

تعیین مسیر بهینه برای پرتاب ماهواره به مدار زمین با استفاده از قانون هدایت تانژانت خطی

محمد مردانی (دانشجوی دکتری)
محمد موبد (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف

به منظور بررسی پرتاب بهینه‌ی ماهواره به مدار دایره‌ی کره زمین، ابتدا مسئله‌ی پرتاب بهینه را به یک مسئله‌ی مقدار مرزی دونقطه‌ی تبدیل کرده‌ایم. سپس از حالت‌ها و هم‌حالت‌های متناظر با حل تحلیلی برای مسئله‌ی زمین مسطح بدون مقاومت هوا (قانون هدایت تانژانت خطی) به عنوان حدس اولیه برای حل عددی مسئله‌ی مقدار مرزی دونقطه‌ی استفاده شده است. الگوریتمی که برای حل مسئله‌ی مقدار مرزی به کار می‌رود نسبت به حدس اولیه بسیار حساس است. مشاهده می‌شود که برای برطرف کردن واگرایی ناشی از این حساسیت، می‌توان اثر مقاومت هوا را به تدریج در مسئله وارد کرد. نتایج حاصله نشان می‌دهند که روش فوق علاوه بر بهینگی، از سرعت همگرایی قابل قبولی نیز برخوردار است.

۱. مقدمه

سپس این مسئله، از طریق روش‌های عددی حل می‌شود. در روش غیرمستقیم با دو مشکل مواجه هستیم: نخست این که الگوریتم‌های حل مسائل مقدار مرزی نسبت به حدس اولیه‌ی که برای شروع الگوریتم لازم است، بسیار حساس اند [۱]؛ دوم این که علاوه بر حل معادلات دیفرانسیل حالت‌های سیستم، معادلات دیفرانسیل هم‌حالت‌ها^۴ نیز باید حل شوند، اما معمولاً به دلیل نداشتن مفهوم فیزیکی، پیدا کردن حدس اولیه برای هم‌حالت‌ها دشوار است. در مرجع ۸ روش‌های عددی بهینه‌سازی مسیر به طور کامل معرفی شده‌اند.

در هر دو روش مستقیم و غیرمستقیم، مسئله‌ی بهینه‌سازی معمولاً با قیدهایی^۵ همراه است. این قیدها در مورد قرارداد ماهواره در مدار زمین، به صورت معادلات حاکم بر مقادیر پارامترهای ماهواره در مدار، نامعادلات حاکم بر متغیرهای حالت^۶، یا به صورت محدودیت‌هایی بر نیروی قائم وارد بر بدنه و زاویه‌ی حمله^۷، و امثالهم در نظر گرفته می‌شوند.

مسئله‌ی پرتاب بهینه‌ی ماهواره به مدار زمین در صورتی که بردار جاذبه ثابت نباشد یا نیروی مقاومت هوا قابل اغماض نباشد حل تحلیلی ندارد. اما اگر شرایط ایده‌آل باشد یعنی اگر بردار جاذبه ثابت فرض شود (که آن هم معادل با فرض زمین مسطح است) و از مقاومت هوا نیز صرف نظر شود آنگاه مسئله‌ی پرتاب بهینه‌ی یک جسم صلب به ارتفاعی مشخص به نحوی که بردار سرعت در زمان نهایی (یعنی در لحظه‌ی قرار گرفتن جسم در ارتفاع مورد نظر) موازی سطح زمین باشد، دارای حل تحلیلی خواهد بود. منظور از پرتاب بهینه در اینجا، پرتاب با مقدار معین سوخت برای بیشینه شدن اندازه‌ی سرعت در

بهینه‌سازی در صنایع فضایی، در قالب مسائلی نظیر کمینه‌سازی سوخت مصرفی، بیشینه‌سازی سرعت، یا کمینه‌سازی زمان سفر از دیرباز اهمیت و کاربردی ویژه داشته است. بدیهی است ملاحظات اقتصادی از مهم‌ترین دلایل اهمیت بهینه‌سازی در این بخش از صنعت است.^[۱]

مرسوم است که روش‌ها و مسائل بهینه‌سازی بسته به نوع کاربرد و صورت مسئله تقسیم‌بندی یا نام‌گذاری شوند. در مبحث فعلی، یافتن مسیر پرتاب به گونه‌ی که به کمینه‌سازی کمیتی چون سوخت مصرفی بینجامد، به مسئله‌ی بهینه‌سازی مسیر^۱ معروف است. در مورد پرتاب فضاپیماها، روش‌های بهینه‌سازی معمولاً به دو دسته روش مستقیم^۲ و روش غیرمستقیم^۳ تقسیم می‌شوند. در روش مستقیم متغیرهای کنترل، و در مواردی متغیرهای حالت سیستم، به صورت تابعی از چند پارامتر نوشته می‌شوند. مثلاً کل زمان پرتاب را می‌توان به بخش‌هایی تقسیم، و در هر بخش متغیرهای کنترل و متغیرهای حالت را ثابت فرض کرد؛ یا می‌توان مسیر پرتاب را به صورت تکه‌ی و با استفاده از توابعی ساده، مثل چندجمله‌ی، تقریب زد^[۲]، و سپس مقادیر این پارامترها را طوری تنظیم کرد که کمیت مورد نظر بهینه شود. در روش مستقیم، به منظور یافتن مسیر بهینه‌ی پرتاب، از ابزارهایی نظیر الگوریتم ژنتیک^[۳]، برنامه‌ریزی غیرخطی^[۴]، و شیوه‌ی تطبیقی^[۵] بهره می‌برند. ایراد عمده‌ی روش‌های بهینه‌سازی مستقیم، حجم زیاد محاسبات و کندی همگرایی الگوریتم‌های آن‌هاست.^[۶]

در روش غیرمستقیم، ابتدا مسئله‌ی اصلی بهینه‌سازی مسیر به کمک حساب تغییرات به یک مسئله‌ی مقدار مرزی (BVP) تبدیل می‌شود.

حالت و هم حالت متناظر با جواب مسئله‌ی II به عنوان حدس‌های اولیه در مسئله‌ی III، ممکن است چنین به نظر برسد که بتوان مستقیماً یعنی در یک گام از مسئله‌ی II به مسئله‌ی اصلی III رفت و آن را حل کرد. اما آنچه در عمل مشاهده می‌شود این است که الگوریتم عددی فوق‌الذکر همگرا نمی‌شود و بنابراین چنین رویکرد ساده‌ی متأسفانه منجر به حل مسئله‌ی III نمی‌شود. برای برطرف شدن معضل واگرایی، راه پیشنهادی این است که تحول از مسئله‌ی II به مسئله‌ی III در یک جهش یا گام بزرگ صورت نگیرد، بلکه چنان که در شکل ۱ توسط خط چین عمودی با پیکان‌های متعدد که به دایره‌های کوچک توپر منتهی می‌شوند نمایش داده شده، طی چندین جهش کوچک انجام شود. به استثنای دایره‌ی کوچک در مرکز مربع متناظر با مسئله‌ی II و دایره‌ی کوچک در مرکز مربع متناظر با مسئله‌ی III، بقیه‌ی دایره‌های کوچک واقع بر خط چین عمودی نماینده‌ی مسائل میانی هستند که متوالیاً و به تدریجی بازگشتی که توضیح‌اش در ادامه آمده است، حل می‌شوند. شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهند که علاوه بر بهبود پاسخ نسبت به پاسخ متناظر با قانون هدایت تانژانت خطی، مشکل همگرایی الگوریتم حل مسئله‌ی مقدار مرزی که قبلاً به آن اشاره شد نیز به خوبی حل می‌شود. در بخش‌های بعد، ابتدا معادلات حالت و هم حالت مربوط به پرتاب بهینه‌ی ماهواره به مدار زمین استخراج می‌شوند و سپس چگونگی استفاده از قانون هدایت تانژانت خطی برای به دست آوردن حدس‌های اولیه شرح داده می‌شود. در مرحله‌ی بعد، ماحصل شبیه‌سازی روش پیشنهادی و مقایسه با آنچه از قانون هدایت تانژانت خطی به دست می‌آید ارائه می‌شود.

۲. معادلات حرکت (دینامیک سیستم)

۱.۲. معادلات حالت

حرکت پرتابگر^۹ ماهواره، دوبعدی و در صفحه‌ی عمودی در نظر گرفته می‌شود. معادلات ۱ نشان‌گر حرکت پرتابگر در دستگاه مختصات اینرسی هستند:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v_x(t) \\ \dot{y}(t) &= v_y(t) \\ \dot{v}_x &= -\mu \frac{x(t)}{r^3(t)} + \frac{T_i}{m(t)} \cos \beta(t) + \frac{d_x(t)}{m(t)} \\ \dot{v}_y &= -\mu \frac{y(t)}{r^3(t)} + \frac{T_i}{m(t)} \sin \beta(t) + \frac{d_y(t)}{m(t)} \\ \dot{m} &= -c_i \end{aligned} \quad (1)$$

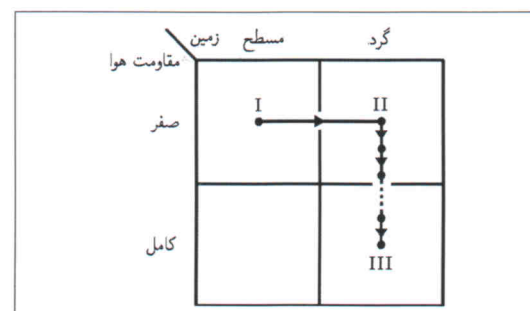
در این معادلات، $x(t)$ و $y(t)$ مؤلفه‌های بردار موقعیت، $v_x(t)$ و $v_y(t)$ مؤلفه‌های بردار سرعت و $d_x(t)$ و $d_y(t)$ مؤلفه‌های نیروی مقاومت

زمان نهایی است. پاسخ این مسئله به «قانون هدایت تانژانت خطی»^۶ معروف است.^[۱۲،۱۱] حتی در بسیاری از شرایط غیر ایده‌آل، ابتدا قانون هدایت تانژانت خطی به عنوان پرتاب تقریباً بهینه در نظر گرفته می‌شود و سپس با اعمال تصحیحاتی از قبیل روش اختلال^۷ سعی می‌شود مسیر تقریباً بهینه به مسیر کاملاً بهینه نزدیک‌تر شود.^[۱]

در این نوشتار به جای استفاده از چنین تقریب‌هایی، مسئله‌ی مقدار مرزی دونقطه‌ی حاصل از برقراری شرایط لازم بهینگی در حساب تغییرات، مستقیماً با استفاده از روش شوتینگ^۸ حل می‌شود. چنان که اشاره شد، به منظور دستیابی به یک حدس اولیه‌ی مناسب برای متغیرهای حالت و هم حالت، از پاسخ قانون هدایت تانژانت خطی مربوط به زمین مسطح استفاده می‌شود. لذا در اینجا نیز قانون هدایت تانژانت خطی نقشی قاطع و مؤثر، هرچند غیرمستقیم، دارد. به عبارت دیگر، از قانون هدایت تانژانت خطی نه به عنوان جواب نهایی، بلکه به عنوان وسیله‌ی برای رسیدن به جواب نهایی استفاده می‌شود.

شکل ۱ روش ابتکاری به کار گرفته شده برای رسیدن به جواب نهایی را نمایش می‌دهد. مربع بالایی در سمت چپ که با علامت I مشخص شده، با وضعیت ایده‌آل - یعنی زمین مسطح و مقاومت قابل اغماض هوا - متناظر است. پاسخ مسئله‌ی بهینه‌سازی مسیر برای مسئله‌ی I چیزی جز قانون هدایت تانژانت خطی نیست. حال در یک گام، با قرار دادن فرض زمین گرد به جای زمین مسطح، مسئله‌ی II متناظر با مربع بالایی در سمت راست حاصل می‌شود. جواب مسئله‌ی II که در آن مقاومت هوا همچنان صفر است، به طور غیرمستقیم یعنی از حل یک مسئله‌ی مقدار مرزی دونقطه‌ی با استفاده از روش شوتینگ به دست می‌آید. حدس‌های اولیه‌ی لازم برای متغیرهای حالت و هم حالت در مسئله‌ی II، متغیرهای حالت و هم حالت پاسخ مسئله‌ی I هستند. در این مرحله، الگوریتم عددی مورد استفاده در روش شوتینگ به خوبی همگرا است.

حال با تکرار روندی مشابه شیوه‌ی تولید مستقیم مسئله‌ی II از مسئله‌ی I، یعنی با جایگزین کردن فرض مقاومت هوای صفر توسط مقاومت هوای کامل و ابقای فرض زمین گرد، و نیز با استفاده از متغیرهای



شکل ۱. نمایش روش حل مسئله.

۲.۲. معادلات هم‌حالت

تابع کارایی که در این مسأله با J نمایش داده می‌شود، مجذور سرعت ورود ماهواره به مدار است:

$$J = \| \underline{v}(t_f) \|^2 = \dot{x}_r^2(t_f) + \dot{x}_\delta^2(t_f) \quad (3)$$

که در آن t_f لحظه‌ی ورود ماهواره به مدار بوده و از قبل معلوم و ثابت است و مقدار آن برابر است با مجموع زمان‌های احتراق سوخت مرحله‌ی اول و دوم پرتابگر. ملاحظه می‌شود که J فقط به مقادیر حالت‌ها در زمان نهایی بستگی دارد. قیود برابری^{۱۰} مسأله عبارت‌اند از عمود بودن بردار سرعت بر بردار مکان در زمان نهایی t_f و نیز رسیدن به ارتفاع مشخص h_f در زمان مشخص t_f :

$$\begin{aligned} \underline{r}(t_f) \cdot \underline{v}(t_f) &= 0 \\ h(t_f) - h_f &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

پس از تشکیل هامیلتونین و اعمال شرط بهینگی معادلات دیفرانسیل هم‌حالت‌ها به صورت معادلات ۵ به دست می‌آیند. در این معادله با عوض کردن اندیس ۱ و ۲ در رابطه‌ی اول معادله‌ی دیفرانسیل p_2 و با عوض کردن اندیس ۳ و ۴ در رابطه دوم معادله دیفرانسیل p_4 به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \mu \frac{p_r(\dot{x}_r^2 - 2\dot{x}_\delta^2) - 3p_\delta x_1 x_2}{(\dot{x}_r^2 + \dot{x}_\delta^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &\quad - \frac{k_0 x_1}{h_0 x_\delta} (\dot{x}_r^2 + \dot{x}_\delta^2)^{\frac{1}{2}} (p_r x_r + p_\delta x_\delta) E \\ \dot{p}_r &= -p_1 + \frac{k_0}{x_\delta} \left[\frac{p_r(2\dot{x}_r^2 + \dot{x}_\delta^2) + p_\delta x_r x_\delta}{(\dot{x}_r^2 + \dot{x}_\delta^2)^{\frac{3}{2}}} \right] E \\ \dot{p}_\delta &= \frac{T_i}{x_\delta} (p_r \cos \beta + p_\delta \sin \beta) \\ &\quad - \frac{k_0}{x_\delta} (\dot{x}_r^2 + \dot{x}_\delta^2)^{\frac{1}{2}} (p_r x_r + p_\delta x_\delta) E \end{aligned} \quad (5)$$

در این روابط:

$$E = \exp\left(-\frac{(\dot{x}_r^2 + \dot{x}_\delta^2)^{\frac{1}{2}} - R_e}{h_0}\right) \quad (6)$$

۳.۲. شرط بهینگی

با فرض عدم هرگونه محدودیت برای $\beta(t)$ ، شرط لازم برای بهینگی به صورت معادله‌ی ۷ است:^[۱۲]

$$\tan \beta(t) = \frac{p_\delta(t)}{p_r(t)} \quad (7)$$

این رابطه با نوشتن هامیلتونین و مشتق‌گیری از آن نسبت به $\beta(t)$ و صفر قرار دادن آن به دست می‌آید.

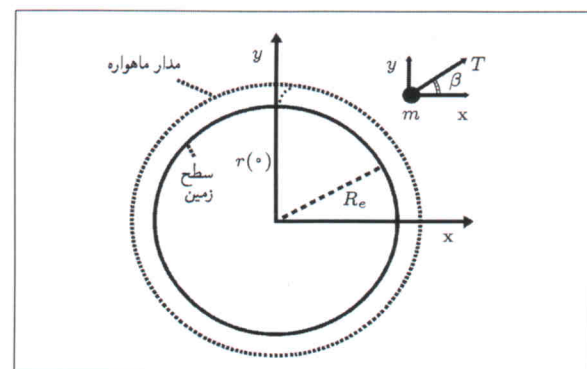
هوا در دستگاه اینرسی هستند و $r(t)$ فاصله‌ی پرتابگر از مرکز زمین در لحظه‌ی t است. همچنین در این معادلات $m(t)$ جرم پرتابگر، و T_i و C_i به ترتیب اندازه‌ی پیشرانه و نرخ اشتعال سوخت هستند. بنابراین $\beta(t)$ زاویه‌ی پیشرانه با محور x تنها متغیر کنترل است. شکل ۲ هندسه‌ی مسأله را نمایش می‌دهد.

در شبیه‌سازی‌ها زمین به صورت کروی در نظر گرفته شده و تغییرات چگالی هوا بر اثر تغییرات ارتفاع به صورت نمایی با ثابت h_0 و ضریب k_0 در نظر گرفته می‌شود.^[۱۳، ۱۴] مقدار عددی این دو ضریب به ترتیب 0.5 kg/m^3 و 8240 است.

با تعریف بردار حالت x به صورت: $x = [x \ y \ v_x \ v_y \ m]^T$ معادلات حالت به صورت معادله‌ی ۲ ظاهر می‌شوند:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \end{bmatrix} &= \underline{f}(x, \beta) = \\ &= \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -\mu \frac{x_1}{r} + \frac{T_i}{x_\delta} \cos \beta - \frac{k_0 x_r}{x_\delta} \sqrt{\dot{x}_r^2 + \dot{x}_\delta^2} \exp\left(-\frac{r-R_e}{h_0}\right) \\ -\mu \frac{x_2}{r} + \frac{T_i}{x_\delta} \sin \beta - \frac{k_0 x_\delta}{x_\delta} \sqrt{\dot{x}_r^2 + \dot{x}_\delta^2} \exp\left(-\frac{r-R_e}{h_0}\right) \\ -C_i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

به دلیل چند مرحله‌ی بودن پرتاب موشک، از طریق $x_\delta(t) = m(t)$ در معادلات حالت ناپیوستگی ایجاد می‌شود. محققان مسأله‌ی ناپیوستگی در معادلات حالت را مورد بررسی قرار داده و شرط بهینگی را برای آن به دست آورده‌اند.^[۱۵] می‌توان نشان داد که اگر تابع کارایی فقط به مقادیر نهایی حالت‌ها بستگی داشته باشد، آن گاه به اعمال شرط مزبور نیازی نخواهد بود.



شکل ۲. نمایش هندسه‌ی مسأله.

۴.۲. مشخصات موشک و مدار ماهواره

پرتابگر استفاده شده یک موشک دو مرحله‌یی با سوخت مایع است. پس از تمام شدن سوخت مرحله‌ی اول، بدنه و موتور مرحله‌ی اول جدا شده و بلافاصله موتور مرحله‌ی دوم روشن می‌شود. نرخ احتراق سوخت در مراحل اول و دوم به ترتیب برابر ۱۰۲ و ۳۰ کیلوگرم بر ثانیه و سرعت خروج گازهای ناشی از احتراق برابر ۲۹۴۰ متر بر ثانیه است. بنابراین اندازه‌ی نیروی پیشرانده در مرحله‌ی اول ۲۹۹۸۰ نیوتن، و در مرحله‌ی دوم برابر ۸۸۲۰ نیوتن است. همچنین جرم پرتابگر در لحظه‌ی شلیک ۲۷۸۱۰ kg، و جرم آن بلافاصله پس از جدا شدن مرحله‌ی اول برابر ۵۰۴ kg است. سوخت مرحله‌ی اول در ۲۳۱ ثانیه، و سوخت مرحله‌ی دوم در ۱۴ ثانیه تمام می‌شود؛ بنابراین کل زمان پرتاب ۲۴۵ ثانیه است. پرتابگر از نقطه‌یی از سطح زمین، که در شبیه‌سازی‌ها محل برخورد محور Y با سطح زمین است (شکل ۲)، حرکت خود را آغاز کرده و ماهواره‌یی تحقیقاتی به وزن ۱۰ کیلوگرم را در یک مدار دایره‌یی LEO در ارتفاع ۱۶۱ کیلومتری سطح زمین قرار می‌دهد. ضخامت جو $10^6 km$ در نظر گرفته می‌شود.

۳. شبیه‌سازی

۱.۳. قانون تانژانت خطی

پرتاب ابتدا برای زمین مسطح طبق قانون تانژانت خطی شبیه‌سازی می‌شود، زیرا نتایج آن به‌عنوان حدس‌های اولیه برای پرتاب واقعی طبق قانون بهینه، مورد استفاده قرار خواهند گرفت. در این حالت اثر مقاومت هوا در معادلات حذف شده و جاذبه مقداری ثابت در راستای $-Y$ است. در این صورت مسئله‌ی پرتاب بهینه حل تحلیلی دارد و هم‌حالت‌ها با نوشتن هامیلتونین و استخراج معادلات هم‌حالت و اعمال شرایط نهایی ۴ قابل محاسبه‌اند:

$$p_1(t) = 0$$

$$p_2(t) = -l_1$$

$$p_3(t) = l$$

$$p_4(t) = l_1(t - t_f) - l_2$$

$$p_5(t) = - \int_t^{t_f} \frac{T_i(\tau)}{x_\delta^2(\tau)} [p_4 \sin(\beta) + p_3 \cos(\beta)] d\tau \quad (8)$$

همچنین $\beta(t)$ بهینه از شرط بهینگی به‌صورت معادله‌ی ۹ به دست می‌آید:

$$\tan(\beta(t)) = l_1(t - t_f) - l_2 \quad (9)$$

در روابط فوق اعداد l_1 و l_2 با استفاده از روش نیوتن، و به‌گونه‌یی تعیین می‌شوند که شرط ارتفاع نهایی ۱۶۱ کیلومتر و سرعت نهایی به موازات افق ارضا شود. به‌این منظور، ابتدا یک حدس اولیه برای l_1 و l_2 در معادله‌ی ۹ قرار می‌دهیم. سپس با این $\beta(t)$ از معادلات حرکت زمین مسطح انتگرال‌گیری می‌کنیم و بعد با اعمال نمو کوچکی در l_1 و l_2 انتگرال‌گیری مجدد از معادلات حرکت، مشتق‌های جزئی سمت راست معادله‌ی ۴ را نسبت به این دو پارامتر، و به‌صورت عددی محاسبه می‌کنیم. سپس با استفاده از روش نیوتن مقادیر l_1 و l_2 تصحیح می‌شوند. در چند گام تکرار، مقادیر l_1 و l_2 و به‌مقادیر نهایی خود همگرا می‌شوند و سمت راست معادله‌ی ۴ صفر می‌شود. با جایگذاری این مقادیر در معادلات ۸، مقادیر $p_1(0)$ تا $p_5(0)$ به‌سادگی محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} p_1(0) &= 0, p_2(0) = 0/0.279, p_3(0) = 1 \\ p_4(0) &= 5/6941, p_5(0) = -32/1281 \end{aligned} \quad (10)$$

از مقادیر فوق به‌عنوان حدس اولیه برای مسئله‌ی مقدار مرزی در حالت واقعی استفاده خواهد شد.

چنان که پیش‌تر گفته شد، در عمل از قانون تانژانت خطی به‌عنوان قانون هدایت تقریباً بهینه برای پرتاب ماهواره به مدار استفاده می‌شود؛ لذا درگام بعد قانون هدایت تانژانت خطی برای پرتاب ماهواره در حالت واقعی شبیه‌سازی می‌شود. با استفاده از این روش، سرعت ماهواره در هنگام ورود به مدار برای هدایت پرتابگر فوق، برابر ۷۸۴۳ m/s است. این شبیه‌سازی صرفاً به‌منظور مقایسه‌ی نتایج با قسمت بعد انجام شده است.

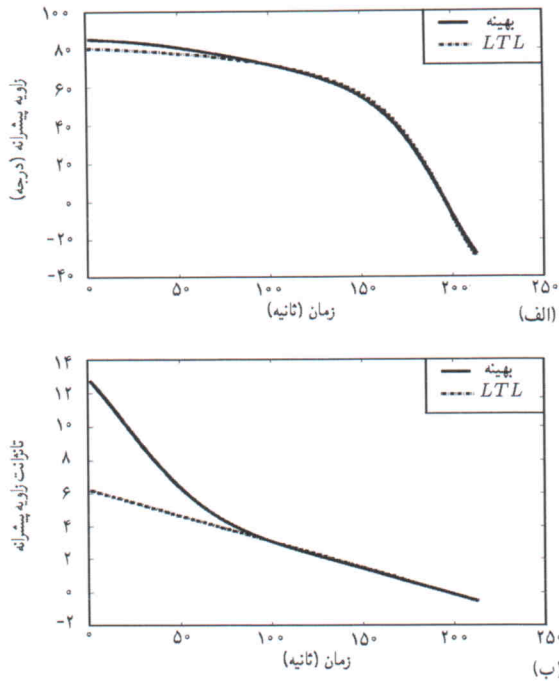
۲.۳. بهینه‌سازی مسیر با اعمال تدریجی مقاومت هوا و استفاده

از هم‌حالت‌های زمین مسطح برای حدس اولیه

در حالت واقعی به دلیل ثابت نبودن جاذبه و نیز وجود مقاومت هوا، قانون هدایت بهینه به‌صورت معادله‌ی ۹ نیست بلکه در هر زمان t ، از رابطه‌ی ۷ به‌دست می‌آید. شرط اولیه‌ی حالت‌ها یا همان شرط مرزی در $t = 0$ به‌صورت معادله‌ی ۱۱ است:

$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \text{ m} \\ 6400000 \text{ m} \\ 0 \text{ m/s} \\ 0 \text{ m/s} \\ 27810 \text{ kg} \end{bmatrix} \quad (11)$$

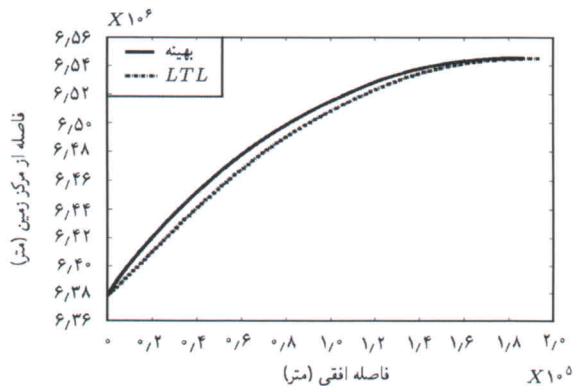
با اعمال شرط نهایی معادله‌ی ۴ و شرایط بهینگی، شرط مرزی



شکل ۳. الف: β بر حسب زمان؛ ب: تانژانت β بر حسب زمان.

(یعنی حل مسئله واقعی) دست یابیم. به دلیل همگرایی سریع روش نیوتن، در هر مرحله با حداکثر ۸ بار رابطه‌ی بازگشتی جواب نهایی با دقت بالایی به دست می‌آید؛ لذا حداکثر ۸۸ بار اجرای الگوریتم برای پیدا کردن حل بهینه کافی است که در مقایسه با روش‌های مستقیم بهینه‌سازی مسیر، خیلی کم است. با این روش سرعت ورود ماهواره به مدار ۷۸۷۸ متر بر ثانیه به دست آمد، در حالی که با استفاده از قانون تانژانت خطی این مقدار برابر ۷۸۴۳ متر بر ثانیه است.

شکل ۳ الف تغییرات زاویه‌ی پیشرانه را بر حسب زمان برای حالات بهینه و قانون تانژانت خطی، و شکل ۳ ب تانژانت این زاویه را نمایش می‌دهند. مطابق انتظار، در صورت استفاده از قانون تانژانت خطی، تانژانت زاویه‌ی پیشرانه با زمان به طور خطی تغییر می‌کند. شکل ۴ نیز



شکل ۴. مسیر پرتاب.

معادله‌ی ۱۲ در $t = t_f$ به دست می‌آید. [۱۲]

$$\theta(\underline{x}(t_f), \underline{p}(t_f)) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - (6561000)^2 \\ x_1 x_2 + x_2 x_4 \\ p_5 \\ p_4 x_1 - p_3 x_2 + 2x_2 x_3 - 2x_1 x_4 \\ (p_4 - 2x_4)(x_1 x_4 - x_2 x_3) - x_2(p_2 x_1 - p_1 x_2) \end{bmatrix} = 0 \quad (12)$$

ملاحظه می‌شود که تعدادی از شرایط مرزی در $t = 0$ و تعدادی در $t = t_f$ داده شده‌اند. برای حل این مسئله مقدار مرزی می‌توان مقادیر به دست آمده‌ی هم‌حالت‌ها در $t = 0$ را که از حل مسئله‌ی زمین مسطح به دست آمده (رابطه ۱۰) به عنوان حدس اولیه به کار برد، و با داشتن $\underline{x}(0)$ و $\underline{p}(0)$ مسئله‌ی مقدار اولیه‌ی فوق را حل کرد. سپس از رابطه‌ی بازگشتی ۱۳ می‌توان $\underline{p}(0)$ را تصحیح کرد (روش نیوتون):

$$\underline{p}(0)^{k+1} = \underline{p}(0)^k - \left(\frac{\partial \theta(\underline{x}(t_f), \underline{p}(t_f))}{\partial \underline{p}(0)^k} \right)^{-1} \theta(\underline{x}(t_f), \underline{p}(t_f)) \quad (13)$$

در رابطه‌ی فوق از رابطه‌ی ۱۲ جایگزین می‌شود. در این رابطه مشتق جزئی نسبت به \underline{p} به روش عددی و با نمودن به تک‌تک درایه‌های آن و انتگرال‌گیری از معادلات حرکت به دست می‌آید.

متأسفانه الگوریتم فوق واگراست، ولی اگر از مقاومت هوا صرف‌نظر کنیم و تنها کروی بودن زمین را در معادلات وارد کنیم، الگوریتم مزبور همگرا می‌شود. ابتکاری که به کار می‌بریم این است که اثر مقاومت هوا را نه دفعتاً، بلکه آن را به تدریج وارد می‌کنیم. برای این منظور با توجه به اینکه مقدار $\underline{p}(0)$ تابعی از k_0 است، یعنی:

$$\underline{p}(0) = \underline{p}(0, k_0) \quad (14)$$

مقدار پارامتر k_0 مربوط به نیروی مقاومت هوا را ابتدا صفر در نظر می‌گیریم و الگوریتم فوق را اجرا می‌کنیم. با این روش $\underline{p}(0)$ جدیدی به دست می‌آید که آن را $\underline{p}(0, 0)$ می‌نامیم. سپس پارامتر k_0 را برابر 0.5 در نظر می‌گیریم و الگوریتم فوق را با حدس اولیه‌ی $\underline{p}(0, 0)$ اجرا می‌کنیم. در این مرتبه مقدار جدیدی برای $\underline{p}(0)$ به دست می‌آید که آن را $\underline{p}(0, 0.5)$ می‌نامیم. در مرحله‌ی بعد k_0 را برابر 0.1 قرار داده و الگوریتم مزبور را با حدس اولیه‌ی $\underline{p}(0, 0.5)$ اجرا می‌کنیم تا $\underline{p}(0, 0.1)$ حاصل شود. به همین ترتیب k_0 را هر بار به اندازه‌ی 0.5 افزایش داده و در هر مرحله $\underline{p}(0)$ به دست آمده در مرحله‌ی قبل را به عنوان حدس اولیه برای $\underline{p}(0)$ استفاده می‌کنیم تا نهایتاً به $\underline{p}(0, 0.5)$

مسئله زمین مسطح بدون هوا که جواب تحلیلی دارد حل شد و سپس مقادیر به دست آمده‌ی هم‌حالت‌ها به‌عنوان حدس اولیه برای حالت زمین‌کروی بدون هوا استفاده شد. سپس به‌تدریج در طی چند مرحله اثر مقاومت هوا وارد معادلات شد تا نهایتاً حل عددی مسئله‌ی هدایت بهینه واقعی به دست آمد. شبیه‌سازی‌ها حاکی از آن است که روش ارائه شده علاوه بر مرتفع کردن مشکل دست‌یابی به حدس اولیه برای حل مسئله‌ی مقدار مرزی مربوط به پرتاب بهینه‌ی ماهواره، از سرعت اجرای بالایی نیز برخوردار است. در واقع می‌توان از این روش برای پیدا کردن سریع مسیر بهینه‌ی پرتاب ماهواره با دقتی بهتر از قانون تانژانت خطی استفاده کرد.

مسیر پرتاب را برای دو حالت پرتاب بهینه و پرتاب با قانون تانژانت خطی نمایش می‌دهد.

نتیجه‌گیری

در این نوشتار برای به دست آوردن مسیر بهینه‌ی پرتاب ماهواره به مدار LEO از روش غیرمستقیم استفاده شد. به دلیل حساسیت روش غیرمستقیم به حدس اولیه و نیز دشوار بودن تعبیر فیزیکی برای هم‌حالت‌ها، پیدا کردن حدس اولیه‌ی که منجر به همگرایی الگوریتم شود مشکل است. برای حل مسئله، ابتدا مسئله‌ی مقدار مرزی برای

پانوشت

1. trajectory optimization
2. direct
3. indirect
4. costates
5. constraints
6. linear tangent law
7. perturbation method
8. the shooting method
9. launcher
10. equality constraints

منابع

1. V. F. Krotov and A. B. Kurzhanski, "National achievements in control theory, The aerospace perspective", *Annual Reviews in control*, **29**, pp. 13-31 (2005).
2. M.S.K. Leung and A. J. Calise, "Hybrid approach to near-optimal launch vehicle guidance", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **17**(5), pp. 881-888 (1994).
3. B.N. Pamadi, "Simple guidance method for single stage to low earth orbit", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **18**(6), pp. 1420-1426 (1995).
4. F. Madeira and A. Rios-Neto, "Guidance and control of a launch vehicle using a stochastic gradient projection method", *Automatica*, **36**, pp. 427-438 (2000).
5. M.H. Graßlin, J. Telaar, and U.M. Schottle, "Ascent and reentry guidance concept based on NLP-methods", *Acta Astronautica*, **55**, pp. 461-471 (2004).
6. D.J. Estep, D.H. Hodges, and M. Warner, "The solution of a launch vehicle trajectory problem by an adaptive finite-element method", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, pp. 4677-4690 (2001).
7. S. Park, "Launch vehicle trajectories with a dynamic pressure constraints", *Journal of Spacecraft and Rockets*, **35**(6), pp. 755-773 (1998).
8. J.T. Betts, "Survey of numerical methods for trajectory optimization", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **21**(2), pp. 193-207 (1998).
9. S. Park and S. R. Vadali, "Touch points in optimal ascent trajectories with first-order state inequality constraints", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **21**(4), pp. 603-610 (1998).
10. P. F. Gath and A. J. Calise, "Optimization of launch vehicle ascent trajectories with path constraints and coast arcs", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **24**(2), pp. 296-304 (2001).
11. Battin, R. H., *An Introduction to the Mathematics and Methods of Astrodynamics*, AIAA Education series, New York (1987).
12. Bryson, A.E. and Ho, Y.C., *Applied Optimal Control*, Blaisdell Publishing Company (1969).
13. H. Seywald and E. M. Cliff, "Neighboring optimal control based feedback law for the advanced launch system", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **17**(6), pp. 1154-1162 (1994).
14. M. J. Bayer, "Analytic performance considerations for lifting ascent trajectories of winged launch vehicles", *Acta Astronautica*, **54**, pp. 713-721 (2004).
15. D. H. Hodges, R. R. Bless, A. J. Calise, and M. Leung, "Finite element method for optimal guidance of an advanced launch vehicle", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, **15**(3), pp. 664-671 (1994).