

روش سریع برای محاسبه‌ی تقریبی ضریب بار بحرانی قاب‌های مستوی

علی کاوه (استاد)

محمدرضا فرمانبر (کارشناس ارشد)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران

در این نوشتار بر اساس روش کار و انرژی برای سازه‌های قابی مستوی تحت بار مشخص، ابتدا بر حسب بدترین و بهترین مکانیزم انهدام سازه، دو پوش کمینه و بیشینه‌ی کار مقاوم خمیری داخلی سازه تعیین شده است. (منحنی کار خارجی خمیری سازه الزاماً در بین این دو حد قرار می‌گیرد). سپس بر اساس بارگذاری و هندسه‌ی سازه، نمودار کار خارجی سازه، ناشی از بارگذاری خارجی و مکانیزم انهدام سازه (بر اساس پوش بیشینه) به دست آمده است. در جایی که این منحنی از دو حد بالا تجاوز کند، سازه منهدم خواهد شد که از آنجا می‌توان ضریب بار λ_c و تعداد مفصل‌های خمیری سازه را به هنگام انهدام مشخص کرد.

مقدمه

تقریباً یک قرن پیش Kazinczy اولین پیشنهاد خود را در رابطه با لحاظ رفتار خمیری سازه‌ها ارائه داد و نتایج تحقیقات خود در این زمینه را در سال ۱۹۱۴ منتشر کرد.^[۱] Leibnitz در اولین آزمایش‌های با ارزش خود نشان داد که ظرفیت نهایی باربری تیرهای سراسری دودهانه بستگی بسیار کمی به پایین یا بالا بردن تکیه‌گاه میانی دارد.^[۲] بعدها تلاش‌های محققین در دانشگاه کمبریج انگلستان به نتایجی انجامید که امروزه از آن به‌عنوان «طرح و تحلیل خمیری سازه‌ها» یاد می‌شود.^[۳]

اصول کمینه و بیشینه اساس تمام روش‌های تحلیلی برای طرح و تحلیل خمیری را تشکیل می‌دهد. روش طرح و تحلیل ارائه شده توسط Baker و همکاران نیز که مبتنی بر اصل کمینه است از ترکیب مکانیزم‌های اولیه‌ی سازه بهره می‌گیرد.^[۴] این روش که اولین بار توسط Neal و Symonds مطرح شد بیشترین کاربرد را در طرح و تحلیل قاب‌ها دارد.^[۵-۷]

طرح و تحلیل قاب‌ها با گره‌های صلب اولین بار در سال ۱۹۵۱ با استفاده از برنامه‌ریزی خطی انجام شد.^[۸] بعدها این مفاهیم توسط محققین گسترش یافت.^[۹-۱۵] و در دهه‌ی گذشته نیز این پیشرفت‌ها گسترش بیشتری یافته است که برخی از آنها در کارهای پژوهشگرانی چون Munro و Livesley یافت می‌شود.^[۱۶، ۱۷] روش‌های مبتنی بر الگوریتم‌های ژنتیکی نیز با استفاده از کلنی مورچگان ارائه شده است.^[۱۸، ۱۹] اگرچه اساس و فلسفه‌ی تحلیل و طراحی خمیری سازه‌ها در سادگی تحلیل، مشاهده‌ی مود خرابی سازه تحت یک بارگذاری خاص، و نیز بررسی رفتار غیرخطی سازه است، اما با

بزرگ شدن سازه‌ها عملاً محاسبه‌ی مکانیزم‌های مختلف انهدام سازه و به دست آوردن ضریب بار بحرانی λ_c کاری بسیار مشکل و گاهی ناممکن خواهد بود. مثلاً برای یک قاب با $n=4$ دهانه و $m=5$ طبقه، تعداد $m(n+1)=5(4+1)=25$ مکانیزم مستقل مختلف وجود دارد که بررسی آنها و محاسبه‌ی ضریب بار مستلزم بررسی 25 مکانیزم می‌باشد. امروزه برای حل این معضل از روش‌های عددی، روش‌های ابتکاری (الگوریتم ژنتیک، الگوریتم کلنی مورچه‌ها، شبکه‌های عصبی و ...) یا روش کشسانی - خمیری استفاده می‌شود که در نهایت این مسائل با تکیه بر قابلیت‌های رایانه‌ی قابل حل خواهند بود.

شاید دلیل اصلی این‌که روش تحلیل خمیری در نزد مهندسان سازه جایگاه واقعی‌اش را نیافته استفاده از راه حل‌های کشسانی - خمیری باشد. روش پیشنهادی در این نوشتار «روش منحنی کار» روشی است بسیار ساده و کارآمد که بر اساس آن می‌توان به سادگی ضریب بار بحرانی و تعداد مفصل‌های خمیری سازه را هنگام انهدام و نیز کلی یا موضعی بودن انهدام سازه را با دقتی قابل قبول تعیین کرد. با توجه به شکل منحنی‌ها نیز می‌توان نقاط ضعف و قوت سازه را تحت این بارگذاری خاص مشاهده کرد.

علم تحلیل سازه عمدتاً مبتنی بر روش‌های جبر برداری است که در آنها علاوه بر مقدار تابع، جهت مؤلفه‌های آن نیز مؤثر است. روشی که در ادامه ارائه می‌شود مبتنی بر روش کار و انرژی است که توابعی اسکالر بوده، و فقط اندازه‌ی کمیت مطرح خواهد بود که نسبت به روش‌های برداری راه‌حل‌های ساده‌تری را برای این نوع قاب‌ها نتیجه خواهد داد.

تعاریف

داخلی بیشینه به ترتیب نزولی مقدار کار در نمودار کار داخلی مکانیزم خواهد بود.

منحنی کار: چنانچه هر سه منحنی فوق در یک دستگاه مختصات «تعداد مفصل‌های خمیری - کار» ترسیم شوند، نمودار حاصل «منحنی کار» نامیده خواهد شد.

روش کار

برای یک سازه با تعداد نقاط بحرانی N_c ، ابتدا با این فرض که تمام نقاط بحرانی آن تبدیل به مفصل شده است و نیز به ازای دوران θ واحد هماهنگ با نیروی وارد بر سازه، مقدار دوران و جابه‌جایی را برای نقاط مختلف سازه به دست می‌آوریم. سپس تصویر جدیدی از سازه ترسیم، و روی آن برای هر نقطه‌ی بحرانی، مقدار کار داخلی را که از حاصل ضرب لنگر خمیری در دوران $W_{mi} = m_{pi} \times \theta_i$ تعیین می‌شود، می‌نویسیم، و در پایان مقادیر W_{mi} را برحسب اندازه‌هایشان دسته‌بندی می‌کنیم. زیرا وقتی برای چند نقطه‌ی بحرانی مقدار W_{mi} یکسان باشد، نمی‌دانیم کدام یک ابتدا به وقوع می‌پیوندد. بنابراین فرض می‌کنیم که آن تعداد از مفصل‌ها که در یک دسته قرار دارند، کار نظیرشان، به‌طور همزمان اتفاق می‌افتد. از روی نمودار کار داخلی مکانیزم، تا $3mn+1$ مفصل، منحنی کار داخلی بیشینه، کار داخلی کمینه و کار خارجی بیشینه را ترسیم، و منحنی کار را برای یک سازه‌ی خاص تحت اثر بارگذاری مشخص به دست می‌آوریم.

در محدوده‌ی کار که دو منحنی «کار خارجی بیشینه» و «کار داخلی کمینه» یکدیگر را قطع کرده‌اند، سازه منهدم خواهد شد. نقطه‌ی نظیر ضریب بار بحرانی، λ_c است که با استفاده از هر روشی مختصات نقطه تلاقی (X_j) به دست آید. مقدار ضریب بار بحرانی (λ_c) از تقسیم مقدار «کار داخلی بیشینه» بر «کار خارجی بیشینه»، در نقطه X_j تعیین می‌شود.

$$\lambda_c = \frac{W_{i \max}(X_j)}{W_{e \max}(X_j)}$$

در محدوده‌ی کار داخلی از منحنی که در آن X_j قرار دارد و نمودار فاقد شکستگی است، در صورت محاسبه‌ی λ_A و λ_B به ازای نقاط A, B دامنه‌ی از ضریب بار λ به دست خواهد آمد که الزاماً λ_c در بین این دو مقدار قرار دارد (شکل ۴).

$$\lambda_A \leq \lambda_c \leq \lambda_B$$

مقدار ضریب میانگین بار λ_m :

$$\lambda_m = \frac{\lambda_A + \lambda_B}{2}$$

نقاط بحرانی: نقاط ابتدا و انتهای هر عضو و نیز نقاط زیر بار را که قابلیت تشکیل مفصل خمیری دارند نقطه‌ی بحرانی می‌نامند. مثلاً برای یک قاب با N_f نقطه‌ی بحرانی زیر بار و N_{co} گره گوشه (گره‌ی که فقط دو عضو به آن متصل است) و n دهانه و m طبقه تعداد $N_c = 2[m(2n+1)] + N_f - N_{co}$ مکانیزم کل: درجه‌ی نامعینی استاتیکی هر قاب مستوی دارای n دهانه و m طبقه از رابطه‌ی $3mn$ تعیین می‌شود. [۱۵] چنانچه فرض کنیم تمام نقاط بحرانی سازه، به مفصل خمیری تبدیل شده باشند، آنگاه یک مکانیزم دینامیکی خواهیم داشت که دارای $N_D = N_c - 3mn$ درجه آزادی حرکت خواهد بود. هرگاه تغییر شکل این مکانیزم به ازای تغییر زاویه واحد θ هماهنگ با نیروی وارد بر سازه ترسیم شود، شکل حاصل «مکانیزم کل» نام دارد.

کار داخلی مکانیزم: کار داخلی از حاصل ضرب مقدار دوران نظیر هر نقطه‌ی بحرانی در لنگر خمیری عضو در همان نقطه به دست می‌آید. برای سادگی در محاسبات شکل جدیدی از مدل را ترسیم، و مقدار کار داخلی هر نقطه‌ی بحرانی را روی همان نقطه می‌نویسیم؛ نمودار حاصل «کار داخلی مکانیزم» نامیده می‌شود و $W_{mi} = m_{pi} \times \theta_i$. کار داخلی بیشینه $(W_{i \max})$: در قابی با $3mn$ درجه نامعینی، سازه حداکثر به ازای $N_p = 3mn + 1$ مفصل خمیری پایدار خواهد بود. حال چنانچه از کار داخلی مکانیزم به ترتیب $3mn+1$ کار داخلی که بزرگ‌ترند انتخاب شوند، کار داخلی بیشینه به دست خواهد آمد. چنانچه این اعداد را به صورت تجمعی برحسب تعداد مفصل‌های خمیری نظیر آنها ترسیم کنیم، «منحنی کار داخلی بیشینه» به دست خواهد آمد. این منحنی ایده‌آل‌ترین حالت مقاومت سازه است که در آن سازه منهدم خواهد شد.

کار داخلی کمینه $(W_{i \min})$: چنانچه از کار داخلی مکانیزم به ترتیب $3mn+1$ کار داخلی را که کوچک‌ترند انتخاب کنیم، کار داخلی کمینه به دست خواهد آمد. چنانچه این اعداد را به صورت تجمعی و برحسب تعداد مفصل‌های خمیری نظیر آنها ترسیم کنیم، «منحنی کار داخلی کمینه» به دست خواهد آمد. این منحنی ضعیف‌ترین حالت مقاومت سازه است که در آن سازه منهدم می‌شود.

منحنی کار خارجی بیشینه $(W_{e \max})$: منحنی است که در آن کار تجمعی انجام شده توسط نیروی خارجی برحسب مفصل‌های خمیری متناظر هر یک ترسیم شده است که در محاسبه‌ی آن فرض می‌کنیم اگر نیرویی (نیروهای جانبی) در محل گره‌های سازه وارد شود، کار آن زمانی محاسبه می‌شود که مفصل پای ستون نظیر آن دوران پیدا کند، و کار نیروی وارده در طول اعضا زمانی محاسبه می‌شود که مفصل خمیری زیر نیرو تشکیل شود و ترتیب تشکیل مفصل‌ها، برحسب کار

مثال ۱: در این مثال سازه ۳ درجه نامعین است و لذا بیشینه به‌ازای ۴ مفصل خمیری منهدم خواهد شد و دارای ۵ نقطه‌ی بحرانی است. طبق روشی که در بخش ۳ توضیح داده شد، مقدار کارهای انجام شده برحسب تعداد مفصل‌ها محاسبه می‌شود.

شکل ۱ شمای کلی قاب و بارگذاری آن را نشان می‌دهد؛ در شکل ۲ نیز با توجه به اصول ذکر شده مکانیزم کل قاب ترسیم شده است که با ضرب کردن مقدار لنگر خمیری اعضا در مقدار دوران هر نقطه‌ی بحرانی نمودار «کار داخلی مکانیزم» به‌دست خواهد آمد (شکل ۳). مقدار کار داخلی هر نقطه بحرانی در شکل ۳ مشخص شده است. حال با توجه به اینکه سازه ۳ درجه نامعین است پس به ازای حداکثر ۴ مفصل ناپایدار خواهد شد. نمودار کار را طبق توضیحات بخش ۳ برای سازه ترسیم می‌کنیم (شکل ۴) همان‌گونه که در ذیل آمده است از روی منحنی کار مقدار نقطه‌ی تلاقی دو منحنی «کار داخلی کمینه» و «کار خارجی بیشینه» X را به‌دست می‌آوریم. برای به‌دست آوردن مختصات نقطه‌ی تلاقی، ابتدا معادله‌ی دو خط «کار داخلی کمینه» و «کار خارجی بیشینه» را در ناحیه‌ی برخورد

دامنه و پاسخ اولیه‌ی مناسبی برای روش‌هایی مانند «الگوریتم ژنتیک» (که نیاز به پاسخ اولیه دارند) خواهد بود.

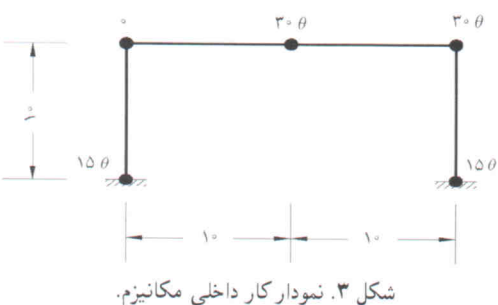
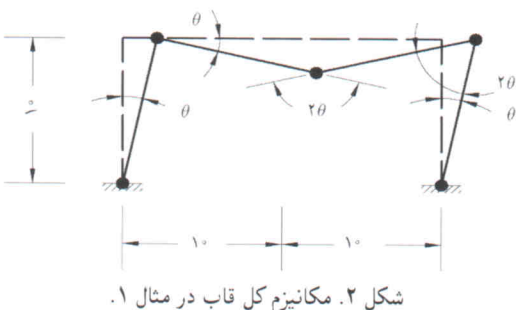
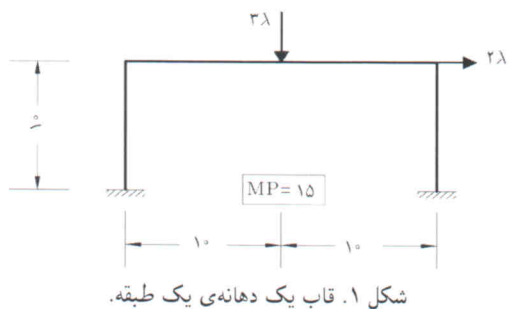
در صورتی که در قسمت‌های اولیه‌ی منحنی کار، دو منحنی «کار خارجی بیشینه» و «کار داخلی بیشینه» یکدیگر را قطع کنند، باید بررسی کنیم که این مقدار کار خارجی در اثر فرضیات ما در ترسیم منحنی کار خارجی بیشینه (کار نیروی جانبی روی گره‌ها زمانی محاسبه می‌شود که مفصل پای ستون نظیر آن دوران پیدا کند). است یا ناشی از نیروی زیادی است که در طول اعضا وارد شده است. در صورت اول، نمودار کار خارجی بیشینه، باید اصلاح شود و مقدار آن تا نقطه‌ی کار داخلی بیشینه ادامه یابد و مقدار اضافی آن باید به نقطه‌ی نظیر مفصل بعدی انتقال یابد که با توجه به اینکه این نمودار به‌صورت تجمعی ترسیم شده است تأثیری در جواب نهایی λ_c نخواهد داشت. اما در صورتی که این مقدار کار ناشی از نیروی زیادی باشد که در طول عضو وارد شده، آنگاه سازه در همین قسمت منهدم خواهد شد (انهدام موضعی) و باید λ_c نظیر آن را به‌عنوان پاسخ مسئله در نظر گرفت.

فرضیات

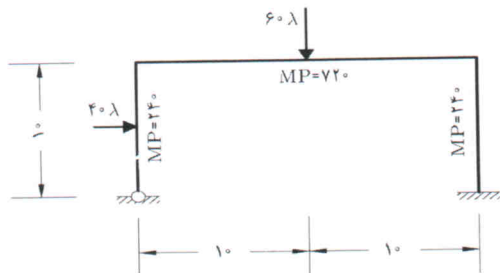
- از تغییر شکل‌های کشسانی اعضا صرف نظر شده است؛
- تغییر زوایای ناشی از ایجاد مفصل‌های خمیری، (θ) به‌اندازه‌ی کافی کوچک است، طوری که $L \times \cos\theta \cong L$ و $\sin\theta \cong \theta$ ؛
- هنگامی که سازه‌ی ۳mm درجه‌ی نامعین به مکانیزم یک درجه آزادی حرکت تبدیل می‌شود کل کار نیروی خارجی به سازه وارد شده است؛
- کار نیروی وارد در طول اعضا زمانی محاسبه می‌شود که نقطه‌ی بحرانی زیر آن تبدیل به مفصل خمیری شده است؛
- کار نیروی جانبی روی گره‌ها زمانی محاسبه می‌شود که مفصل پای ستون نظیر آن دوران پیدا کند؛
- ترتیب تشکیل مفصل‌ها برای کار خارجی بیشینه به ترتیب نزولی مقدار کار $W_{mi} = m_{pi} \times \theta_i$ ، در نمودار کار داخلی مکانیزم خواهد بود؛
- مقدار θ که در نمودار مکانیزم کل و کارها نوشته شده منظور تغییر زاویه نسبت به حالت اولیه است نه اندازه‌ی خود زاویه.

مثال‌ها

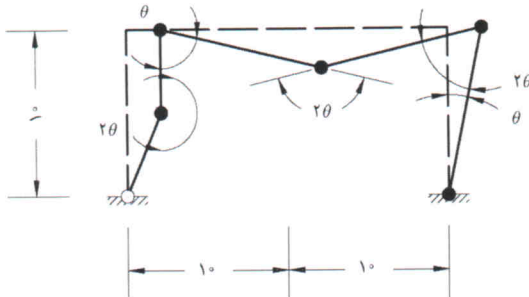
در این بخش، ۷ مثال مختلف با این روش محاسبه شده‌اند که در پایان هر کدام مقدار λ_c به‌دست آمده از این روش با جواب‌های موجود^[۱۸] مقایسه شده است.



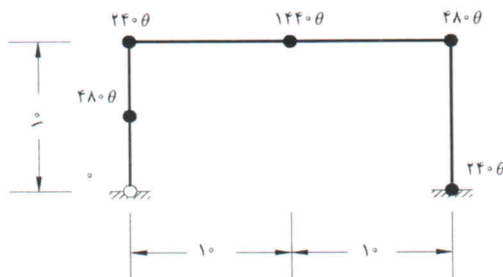
مقدار کار هر نقطه بحرانی در شکل ۷ مشخص شده است. حال با توجه به این که سازه ۲ درجه نامعین است، به ازای حداکثر ۳ مفصل ناپایدار خواهد شد. نمودار کار را طبق توضیحاتی که در بالا گفته شد برای سازه ترسیم می‌کنیم (شکل ۸). چنان که خواهیم دید از روی



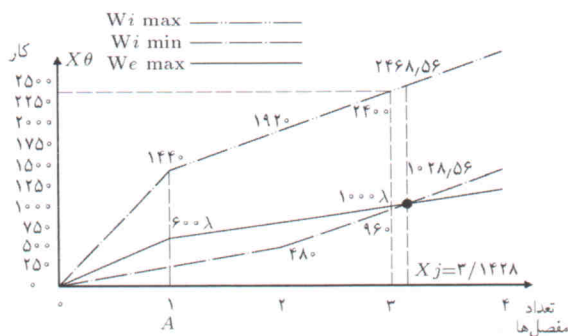
شکل ۵. قاب یک دهنه یک طبقه.



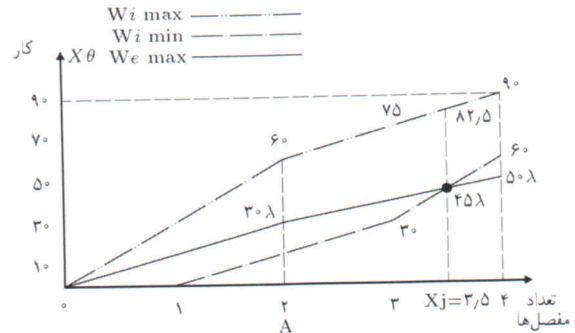
شکل ۶. مکانیزم کل قاب در مثال ۲.



شکل ۷. نمودار کار داخلی مکانیزم.



شکل ۸. منحنی کار قاب در مثال ۲.



شکل ۴. منحنی کار قاب مثال ۱.

دو خط به دست آورده « X_j » و مقدار «کار داخلی بیشینه» و «کار خارجی بیشینه» را در آن نقطه محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} y_{i \min} = 30X - 60 \\ y_{e \max} = 10X + 10 \end{cases} \Rightarrow X_j = 3/5$$

$$\left. \begin{aligned} y_{e \max}(X_j) &= 45 \\ y_{i \max} &= 15X + 30 \Rightarrow y_{i \max}(X_j) = 82/5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda_c =$$

$$\frac{82/5}{45} = 1/83$$

که با پاسخ موجود در تحقیقات ($\lambda_c = 1/8$) به خوبی مطابقت دارد [۱۸] و با محاسبه مقادیر λ برای نقاط A و B که از تقسیم کردن دو مقدار کار داخلی بیشینه بر کار خارجی بیشینه در این نقطه به دست می‌آید خواهیم داشت:

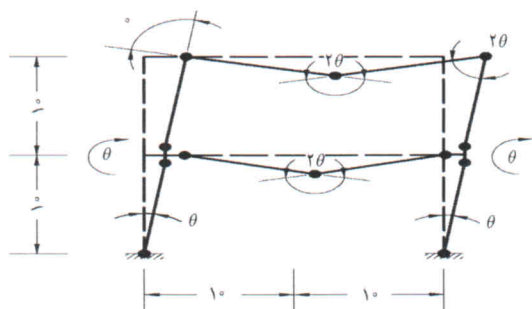
$$\lambda_A \leq \lambda_c \leq \lambda_B \Rightarrow 2 \leq \lambda_c \leq 1/8$$

$$\lambda_m = \frac{\lambda_A + \lambda_B}{2} \Rightarrow \lambda_m = \frac{2 + 1/8}{2} = 1/9$$

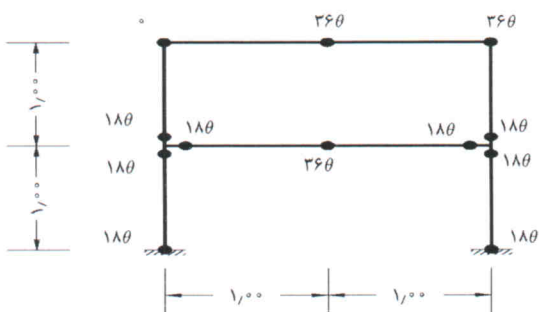
که این مقادیر، دامنه و جواب اولیه بسیار خوبی برای روش‌هایی (مانند الگوریتم ژنتیک) است که احتیاج به مقادیر اولیه دارند.

مثال ۲: سازه‌ی نشان داده شده در شکل ۵، دو درجه نامعین است، و حداکثر به ازای ۳ مفصل خمیری منهدم خواهد شد و دارای ۵ نقطه‌ی بحرانی است. طبق روشی که در بالا توضیح داده شد، مقدار کارهای انجام شده را برحسب تعداد مفصل‌ها محاسبه خواهیم کرد.

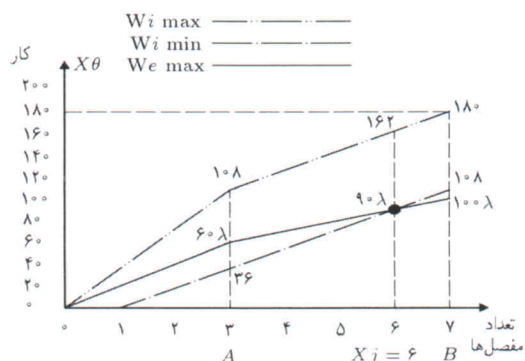
شکل ۵ شمای کلی قاب و بارگذاری آن را نشان می‌دهد، و در شکل ۶ نیز با توجه به اصول گفته شده، مکانیزم کل قاب ترسیم شده است که با ضرب کردن مقدار لنگر خمیری اعضا در مقدار دوران هر نقطه‌ی بحرانی نمودار «کار داخلی مکانیزم» به دست خواهد آمد. (شکل ۷)



شکل ۱۰. مکانیزم کل قاب در مثال ۳.



شکل ۱۱. نمودار کار داخلی مکانیزم.



شکل ۱۲. منحنی کار قاب در مثال ۳.

با ضرب کردن مقدار لنگر خمیری اعضا در مقدار دوران هر نقطه‌ی بحرانی نمودار «کار داخلی مکانیزم» به دست خواهد آمد، (شکل ۱۱) مقدار کار هر نقطه‌ی بحرانی در شکل ۱۱ مشخص شده است. حال با توجه به اینکه سازه ۷ درجه نامعین است پس به ازای حداکثر ۸ مفصل ناپایدار خواهد شد. نمودار کار را طبق توضیحاتی که پیشتر گفته شد برای سازه ترسیم می‌کنیم (شکل ۱۲). در ادامه یادآور می‌شویم که چگونه از روی منحنی کار می‌توانیم مقادیر نقطه‌ی تلاقی دو منحنی «کار داخلی کمینه» و «کار خارجی بیشینه» (X_j) را به دست آوریم. برای به دست آوردن مختصات نقطه‌ی تلاقی، ابتدا معادله‌ی دو

منحنی کار مقادیر نقطه‌ی تلاقی دو منحنی «کار داخلی کمینه» و «کار خارجی بیشینه» X_j را به دست می‌آوریم. برای به دست آوردن مختصات نقطه‌ی تلاقی، ابتدا معادله‌ی دو خط «کار داخلی کمینه» و «کار خارجی بیشینه» را در ناحیه‌ی برخورد دو خط به دست آورده « X_j »، پس «مقدار کار داخلی بیشینه» و «کار خارجی بیشینه» را در آن نقطه محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} y_{i \min} = 48^\circ X - 48^\circ \\ y_{e \max} = 20^\circ X + 40^\circ \end{cases} \Rightarrow X_j = 3,1428$$

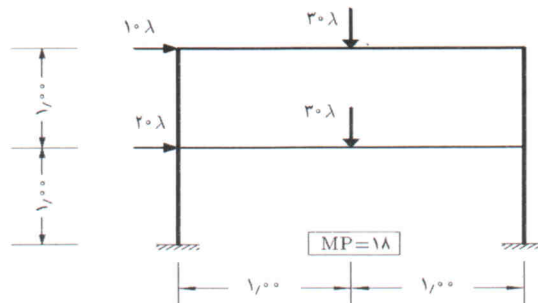
$$\left. \begin{aligned} y_{e \max}(X_j) &= 1028,54 \\ y_{i \max} &= 48^\circ X + 96^\circ \Rightarrow y_{i \max}(X_j) = 2468,54 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda_c = \frac{2468,54}{1028,54} = 2,4^\circ$$

که با پاسخ موجود در تحقیقات ($\lambda_c = 2,4^\circ$) به خوبی مطابقت دارد. [۱۸]

از آنجا که نقطه‌ی B خارج از محدوده‌ی استاتیکی سازه قرار دارد، نمی‌توان ضریب بار نظیر آن را محاسبه کرد و فقط با محاسبه‌ی ضریب بار A می‌توان یک کران برای λ به دست آورد. از تقسیم مقدار کار داخلی بیشینه بر کار خارجی بیشینه در این نقطه خواهیم داشت:

$$\lambda_A \leq \lambda_c \Rightarrow 2,4 \leq \lambda_c$$

مثال ۳: سازه‌ی نشان داده شده در شکل ۹، شش درجه نامعین است پس بیشینه به ازای ۷ مفصل خمیری منهدم خواهد شد و دارای ۱۲ نقطه‌ی بحرانی است. طبق روشی که پیشتر توضیح داده شد مقدار کارهای انجام شده برحسب تعداد مفصل‌ها محاسبه خواهد شد. شکل ۹ شمای کلی قاب و بارگذاری آن را نشان می‌دهد، در شکل ۱۰ با توجه به اصول یاد شده، مکانیزم کل قاب ترسیم شده است که



شکل ۹. قاب یک دهانه‌ی دو طبقه.

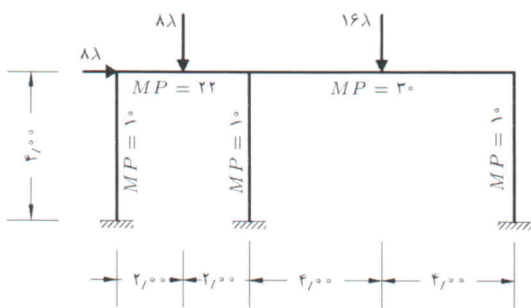
«کار خارجی بیشینه» را در آن نقطه محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} y_{i \min} = 22X - 82 \\ y_{e \max} = 10.67X + 37.32 \end{cases} \Rightarrow X_j = 10.53$$

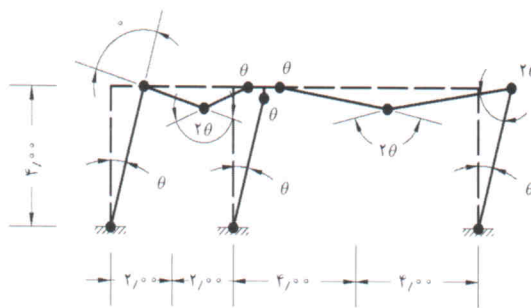
$$\left. \begin{aligned} y_{e \max}(X_j) &= 149.66 \\ y_{i \max} &= 10X + 116 \Rightarrow y_{i \max}(X_j) = 221.3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\lambda_c = \frac{221.3}{149.66} = 1.478$$

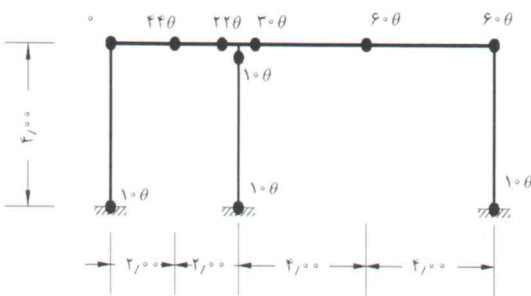
که با پاسخ موجود در تحقیقات ($\lambda_c = 1.48$) مطابقت دارد. [۱۸]
از آنجا که نقطه‌ی B در خارج از محدوده‌ی استاتیکی سازه قرار دارد، نمی‌توان ضریب بار نظیر آن را محاسبه کرد و فقط با محاسبه‌ی



شکل ۱۳. قاب دودهانه‌ی یک طبقه.



شکل ۱۴. مکانیزم کل قاب در مثال ۴.



شکل ۱۵. نمودار کار داخلی مکانیزم.

خط «کار داخلی کمینه» و «کار خارجی بیشینه» در ناحیه‌ی برخورد دو خط به‌دست آورده (X_j)، سپس مقدار «کار داخلی بیشینه» و «کار خارجی بیشینه» را در آن نقطه محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} y_{i \min} = 18X - 18 \\ y_{e \max} = 10X + 30 \end{cases} \Rightarrow X_j = 6$$

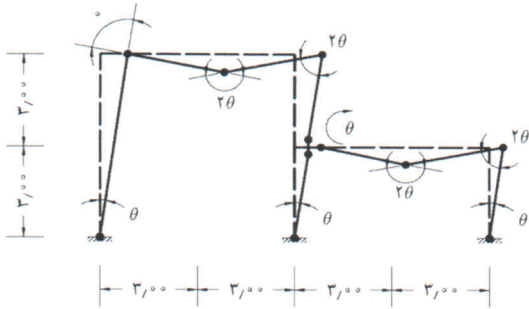
$$\left. \begin{aligned} y_{e \max}(X_j) &= 90 \\ y_{i \max} &= 18X + 54 \Rightarrow y_{i \max}(X_j) = 162 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lambda_c = \frac{162}{90} = 1.80$$

که با پاسخ موجود در تحقیقات ($\lambda_c = 1.80$) یکسان است. [۴]
با محاسبه‌ی مقادیر λ برای نقاط A و B از تقسیم دو مقدار کار داخلی بیشینه بر کار خارجی بیشینه در این نقطه به‌دست می‌آید خواهیم داشت:

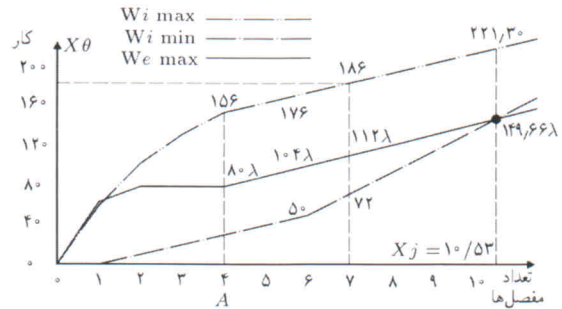
$$\lambda_A \geq \lambda_c \geq \lambda_B \Rightarrow 1.8 \leq \lambda_c \leq 1.8$$

$$\lambda_m = \frac{\lambda_A + \lambda_B}{2} \Rightarrow \lambda_m = \frac{1.8 + 1.8}{2} = 1.8$$

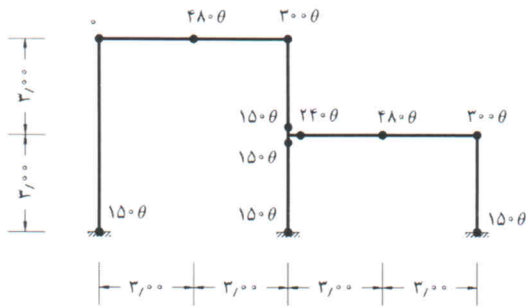
مثال ۴: سازه‌ی نشان داده شده در شکل ۱۳، شش درجه نامعین است، پس بیشینه به‌ازای ۷ مفصل خمیری منهدم خواهد شد و دارای ۱۰ نقطه‌ی بحرانی است. طبق روشی که پیشتر توضیح داده شد مقدار کارهای انجام شده بر حسب تعداد مفصل‌ها محاسبه خواهد شد.
شکل ۱۳ شمای کلی قاب و بارگذاری آن را نشان می‌دهد، در شکل ۱۴ با توجه به اصول یاد شده مکانیزم کل قاب ترسیم شده است که با ضرب کردن مقدار لنگر خمیری اعضا در مقدار دوران هر نقطه‌ی بحرانی نمودار «کار داخلی مکانیزم» به‌دست خواهد آمد (شکل ۱۵). مقدار کار هر نقطه‌ی بحرانی در شکل ۱۵ مشخص شده است.
حال با توجه به این‌که سازه ۶ درجه نامعین است پس به‌ازای حداکثر ۷ مفصل ناپایدار خواهد شد. نمودار کار را طبق توضیحاتی که در بالا گفته شد برای سازه ترسیم می‌کنیم (شکل ۱۶). چنان‌که در ادامه آمده است، از روی منحنی کار مقادیر نقطه‌ی تلاقی دو منحنی «کار داخلی کمینه» و «کار خارجی بیشینه» (X_j) را به‌دست می‌آوریم.
برای به‌دست آوردن مختصات نقطه‌ی تلاقی، ابتدا معادله‌ی دو خط «کار داخلی کمینه» و «کار خارجی بیشینه» را در ناحیه‌ی برخورد دو خط به‌دست آورده (X_j) و سپس مقدار «کار داخلی بیشینه» و



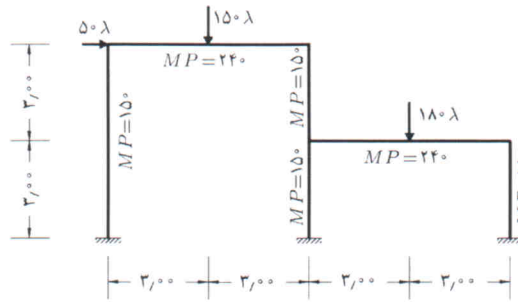
شکل ۱۸. مکانیزم کل قاب در مثال ۵.



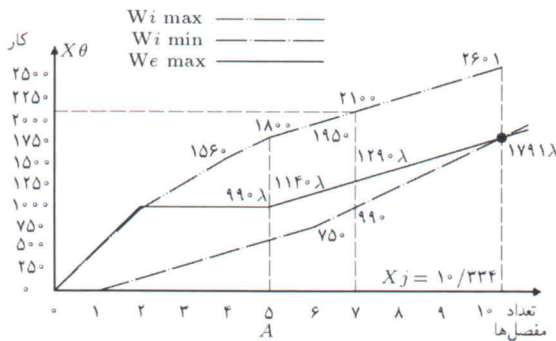
شکل ۱۶. منحنی کار قاب در مثال ۴.



شکل ۱۹. نمودار کار داخلی مکانیزم.



شکل ۱۷. قاب دو دهنه‌ی یک طبقه.



شکل ۲۰. منحنی کار قاب در مثال ۵.

بیشینه» را در آن نقطه محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{cases} y_{i \min} = 24^\circ X - 69^\circ \\ y_{e \max} = 15^\circ X + 24^\circ \end{cases} \Rightarrow X_j = 10,334$$

$$\left. \begin{aligned} y_{e \max}(X_j) &= 179,0/1 \\ y_{i \max} &= 15^\circ X + 105^\circ \Rightarrow y_{i \max}(X_j) = 260,0/1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\lambda_c = \frac{260,0/1}{179,0/1} = 1,452$$

که با پاسخ موجود در تحقیقات ($\lambda_c = 1,496$) مطابقت دارد. [۱۵]

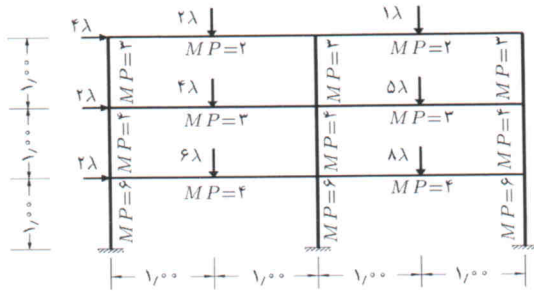
ضریب بار A می‌توان یک کران برای λ به دست آورد. که از تقسیم مقدار کار داخلی بیشینه بر کار خارجی بیشینه در این نقطه خواهیم داشت:

$$\lambda_A \geq \lambda_c \Rightarrow 1,95 \geq \lambda_c$$

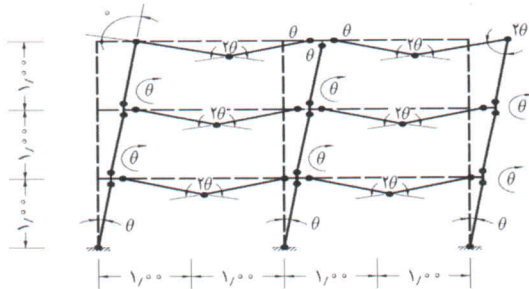
مثال ۵: سازه‌ی نشان داده شده در شکل ۱۷، شش درجه نامعین است پس بیشینه به‌ازای ۷ مفصل خمیری منهدم خواهد شد، و دارای ۱۱ نقطه‌ی بحرانی است. طبق روشی که پیشتر توضیح داده شد مقدار کارهای انجام شده برحسب تعداد مفصل‌ها محاسبه خواهد شد.

شکل ۱۷ شمای کلی قاب و بارگذاری آن را نشان می‌دهد؛ در شکل ۱۸ نیز با توجه به اصول یاد شده مکانیزم کل قاب ترسیم شده است که با ضرب کردن مقدار لنگر خمیری اعضا در مقدار دوران هر نقطه‌ی بحرانی نمودار «کار داخلی مکانیزم» به دست خواهد آمد (شکل ۱۹). مقدار کار هر نقطه‌ی بحرانی در شکل ۱۹ مشخص شده است. حال با توجه به این‌که سازه ۶ درجه نامعین است پس به‌ازای حداکثر ۷ مفصل ناپایدار خواهد شد. نمودار کار را طبق توضیحاتی که پیشتر گفته شد برای سازه ترسیم می‌کنیم (شکل ۲۰). در ادامه یادآور می‌شویم که چگونه از روی منحنی کار می‌توانیم مقادیر نقطه تلاقی دو منحنی «کار داخلی کمینه» و «کار خارجی بیشینه» را به دست آوریم.

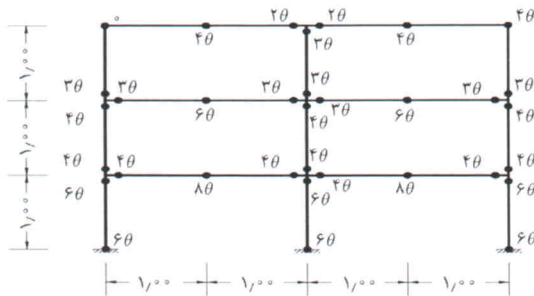
برای به دست آوردن مختصات نقطه تلاقی، ابتدا معادله‌ی دو خط «کار داخلی کمینه» و «کار خارجی بیشینه» را در ناحیه‌ی برخورد دو خط به دست آورده (X_j) و مقدار «کار داخلی بیشینه» و «کار خارجی



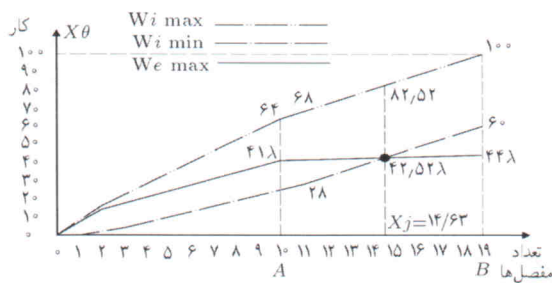
شکل ۲۱. قاب دودانه‌ای سه طبقه.



شکل ۲۲. مکانیزم کل قاب در مثال ۶.



شکل ۲۳. نمودار کار داخلی مکانیزم.



شکل ۲۴. منحنی کار قاب در مثال ۶.

خواهیم داشت:

$$\lambda_A \leq \lambda_c \leq \lambda_B \Rightarrow 1,561 \leq \lambda_c \leq 2,27$$

$$\lambda_m = \frac{\lambda_A + \lambda_B}{2} \Rightarrow \lambda_m = \frac{2,27 + 1,561}{2} = 1,915$$

مثال ۷: سازه‌ی نشان داده شده در شکل ۲۷، سی و شش درجه نامعین است، پس بیشینه به‌ازای ۳۷ مفصل خمیری منهدم خواهد شد و دارای

از آنجا که نقطه‌ی B خارج از محدوده‌ی استاتیکی سازه قرار دارد، نمی‌توان ضریب بار نظیر آن را محاسبه کرد و فقط با محاسبه‌ی ضریب بار A می‌توان یک کران برای λ به دست آورد. که از تقسیم مقدار کار داخلی بیشینه بر کار خارجی بیشینه در این نقطه خواهیم داشت:

$$\lambda_A \geq \lambda_c \Rightarrow 1,818 \geq \lambda_c$$

مثال ۶: سازه‌ی نشان داده شده در شکل ۲۱، هیجده درجه نامعین است، پس بیشینه به‌ازای ۱۹ مفصل خمیری منهدم خواهد شد و دارای ۳۴ نقطه بحرانی است. طبق روشی که پیشتر توضیح داده شد مقدار کارهای انجام شده برحسب تعداد مفصل‌ها محاسبه خواهد شد.

شکل ۲۱ شمای کلی قاب و بارگذاری آن را نشان می‌دهد. در شکل ۲۲ نیز با توجه به اصول ذکر شده مکانیزم کل قاب ترسیم شده است که با ضرب کردن مقدار لنگر خمیری اعضا در مقدار دوران هر نقطه‌ی بحرانی نمودار «کار داخلی مکانیزم» به دست خواهد آمد (شکل ۲۳) مقدار کار هر نقطه‌ی بحرانی در شکل ۲۳ مشخص شده است.

حال با توجه به این که سازه ۱۸ درجه نامعین است پس به‌ازای حداکثر ۱۹ مفصل ناپایدار خواهد شد. نمودار کار را طبق توضیحاتی که پیشتر گفته شد، برای سازه ترسیم می‌کنیم (شکل ۲۴). در ادامه یادآور خواهیم شد که چگونه از روی منحنی کار می‌توانیم مقادیر نقطه تلاقی دو منحنی «کار داخلی کمینه» و «کار خارجی بیشینه» را به دست آوریم. برای به دست آوردن مختصات نقطه تلاقی، ابتدا معادله‌ی دو خط «کار داخلی کمینه» و «کار خارجی بیشینه» را در ناحیه برخورد دو خط به دست آورده X_j و سپس مقدار کار داخلی بیشینه و کار خارجی بیشینه را در آن نقطه محاسبه می‌کنیم.

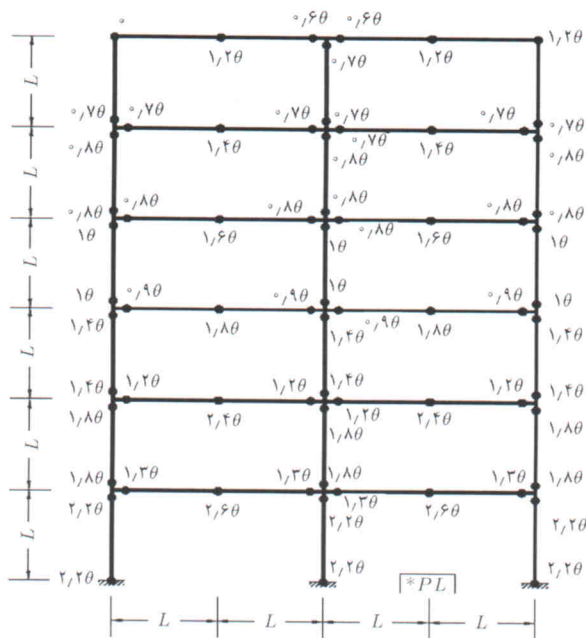
$$\begin{cases} y_{i \min} = 4X - 16 \\ y_{e \max} = \frac{X}{3} + \frac{112}{3} \end{cases} \Rightarrow X_j = 14,63$$

$$\left. \begin{aligned} y_{e \max}(X_j) &= 42,52 \\ y_{i \max} = 4X + 24 &\Rightarrow y_{i \max}(X_j) = 82,52 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

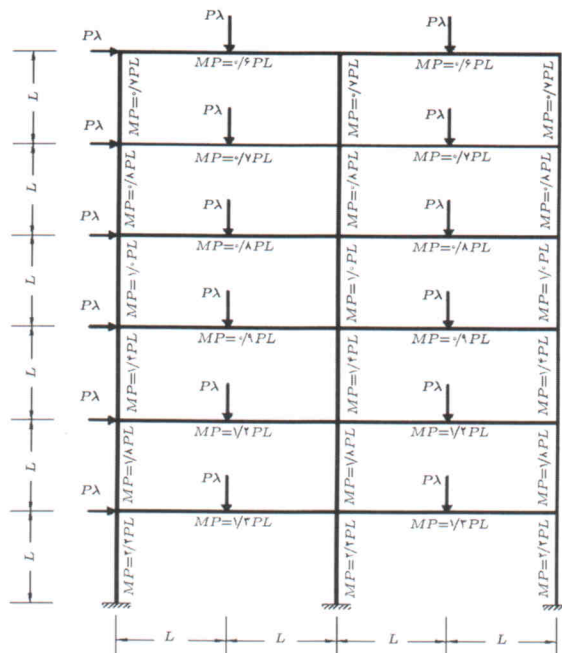
$$\lambda_c = \frac{82,52}{42,52} = 1,941$$

که با پاسخ موجود در تحقیقات ($\lambda_c = 1,976$) مطابقت خوبی دارد. [۱۵]

با محاسبه‌ی مقادیر λ برای نقاط A و B که از تقسیم دو مقدار کار داخلی بیشینه بر کار خارجی بیشینه در این نقطه به دست می‌آید،



شکل ۲۷. نمودار کار داخلی مکانیزم.



شکل ۲۵. قاب دو دهانه‌ی شش طبقه.

در ادامه یادآور خواهیم شد که چگونه می‌توانیم از روی منحنی کار، مقادیر نقطه تلاقی دو منحنی «کار داخلی کمینه» و «کار خارجی بیشینه» (X_j) را به دست آوریم. برای به دست آوردن مختصات نقطه تلاقی، معادله‌ی دو خط «کار داخلی کمینه» و «کار خارجی بیشینه» را در ناحیه‌ی برخورد دو خط به دست آورده (X_j)، و سپس مقدار «کار داخلی بیشینه» و «کار خارجی بیشینه» را در آن نقطه محاسبه می‌کنیم (شکل ۲۸).

$$\begin{cases} y_{i \min} = 1.2X - 1.278 \\ y_{e \max} = 0.74X + 1.872 \end{cases} \Rightarrow X_j = 3.8775$$

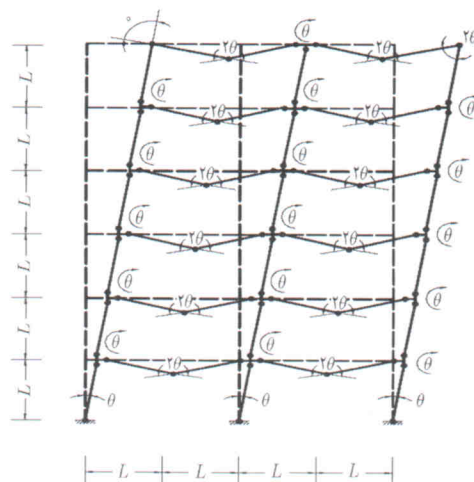
$$\left. \begin{aligned} y_{e \max}(X_j) &= 3.377 \\ y_{i \max} &= 1.2X + 1.878 \Rightarrow y_{i \max}(X_j) = 6.573 \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\lambda_c = \frac{6.573}{3.377} = 1.976$$

که با پاسخ موجود در تحقیقات ($\lambda_c = 1.976$) مطابقت خوبی دارد. [۱۵]

از آنجا که نقطه‌ی B در خارج از محدوده‌ی استاتیکی سازه قرار دارد، نمی‌توان ضریب بار نظیر آن را محاسبه کرد و فقط با محاسبه‌ی ضریب بار A می‌توان یک کران برای λ به دست آورد. از تقسیم مقدار

7° نقطه‌ی بحرانی است. طبق روشی که پیشتر توضیح داده شد، مقدار کارهای انجام شده برحسب تعداد مفصل‌ها محاسبه خواهد شد. شکل ۲۵ شمای کلی قاب و بارگذاری آن را نشان می‌دهد. در شکل ۲۶ نیز با توجه به اصول ذکر شده مکانیزم کل قاب ترسیم شده است که با ضرب کردن مقدار لنگر خمیری اعضا در مقدار دوران هر نقطه بحرانی نمودار «کار داخلی مکانیزم» به دست خواهد آمد (شکل ۲۷). مقدار کار هر نقطه‌ی بحرانی در شکل بعد مشخص شده است. حال با توجه به این‌که سازه 36° درجه نامعین است و به‌ازای حداکثر 37° مفصل ناپایدار خواهد شد، نمودار کار را برای سازه ترسیم می‌کنیم (شکل ۲۷).



شکل ۲۶. مکانیزم کل قاب در مثال ۷.

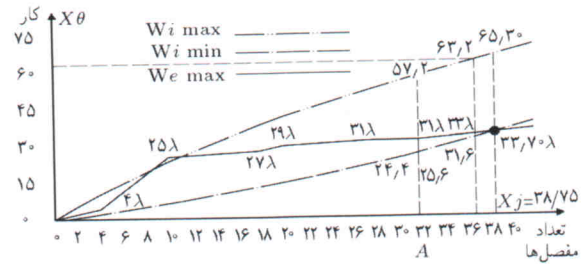
۳. چنانچه مقدار X_j عدد صحیح باشد، مقدار λ_c گاهی پاسخ دقیق خواهد بود و گاهی تقریبی؛ و الزاماً تعداد مفصل‌های خمیری سازه (N_p) در موقع انهدام برابر یکی از دو مقدار زیر خواهد بود:

$$[X_j] \leq N_p \leq [X_j] + 1$$

۴. چنانچه مقدار X_j از $3mn + 1$ بزرگتر باشد انهدام سازه به صورت کلی خواهد بود، و در صورتی که از آن کوچکتر باشد باید با توجه به روند تشکیل مفصل‌های خمیری بر اساس کار خارجی بیشینه اظهار نظر کرد.

۵. چنانچه X_j بزرگتر از مقدار مفصل‌های لازم برای ناپایداری سازه باشد ($X_j \geq 3mn + 1$) آنگاه مقدار X_j از نظر فیزیکی بیان دقیقی ندارد، اگرچه مقدار λ_c با دقت قابل قبولی صحیح است.

۶. در این نوشتار موضوع بارهای گسترده مورد بحث و بررسی قرار نگرفته است، زیرا برای چنین بارهایی می‌توان از «روش‌های بارهای متمرکز معادل» استفاده کرد.^[۴] این معادل‌سازی مقدار λ_c را به مقدار بسیار کمی تغییر می‌دهد که می‌توان اثر آن را به سادگی در محاسبات لحاظ کرد.



شکل ۲۸. منحنی کار قاب در مثال ۷.

کار داخلی بیشینه بر کار خارجی بیشینه در این نقطه خواهیم داشت:

$$\lambda_A \leq \lambda_c \Rightarrow 1,845 \leq \lambda_c$$

نتیجه‌گیری

۱. با توجه به این‌که اساس این روش بر مبنای کار داخلی اعضا و کار نیروی خارجی است هر اندازه که اعضا دارای لنگر خمیری متفاوت‌تری از یکدیگر باشند، با داشتن نقاط بیشتر، منحنی دقیق‌تری ترسیم می‌کنیم و پاسخ‌های دقیق‌تری نیز حاصل خواهد شد.

۲. هنگامی که مقدار X_j برابر با یک عدد صحیح باشد، مقدار λ_c محاسبه شده دقیق خواهد بود و مقدار X_j برابر تعداد مفصل‌های خمیری سازه در موقع انهدام خواهد بود.

منابع

- Gabor Kazinczy, Tests with fixed-ended beams, *Betonszemle*, **2**, (1914).
- Maier-Leibnitz, H., Test results, their interpretation and application, Preliminary Publication, *International Association for Bridge and Structural Engineering*, Second Congress, Berlin, (1936).
- Baker, J.F. and Roderick, J.W., An experimental investigation of the strength of seven portal frames, *Trans. Inst. Weld*, (4), **1**, (1938).
- Baker J., Horne M.R., and Heyman J., *The Steel Skeleton; Plastic Behaviour and Design*, Cambridge at the University Press, **2**, (1956).
- Neal, B.G. and Symonds P.S., The rapid calculation of plastic collapse loads for a framed structures, *Proc. Instits Civ. Engrs*, Part 3, pp.1-58 (1952).
- Neal, B.G. and Symonds P.S., The calculation of plastic loads for plane frames, Preliminary Publication, *International Association for Bridge and Structural Engineering*, 4th Congress, Cambridge and London (1952).
- Neal, B.G. and Symonds P.S., The calculation of collapse loads for framed structures, *J. Instits Civ. Engrs*, **35**, pp.21-40 (1950-1).
- Charnes A. and Greeberg H.J, Plastic collapse and linear programming, Summer Meeting of the American Mathematical Society (1959).
- Heyman, J. On the minimum weight design of a simple portal frame, *International Journal of Mechanical Science*, **1** pp. 121-134 (1960).
- Horne M.R. Determination of the shape of fixed ended beams for maximum economy according to the plastic theory, Final Report, *International Association of Bridge and Structural Engineering*, 4th Congress: Cambridge London, (1953).
- Baker J. and Heyman, J. *Plastic Design of Frames, Fundamentals*, **1**, Cambridge, Cambridge University Press (1969).

12. Jennings, A. Adapting the simplex method to plastic design, In: Marris, LJ, editor. Proceedings of Instability and Plastic Collapse of Steel Structures, pp. 164-173, (1983).
13. Kirsch, U. *Optimal Structural Design*, New York, McGraw-Hill, (1987).
14. Thierauf, G. A method for optimal limit design of structures with alternative loads, *Computational Methods in Applied Mechanics in Engineering*, **16**, pp. 134-149, (1987).
15. Kaveh, A. *Optimal Structural Analysis*. John Wiley, (RSP) UK, 2nd edition (2006).
16. Munro, J. Optimal plastic design of frames In Proceedings of NATO, Waterloo: Advanced Study in Engineering Plasticity by Mathematical Programming (1977).
17. Livesley, R.K. Linear programming in structural analysis and design. In: Gallagher RH et al. editors, *Optimum Structural Design*, Chap. 6, New York, Wiley, (1977).
18. Kaveh, A. and Khanlari, K., Collapse load factor of planar frames using a modified Geneticalgorithm, *Communications in Numerical Methods in Engineering*, **20**, pp. 911-925 (2004).
19. Kaveh, A. and Jahanshahi, M. Plastic Design of Frames Using Heuristic Algorithms, Proc. Eighth International Conference on Computational Structures Technology, Edited by BHV Topping, G. Montero and R. Montenegro, Las Palmas de Gran Canaria, Spain, pp.239-240 (September 2006).

