مجله‌ی علمی و پژوهشی شریف
خرداد ۱۳۸۸، شماره‌ی چهل و هشتم، ص. ۱-؟؟

ضریب طول مؤثر ستون‌های مقطع متغیر در قاب‌های شیب‌دار تک‌دهانه‌ی آزاد در برابر حرکت جانبی و با تکیه‌گاه‌های مفصلی

علی‌اصغر صفوی (کارشناس ارشد)
حمید محرمی (دانشیار)
دانشکده‌ی فنی و مهندسی، بخش مهندسی عمران، دانشگاه تربیت مدرس

از مهم‌ترین پارامترهای طراحی ستون‌ها ضریب طول مؤثر آنها در کمانش است. برای ستون‌های با مقطع متغیر، در گذشته به‌دلیل در دست نبودن حل دقیق معادله‌ی دیفرانسیل تغییرشکل، ضریب طول مؤثر به‌صورت تقریبی و بااستفاده از روش‌های عددی تعیین می‌شد. در سال‌های اخیر، با معرفی نرم‌افزارهای توانای ریاضی، می‌توان معادله‌ی دیفرانسیل تغییرشکل را حل، و ضریب طول مؤثر آنها را به‌صورت دقیق یافت و میزان خطای روش‌های گذشته را بررسی کرد. در این نوشتار با برابر قراردادن «کار خارجی انجام‌شده روی سازه» با «انرژی ارتجاعی خمشی سازه» در اثر کمانش، بار بحرانی سازه و درنتیجه ضریب طول مؤثر ستون‌های آن به‌دست آمده است. سازه‌ی مورد نظر یک قاب شیب‌دار یک‌دهانه‌ی متقارن با مقطع متغیر (سوله) است که برای حالت آزاد در برابر حرکت جانبی و با تکیه‌گاه‌های مفصلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. پس از تحلیل و به‌دست آمدن نمودارهای دقیق طراحی‌که استفاده از آنها بسیار ساده‌تر از نمودارهای آیین‌نامه‌ی $AISC$ است، نتایج حاصله با کار دیگران (روش‌های تقریبی) مقایسه شده است.

واژگان کلیدی: ضریب طول مؤثر، ستون‌های مقطع متغیر، قاب شیب‌دار، روش‌های عددی، روش تحلیلی، کار خارجی، انرژی ارتجاعی خمشی.

aasafavy@yahoo.com
hamid@modares.ac.ir

۱. مقدمه

در برخی از سازه‌ها برای استفاده‌ی بهینه از مصالح، از اعضای با مقطع متغیر استفاده می‌شود. تحلیل پایداری قاب‌ها در این‌گونه اعضا، به‌دلیل متغیربودن ممان اینرسی اعضای غیرمنشوری آن بسیار مشکل‌تر از قاب‌های با اعضای منشوری است. سال‌هاست‌که پژوهشگران به‌دلیل همین مشکلات حل تحلیلی ریاضی، ناچار به استفاده از روش‌های حل عددی و تقریبی شده‌اند.

اولین راه‌حل‌های به‌ثبت رسیده برای محاسبه‌ی بار بحرانی کمانش ارتجاعی ستون‌های ماهیچه‌یی[۱-۳] تماماً تقریبی بوده، و در آنها ستون ماهیچه‌یی با استفاده از ستون‌های پله‌یی تقریب زده می‌شدند.

روش دقیق محاسبه‌ی بار بحرانی کمانش ارتجاعی ستون‌های ماهیچه‌یی برای اولین بار در سال ۱۹۶۲، و با استفاده از توابع بسل ارائه شد[۴]. در سال ۱۹۸۰ راه‌حل تقریبی با روش تفاضلات محدود[۵]، و در سال ۱۹۸۳ راه حل به روش اجزاء محدود[۶] ارائه شد.

پس از آن، در سال ۱۹۸۶، محققین بازنگری جامع و کلی روی رفتار ستون‌های ماهیچه‌یی انجام داده‌اند[۷ و ۸]. آنان نشان داده‌اندکه در دامنه‌ی وسیعی از نسبت‌های ماهیچه‌یی و شرایط انتهایی، مخصوصاً زمانی‌که ستون‌های ماهیچه‌یی با توزیع نیروی محوری در طول خود همراه باشند، منحنی‌ها و جداول مناسبی در دسترس نیست.

نتیجه‌ی تحقیقات انجام شده در سال ۱۹۸۹، پاسخگوی دامنه‌ی وسیعی از ستون‌های ماهیچه‌یی با اشکال هندسیِ گوناگون مقطع بود[۹] و طی آن، ستون‌ها با تغییرات خطی ابعاد در تمام یا برخی از اجزاء تشکیل‌دهنده‌ی مقطع (بال‌ها و یا جان) بررسی شده بودند. شایان ذکر است که در این تحقیق، ستون می‌تواند دارای بارهای محوری متمرکز یا گسترده در طول باشد.

تحقیقات انجام شده تا آن زمان، تماماً بر روی ستون‌های ماهیچه‌یی منفرد بود. برخی از تحقیقات انجام شده پیرامون رفتار و پایداری ستون‌های ماهیچه‌یی تشکیل‌دهنده‌ی قاب‌ها عبارت‌اند از:

۱. محاسبه‌ی ضریب طول مؤثر ستون‌های با مقطع متغیر در قاب‌های شیب‌دار. مبنای این روش استفاده از روش ریلی ـ ریتز و با الهام از روش سری‌های توانی و حساب تغییرات است[۱۰]، و نتیجه‌ی آن یک سری نمودار با علائم و پارامترهای مشابه نمودارهای ژولیان و لورنس است. در این روش قاب متقارن مورد نظر با اعضای مقطع متغیر به یک قاب صلب مستطیلی تبدیل می‌شود

تاریخ: دریافت ۱۳۸۵/۹/۱۸، داوری ۱۳۸۶/۳/۷، پذیرش ۱۳۸۶/۸/۷.

که دارای دو ستون (در طرفین) و دو تیر (در بالا و پایین) است. در قاب جدید ستون‌ها همان ستون‌های قاب قبلی، و تیرها دارای مقطع ثابت‌اند. ممان اینرسی تیر بالا برمبنای سختی خمشی تیر متصل به سر ستون، و ممان اینرسی تیر پایین برمبنای سختی خمشی تکیه‌گاه پای ستون تعیین می‌شود. آنگاه ماتریس سختی قاب جدید در دو حالت حرکت جانبی آزاد و مقید ساخته می‌شود و از معادل صفر قرار دادن دترمینان ماتریس سختی، معادله‌یی حاصل می‌شود که کم‌ترین ریشه‌ی آن، بار بحرانی است. شایان ذکر است که این روش مبنای آیین‌نامه‌ی $AISC$ برای تعیین ضریب طول مؤثر ستون‌ها در قاب‌های شیب‌دار است.

۲. حل معادله‌ی دیفرانسیل تقریبی کمانش ستون‌های قاب با اعضای غیرمنشوری همراه با یک سری فرضیات[۱۱]. در این روش با اعمال شرایط تعادل و پیوستگی در گره‌های آن، روابطی به دست می‌آید که بار بحرانی تقریبی ستون‌های قاب یک‌دهانه و یک‌طبقه ــ با مشخصات معلوم ــ را ارائه می‌دهد.

۳. بررسی رفتار تیرستون‌های با مقطع متغیر در خمش و کمانش، براساس روش‌های انرژی.[۱۲] نتیجه مهمی که از این روش به دست می آید آن است که اگرچه ممکن است ستون‌های مقطع متغیر بار بحرانی بیشتری از ستون‌های منشوری هم‌وزن خود داشته باشند، احتمالاً استفاده از آنها در قاب‌های فضایی[۱] بار بحرانی کمانش کلی سازه را کاهش می‌دهد. طی مثال‌هایی نشان داده شده است که این روش، از روش‌های تقریبی نظیر فن انتگرال‌گیری عددی[۲] و استفاده از جزء منشوری، کاراتر و دقیق‌تر است.

۴. روش تقریبی محاسبه‌ی بار بحرانی قاب‌های صفحه‌یی دارای اعضای با مقطع متغیر.[۱۳] در این روش ستونِ دارای مقطع متغیر با ستونی معادل جایگزین می‌شود. ستون معادل، منشوری و هم‌طول با ستون اولیه است که ممان اینرسی آن (I_{cr}) با محاسبه و استفاده از نمودارهای بی‌بعد تعیین می‌شود. برای این کار ماتریس سختی کل سازه (براساس جواب معادله‌ی دیفرانسیل تغییر شکل ستون) را به دست آورده و از آن برای تعیین بار بحرانی ستون‌های قاب استفاده کردند.

۵. محاسبه‌ی بار بحرانی برای کمانش ستون‌های با مقطع متغیر در قاب‌های شیب‌دار. در این روش با ساختن ماتریسِ سختیِ کلِ سازه، که تابعی از نیروی محوری اعضاء است، اعمال شرایط مرزی در آن ماتریس، و نهایتاً معادل صفر قرار دادن دترمینان آن بار بحرانی به‌دست می آید.[۱۴] شایان ذکر است که در ساخت ماتریس سختی هندسی سازه، به‌جای تابع دقیق ممان اینرسی ستون ــ که برای ستون با جان متغیر و بال یکنواخت، یک تابع درجه سه برحسب متغیر طول است ــ از تابعی تقریبی استفاده می‌شود که در آن از ضرایبی به‌نام ضرایب شکل استفاده شده بود. ماتریس سختی هندسی هر تکه از ستون نیز با استفاده از توابع شکل هرمیتی به‌دست آورده می‌شود.

۶. یکی دیگر ازکارهای تحقیقاتی که در زمینه پیدا کردن طول مؤثر ستون های مقطع متغیر انجام شده است، استفاده از فرمول‌بندی روش‌های تفاضل محدود و کار مجازی برای تعیین بار بحرانی ستون‌ها در یک قاب شیب‌دار (سوله) یک‌دهانه[۱۵] است. در این روش تکیه‌گاه ستون‌ها مفصلی یا گیردار است و تحلیل مسئله برای حالت‌های آزاد و مقید در برابر حرکت جانبی به‌طور جداگانه انجام گرفته است.

چنان‌که ملاحظه می‌شود در همه‌ی روش‌های موجود در ادبیات علمی از روش‌های تقریبی برای یافتن ضریب طول مؤثر ستون‌های مقطع متغیر در قاب‌ها استفاده شده است. در این تحقیق تلاش می‌شود تا به روش تحلیلی به این ضریب دست‌یابیم.

۲. به‌دست آوردن معادله‌ی مشخصه کمانش ستون‌ها برای مود کمانشی نامتقارن

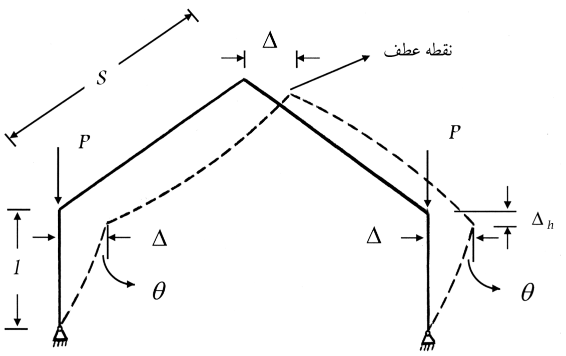
در این پژوهش فقط حالتِ کمانشی نامتقارن ــ اولین حالتِ کمانشِ قاب با حرکت جانبی آزاد ــ بررسی می‌شود (شکل ۱). نقاط متناظرِ دو نیمه‌ی قاب از نظر اندازه تغییر شکل‌های یکسانی دارند. با فرض کمانش ارتجاعی ستون می‌توان معادله‌ی دیفرانسیل تغییر شکل جانبی را در ستونی با تکیه‌گاه مفصلی که به آن نیروی محوری P اثر می‌کند با توجه به شکل ۲ به‌صورت معادله‌ی ۱ نوشت. توجه به این نکته ضروری است که به‌خاطر وقوع کمانش نامتقارن و برای ارضاء تعادل نیروهای تکیه‌گاهیِ قاب در راستای افق، در تکیه‌گاه‌ها نیروی برشی به وجود نمی‌آید.

$$M_c = P\nu = -EI_c\nu'' \qquad (۱)$$

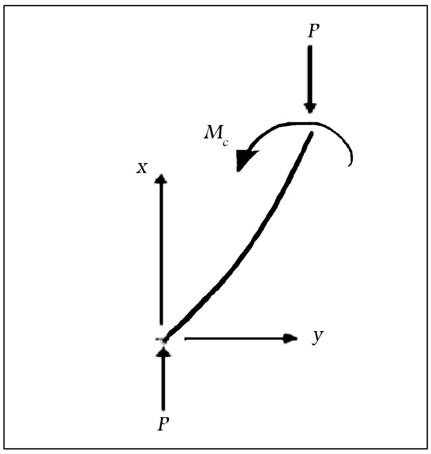
در این رابطه، ν تابع جابه‌جایی جانبی ستون است که در راستای محور y است.

چون کمانش باعث بروز تغییر شکل ناگهانی در سازه می‌شود و درنتیجه نقطه‌ی اثر نیروی محوری (سرستون) به‌طور آنی پایین می‌افتد (به‌اندازه‌ی Δ_h)، کار خارجی انجام شده برابر است با: حاصل‌ضرب نیروها در جابه‌جایی در راستای آنها؛ و حاصل آن برابر است با «مجموع انرژی ارتجاعی در دو ستون (U_c)» به‌اضافه‌ی «مجموع انرژی ارتجاعی در دو تیر (U_b)» (رابطه‌ی ۲).

$$W_{ext} = ۲ \times (P \times \Delta_h) = U_c + U_b \qquad (۲)$$



شکل ۱. شکل کمانش‌یافته‌ی قاب در حالتِ نامتقارن.



شکل ۲. نمودار آزاد بخشی از ستون، از روی تکیه‌گاه.

چنان که مشاهده می‌شود Δ_h، تقریباً برابر است با:

$$\Delta_h = \int_0^{l-\Delta_h} \sqrt{1+\nu'^2}dx - l \approx \int_0^{l} \left(1+\frac{\nu'^2}{2}\right)dx - l = \frac{1}{2}\int_0^l \nu'^2 dx \qquad (۳)$$

در کمانش ارتجاعی فرض می‌شود که تغییر شکل خمشی ستون در ناحیه‌ی ارتجاعی حادث می‌شود. بنابراین، می‌توان از تعریف انرژی ارتجاعی خمشی استفاده کرد (I_c ممان اینرسی ستون در هر نقطه از آن و E مدول کشسانی آن است). با جایگذاری $-EI_c\nu''$ به‌جای یک توان از M_c، و $P\nu$ به‌جای توان دیگر از M_c در رابطه‌ی انرژی، می‌توان نوشت:

$$U_c = 2 \times \int_0^l \frac{M_c^2}{2EI_c}dx = \int_0^l \frac{M_c \times M_c}{EI_c}dx \Rightarrow$$

$$U_c = \int_0^l P\nu \times \left(\frac{-EI_c\nu''}{EI_c}\right)dx = \int_0^l -P\nu\nu''\, dx \qquad (۴)$$

با استفاده از روش جزء به جزء، انتگرال انتهایی به رابطه‌ی ۵ تبدیل می‌شود:

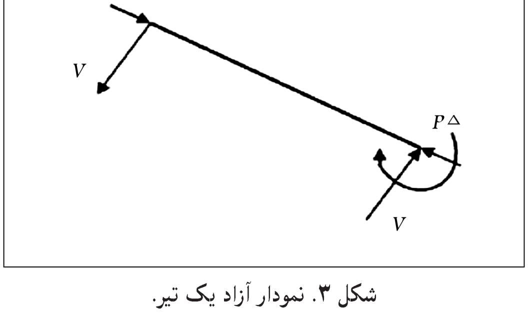
$$\Rightarrow U_c = \int_0^l -P\nu\nu''\, dx = -P\left(\nu\nu' - \int \nu'^2 dx\right)_0^l = -P\left(\Delta \times \theta\right) + P\int_0^l \nu'^2 dx \qquad (۵)$$

می‌دانیم که:

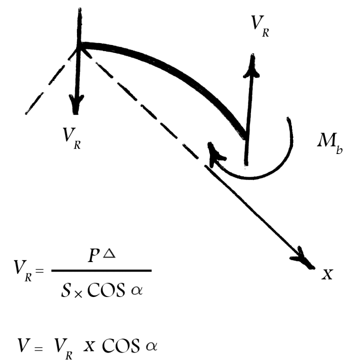
$$\Delta = \nu_l \qquad \theta = \nu_l' \qquad (۶)$$

Δ جابه‌جایی افقی، و θ زاویه‌ی دوران در سر ستون است. به‌همین ترتیب می‌توان مجموع انرژی خمشی تیرها را تعریف کرد. در حالت کمانش نامتقارن، لنگر در تاج (رأس) ستون‌های قاب شیب‌داری که در برابر حرکت جانبی آزاد و تکیه‌گاه‌هایش مفصلی است، معادل صفر می‌شود (نقطه‌ی عطف). از طرفی لنگر داخلی در بالای ستون برابر است با $P\Delta$، و بنابراین با در نظر گرفتن نمودار آزاد یک تیر، نیروی برشی (V) به‌صورت شکل ۳ درخواهد آمد:

$$V = \frac{P\Delta}{s} \qquad (۷)$$



شکل ۳. نمودار آزاد یک تیر.



شکل ۴. نمودار آزاد قسمتی از تیر که از رأس سوله جدا شده است.

که در آن s طول تیر مورب است و مبدأ محور x در تاجِ قاب شیب‌دار منظور می‌شود (شکل ۴). بدین ترتیب تابع لنگر خمشی در طول تیر به‌صورت رابطه‌ی ۸ به‌دست می‌آید:

$$M_b = Vx = \frac{P\Delta}{s}x \qquad (۸)$$

و در نتیجه:

$$U_b = 2 \times \int_0^s \frac{M_b^2}{2EI_b}dx = \int_0^s \frac{\left(\frac{P\Delta}{s}x\right)^2}{EI_b}dx = \frac{1}{E}\left(\frac{P\Delta}{s}\right)^2 \int_0^s \frac{x^2}{I_b}dx \qquad (۹)$$

(I_b ممان اینرسی تیر در طول آن است.)

با مساوی قرار دادن کار خارجی و انرژی ارتجاعی سازه، و تعریف I_5 طبق رابطه ۱۰ معادله‌ی مشخصه‌ی بار بحرانی ستون‌ها به‌دست می‌آید (معادله‌ی ۱۱):

$$I_5 = \int_0^s \frac{x^2}{I_b}dx \qquad (۱۰)$$

$$W_{ext} = P\int_0^l \nu'^2 dx = U_c + U_b = -P\Delta \times \theta + P\int_0^l \nu'^2 dx + \frac{1}{E}\left(\frac{P\Delta}{s}\right)^2 I_5 \Rightarrow P = \frac{Es^2}{I_5}\frac{\theta}{\Delta} \qquad (۱۱)$$

در روابط فوق θ, Δ توابع فوق هندسی[3] مبتنی بر نیروی محوری ستون هستند. بار بحرانی کوچک‌ترین ریشه‌ی معادله‌ی مشخصه‌ی بالاست.

۳. فرمول‌بندی مسئله برای رسم نمودارهای ضریب طول مؤثر ستون در قاب‌ها با اعضای I شکل

در این بخش مبنای فرمول‌بندی برای برنامه‌نویسی تعیین ضریب طول مؤثر ستون با تکیه‌گاه مفصلی در قاب شیب‌دار مقطع متغیر با حرکت جانبی آزاد بیان می‌شود. معادله‌ی دیفرانسیل تغییر شکل ستون با تکیه‌گاه مفصلی در قاب شیب‌دار با حرکت

جانبی آزاد عبارت است از:

$$P\nu + EI_c(x)\,\nu'' = 0 \qquad \nu_0 = 0 \tag{۱۲}$$

که در آن $I_c(x)$ ممان اینرسی ستون در فاصله‌ی x از پای آن است. از تقسیم دو طرف تساوی بر E رابطه‌ی ۱۳ به دست می‌آید:

$$\frac{P}{E}\nu + I_c(x)\,\nu'' = 0 \tag{۱۳}$$

برای I_0 و $I_c(x)$ می‌توان رابطه‌های ۱۴ و ۱۵ را نوشت:

$$I_0 = \frac{1}{12}t_w d_0^3 + \frac{1}{2}A_f d_0^2 \qquad A_f = b_f t_f \tag{۱۴}$$

$$I_c(x) = \frac{1}{12}t_w d_x^3 + \frac{1}{2}A_f d_x^2 \tag{۱۵}$$

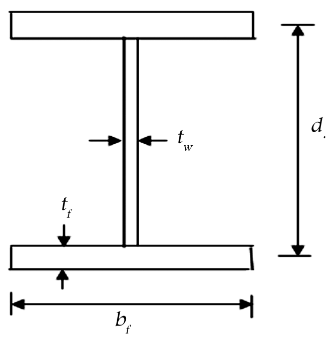
با معرفی پارامتر γ رابطه ۱۷ به‌دست می‌آید.

$$\gamma = \frac{d_T}{d_0} - 1 \tag{۱۶}$$

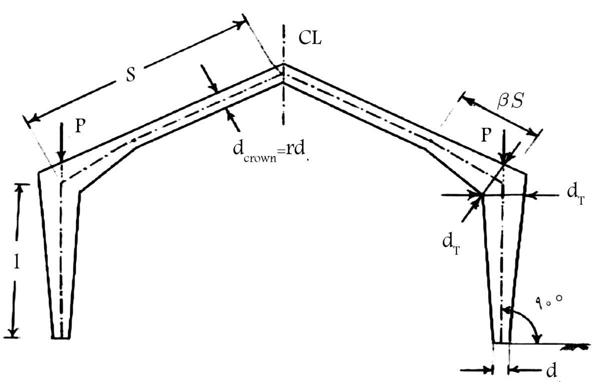
$$d_x = d_0\left(\frac{\gamma}{l}x + 1\right) \tag{۱۷}$$

در روابط بالا t_w ضخامت جان، d_0 فاصله‌ی مرکز به مرکز دو بال مقطع (عمق مؤثر) در پای ستون، A_f مساحت بال ستون، b_f و t_f عرض و ضخامت بال مقطع اعضا، d_T عمق مؤثر ستون در بالای آن، γ نسبت عمق مؤثر ستون در بالای آن به عمق مؤثر ستون در پای آن منهای یک، l طول ستون و d_x عمق مؤثر ستون به فاصله‌ی x از پای ستون هستند (شکل‌های ۵ و ۶). با جایگذاری $d_0\left(\frac{\gamma}{l}x+1\right)$ به جای d_x در رابطه‌ی ۱۵ می‌توان نوشت:

$$I_c(x) = \left[d_0\left(\frac{\gamma}{l}x+1\right)\right]^2\left[\frac{1}{12}t_w d_0\left(\frac{\gamma}{l}x+1\right) + \frac{1}{2}A_f\right] \tag{۱۸}$$



شکل ۵. مقطع پای ستون.



شکل ۶. مشخصات هندسی قاب شیب‌دار.

با به دست آوردن مقدار $I_c(x)$ از رابطه‌ی ۱۸، آن را در رابطه‌ی ۱۳ جایگزین می‌کنیم و آنگاه از تقسیم طرفینِ تساویِ حاصله بر $\frac{1}{12}t_w d_0^3$ خواهیم داشت:

$$\frac{P}{E\left(\frac{1}{12}t_w d_0^3\right)}\nu + \left(\frac{\gamma}{l}x+1\right)^2\left[\left(\frac{\gamma}{l}x+1\right) + 6\frac{A_f}{t_w d_0}\right]\nu'' = 0 \tag{۱۹}$$

در نظر می‌گیریم:

$$t_w d_0 = A_{w_0} \qquad m = \frac{A_f}{A_{w_0}} \tag{۲۰}$$

و آنگاه از رابطه‌ی ۱۹ به رابطه‌ی ۲۱ خواهیم رسید:

$$\frac{P}{E\left(\frac{1}{12}t_w d_0^3\right)}\nu + \left(\frac{\gamma}{l}x+1\right)^2\left[\left(\frac{\gamma}{l}x+1\right) + 6m\right]\nu'' = 0 \tag{۲۱}$$

مقدار ضریب طول مؤثر به مقدار ضریب کشسانی بستگی ندارد (می‌توان آن را برابر واحد در نظر گرفت). همچنین می‌توان نشان داد که اگر طول تمام اعضا بر عدد ثابتی نظیر l (طول ستون) تقسیم شود، در مقدار ضریب طول مؤثر تغییری به‌وجود نمی‌آید[۱۶]. درواقع با این کار قابی جدید حاصل می‌شود که از لحاظ هندسی با قاب پیشین متشابه است. در قاب جدید طول ستون‌ها برابر واحد، و طول تیرها برابر $\frac{s}{l}$ (نسبت طول تیر به طول ستون در قاب اولیه) است. پس اگر $l = 1$, $E = 1$، آنگاه:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 I_0}{(K_\gamma)^2} \tag{۲۲}$$

که در آن P_{cr} بار بحرانی، I_0 ممان اینرسی مقطع در پای ستون و حول محور عمودمنصف جان، K_γ ضریب طول مؤثر، و l ارتفاع ستون است.

به‌علاوه می‌توان ثابت کرد که اگر ممان اینرسی تمام نقاط یک سازه (تیرها و ستون‌ها) بر عدد ثابتی نظیر $\frac{1}{12}t_w d_0^3$ تقسیم شود باز هم در مقدار ضریب طول مؤثر تغییری به‌وجود نمی‌آید[۱۶]. با تقسیم ممان اینرسی ستون در پای آن (I_0)، بر عدد ثابت $\frac{1}{12}t_w d_0^3$ می‌توان نوشت:

$$\frac{I_0}{\frac{1}{12}t_w d_0^3} = \frac{\frac{1}{12}t_w d_0^3 + \frac{1}{2}A_f d_0^2}{\frac{1}{12}t_w d_0^3} = 1 + 6m \tag{۲۳}$$

بنابراین با تقسیم طرفین رابطه‌ی ۲۲ بر $\frac{1}{12}t_w d_0^3$ می‌توان پارامتر p را به‌صورت رابطه‌ی ۲۴ تعریف کرد:

$$p = \frac{P_{cr}}{\frac{1}{12}t_w d_0^3} = \frac{\pi^2 I_0}{(K_\gamma)^2\frac{1}{12}t_w d_0^3} = \left(\frac{\pi}{K_\gamma}\right)^2(1+6m) \tag{۲۴}$$

حال رابطه‌ی ۲۱ را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۲۵ نوشت:

$$p\nu + (\gamma x + 1)^2\left[(\gamma x + 1) + 6m\right]\nu'' = 0 \tag{۲۵}$$

با حل معادله‌ی دیفرانسیل ۲۵ (توسط نرم‌افزار $MATLAB$)، تابع تغییرشکل جابه‌جایی (ν) به‌دست می‌آید. چون تنها یک شرط مرزی برای حل این تابع وجود دارد ($\nu_0 = 0$) تابع جواب برحسب ثابت عددی نامشخص به‌دست می‌آید. حال طبق رابطه‌ی ۱۱ (معادله‌ی مشخصه) برای تعیین بار بحرانی باید میزان چرخش و جابه‌جایی سرِ ستون در دسترس باشد. بدین‌منظور یک‌بار مقدار تابع جابه‌جایی ν برای $x = 1$ محاسبه می‌شود و Δ به‌دست می‌آید، بار دیگر مقدار مشتقِ تابع ν

برای $x = 1$ محاسبه، و θ تعیین می‌شود. یادآور می‌شود که با تقسیم این دو مقدار بر هم، ثابت عددی نامشخص از صورت و مخرج کسرِ $\frac{\theta}{\Delta}$ ساده می‌شود.

اینک باید $I_5 = \int_0^{\frac{s}{l}} \frac{x^2}{I_b} dx$ را به دست آورد. (از آنجا که قرار شد طول تمام اعضا به طول ستون تقسیم شود، به جای s از $\frac{s}{l}$ به‌عنوان طول کل تیر استفاده می‌شود.) نسبت «عمق مؤثر تیر (فاصله‌ی مرکز به مرکز دو بال) در رأس قاب شیب‌دار به عمق مؤثر ستون درپای آن»، را با حرف r نمایش می‌دهیم. ممان اینرسی تیر در قسمت منشوری آن برابر است با:

$$I_b(x) = \frac{1}{12} t_w r^3 d_0^3 + \frac{1}{2} A_f r^2 d_0^2 \qquad 0 < x < (1-\beta)\frac{s}{l} \quad (26)$$

β نسبت طول قسمت ماهیچه‌یی تیر به کل طول آن است.

ممان اینرسی مقطعی از قسمت ماهیچه‌یی تیر که فاصله‌ی آن از رأس قاب شیب‌دار x است، به‌صورت رابطه‌ی ۲۷ به دست می‌آید: (برای $(1-\beta)\frac{s}{l} < x < \frac{s}{l}$)

$$I_b(x) = \frac{1}{12} t_w (rd_0)^3 \left[1 + \gamma_b \frac{x - (1-\beta)\frac{s}{l}}{\beta \frac{s}{l}}\right]^3 + \frac{1}{2} A_f (rd_0)^2 \left[1 + \gamma_b \frac{x - (1-\beta)\frac{s}{l}}{\beta \frac{s}{l}}\right]^2 \quad (27)$$

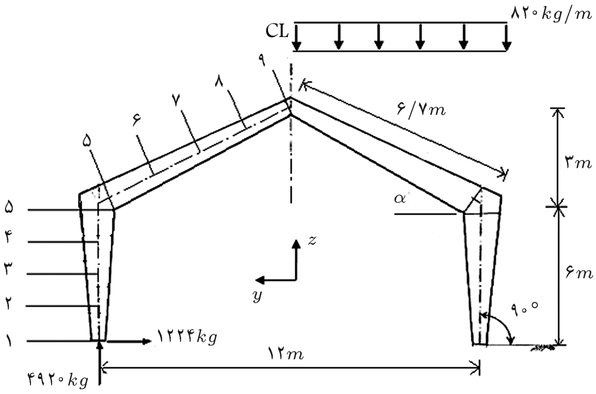
برای تعیین ضریب طول مؤثر، ممان اینرسی ستون بر مقدار $\frac{1}{12} t_w d_0^3$ تقسیم شده است و بنابراین، در محاسبه‌ی I_5 نیز باید ممان اینرسی قسمت‌های منشوری و ماهیچه‌یی تیر بر $\frac{1}{12} t_w d_0^3$ تقسیم شود. با انجام این کار I_5 مطابق رابطه‌ی ۲۸ به‌دست می‌آید:

$$I_5 = \int_0^{(1-\beta)\frac{s}{l}} \frac{x^2}{r^3 + 6mr^2} dx + \int_{(1-\beta)\frac{s}{l}}^{\frac{s}{l}} \frac{x^2}{\left\{ r^3 \left[1 + \gamma_b \frac{x-(1-\beta)\frac{s}{l}}{\beta \frac{s}{l}}\right]^3 + 6mr^2 \left[1 + \gamma_b \frac{x-(1-\beta)\frac{s}{l}}{\beta \frac{s}{l}}\right]^2 \right\}} dx \quad (28)$$

مقدار رابطه‌ی ۲۸ را نرم‌افزار محاسبه می‌کند و بدین‌ترتیب I_5 نیز محاسبه می‌شود. حال می‌توان نوشت:

$$p = \frac{\left(\frac{s}{l}\right)^2}{I_5} \frac{\theta}{\Delta} \quad (29)$$

θ, Δ توابعی برحسب p هستند و رابطه‌ی ۲۹ معادله‌یی برحسب مجهول p است. کم‌ترین مقدار غیر صفر p که در این رابطه صدق کند، p_{cr} است. به این ترتیب ضریب طول مؤثر (K_γ) نیز از رابطه‌ی ۲۴ تعیین می‌شود. برای زوج معین γ و β یک نمودار رسم می‌شود که در آن محور افقی، نماینده‌ی نسبت $\frac{s}{l}$ و محور قائم نماینده‌ی K_γ است. هر نمودار شامل چند منحنی است که هرکدام برای یک r مشخص رسم می‌شود. با معلوم‌کردن γ و β و r در برنامه، به‌ازاء نسبت‌های مختلف $\frac{s}{l}$ در یک بازه‌ی مشخص و با کمک معادله‌ی ۲۹، بار بحرانی و درنتیجه K_γ متناظر به دست می‌آید. پس از جایگذاری نقاط حاصله در دستگاه مختصات نمودار (K_γ برحسب $\frac{s}{l}$) و آنگاه وصل کردن آن نقاط، یک منحنی رسم می‌شود[16].



مقطع ستون	$d(cm)$	$A(cm^2)$	$I_X(cm^4)$	$S_X(cm^3)$	$r_X(cm)$
۱	۲۰	۲۰	۱۵۲۷	۱۴۵	۸/۷
۲	۳۰	۲۴	۳۶۹۱	۲۳۸	۱۲/۴
۳	۴۰	۲۸	۷۰۵۴	۳۴۴	۱۵/۹
۴	۵۰	۳۲	۱۱۸۱۷	۴۶۳	۱۹/۲
۵	۶۰	۳۶	۱۸۱۸۱	۵۹۶	۲۲/۴
مقطع تیر					
۵	۶۰	۳۶	۱۸۱۸۱	۵۹۶	۲۲/۴
۶	۵۴	۳۳/۶	۱۴۱۵۹	۵۱۵	۲۰/۵
۷	۴۸	۳۱/۲	۱۰۷۴۳	۴۴۷	۱۸/۵
۸	۴۲	۲۸/۸	۷۸۸۸	۳۶۷	۱۶/۵
۹	۳۶	۲۶/۴	۵۵۵۲	۳۰۰	۱۴/۵

شکل ۷. شکل هندسی و مشخصات مقاطع در یک مثال نمونه.

۴. حل مثال

در این قسمت دو مثال آورده شده است که هرکدام از آنها یک‌بار با روش پیشنهادی این مقاله، و یک بار با روش پیشنهادی Lee[10] که توسط آئین نامه AISC توصیه شده است، حل می‌شوند. در قسمت نتیجه‌گیری این دو روش با هم مقایسه می‌شوند.

مثال ۱: ضریب طول مؤثر ستون‌های قاب شیب‌دار شکل ۷ به دهانه‌ی ۱۲متر خواسته شده است. شدت بارگسترده $820\,kg/m$، طول تیر ۶۷۰سانتی‌متر، طول ستون ۶۰۰سانتی‌متر و زاویه‌ی تیر با افق α است.

الف) حل با روش پیشنهادی

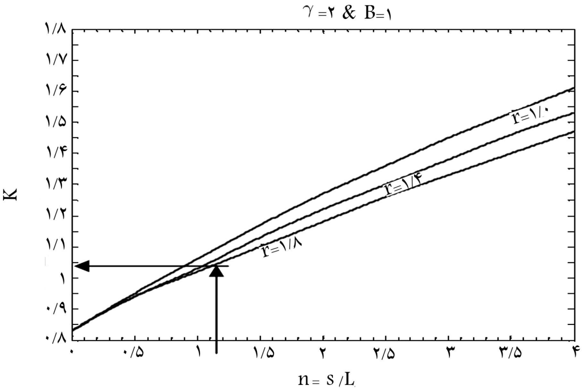
برای ستون‌ها داریم:

$$\gamma_{1-5} = \frac{d_5}{d_1} - 1 = \frac{60}{20} - 1 = 2$$

به‌علاوه چون تمام طول تیر ماهیچه‌یی است ($\beta = 1$)، از نمودار با شرایط $\beta = 1$ و $\gamma = 2$ استفاده می‌شود (شکل ۸). در این سوله

$$r = \frac{d_{crown}}{d_0} = \frac{36}{20} = 1.8$$

و به‌ازای $n = \frac{s}{L} = \frac{670}{600} = 1.116$ در منحنیِ $r = 1.8$ خواهیم داشت: $K_\gamma = 1.04$.



شکل ۸. یکی از نمودارهای ضریب طول مؤثر برای قاب آزاد در برابر حرکت جانبی ـ تکیه‌گاه مفصلی و $\gamma = ۲$ و $\beta = ۱$.

ب)حل با روش پیشنهادیِ ۱۹۷۲

از آنجا که تیر متصل به بالای ستون دارای مقطع متغیر است باید ممان اینرسی معادل آن به‌کمک روابط و منحنی‌های این روش تعیین شود. برای این کار ابتدا مقادیر زیر به دست می‌آیند:

$$\gamma_{۵-۹} = \frac{d_۵}{d_۹} - ۱ = \frac{۶۰}{۳۶} - ۱ = ۰/۶۶۶$$

$$\alpha = \tan^{-۱}\left(\frac{۳۰۰}{۶۰۰}\right) = ۲۶/۵۶^{\circ}$$

نیروی محوری تیر ($P_۵$) و بار اویلر ستون دو سر مفصل ($P_{e۹}$)، که طول آن با طول تیر مورب و ممان اینرسی آن با ممان اینرسی تیر در انتهای کوچک آن برابر است، به دست می‌آید:

$$P_۵ = ۴۹۲۰ \sin\alpha + ۱۲۲۴ \cos\alpha = ۳۲۹۵ \; kg$$

$$P_{e۹} = \frac{\pi^۲ EI_۹}{s^۲} = \frac{\pi^۲ \times ۲/۱e۶ \times ۵۵۵۲}{۶۷۰^۲} = ۲۵۶۳۴۱ \quad kg$$

$$\frac{P_۵}{P_{e۹}} = \frac{۳۲۹۵}{۲۵۶۳۴۱} = ۰/۰۱۲۵$$

(در شکل‌های ۹ تا ۱۱، C و T به‌ترتیب نماینده‌ی فشاری و کششی بودن نیروی موجود در تیر است.)

با توجه به‌این که $\gamma_{۵-۹} = ۰/۶۶۶$ و$\frac{P_۵}{P_{e۹}} = \frac{۳۲۹۵}{۲۵۶۳۴۱} = ۰/۰۱۲۵$ ، و نیز با استفاده از شکل‌های ۹ تا ۱۱ ضرایب سختی و انتقال لنگر به‌دست می‌آیند:

$$K_{AA} = ۲/۱ \left(\frac{۴EI_۹}{b_T}\right) \qquad C_{BA} = ۰/۶۳ \qquad C_{AB} = ۰/۳۸$$

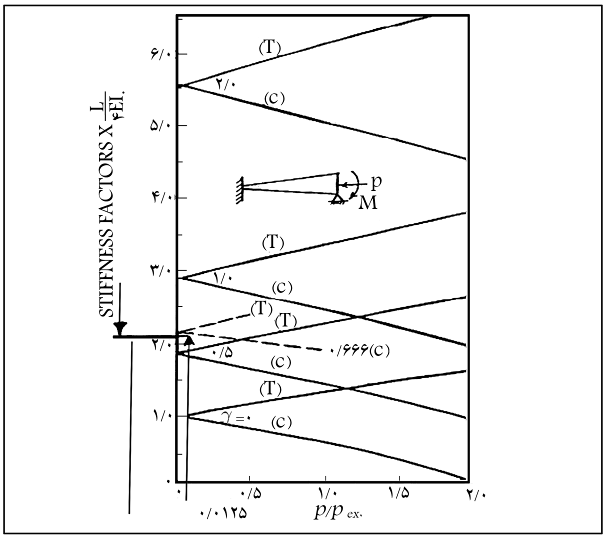
به‌کمک رابطه‌ی زیر ممان اینرسی تیر معادل تعیین می‌شود:

$$I_T = \frac{۶۷۰}{۳E} \times ۲/۱ \left(\frac{۴E \times ۵۵۵۲}{۶۷۰}\right)$$
$$(۱ - ۰/۳۸ \times ۰/۶۳) = ۱۱۸۲۴ \; cm^۴$$

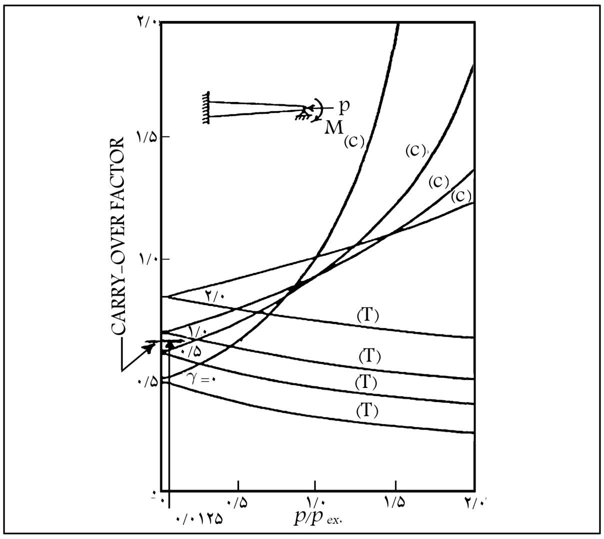
$$G_T = \frac{b_T I_۰}{l I_T} = \frac{۶۷۰ \times ۱۵۲۷}{۶۰۰ \times ۱۱۸۲۴} = ۰/۱۴۴$$

برای ستون ۱ـ۵ (ستون سمت چپ) داریم:

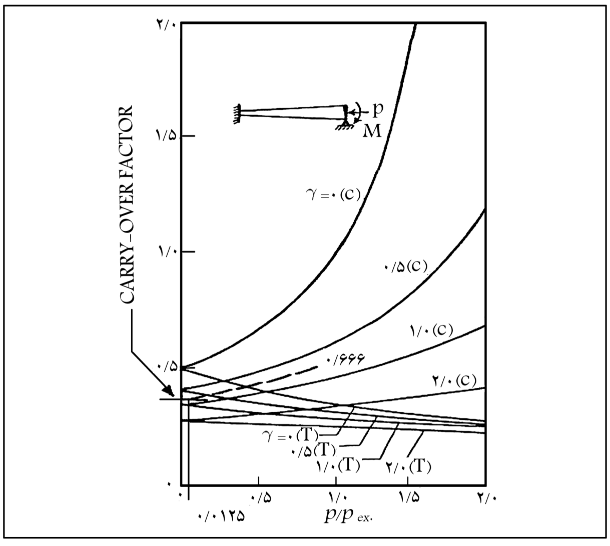
$$\gamma_{۱-۵} = \frac{d_۵}{d_۱} - ۱ = ۲$$



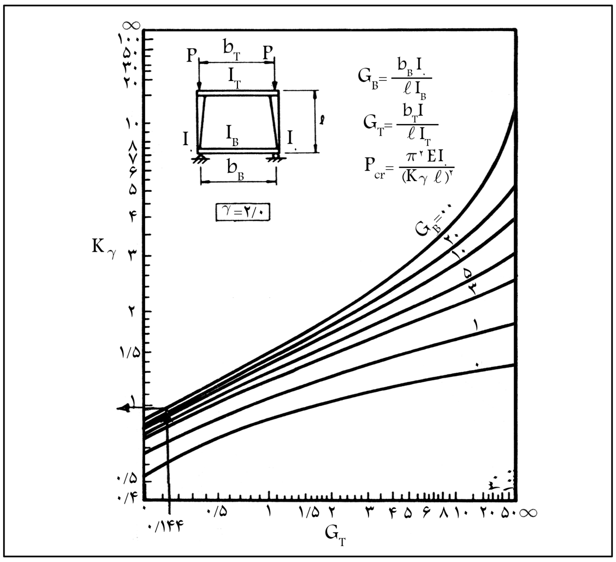
شکل ۹. مقادیر $K_{AA} \times b/(۴EI_۰)$.



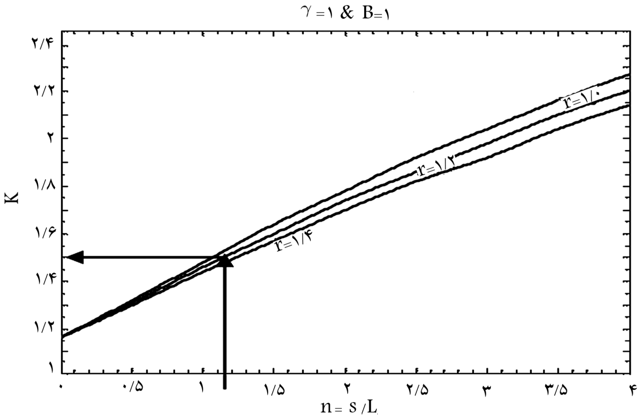
شکل ۱۰. ضریب انتقال لنگر (C_{BA}).



شکل ۱۱. ضریب انتقال لنگر (C_{AB}).



شکل ۱۲. ضریب طول مؤثر ستون‌ها با $\gamma = ۲$ در قاب آزاد در برابر حرکت جانبی [۱۰].



شکل ۱۳. یکی از نمودارهای ضریب طول مؤثر برای قاب آزاد در برابر حرکت جانبی ـ تکیه‌گاه مفصلی و $\gamma = ۱$ و $\beta = ۱$.

مقدار نظری G_B برای تکیه‌گاه مفصلی بی‌نهایت است؛ بنابراین با استفاده از نمودار شکل ۱۲ برای ضریب طول مؤثر داریم: (در محور افقی این شکل به‌جای G از حرف R استفاده شده است).

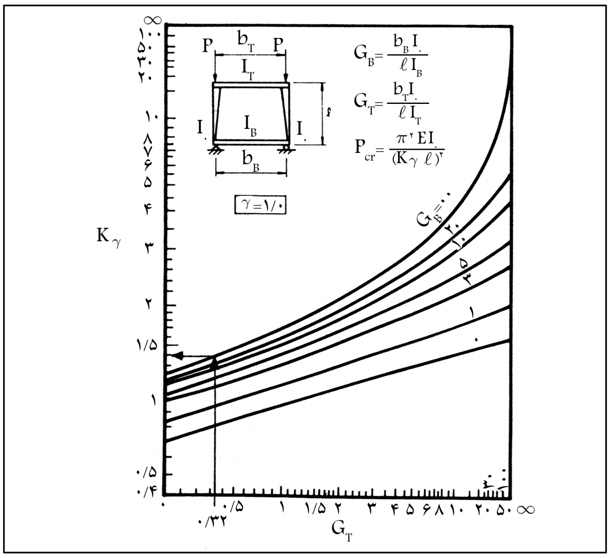
$$K_\gamma = ۰٫۹۹$$

مثال ۲: مثال ۱ با فرض آن‌که عمق ستون در تکیه‌گاه برابر با ۳۰ سانتی‌متر منظور شده، ابعاد تیر تغییر داده نشود و بار قائم به‌صورت متمرکز بر سرِ ستون‌ها وارد شود، دوباره حل می‌شود. در این مثال γ ستون برابر ۱ به‌دست می‌آید ($\gamma = \frac{۶۰}{۳۰} - ۱ = ۱$) و نیروی محوری تیرها صفر می‌شود.

الف) حل مثال با روش پیشنهادی

چون تمام طول تیر ماهیچه‌یی است ($\beta = ۱$)، از نمودار با شرایط $\gamma = ۱, \beta = ۱$ استفاده می‌شود (شکل ۱۳). در این سوله

$$r = \frac{d_{crown}}{d_\circ} = \frac{۳۶}{۳۰} = ۱٫۲$$



شکل ۱۴. ضریب طول مؤثر ستون‌ها با $\gamma = ۱$ در قاب آزاد در برابر حرکت جانبی [۱۰].

و به‌ازای $n = \frac{s}{L} = \frac{۶۷۰}{۶۰۰} = ۱٫۱۱۶$ در منحنیِ $r = ۱٫۲$ خواهیم داشت: $K_\gamma = ۱٫۵$.

ب) حل مثال با روش پیشنهادی ۱۹۷۲

$$I_\circ = \frac{۱}{۱۲} \times ۰٫۴ \times ۳۰^۳ + \frac{۱}{۲} \times ۱۲ \times ۰٫۵ \times ۳۰^۲ = ۳۶۰۰\ cm^۴$$

چون در تیرها نیروی محوری به وجود نمی‌آید، با در نظر گرفتن مقدار صفرِ روی محور افقی شکل‌های ۹ تا ۱۱ و در نظر داشتن $\gamma_{۵-۹} = ۰٫۶۶۶$، مقادیر سختی و ضرایب انتقال به دست می‌آیند:

$$K_{AA} = ۲٫۲۳ \left(\frac{۴EI_۹}{b_T}\right) \qquad C_{BA} = ۰٫۶۳ \qquad C_{AB} = ۰٫۳۸$$

برای تعیین I_T:

$$I_T = \frac{۶۷۰}{۳E} \times ۲٫۲۳ \left(\frac{۴E \times ۵۵۵۲}{۶۷۰}\right)(۱ - ۰٫۳۸ \times ۰٫۶۳) = ۱۲۵۵۵\ cm^۴$$

$$G_T = \frac{b_T I_\circ}{l I_T} = \frac{۶۷۰ \times ۳۶۰۰}{۶۰۰ \times ۱۲۵۵۵} = ۰٫۳۲۰$$

با استفاده از نمودار ضریب طول مؤثر برای ستون با $\gamma = ۱$ و منحنی $G_B = \infty$ (شکل ۱۴):

$$K_\gamma = ۱٫۴$$

۵. نتیجه‌گیری

در این نوشتار تعیین باربحرانی (و ضریب طول مؤثر) ستون‌های قاب‌های شیب‌دار آزاد در برابر حرکت جانبی با تکیه‌گاه‌های مفصلی، با روش انرژی و با کمک حل دقیق معادله‌ی دیفرانسیل تغییرشکل ارائه شده است. نهایتاً معادله‌ی مشخصه‌یی به‌دست آمد که کوچک‌ترین ریشه‌ی آن بار بحرانی است. با بررسی مسئله درمی‌یابیم:

الف) چنان‌که از روند حل مثال‌ها فهمیده می‌شود راه رسیدن به جواب با روش پیشنهادی بسیار ساده‌تر است و در ضمنِ نزدیکی جواب‌های دو مثال، روش

پیشنهادی حاشیه‌ی ایمنی بالاتری دارد. اگر لازم باشد اثر نیروی محوری در سختی خمشی تیرهای مورب درنظر گرفته شود، اعمال بار قائم بر قاب شیب‌دار باید به‌گونه‌یی باشد که در تیرها نیروی محوری به‌وجود آید؛ مثلاً باید بار را به‌طور گسترده بر قاب وارد کرد. در اثر اعمال چنین باری، دو سرِ ستون‌ها از هم دور شده و کمانش متقارن رخ می‌دهد. آیین‌نامه‌ی $AISC$ علی‌رغم کمانش متقارن قاب، و به‌تبع بررسی‌های محققین[۱۰]، کمانش نامتقارن (شکل ۱) را برای این حالت در نظر می‌گیرد ــ فقط به این دلیل که از حرکت جانبی قاب جلوگیری نشده است! روش پیشنهادی فاقد چنین فرضِ نادرستی است.

ب) مشاهده می‌شود که بار بحرانی و ضریب طول مؤثر ستون‌ها در شرایط مورد مطالعه (که بار قائم به‌صورت متمرکز روی ستون‌ها اعمال می‌شود) به سختیِ خمشیِ تیر و ستون وابسته است و به زاویه‌ی شیب تیر مورب (α) بستگی ندارد.

پانوشت

1. space frames
2. numerical integration technique
3. hypergeometric

منابع

1. Timoshenko, S.P. "Buckling of bars of variable cross section", Bulletin of the Polytechnic Institute, Kiev, U.S.S.R (1908).
2. Morley, A. "Critical loads for long tapering struts", Engry., London, England, pp.104, 295 (1917).
3. Dinnik, A.N. "Design of columns of varying cross section", Translated from Russian by Majetz, Transactions, ASME 51, APM-51-11 (1929) and ASME54, APM-54-16 (1932).
4. Gere, J.M., and Carter, W.O. "Critical buckling loads for taperd columns", *Journal of Structural Division. ASCE*, **88**(1), pp.1-11 (1962).
5. Iremonger, M.J. "Finite difference buckling analysis of nonuniform columns", *Comput. Struct.*, **12**(5), pp. 741-748 (1980).
6. Karabalis, D.L., and Beskos, D.E. "Static, dynamic and stability analysis of structures composed of tapered beams", *comput. Struct.* **16**(6), pp. 731-748 (1983).
7. Banerjee, J.R., and Williams, F.W. "Exact bernoulli-euler static stiffness matrix for a range of tapered beam-columns", *Int. J. Number. Methods Eng.*, **23**(9), pp. 1615-1628 (1986).
8. Ermopoulos, J.C. "Buckling of tapered bars under steped axial loads", *ASCE*, **112**(6), pp. 1346-1354 (1986).
9. Williams, F.W., and Gary, Aston. "Exact or lower bound tapered columns buckling loads", *ASCE*, **115**(5), pp.1088-1100 (1989).
10. Lee, G.C.; Morrell, M.L. and Ketter, R.L. "Design of tapered members", *Welding Research Council Bulletin*, (173) (June 1972).
11. Irani, F. "Stability of one bay symmetrical frames with non-uniform members", *Journal of Engineering Islamic Republic of Iran*, **1**(4) (Nov.1988).
12. Al-Gahtani, H.J. "Exact stiffness for tapered members", *Journal of Structural Engineering*, **122**(10), pp. 1234-1239 (1996).
13. Nikitas, B., and Dimitris, L.K. "Efficient computation of buckling loads for plane steel frames with tapered members" (2004). and http://www.elsevier.com/locate/engstruct
14. Shaverdi, y., "The effective length of members of varying cross sections" M.Sc. Thesis, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran (1997).
15. Safavi, A.A. and Moharrami, H. "The Critical load evaluation of tapered columns in gabled frames using finite difference and virtual work method." *Proceeding of 3rd National Congress on Civil Engineering, Tabriz, Iran*, (1-3 may 2007).
16. Safavi, A.A. "The effective length of tapered columns in gabled frames" M.Sc. Thesis, Tarbiat Modarres University, Tehran, Iran (2006).