

مطالعه‌ی چگونگی تعیین عمق بستر مواد در کوره‌ی دوار با استفاده از روش تحلیل معکوس

محمد مهدی حیدری (دانشجوی دکتری)
بیژن فرهانیه (استاد)

دانشکده‌ی مهندسی مکانیک، قطب علمی تبدیل انرژی، دانشگاه صنعتی شریف

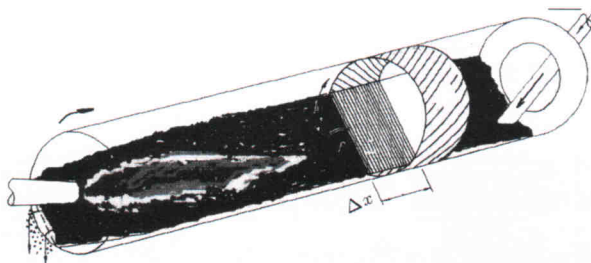
«تحلیل معکوس» یکی از روش‌های تحلیل نوین در علوم فنی و مهندسی است که در رشته‌ی مکانیک، به ویژه در حوزه‌ی حرارت و سیالات، قابلیت‌های شایانی داشته است. در تحقیقاتی که در دست انجام است سعی شده تا با استفاده از این روش عمق بستر مواد یا مقدار مواد مذاب در مقطعی دلخواه از کوره‌ی دوار تعیین شود. کوره‌ی دوار یکی از سیستم‌های حرارتی بسیار مهم است که در صنایع کلیدی و اقتصادی نقش مهمی ایفا می‌کند. در این نوشتار نتایج تحقیق درخصوص امکان تعیین عمق بستر مواد در کوره‌ی دوار و چگونگی اندازه‌گیری دمای روی بدنه‌ی کوره به‌لحاظ کمی و کیفی مورد مطالعه قرار گرفته است. الگوریتم کلی تحلیل مسئله از دو زیرالگوریتم «تحلیل مستقیم» و «تحلیل معکوس» تشکیل شده است. در الگوریتم «تحلیل مستقیم» کمیت‌های فیزیکی مورد نیاز، نظیر توزیع دمای متناظر با توزیع دمای تجربی روی بدنه‌ی کوره، محاسبه، و سپس مربع اختلافات بین مقادیر محاسباتی و تجربی به‌صورت یک تابع اصلی تدوین می‌شود. در «تحلیل معکوس» تابع اصلی با استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌ساز کمینه شده و بر این اساس، مجهول مسئله (عمق بستر مواد) تعیین می‌شود. نتایج به دست آمده مؤید امکان تعیین عمق بستر مواد در کوره‌ی دوار، در هر مقطع دلخواه از آن، است.

۱. مقدمه

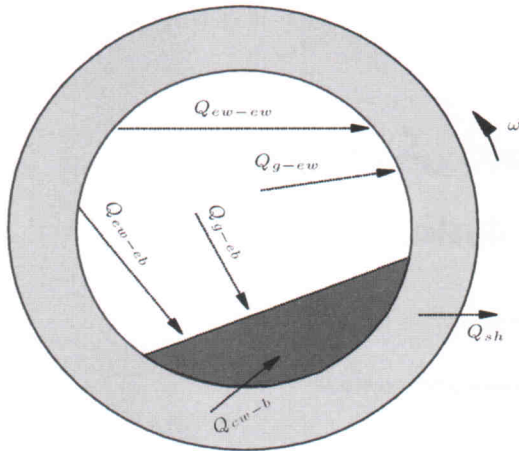
روش‌های عددی (از قبیل روش‌های گرافیکی، روش اجزاء محدود و تفاضل محدود^[۱-۴])، روش تعیین ضرایب حساسیت^[۱]، روش‌های اعتدالی^[۱۲] و روش‌های بهینه‌ساز^[۱۲-۱۳] (مانند روش لوبنبرگ مارکوتا^۲ یا روش گرادیان مزدوج^۳) اشاره کرد.

پس از آشنایی اجمالی با روش «تحلیل معکوس»، حال به تعریف کوره‌ی دوار می‌پردازیم. کوره‌ی دوار عبارت است از استوانه‌ی نسبتاً طولی که با سرعتی ویژه دوران می‌کند. براساس آنچه که در شکل‌های ۱ و ۲ مشاهده می‌شود، در ابتدای این سیستم حرارتی مشعلی با توانایی حرارتی مناسب تعبیه شده که کار آن توزیع انرژی حرارتی مناسب در طول کوره است. از قسمت انتهایی کوره مواد خامی که قرار است در آنها تغییرات فیزیکی و شیمیایی ایجاد شود وارد کوره شده و پس

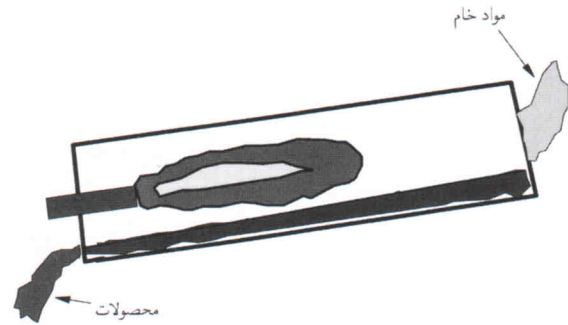
در روش «تحلیل مستقیم» از علت‌ها (که به‌صورت شرایط مرزی، شرایط اولیه، جزء چشمه و خواص فیزیکی و هیدرودینامیکی بیان می‌شوند) به سوی معلول یا معلول‌ها رهنمون می‌شویم، اما در روش «تحلیل معکوس» از مجموعه‌ی از معلول‌ها به سمت علل آنها، یا یک علت واحد حرکت می‌کنیم. اگر چه اکثر فعالیت‌های ذهنی در قالب فرایند «تحلیل معکوس» است، از دیدگاه علمی و به‌لحاظ چهارچوب الگوریتم ریاضی قدمت روش «تحلیل مستقیم» بسیار بیشتر است. «تحلیل معکوس» طی سه دهه‌ی اخیر جایگاه خاصی در حل مسائل علمی و مهندسی به خود اختصاص داده و موارد معتناهی همچون تعیین جاذبه، تعیین خواص حرارتی، تعیین تصاویر، توموگرافی، زلزله‌نگاری و طیف‌نگاری، مسائل کنترل بهینه و پارامتر شناسایی در حوزه‌ی روش قرار می‌گیرند. در حوزه‌ی مهندسی مکانیک، خصوصاً مسائل حرارت و سیالات یا هوافضا، مسائل مختلفی (از قبیل گرمایش آیرودینامیکی، تعیین خواص ترمودینامیکی و هیدرودینامیکی در محفظه‌های احتراق اجسام پرنده، لوله‌ی موج ضربه) به این روش مورد تحلیل قرار گرفته است. برای تدوین الگوریتم تحلیل معکوس از مهارت‌های ریاضی مختلفی استفاده می‌شود. از جمله‌ی این روش‌ها می‌توان به روش‌های تحلیلی^[۱]، به‌کارگیری چندجمله‌یی‌ها^[۲]، روش تبدیل لاپلاس^[۳] و



شکل ۱. نمای سه‌بعدی کوره‌ی دوار (انتخاب مدل مقطع).



شکل ۳. انتقال حرارت در مقطع عرضی از کوره‌ی دوار (مدل مقطع).



شکل ۲. نمای دوبعدی از کوره‌ی دوار.

از پذیرش تبدیلات لازم به محصول مورد نظر تبدیل می‌شوند. جریان گازهای داغ حاصل از احتراق از طرف دیگر ایجاد شده و در خلاف جهت دیگر مواد حرکت می‌کنند. طی حرکت مختلف الجبهت این دو جریان موازی، تبادل انرژی حرارتی به سه شیوه‌ی هدایتی، جابه‌جایی و تشعشعی از طرف گازهای داغ حاصل از احتراق به بستر مواد و دیواره‌ی کوره منتقل می‌شود. عمل مکانیکی دوران کوره به انتقال مواد و انتقال حرارت چندمنظوره در طول کوره کمک می‌کند.

طی شصت سال اخیر مدل‌های گوناگونی از نحوه‌ی عملکرد کوره‌ی دوار ساخته شده است که مبنای همه‌ی آنها «تحلیل مستقیم» مسئله بوده است. براساس مطالعات گسترده‌ی کتابخانه‌یی که در این زمینه صورت پذیرفته تاکنون فعالیتی در مورد به‌کارگیری روش «تحلیل معکوس» در کوره‌ی دوار انجام نشده است. طی تحقیقات جاری، سعی شده با استفاده از روش «تحلیل معکوس» پارامترهای اساسی و مهم در کوره (از قبیل عمق بستر مواد، دمای گازهای حاصل از احتراق، ضریب کلی انتقال حرارت گازهای داغ درون کوره، دمای بالک دیواره‌ی کوره، دمای بالک بستر مواد در یک مقطع دلخواه در طول کوره) تعیین شود. در این نوشتار عمق بستر مواد با استفاده از این روش تعیین می‌شود.

۲. مدل فیزیکی

اگر کوره را به‌صورت یک استوانه‌ی بلند در نظر بگیریم (شکل ۱)، یک برش فرضی مقطعی در راستای عمود بر محور کوره‌ی تصویری مطابق شکل ۳ خواهد داشت. این مقطع دایره شکل از دیواره‌ی کوره و بستر مواد تشکیل شده است. دیواره‌ی کوره که ممکن است از چند لایه‌ی نسوز^۴ و فولاد تشکیل شود همان دیواره‌ی داخلی کوره است که در این تحقیق به‌صورت یکپارچه در نظر گرفته شده است. بستر مواد (خوراک کوره) از دو لایه‌ی فاز مایع و فاز جامد تشکیل شده است. لایه‌ی جامد بیشترین عمق بستر مواد (۹۷٪ - ۹۸٪) را به خود اختصاص داده و لایه‌ی مایع کم‌ترین مقدار آن (۲٪ - ۳٪) را تشکیل می‌دهند.^{[۱۴] تا [۱۵]} گروهی از محققین^[۱۶-۱۹] رفتار دینامیکی لایه‌ی جامد را مشابه رفتار دینامیکی دانه‌های کوچکی^۵ که بر روی یکدیگر می‌غلطند می‌دانند و

برخی دیگر این رفتار را مشابه رفتار دینامیکی سیال یکپارچه^۶ در نظر می‌گیرند.

در مورد نحوه‌ی انتقال حرارت درون کوره نیز بررسی‌های مختلف تحلیلی، تجربی و عددی صورت پذیرفته است^[۲۰-۲۷]، و برای انتقال حرارت جابه‌جایی^[۲۰] و تشعشعی^[۲۱-۲۴] مدل‌های گوناگونی ارائه شده است. مطلب مهم این که براساس عقیده‌ی همه‌ی این محققین، مدل مقطع^۷ که در شکل ۳ ارائه شده است برای تحلیل انتقال حرارت در کوره مدلی متقن و قابل اعتماد است. اهمیت این مدل در این است که تحلیل انتقال حرارت در کوره را از قید پیچیدگی‌های مدل سه‌بعدی آزاد می‌کند. علاوه بر این، مدل مقطع مزیت و امکان ویژه‌ی را در این تحقیق فراهم می‌کند. نظر به اینکه هدف اصلی در این سری از تحقیقات تعیین پارامتر مورد نظر (مثلاً ضریب صدور مؤثر گازهای داغ) در هر مقطع دلخواه از کوره است، و نیز به‌سبب امکان ویژه‌ی که مدل مقطع فراهم می‌سازد، می‌توان پارامتر مورد نظر را بدون توجه به بعد سوم (محور کوره) شناسایی کرد. بنابراین اصولی که مدل فیزیکی مورد نظر در این تحقیق بر اساس آنها تدوین می‌شود عبارت‌اند از:

۱. در تحلیل انتقال جرم و انتقال حرارت در کوره، مدل مقطع مدل پایه محسوب می‌شود.
۲. رفتار هیدرودینامیکی بستر مواد در مقطع مورد نظر «رفتار غلشی»^۸ است.
۳. از حضور شعله در مقطع مورد نظر صرف‌نظر می‌شود (یا اینکه مقطع مورد نظر از شعله دور است).
۴. دیواره‌ی کوره و بستر مواد به‌لحاظ تشعشعی خاکستری در نظر گرفته می‌شود. در نظر گرفتن این فرض به‌دلیل اطلاع نداشتن از مقدار دقیق ضریب صدور دیواره‌ی کوره و بستر مواد (نظر به اینکه بیشترین

۳. خواص فیزیکی و ترموفیزیکی مواد در مقطع مورد نظر ثابت اند. لذا با توجه به فرضیات فوق معادله انرژی در مقطع مورد نظر به صورت رابطه ۲ بیان می شود: [۱۹-۲۴]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (k_i r \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (k_i \frac{\partial T}{\partial \theta}) = \rho_i C p_i \omega \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad i = w, b \quad (2)$$

شرایط مرزی برای معادله فوق در مقطع مورد نظر با توجه به شکل ۳ تعیین می شود. شرط مرزی برای قسمتی از دیواره داخلی کوره که در معرض تابش گازهای داغ قرار دارد عبارت است از:

$$r = R_{in}, \Phi_0 \leq \theta \leq 2\pi - \Phi_0 : -k \frac{\partial T}{\partial r} = (h_{C_{g \rightarrow w}} + h_{R_{g, b \rightarrow w}})(T_g - \bar{T}_{ew}) \quad (3)$$

که در آن \bar{T}_{ew} متوسط توزیع دمای قسمتی از دیواره داخلی کوره است که در معرض تابش گازهای داغ قرار دارد. برای سطحی از بستر مواد که در معرض تابش گازهای داغ قرار دارند شرط مرزی عبارت است از:

$$r = R(\theta), 2\pi - \Phi_0 \leq \theta \leq \Phi_0 : -k \frac{\partial T}{\partial r} = (h_{C_{g \rightarrow b}} + h_{R_{g, w \rightarrow b}})(T_g - \bar{T}_b) \quad (4)$$

که در آن \bar{T}_b متوسط توزیع دمای بستر مواد است. برای دیواره خارجی کوره (بدنه کوره) شرط مرزی عبارت است از:

$$r = R_{out}, 0 \leq \theta \leq 2\pi : -k \frac{\partial T}{\partial r} = (h_{C_{sh \rightarrow \infty}} + h_{R_{sh \rightarrow \infty}})(\bar{T}_{sh} - T_{\infty}) \quad (5)$$

که در آن \bar{T}_{sh} متوسط توزیع دمای روی بدنه کوره در مقطع مورد نظر است.

در ادامه، روش محاسبه ضرایب انتقال حرارت جابه جایی و تشعشعی که در معادلات ۳ تا ۵ آمده، آورده شده است.

۱.۱.۳. تعیین ضرایب انتقال حرارت تشعشعی

با استفاده از مدل یک منطقه‌ی که شبکه‌ی آنالوگی آن در شکل ۴ نشان داده شده است ضرایب انتقال حرارت تشعشعی از طرف گازهای داغ و بستر مواد بر روی دیواره داخلی کوره عبارت است از:

$$h_{R_{g, b \rightarrow w}} = \frac{\epsilon_w (\bar{J}_{ew} - \bar{E}_{ew})}{\rho_w (T_g - \bar{T}_{ew})} \quad (6)$$

که در آن \bar{T}_{ew} متوسط توزیع دمای دیواره داخلی کوره، \bar{J}_{ew} شار تشعشعی وارد شده بر دیواره داخلی و \bar{E}_{ew} توان متوسط صدور

مقدار ممکن را به آنها اختصاص می دهیم: $(\epsilon_w = \epsilon_g = 0.95)$ ، خطای اندکی در مسئله وارد می کند.

۵. گازهای حاصل از احتراق که در محدوده‌ی طیفی خاصی جذب و صادر می شوند، از لحاظ تشعشعی به صورت جسم خاکستری در نظر گرفته می شود.

۶. از گزاردان شعاعی دما در گازهای داغ صرف نظر شده و در مقطع مورد نظر برای گازهای داغ دمایی واحد در نظر گرفته می شود.

۷. مدل تشعشعی به کار رفته در مقطع مورد نظر می تواند مدل یک منطقه‌ی^۹ یا مدل چندمنطقه‌ی^{۱۰} باشد. اما به دلیل اینکه خطای مدل یک منطقه‌ی در مقابل مدل چندمنطقه‌ی کم تر از ۳٪ است، از مدل یک منطقه‌ی برای فرایند تشعشع در کوره استفاده می شود.

۳. مدل ریاضی

مسئله از دو قسمت اساسی مدل حل مستقیم و مدل حل معکوس تشکیل شده است. در مدل حل مستقیم به فیزیک مسئله و معادلات حاکم بر انتقال حرارت، و در مدل معکوس به تدوین تابع اصلی^{۱۱} و کمینه سازی آن براساس الگوریتم‌های مناسب پرداخته می شود. تابع اصلی براساس مجموع مربع اختلاف بین مقادیر توزیع دمای تجربی اندازه گیری شده و توزیع دمای محاسباتی متناظر با آن در نقاط مختلف (مکان چینش ترموکوپل‌ها) تدوین می شود.

الگوریتم کمینه سازی مسیر حل را به سوی تعیین پارامتر مجهول مورد نظر هدایت می کند؛ لذا به این الگوریتم، الگوریتم بهینه سازی^{۱۲} نیز اطلاق می شود.

۱.۳. مدل ریاضی مستقیم

مدل ریاضی سیستم براساس مدل فیزیکی تدوین شده پایه گذاری می شود. اگر برای یک المان حجم کنترلی از کوره، معادله بقا انرژی را اعمال کنیم، معادله دیفرانسیلی به صورت رابطه ۱ تشکیل می شود:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (k_i r \frac{\partial T}{\partial r}) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (k_i \frac{\partial T}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_i \frac{\partial T}{\partial z}) = \rho_i C p_i \omega r \frac{\partial T}{\partial \theta} + \rho_i C p_i \frac{\partial T}{\partial t}, \quad i = w, b \quad (1)$$

حال با توجه به فرضیات حاصل از مدل فیزیکی:

۱. تمام فرایندها و پدیده‌ها در کوره در حالت پایدارند؛ لذا می توان نوشت: $\frac{\partial T_i}{\partial t} = 0$

۲. با در نظر گرفتن مدل مقطع، از وابستگی مقادیر به جهت طولی کوره صرف نظر می شود؛ بنابراین خواهیم داشت، $\frac{\partial T_i}{\partial z} = 0$

انتقال حرارت جابه‌جایی روی بدنه‌ی کوره بر حسب اینکه عدد گراشف و رایلی چه وضعی نسبت به هم داشته باشند، بررسی می‌شود. اگر عدد رایلی بزرگ‌تر از عدد گراشف باشد، $(Re_D > Gr_D)$ ، جابه‌جایی اجباری است، و در غیراین صورت جابه‌جایی آزاد است. در حالت جابه‌جایی اجباری:

$$Nu = h_{sh} \frac{D}{k_{\infty}} = 0.62 + \frac{0.4 Re_D^{1/4} Pr^{1/4}}{[1 + (0.4/Pr)^{1/4}]^{1/4}} [1 + (\frac{Re_D}{2820})^a]^b$$

$$10^2 < Re_D < 10^4 \Rightarrow a = \frac{5}{8}, b = \frac{4}{5}$$

$$4 \times 10^4 < Re_D < 10^7 \Rightarrow a = \frac{1}{4}, b = 1 \quad (11)$$

که در آن:

$$Re_D = \frac{\rho Du_{\infty}}{\mu}, Gr_D = \frac{g D^3 |\rho - \rho_{\infty}|}{\nu^2 \rho}, Pr = \frac{\mu C_p}{k_{\infty}} \quad (12)$$

و در حالت جابه‌جایی آزاد:

$$Nu = h_{sh} \frac{D}{k_{\infty}} = 0.6 + \frac{0.386 Ra^{1/4}}{[1 + (0.559/Pr)^{1/4}]^{1/4}}; 10^{-4} < Ra < 10^{12} \quad (13)$$

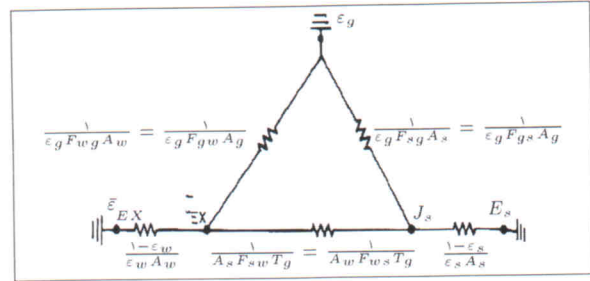
عدد رایلی در محاسبات فوق به صورت رابطه‌ی ۱۴ بیان می‌شود.

$$Ra = Pr Gr_D \quad (14)$$

۳-۲- مدل ریاضی معکوس

در این بخش اساس طراحی الگوریتم تحلیل معکوس مورد مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد. برای اعمال الگوریتم معکوس مناسب چهار روش مختلف پیشنهاد شده است: [۲۸ و ۲۹]

۱. روش لونیگ-مارکوتا برای تخمین پارامتر مورد نیاز؛
 ۲. روش گرادیان مزدوج^{۱۳} برای تخمین پارامتر مورد نیاز؛
 ۳. روش گرادیان مزدوج با مسئله‌ی الحاقی برای تخمین پارامتر مورد نیاز؛
 ۴. روش گرادیان مزدوج با مسئله‌ی الحاقی برای تخمین تابع مورد نیاز.
- البته برای تحلیل معکوس مسائل الگوریتم‌های دیگری نیز ارائه شده است که در این مقوله به شاخص‌ترین آنها اشاره شد. از آنجا که روش‌های اول و دوم در تحلیل مسائل خطی و غیرخطی از تأثیر به‌سزایی برخوردار است در این تحقیق از آنها استفاده شده است.



شکل ۴. شبکه‌ی آنالوگ برای مدل تشعشعی داخل کوره‌ی دوار.

دیواره‌ی داخلی کوره است که براساس دمای متوسط دیواره‌ی داخلی، \bar{T}_{ew} ، محاسبه می‌شود. همچنین ضریب انتقال حرارت تشعشعی از طرف گازهای داغ و دیواره‌ی داخلی کوره بر بستر مواد عبارت است از:

$$h_{R_{g,w \rightarrow b}} = \frac{\epsilon_b (\bar{J}_b - \bar{E}_b)}{\rho_b (T_g - \bar{T}_b)} \quad (7)$$

که در آن \bar{T}_b متوسط توزیع دمای سطح بستر مواد، \bar{J}_b رادیوسیتی وارد شده بر سطح بستر مواد و \bar{E}_b توان صدور متوسط سطح بستر مواد است که براساس دمای متوسط سطح بستر مواد، \bar{T}_b ، محاسبه می‌شود.

و نهایتاً ضریب انتقال حرارت تشعشعی از بدنه‌ی کوره بر محیط خارج عبارت است از:

$$h_{R_{sh \rightarrow \infty}} = \frac{\sigma \epsilon_{sh} (\bar{T}_{sh}^4 - T_{\infty}^4)}{(\bar{T}_{sh} - T_{\infty})} \quad (8)$$

که در آن \bar{T}_{sh} ، متوسط توزیع دمای بدنه‌ی کوره در مقطع مورد نظر است.

۳.۱.۳. تعیین ضرایب انتقال حرارت جابه‌جایی

ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی از طرف گازهای داغ بر دیواره‌ی داخلی کوره چنین محاسبه می‌شود:

$$h_{g \rightarrow b} = 0.46 \frac{k_g}{D} Re^{0.4} Pr^{0.33} (\frac{D}{L})^{0.55} \quad (9)$$

این معادله در مواردی که جریان داخل کوره آشفته است و نیز نسبت طول به قطر کوره $10 < \frac{L}{D} < 400$ است صدق می‌کند. این نکته برای کوره‌ی مورد نظر این تحقیق که در آن عدد رینولدز جریان گازهای داغ در محدوده‌ی $5 \times 10^5 - 2 \times 10^5$ قرار دارد کاربرد دارد.

ضریب انتقال حرارت جابه‌جایی از طرف گازهای داغ بر سطح بستر مواد چنین محاسبه می‌شود:

$$h_{C_{g \rightarrow b}} = 0.4 G_g^{0.62} \quad (10)$$

که در آن G_g دبی گازهای داغ درون کوره است.

روی مرز است و m تعداد پارامترهای اندازه‌گیری شده‌ی داخل میدان است.

اندازه‌ی المان‌های ماتریس حساسیت، $(J_{ij} = \frac{\partial T_i^c}{\partial p_j})$ ، بیان‌گر میزان حساسیت تغییرات دمای محاسبه شده $T_i^c(P)$ نسبت به تغییرات پارامتر مجهول P است؛ لذا بزرگ بودن اندازه‌ی المان بیان‌گر میزان شدت حساسیت مقادیر محاسبه شده $T_i^c(P)$ به تغییرات پارامتر مجهول P است و بالعکس اگر اندازه‌ی J_{ij} کوچک باشد آنگاه بروز تغییرات بزرگ در پارامتر P نیز تغییرات چندانی در دمای محاسبه شده $T_i^c(P)$ (کمیت محاسبه شده مورد نظر) ایجاد نمی‌کند. لذا میزان حساسیت سیستم به تغییرات پارامتر مجهول P کم است. با ذکر این توضیحات، معادله‌ی ۱۸ را می‌توان به صورت ماتریسی زیر بیان کرد:

$$-2\mathbf{J}^T(P)[T^e - T^c(P)] = 0 \quad (19)$$

در مسائل خطی معکوس ماتریس حساسیت تابع پارامتر $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ نیست و لذا در این حالت معادله‌ی ۱۹ به صورت معادله‌ی ۲۰ بیان می‌شود:

$$P = (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{T}^e \quad (20)$$

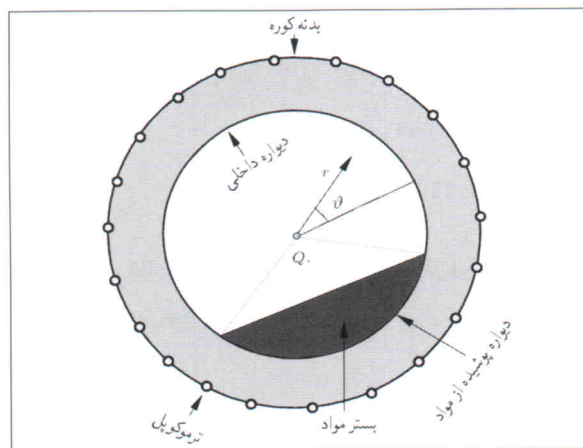
حال اگر مسئله غیر خطی باشد و ماتریس حساسیت تابع پارامتر $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ باشد، برای تعیین P با $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ خطی کردن $T(P)$ از طریق بسط تیلور حول مقدار P^{k+1} در مرحله k تکرار داریم:

$$T^c(P) = T^c(P^k) + \mathbf{J}^k(P - P^k) \quad (21)$$

که در آن $T^c(P^k), J^k$ ، به ترتیب بردار تخمینی دما و ماتریس حساسیت در مرحله k تکرار هستند. اگر معادله‌ی ۲۱ را در معادله‌ی ۱۹ جایگزین کنیم، براساس روش حل لئونبرگ-مارکوتا می‌توان از طریق فرایند تکرار مقدار $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ را مطابق رابطه‌ی ۲۲ اصلاح کرد:

$$P^{k+1} = P^k + [(\mathbf{J}^k)^T \mathbf{J}^k]^{-1} (\mathbf{J}^k)^T [T^e - T^c(P^k)] \quad (22)$$

که روش تکرار فوق به «روش تکرار گاووس» موسوم است. بدیهی است که با رسیدن به مقدار صحیح $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ ، و در نتیجه کمینه شدن مقدار $[T_i^e - T_i^c(P)]^2$ فرایند تکرار خاتمه می‌یابد و پاسخ مسئله‌ی معکوس به دست می‌آید. نکته‌ی قابل توجه این که در تعیین رابطه‌ی ۲۲ باید ماتریس $(\mathbf{J}^k)^T \mathbf{J}^k$ غیر منفرد باشد، یا به عبارت دیگر درمیان آن مقداری غیر صفر داشته باشد. اما برای اینکه رابطه‌ی ۲۲ پاسخ صحیح را ارائه کند، علاوه بر اینکه باید ماتریس $(\mathbf{J}^k)^T \mathbf{J}^k$ غیر منفرد باشد، نباید مقدار درمیان آن نیز مقداری کوچک باشد، زیرا در این صورت سیستم با شرایط ماتریس بدخیم مواجه می‌شود. اغلب



شکل ۵. چینش ترموکوپل‌ها در مدل مقطع.

مطابق شکل ۵ اگر در یک مرز معین دمای تخمین زده شده برای نقطه‌ی i با مختصات i را به $T_i^c(P)$ و مقدار اندازه‌گیری شده‌ی متناظر با آن را به T_i^e نمایش دهیم و پارامتر P نیز پارامتر مجهول مورد نظری باشد که قرار است در فرایند تحلیل معکوس مسئله تعیین شود، در آن صورت عبارت $T_i^c(P) - T_i^e$ مقدار خطای انجام شده در هر مرحله برای نقطه‌ی مورد نظر i از مرز مورد نظر است، و مقدار مجموع مربعات این خطاها برای تعداد n نقطه مرزی عبارت است از:

$$S(P) = \sum_{i=1}^N [T_i^e - T_i^c(P)]^2 \quad (15)$$

اگر در فضای تانسوری عبارت $[T^e - T^c(P)]^T$ را به صورت رابطه‌ی ۱۶ نمایش دهیم:

$$[T^e - T^c(P)]^T \equiv [T_1^e - T_1^c, T_2^e - T_2^c, \dots, T_m^e - T_m^c] \quad (16)$$

آنگاه پارامتر $S(P)$ به صورت رابطه‌ی ۱۷ بیان می‌شود:

$$S(P) = [T^e - T^c(P)][T^e - T^c(P)]^T \quad (17)$$

حال برای کمینه کردن پارامتر SP از آن نسبت به پارامتر مجهول P ، که می‌تواند به صورت بردار $P = [p_1, p_2, \dots, p_n]$ در نظر گرفته شود، مشتق می‌گیریم.

$$\nabla S(P) = 2 \left[-\frac{\partial T^c(P)}{\partial P} \right] [T^e - T^c(P)] = 0 \quad (18)$$

که در آن $\frac{\partial T^c(P)}{\partial P}$ ماتریس ژاکوبی، و ترانهاده‌ی آن ماتریسی بسیار مهم، به نام «ماتریس حساسیت» است. n تعداد مؤلفه‌های مجهول

معیار پذیرش جواب با ارضاء یکی از شرایط زیر محقق می‌شود.

$$\begin{aligned} S(P^{k+1}) &< \epsilon_1 \\ \|(\mathbf{J}^k)^T[Y - T(P^k)]\| &< \epsilon_2 \\ \|(\mathbf{J}^k)^T[Y - T(P^k)]\| &< \epsilon_2 \end{aligned} \quad (29)$$

که در آن مقادیر $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ کوچک‌ترین مقدار ممکن در مرتبه‌ی عبارات متناظر با خود هستند.

۴. حل عددی مسئله

حل عددی مسئله متشکل از دو قسمت اساسی است:

الف) حل عددی مدل مستقیم؛

ب) حل عددی مدل معکوس.

در ادامه مراحل فوق به صورت جداگانه مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۱.۴. روش مستقیم

مدل مستقیم که پیش‌تر به معادلات حاکم بر آن اشاره شده، بر مقطع دلخواهی از محور کوره اعمال می‌شود (شکل ۴). شعاع داخلی ۴/۵m، شعاع خارجی ۶m و عمق بستر مواد برابر با ۲/۲۵m است. سرعت زاویه‌ی کوره ۱/۵rad/s است و سایر خواص فیزیکی آن نیز در جدول ۱ آورده شده است.

با تشکیل متغیرهای بدون بعد:

$$\Theta = \frac{T_i - T}{T_i - T_s}, \quad \Pi = \frac{\theta/\pi}{Re.Pr}, \quad R = \frac{r}{D}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\pi} \quad (30)$$

و وارد کردن آنها در معادله‌ی ۲، معادله‌ی ۳۱ تشکیل می‌شود:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \Theta}{\partial R} \right) + \frac{1}{(Re.Pr)^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \Pi^2} = \Omega \frac{\partial \Theta}{\partial \Pi} \quad (31)$$

اگر مقدار عدد پکلت، $Pe = Re.Pr$ ، را براساس مقادیر ورودی فوق تعیین کنیم، آنگاه:

$$\begin{aligned} Re.Pr &= \frac{(R_i^2 \cdot \omega) (\rho.C_p)}{k} \approx \\ \frac{(4.5^2 \times 1.5)(1500 \times 1300)}{0.5} &= 1.2 \times 10^8 \end{aligned} \quad (32)$$

جدول ۱. خواص فیزیکی مواد.

دیواره	عمق	خواص
۰/۴	۰/۶۹۲	$k(w/m/k)$
۱۳۳۴	۱۶۸۰	$\rho(kg/m^3)$
۱۱۰۰-۱۳۰۰	۱۲۹۸	$c_p(J/kg/k)$

مسائل معکوس انتقال حرارت با این مشکل مواجه‌اند و در نتیجه مشکلاتی را در به‌کارگیری معادلات ۲۰ یا ۲۲ ایجاد می‌کنند. الگوریتم لونبرگ-مارکوتا برای کاهش این مشکلات روش تکرار زیر را (به جای معادله‌ی ۲۲) پیشنهاد می‌کند:

$$\begin{aligned} P^{k+1} &= P^k + [(\mathbf{J}^k)^T \mathbf{J}^k + \mu^k \Omega^k]^{-1} \\ &(\mathbf{J}^k)^T [T^e - T^c(P^k)] \end{aligned} \quad (23)$$

که در آن Ω^k, μ^k به ترتیب عبارت‌اند از پارامتر مثبت استهلاکی و ماتریس قطری. ماتریس قطری Ω^k به صورت رابطه‌ی ۲۴ محاسبه می‌شود:

$$\Omega^k = \text{diag}[(\mathbf{J}^k)^T \mathbf{J}^k] \quad (24)$$

نکته‌ی مهم در ارتباط با انتخاب Ω^k, μ^k این است که در مواردی که ماتریس $(\mathbf{J}^k)^T \mathbf{J}^k$ بدخیم می‌شود، در ابتدای حل باید جزء $\mu^k \Omega^k$ به معادله‌ی ۲۲ اضافه شود و معادله‌ی ۲۳ به جای معادله‌ی ۲۲ در فرایند حل وارد شود. با استفاده از این شگرد عبارت $(\mathbf{J}^k)^T \mathbf{J}^k + \mu^k \Omega^k$ به میزان قابل قبولی افزایش یافته و فرایند حل را از حالت بدخیمی نجات می‌دهد. هنگامی که عبارت $(\mathbf{J}^k)^T \mathbf{J}^k$ در مراحل تکرار بهبود یابد، می‌توان عبارت $\mu^k \Omega^k$ را حذف کرد.

در روش حل گرادبان مزدوج به جای تشکیل ماتریس‌های $[(\mathbf{J}^k)^T \mathbf{J}^k]^{-1}$ و Ω^k و حل معادله‌ی ۲ برای تعیین P^{k+1} از رابطه‌ی ۲۵ استفاده می‌شود:

$$P^{k+1} = P^k - \beta^k d^k \quad (25)$$

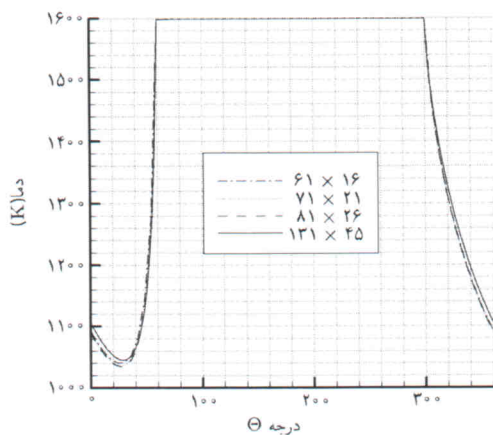
که در آن d^k بردار هادی به سوی پاسخ نهایی است و به صورت رابطه‌ی ۲۶ محاسبه می‌شود:

$$d^k = \nabla S(P^k) + \gamma^k d^{k-1} \quad (26)$$

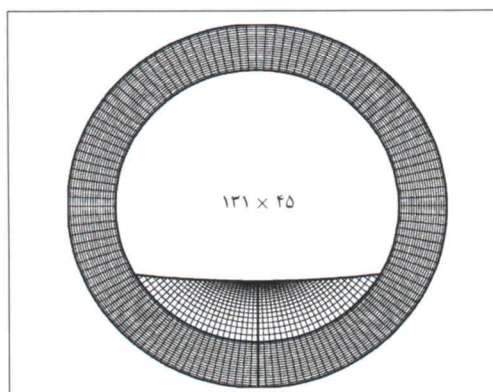
و مقادیر γ^k, β^k به ترتیب با استفاده از رابطه‌های ۲۷ و ۲۸ به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \gamma^k &= \\ &\frac{\sum_{j=1}^N \{[\nabla S(P^k)]_j [\nabla S(P^k) - \nabla S(P^{k-1})]_j\}}{\sum_{j=1}^N [\nabla S(P^k)]_j^2} \\ \gamma^0 &= 0 \end{aligned} \quad (27)$$

$$\beta^k = \frac{[\mathbf{J}^k d^k]^T [T^c(P^k) - T^e]}{[\mathbf{J}^k d^k]^T [\mathbf{J}^k d^k]} \quad (28)$$



شکل ۷. بررسی استقلال توزیع دما از نوع شبکه در میدان حل.



شکل ۸. میدان حل و شبکه‌ی انتخاب شده برای کوره دوار.

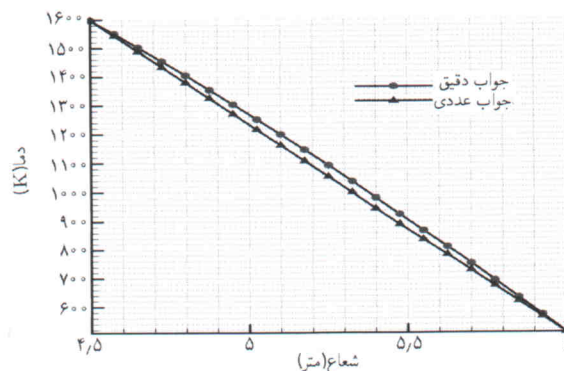
از وجود اطلاعات تجربی اطمینان حاصل شود. و نیز نظر به اینکه اطلاعات تجربی با خطا همراه است، برای تولید داده‌های تجربی، تابع توزیع خطای گوس بر روی داده‌های دقیق به صورت رابطه‌ی ۳۵ عمل می‌کند: [۲۸-۳۲]

$$T_{\text{experiment}} = (1 + \lambda\sigma)T_{\text{exact}} \quad (35)$$

که در آن λ مقداری تصادفی است و با احتمال ۹۹٫۴٪ در محدوده‌ی $3/0 < \lambda < 3/0 -$ قرار گرفته و σ باند تغییرات λ است. توزیع دمای تجربی به‌ازای خطای ۱٪ و ۵٪ در شکل‌های ۹ و ۱۰ نمایش داده شده است.

در قدم بعدی از بررسی تحلیل معکوس باید از چگونگی حساسیت و تأثیر دمای بدنه‌ی کوره نسبت به تغییرات عمق بستر مواد اطلاع حاصل شود. بنابراین باید تغییرات ماتریس حساسیت نسبت به عمق بستر $(\frac{\partial T_j}{\partial X_j})$ محاسبه شود تا معیار مناسبی در تعیین عمق بستر داشته باشیم.

ابتدا تغییرات ضریب حساسیت برای ۵ لایه‌ی شعاعی مختلف از دیواره‌ی کوره بررسی و با هم مقایسه شده‌اند (شکل ۱۱). به دلیل اینکه



شکل ۶. بررسی صحت عملکرد مدل مستقیم.

می‌توان مشاهده کرد که ضریب عبارت $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \Pi^2}$ بسیار کوچک است و لذا از عبارت $\frac{1}{(Re Pr)^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \Pi^2}$ در معادله‌ی ۳۱ می‌توان صرف نظر کرد. حال با استفاده از این موضوع، معادله‌ی ۳۱ به معادله‌ی ۳۳ تبدیل می‌شود:

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \frac{\partial \Theta}{\partial R}) = \Omega \frac{\partial \Theta}{\partial \Pi} \quad (33)$$

که برای آن پاسخ تحلیلی و دقیق به صورت رابطه‌ی ۳۴ وجود دارد:

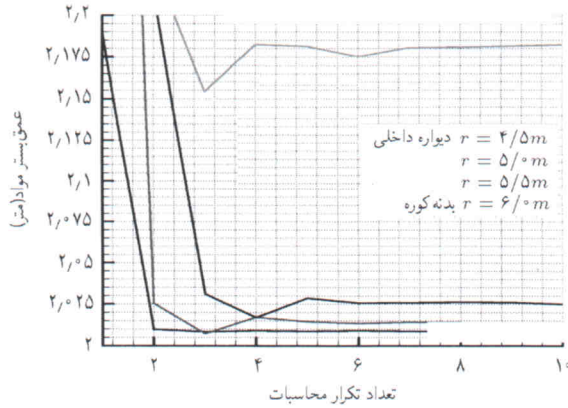
$$\Theta = \sum_{n=0}^{\infty} C_n R_n e^{-\lambda_n^* \Pi} \quad (34)$$

که در آن مقدار ویژه‌ی مسئله است که براساس شرط اولیه تعیین می‌شود، و C_n ضرایب معادله است که براساس شرایط مرزی تعیین شده، و R_n توزیع تابع بسل است.

پاسخ معادله‌ی فوق برای اثبات صحت عملکرد الگوریتم مستقیم به کار می‌رود. شکل ۶ حل عددی معادله‌ی ۳۱ را با پاسخ دقیق مورد مقایسه قرار داده است. به طوری که در شکل ۶ دیده می‌شود این دو پاسخ تطابق خوبی با یکدیگر دارند. پس از بررسی صحت عملکرد روش مستقیم، مسئله‌ی استقلال پاسخ از تعداد نقاط گره در شبکه‌ی حل مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای این بررسی حل عددی در شبکه‌های (101×31) ، (41×11) ، (61×16) ، (131×45) ، (71×21) ، (81×26) انجام شده و نتایج آن با یکدیگر مقایسه شده‌اند (شکل ۷). چنان که در شکل ۷ می‌توان ملاحظه کرد با افزایش تعداد گره‌ها تمام پاسخ‌ها به سمت یک پاسخ واحد میل پیدا می‌کنند؛ لذا شبکه‌ی (131×45) به عنوان بهترین شبکه فرض می‌شود. این شبکه دارای ۱۳۱ گره در جهت محیط مقطع مورد نظر و تعداد ۴۵ گره در جهت شعاع آن است (شکل ۸).

۲.۴. روش معکوس

نظر به اینکه اطلاعات تجربی به عنوان ورودی تحلیل معکوس مورد استفاده قرار می‌گیرد، در اولین قدم از روش تحلیل معکوس باید



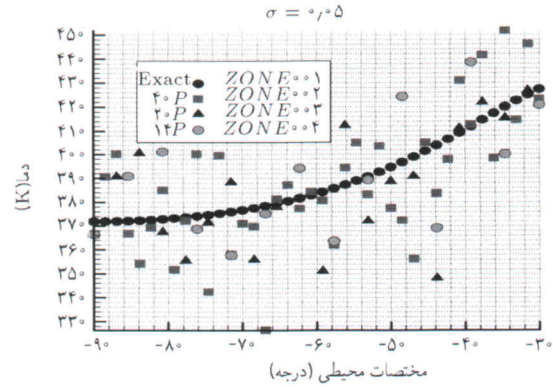
شکل ۱۲. تعیین عمق بستر براساس اطلاعات دمایی در لایه‌های مختلف از دیواره کوره‌ی دوار.

تعیین پارامترهای مجهول بالا می‌رود، یا با تعداد داده‌های تجربی کم‌تری می‌توان به مقدار مطلوب رسید. برای روشن شدن مطلب در شکل ۱۲ روند تعیین عمق بستر مواد به ازای ۵ سری اطلاعات مربوطه نمایش داده شده است. مبنای تحلیل نتایج در این بخش انواع اندازه‌گیری دمایی است که در دو منطقه‌ی مختلف از کوره صورت می‌پذیرد. به‌ازای هر اندازه‌گیری سه‌گانه داده‌ی تجربی با توزیع خطای ۰٪، ۱٪، ۵٪ به دست آمده و براساس آنها مجهول مورد نظر مسئله (عمق بستر مواد) تعیین می‌شود. همچنین برای تعیین مجهول مورد نظر از هر دو روش بهینه‌ساز لئونبرگ و گرادیان مزدوج استفاده شده و نتایج آن با یکدیگر مقایسه می‌شود.

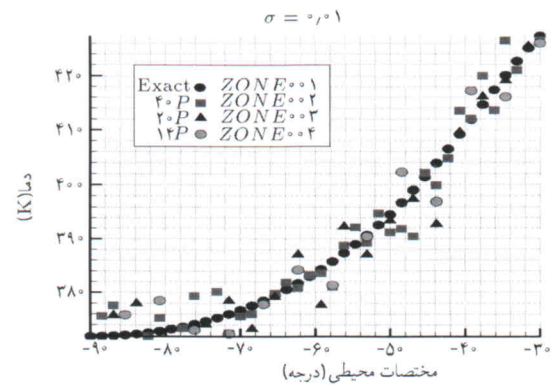
در قسمت اول تحقیق به‌ترتیب تعداد ۲۶ و ۳۳ و ۴۴ نقطه‌ی دمایی روی محیط مقطع (محیط دیواره کوره) مورد نظر انتخاب می‌شود و نتایج این بررسی به‌ازای هر دو روش بهینه‌ساز در شکل‌های ۱۳ تا ۱۵ ارائه شده است. در هر نمودار نیز سه‌گانه توزیع خطای ۰٪، ۱٪، ۵٪ نیز با یکدیگر مقایسه شده است. با مقایسه‌ی نتایج مربوط به شکل‌های مذکور می‌توان دریافت که افزایش تعداد اطلاعات روی محیط کوره بر دقت مقدار به دست آمده برای عمق بستر مواد می‌افزاید.

در قسمت دوم تحقیق به‌ترتیب تعداد ۱۸ و ۲۶ و ۵۱ نقطه‌ی دمایی روی منطقه‌ی از بدنه‌ی کوره که متناظر با بستر مواد است ($0 \leq \theta \leq 60^\circ$) انتخاب کرده و براساس آن عمق بستر مواد تعیین شده است. نتایج این مطالعه نیز به‌ترتیب در شکل‌های ۱۶ تا ۱۸ آورده شده است.

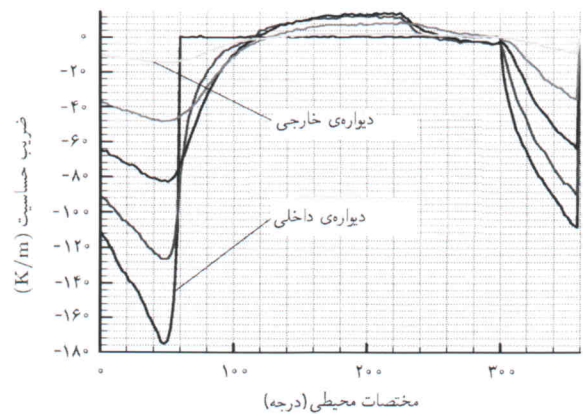
در اینجا نیز افزایش تعداد اطلاعات بر میزان دقت پاسخ به دست آمده می‌افزاید. اما نتیجه‌ی مهم‌تری که از مقایسه‌ی نتایج قسمت اول با قسمت دوم حاصل می‌شود، این است که روند دست‌یابی به پاسخ در وضعیتی که اندازه‌گیری تجربی دمایی در قسمتی از بدنه‌ی کوره که



شکل ۹. مقایسه انواع توزیع داده‌های تجربی باخطای گوسی ۱٪.

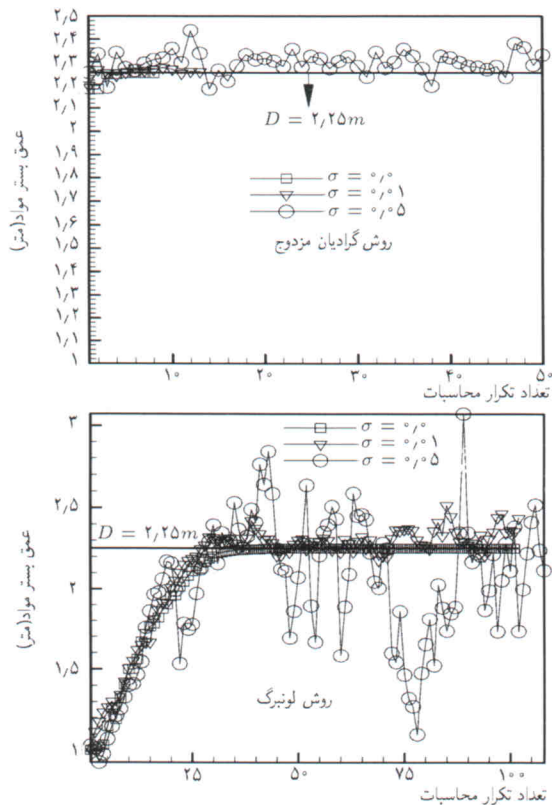


شکل ۱۰. مقایسه‌ی انواع توزیع داده‌های تجربی باخطای گوسی ۵٪.

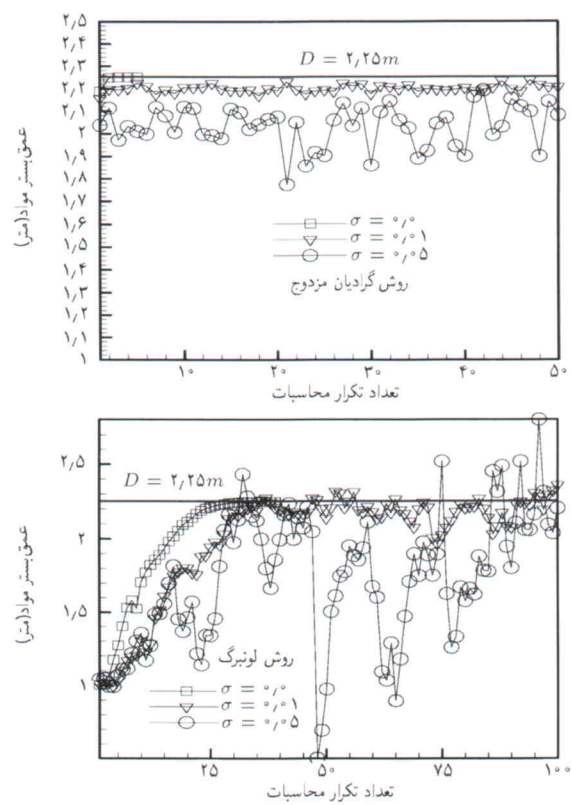


شکل ۱۱. تغییرات ضریب حساسیت در تعیین عمق بستر.

تغییرات دما در دیواره پوشیده شده توسط بستر مواد بیشترین مقدار را دارد، بیشترین مقدار ضریب حساسیت در این منطقه مشاهده می‌شود. همچنین از آنجا که هر قدر از منطقه‌ی دیواره‌ی پوشیده از مواد در جهت شعاعی دور شده و به سوی بدنه‌ی کوره (دیواره خارجی کوره) نزدیک شویم به دلیل کاهش مقادیر دما و کاهش تغییرات آن از میزان حساسیت آنها کاسته می‌شود اگر مبنای تحلیل معکوس اطلاعات دمایی تجربی مربوط به دیواره‌ی پوشیده یا لایه‌های نزدیک به آن باشد میزان دقت در



شکل ۱۵. تعیین عمق بستر در دو روش لونبرگ و گرادیان براساس ۴۴ عدد ترموکوپل روی بدنه‌ی کوره‌ی دوار.

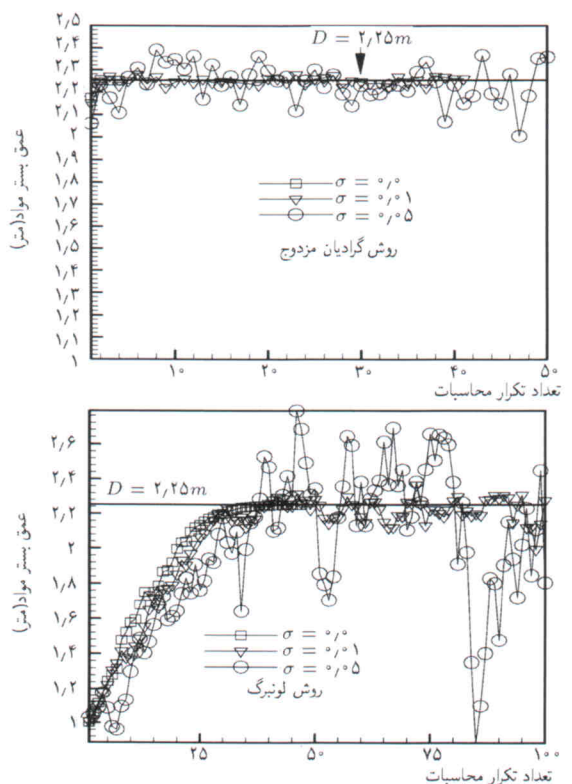


شکل ۱۳. تعیین عمق بستر در دو روش لونبرگ و گرادیان براساس ۲۶ عدد ترموکوپل روی بدنه‌ی کوره‌ی دوار.

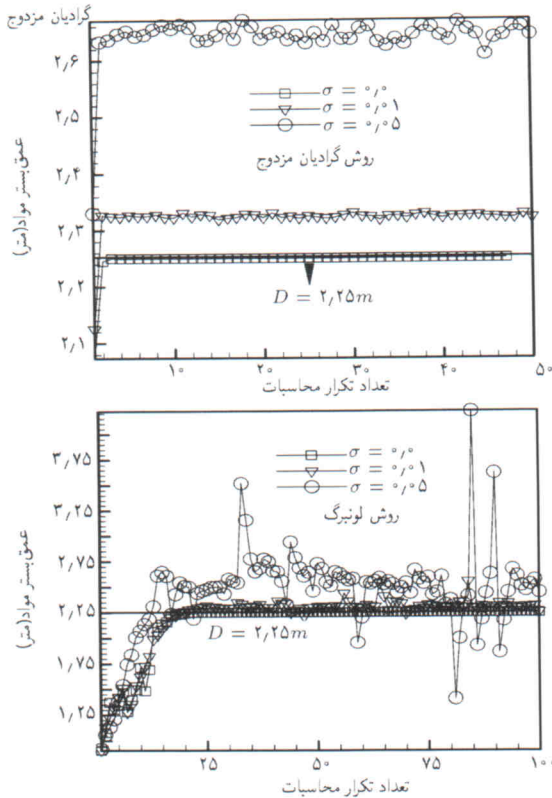
متناظر با بستر مواد است انجام می‌شود، بهتر است. چنان‌که مشهود است تعدد اطلاعات تحت تأثیر عامل ضریب حساسیت قرار گرفته است؛ لذا هنگامی که تعداد ۲۶ ترموکوپل در منطقه‌ی از بدنه که در محدوده‌ی $60^\circ \leq \theta \leq 0^\circ$ انتخاب می‌شود مطابق شکل ۱۷ روند تعیین پاسخ از تمام حالات بهتر و دقیق‌تر می‌شود. نکته‌ی دیگر اینکه الگوریتم گرادیان مزدوج نسبت به الگوریتم لونبرگ-مارکوتا از کارایی بهتری برخوردار است.

۴. نتیجه‌گیری

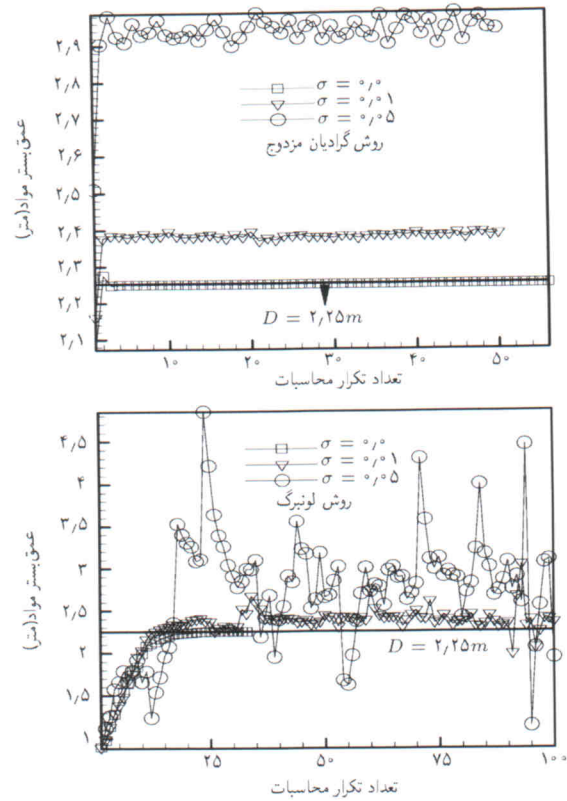
نظر به این که عمق بستر مواد یکی از پارامترهای بسیار مهم و مؤثر در عملکرد کوره‌ی دوار است، در این تحقیق سعی شده با ترکیب مناسبی از روش‌های تحلیل مستقیم و معکوس این پارامتر اساسی تعیین شود. طراحی این روش به‌لحاظ استفاده از قابلیت‌های ویژه‌ی این دو روش از ابتکار و تازگی برخوردار است. اساس تعیین پارامتر مجهول، کمینه‌سازی مجموع مربعات خطای بین مقادیر دمای تجربی و دمای محاسباتی، طی تکرار متوالی محاسبات است. برای اعمال کمینه‌سازی خطا از الگوریتم لونبرگ-مارکوتا و الگوریتم گرادیان مزدوج استفاده شده و نتایج آن با یکدیگر مقایسه شده است. با مقایسه‌ی این نتایج می‌توان اظهار داشت که الگوریتم گرادیان مزدوج به‌لحاظ



شکل ۱۴. تعیین عمق بستر در دو روش لونبرگ و گرادیان براساس ۳۳ عدد ترموکوپل روی بدنه‌ی کوره‌ی دوار.



شکل ۱۶. تعیین عمق بستر در دو روش مطرح شده براساس ۵۱ عدد ترموکوپل روی بدنه‌ی مجاور بستر کوره‌ی دوار.



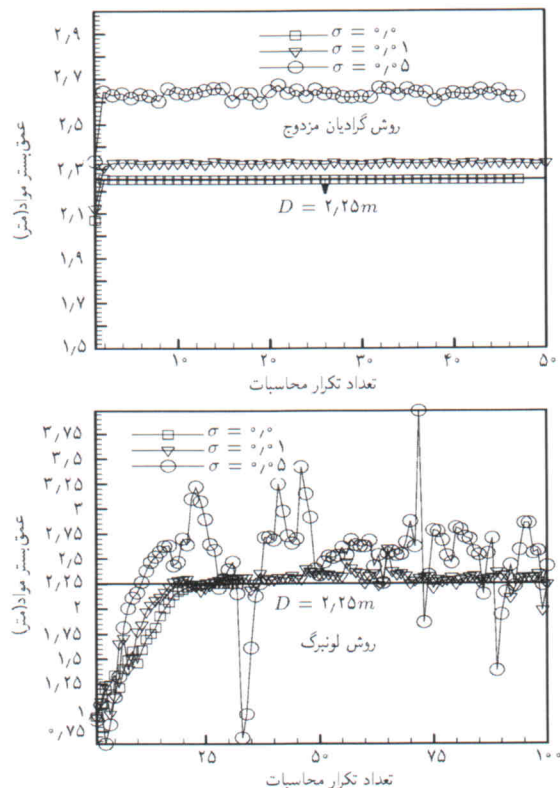
شکل ۱۷. تعیین عمق بستر در دو روش مطرح شده براساس ۱۸ عدد ترموکوپل روی بدنه‌ی مجاور بستر کوره‌ی دوار.

استقلال جواب به دست آمده از مقدار حدس اولیه، کاهش تعداد تکرار در محاسبات، کاهش زمان اجرای رایانه و تعداد نقاط دمای تجربی مورد استفاده نسبت به الگوریتم لونبرگ-مارکوتا از مزایای برخوردار است.

در فرایند حل مسئله به‌لحاظ اینکه به‌ازای هر مرحله از تکرار تحلیل معکوس، یک شبکه‌ی حل جدید تولید می‌شود تا شبکه حل مطلوب حاصل شود، یکی از انواع شناسایی یا بهینه‌سازی شبکه‌ی حل از طریق تحلیل معکوس شناخته می‌شود.

از نتایج به دست آمده می‌توان دریافت که هر قدر از مقدار خطای اندازه‌گیری کاسته شود با تعداد نقاط دمای تجربی کم‌تری می‌توان به پاسخ مطلوب دست یافت و بالعکس اگر میزان خطای اندازه‌گیری افزایش یابد برای تحصیل پاسخ صحیح نقاط اندازه‌گیری بیشتری مورد نیاز خواهد بود.

نتیجه‌ی مهم دیگر اینکه، انتخاب مکان چینش ترموکوپل یا حس‌گرهای حرارتی در دقت پاسخ و تعداد نقاط اندازه‌گیری مؤثر است. مثلاً هنگامی که تعداد کم‌تری ترموکوپل بر روی قسمتی از بدنه‌ی کوره که متناظر با بستر مواد است، چیده می‌شود. دقت پاسخ به دست آمده به مراتب بهتر از حالتی است که همان تعداد ترموکوپل، یا حتی تعداد بیشتری از آن بر روی کل بدنه‌ی کوره چیده شود. دلیل این پدیده



شکل ۱۸. تعیین عمق بستر در دو روش مطرح شده براساس ۲۶ عدد ترموکوپل روی بدنه‌ی مجاور بستر کوره‌ی دوار.

بنابراین با مرور بر نتایج این تحقیق می‌توان اظهار داشت که با به‌کارگیری ترموکوپل‌های معمولی یا حسگرهای ماوراء قرمز، عمق بستر مواد را در هر منطقه‌ی دلخواه از کوره‌ی دوار می‌توان تعیین کرد.

همان میزان حساسیت دمای نقطه‌ی اندازه‌گیری نسبت به تغییرات پارامتر مجهول مورد نظر است. لذا حتماً قبل از انتخاب منطقه‌ی اندازه‌گیری، باید در تعیین ضرایب ماتریس حساسیت در این منطقه سعی شود.

پانویس

1. regularization method
2. levenberge-Marquta methode
3. conjugate gradient
4. refractory layers
5. particle flow (granular flow)
6. plug flow
7. cross-section model
8. rolling mode
9. one zone model
10. multi zone model
11. objective function
12. optimization
13. conjugate gradient

منابع

1. Burggraf, O.R., "An exact solution of the inverse problem in heat conduction theory and applications". *ASME Journal of Heat Transfer*, **84**, pp. 373-382 (1964).
2. G. Stolz Jr., "Numerical solutions to an inverse problem of heat conduction for simple shape", *ASME Journal of Heat Transfer* **82**, pp. 20-26 (1960).
3. Arledge R.G. & Haji-Sheikh. "An iterative approach to the solution of inverse heat conduction problems", *Numerical Heat Transfer* (1), pp. 365-376 ().
4. Krzysztow, G., Cialkowski, M.J. and Kaminski, H., " An inverse temperature field problem of the theory of thermal stresses." *Nuclear Engineering Design*, **64**, pp. 169-184 (1981).
5. Beck, J.V. & Woolf, H., "The non linear inverse heat conduction problem." A.S.M.E. Paper no. 65-HT-40 (1965).
6. Fidelle, T.P. and Zinsemeister, G.E., " A semi-discrete approximate Solution of the inverse problem of transient heat conduction." A.S.M.E. Paper no. 68-WA/HT-26, (1968).
7. Beck, J. V., Nonlinear "Estimation applied to the non linear inverse heat conduction problem." *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **13**, pp. 703-716 (1970).
8. D'Souza, N., "Numerical solution of one-dimensional inverse transient heat conduction by finite difference method." A.S.M.E. Paper no.75-WA/HT-81 (1975).
9. Krutz, G. W., Schoenhals, R.J. 7 Hore,P.S., "Application of the finite element method to the inverse heat conduction problem." *Numerical Heat Transfer*, **1**, pp. 489-498 (1978).
10. Beck, J.V., Litkouhi, B. & St Clair,jr,C.R., " Efficient sequential solution of the nonlinear heat conduction problem." *Numerical Heat Transfer*, **15**, pp. 272-286 (1982).
11. Sparrow E M, Haji-Sheykh " The inverse problem in transient heat conduction" *J. Applied Mech. E*, **86** pp. 169-175 ().
12. M. Necati Ozisik., "Inverse heat transfer," Taylor & Francis, New York, NY (2000).
13. G.R.Liu & X-Han., "Computational inverse techniques in nondestructive evaluation," CRC PRESS LLC (2003).
14. W. Zabloty, "The movement of the charge in rotary kilns," *int.Chem.Eng*, **5**(2), pp. 360-366, (1965).
15. Mu, J. and D. Perlmutter, "The mixing of granular solids in a rotary cylinder," *AICHE* **26**(6), pp. 928-934 (1980).
16. Henien,H.,J.K. Brimacombe & A.P.Watkinson, "Exprimental study of transerve bed motion in rotary kiln", *iMet.Trans.* **14B**,191-205 (1983).
17. J. Perron & R. T. Bui, "Rotary cyliders: solid transport prediction by dimensional and rheological analysis," *Can. J. Chem .Eng*, **68**, pp. 61-68 (1990).
18. A.A. Boateng, "Boundary layer modeling of granullar flow in the transerve plane of a partially filled rotating cylinder." *Int. J. Multi-phase Flow*, **24**(3), pp. 499-521 (1998).
19. J.K.Brimacombe&A.P.Watkinson, "Heat transfer in direct-fired rotary kiln: parts I & II", *Met. Tras. B.* **9B**, pp. 201-219 (1978).
20. S. H. Tscheng & A. P. Watkinson, "Convective heat transfer in rotary kiln", *Can. J. Chem. Eng*, **57**, pp. 433-443 (1979).
21. H.K.Guruz& N.Bac, " Mathematical modeling of rotary cement kilns by the zone method", *Can. J. Chem. Eng*, **59**, pp. 540-548, (1981).
22. J.P. GOROG, J.K. Brimacombe & T.N. ADAMS, "Radiative heat transfer in rotary

- kiln;" *Metallurgical Transaction B*, **12B**, pp. 55-70 (1981).
23. J.P. GOROG, J.K. Brimacombe & T.N. ADAMS, "Regenerative heat transfer in rotary kiln;" *Metallurgical Transaction B*, **13B**, pp. 153-163 (1982).
 24. J.P. GOROG, J.K. Brimacombe & T.N. ADAMS, "Heat transfer from flames in rotary kiln;" *Metallurgical Transaction B*, **14B**, pp. 411-424 (1982).
 25. P.V.Barr&J.K.Brimacombe&A.P.Watkinson, "A heat transfer model for the rotary kiln:" *Part I & II, Met. Trans. B.* **20B**, pp. 391-419 (1989).
 26. A.A.Boateng,: "Study of the bed motion and heat transfer in rotary kiln transport phenomena," Ph. D. Dissertation, The University of British Columbia, Vancouver (1993).
 27. Marcio A. Martin, "Modeling and simulation of petroleum coke calcinations in rotary kiln fuel," **80**, pp. 1611-1622 (2001). 28
 28. Pao-Tung & Yue-Chao-Kuang., "Simultaneously estimating the initial and boundary conditions in two-dimensional hollow cylinder", *J.Heat Mass Transfer.* **41**(1), pp. 219-227 (1998).
 29. Jiin-Hong Lin,Yue-Tzu Yang., " The inverse of thermal boundary behaviour of a heated cylinder normal to a laminar air stream," *Int. J. of Heat and Mass Transfer* **43**, pp. 3991-4001 (2000).
 30. Jiin-Hong Lin,Yue-Tzu Yang., "The inverse of thermal boundary behavior of a heated cylinder normal to a laminar air stream," *Int. J. of Heat and Mass Transfer.* **43**, pp. 3991-4001 (2000).
 31. Yue-Tzu Yang, Pao-Tung & Chao-Chen, A " 3-D Inverse conduction problem approach for estimating the heat flux and surface temperature of a hollow cylinder," *J. Phys. D: Appl Phys.* **30**, (1997).
 32. Pao-Tung & Yue-Chao-Kuang., "Simultaneously estimating the initial and boundary conditions in two-dimensional hollow cylinder," *Int. J. Heat Mass Transfer.* **41**(1), pp. 219-227 (1998).