mohammad Rezaiee-Pajand, A.A.S. ۲۰۱۰. Extending Kani Method for Analysis of Braced Frames. *Journal of Structure & Steel*, ۶, ۸۳-۹۸. [In Persian].

۲۸. Khabiri, A. and A.S. Javadi ۲۰۲۲. Vibration analysis of buried pipelines and piles using differential transformation method. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Engineering and Computational*

۴۲. McKenna, F. ۲۰۱۱. OpenSees: a framework for earthquake engineering simulation. *Computing in Science & Engineering*, ۱۳, ۵۸-۶۶.

پیوســـت ۱ (مقادیر به‌دســـت‌آمده ماتریس c برای مثال اول)

$c_1^1 = 0.2354552680462094\times10^{-5}$
$c_1^2 = 0$
$c_1^3 = -37.290031773506646\times10^{-5}$
$c_1^4 = 110.00762360632475\times10^{-5}$
$c_1^5 = 0$
$c_1^6 = 0$
$c_2^1 = -0.1277995763532447\times10^{-5}$
$c_2^2 = 598.219633131004\times10^{-5}$
$c_2^3 = 17.659145103465697\times10^{-5}$
$c_2^4 = -76.44253526120848\times10^{-5}$
$c_2^5 = 83.91272086279045\times10^{-5}$
$c_2^6 = -1.1772763402310474\times10^{-5}$
$c_3^1 = -0.6773970062878016\times10^{-5}$
$c_3^2 = 0$
$c_3^3 = -42.730598594612775\times10^{-5}$
$c_3^4 = 118.93572679664533\times10^{-5}$
$c_3^5 = 0$
$c_3^6 = 0$

پیوست ۲ (مقادیر به‌دست‌آمده ماتریس c برای مثال دوم)

$c_1^2 = 0$
$c_1^4 = 368.73249218731557\times10^{-6}$
$c_1^6 = 0$
$c_2^2 = 2260.948131277258\times10^{-6}$
$c_2^4 = -194.83743286808874\times10^{-6}$
$c_2^6 = 6.884612786967266\times10^{-6}$
$c_3^2 = 0$
$c_3^4 = 487.8067407062156\times10^{-6}$
$c_3^6 = 0$
$c_4^2 = 2237.212396944662\times10^{-6}$
$c_4^4 = 22.009101963653204\times10^{-6}$
$c_4^6 = 35.06969749891038\times10^{-6}$
$c_5^2 = 0$
$c_5^4 = 462.6299975698297\times10^{-6}$
$c_5^6 = 0$

$c_1^1 = -1.376922557393458\times10^{-6}$
$c_1^3 = -112.71398501108096\times10^{-6}$
$c_1^5 = 0$
$c_2^1 = 4.747146866518923\times10^{-6}$
$c_2^3 = -103.26919180450917\times10^{-6}$
$c_2^5 = 434.73764829806544\times10^{-6}$
$c_3^1 = -7.013939499782052\times10^{-6}$
$c_3^3 = -185.29784937038561\times10^{-6}$
$c_3^5 = 0$
$c_4^1 = -2.276508874913778\times10^{-6}$
$c_4^3 = -160.564654288163\times10^{-6}$
$c_4^5 = 122.81058640125665\times10^{-6}$
$c_5^1 = -4.109137942824491\times10^{-6}$
$c_5^3 = -170.73816561853335\times10^{-6}$
$c_5^5 = 0$

پیوست ۳ (مقادیر به‌دست‌آمده ماتریس c برای مثال سوم)

$c_1^1 = 0.2884217044890889 \times 10^{-5}$
$c_1^3 = -29.41506774151249 \times 10^{-5}$
$c_1^5 = 0$
$c_2^1 = -0.3556401956926527 \times 10^{-5}$
$c_2^3 = 28.49111587189769 \times 10^{-5}$
$c_2^5 = 74.53954500794028 \times 10^{-5}$
$c_3^1 = -0.6829214772844596 \times 10^{-5}$
$c_3^3 = -36.065981452242313 \times 10^{-5}$
$c_3^5 = 0$
$c_4^1 = -0.1815214678391231 \times 10^{-5}$
$c_4^3 = 29.762802135959387 \times 10^{-5}$
$c_4^5 = 46.11612415518059 \times 10^{-5}$
$c_5^1 = -0.8555002272046297 \times 10^{-5}$
$c_5^3 = -28.26895080624522 \times 10^{-5}$
$c_5^5 = 0$
$c_6^1 = -0.091459840469547 \times 10^{-5}$
$c_6^3 = -9.213082418461455 \times 10^{-5}$
$c_6^5 = 74.5395450079402 \times 10^{-5}$
$c_7^1 = -0.5021589010871805 \times 10^{-5}$
$c_7^3 = -6.859488035215988 \times 10^{-5}$
$c_7^5 = 50.78958226768675 \times 10^{-5}$
$c_8^1 = -0.6998772941386157 \times 10^{-5}$
$c_8^3 = -23.00707686322756 \times 10^{-5}$
$c_8^5 = 46.11612415518052 \times 10^{-5}$
$c_9^1 = -0.1953978762441461 \times 10^{-5}$
$c_9^3 = -12.475285095612197 \times 10^{-5}$
$c_9^5 = 21.444988856465075 \times 10^{-5}$
$c_{10}^1 = -0.4586628653918375 \times 10^{-5}$
$c_{10}^3 = -14.65484071831097 \times 10^{-5}$
$c_{10}^5 = 78.2407089111572 \times 10^{-5}$

$c_1^2 = 0$
$c_1^4 = 88.4455783553693 \times 10^{-5}$
$c_1^6 = 0$
$c_2^2 = 492.7558181606057 \times 10^{-5}$
$c_2^4 = -76.91247385029613 \times 10^{-5}$
$c_2^6 = -1.4421085224454455 \times 10^{-5}$
$c_3^2 = 0$
$c_3^4 = 99.38817846164188 \times 10^{-5}$
$c_3^6 = 0$
$c_4^2 = 490.9776171821422 \times 10^{-5}$
$c_4^4 = -67.98208838870316 \times 10^{-5}$
$c_4^6 = 3.414607386422305 \times 10^{-5}$
$c_5^2 = 0$
$c_5^4 = 86.32051879784443 \times 10^{-5}$
$c_5^6 = 0$
$c_6^2 = 1.4421085224454451 \times 10^{-5}$
$c_6^4 = 18.282713498103068 \times 10^{-5}$
$c_6^6 = 492.7558181606057 \times 10^{-5}$
$c_7^2 = 902.0482448753133 \times 10^{-5}$
$c_7^4 = -27.78269859420432 \times 10^{-5}$
$c_7^6 = -0.984809320097716 \times 10^{-5}$
$c_8^2 = -3.414607386422298 \times 10^{-5}$
$c_8^4 = 52.58346509832587 \times 10^{-5}$
$c_8^6 = 490.97761718214245 \times 10^{-5}$
$c_9^2 = 899.5374503698778 \times 10^{-5}$
$c_9^4 = -7.344557988096302 \times 10^{-5}$
$c_9^6 = 6.913993857115411 \times 10^{-5}$
$c_{10}^2 = -4.277501136023145 \times 10^{-5}$
$c_{10}^4 = 25.80768705771217 \times 10^{-5}$
$c_{10}^6 = 490.070009842947 \times 10^{-5}$