

تحلیل عینی پدیده «مکان‌یابی کرنش»

هومن شبیری (دکتری)

احمد فهیمی‌فر (دانشیار)

سید عبدالعظیم امیرشاه‌کرمی (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه صنعتی امیرکبیر

در این نوشتار ابتداء مفهوم فلسفی عینیت در تحلیل‌ها و بررسی‌های علمی بیان می‌شود. سپس مصداق آن در تحلیل خرابی، و به‌ویژه تحلیل‌های «کرنش مکان‌یابی شده» معرفی می‌شود. در قدم بعدی مهم‌ترین راه حل عملی عینی‌سازی تحلیل یعنی به‌کارگیری مقادیر غیر محلی متغیرها مورد بحث قرار خواهد گرفت. سپس ایده‌ی رایج تحلیل عینی بر پایه‌ی مدول سکانت معرفی می‌شود و نهایتاً برای تحلیل عینی بر بنیاد مدول مماسی معرفی شده و در کنار ایده‌ی رایج تحلیل براساس مدول سکانت مسئله‌ی به دو روش تحلیل خواهد شد.

مقدمه

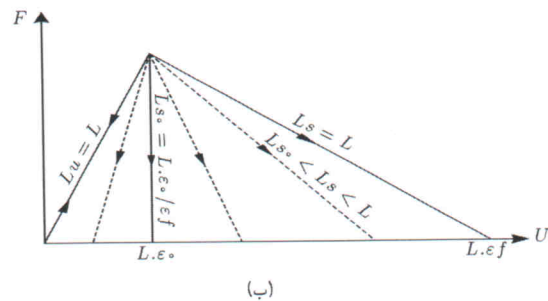
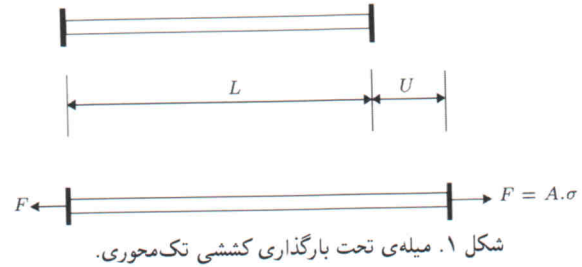
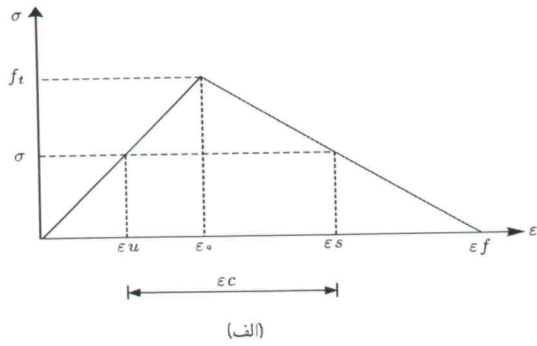
پدیده نیز تحلیل را به‌چگونگی تقسیم محیط در روش اجزاء محدود وابسته می‌کند، بدین معنی که پاسخ به‌دست آمده، به اندازه‌ی المان‌های در نظر گرفته شده بستگی خواهد داشت. این وابستگی پدیدآمده (حساسیت پاسخ نسبت به مش‌بندی در روش اجزاء محدود) ناشی از طبیعت رفتار نرم‌شونده‌ی ماده است: در تحلیل‌هایی که وارد حوزه‌ی نرم‌شوندگی می‌شوند، پدیده‌ی تقسیم محیط به دو بخش با رفتارهای متفاوت (بخشی که کرنش آن رو به افزایش است و بارگذاری می‌شود و بخشی که در آن باربرداری به‌وقوع می‌پیوندد) اتفاق می‌افتد. این پدیده را در مقالات و کتاب‌های متعدد، نظیر مقالات میلان ژیراسک، توضیح داده‌اند.^[۱]

در این نوشتار ابتدا مصداق فقدان عینیت در تحلیل‌های «کرنش مکان‌یابی شده» معرفی می‌شود و سپس راه حل‌های موجود برای مقابله با فقدان عینیت تحلیل معرفی و مورد بحث قرار خواهد گرفت. در نهایت، شیوه‌ی پیشنهادی نگارندگان نوشتار برای تحلیل عینی مسئله‌ی مکان‌یابی کرنش، بر مبنای مدول مماسی با حل یک مثال ارائه خواهد شد.

عینیت در مسائل مکان‌یابی کرنش

در این نوشتار معرفی مفاهیم و آسیب‌شناسی فقدان عینیت تحلیل در مسائل کرنش مکان‌یابی شده، با طرح یک مسئله‌ی تحلیلی یک‌بعدی انجام خواهد شد. روش‌شناسی به‌کار گرفته شده در مسائل پیچیده‌تر نیز قابل تعمیم خواهد بود. مسئله‌ی یک‌بعدی می‌تواند کشش یک المان میله‌ی با سطح مقطع ثابت، یا یک صفحه‌ی تحت برش خالص باشد. در این نوشتار مسئله‌ی المان میله‌ی تحت کشش مورد بررسی

عینی بودن روش‌شناسی، روش تحلیل و مدل‌سازی، از مهم‌ترین دغدغه‌های دانشمندان و نظریه پردازان به شمار می‌آید. عینی بودن، در اینجا به این معنی است که نتایج حاصل از مدل‌سازی و تحلیل، به‌منظور پیش‌بینی درست حوادث به میزان قابل قبولی با آنچه در واقع اتفاق می‌افتد و قابل مشاهده و اندازه‌گیری است توافق داشته باشد، در این صورت، مدل‌سازی و تحلیل، به شیوه‌ی عینی انجام گرفته است. یک شیوه‌ی تحلیلی عینی — به معنایی که گفته شد — از یک سو باید مبتنی بر فرضیات برگرفته از واقعیات موجود (مانند پارامترهای قابل اندازه‌گیری نظیر مدول الاستیسیته، انرژی شکست و مانند آن) بوده، و از سوی دیگر باید بر پایه‌ی یک نظریه‌ی ناظر بر عینیت استوار باشد. واضح است که به‌طور ایده‌آل هیچ تحلیلی کاملاً عینی نیست، بدین معنی که نتایج آن کاملاً با آنچه در واقع اتفاق می‌افتد تطابق ندارد. نظریه پردازان فرایندی ذهنی است که برای تجزیه و تحلیل عالم واقع شکل می‌گیرد. اما دلایل گوناگونی باعث ناموفق بودن یک نظریه در توجیه دقیق و کامل یک پدیده می‌شود، و از این رو است که نظریه‌ها همواره در حال اصلاح و بهبودند. در زمینه‌ی مهندسی نیز همین روند به چشم می‌خورد. همواره در تاریخ مهندسی مدرن شماری از پژوهشگران به کار اصلاح و بهبود نظریه‌های موجود، یا تدوین نظریه‌های جدید پرداخته‌اند. موضوعی که در این نوشتار بدان پرداخته می‌شود، «عینیت» در تحلیل مواد نرم شونده است. در تمامی مسائلی که سروکارشان با چنین موادی است، پدیده‌ی مکان‌یابی کرنش به‌وقوع می‌پیوندد. این پدیده در بخش بعدی همین نوشتار به‌اختصار توضیح داده شده است. بروز رفتار نرم‌شوندگی، پدیده‌ی مکان‌یابی کرنش را به همراه دارد. این



شکل ۲. الف) منحنی رفتاری مصالح میله؛ ب) رفتارهای پس از عبور از ϵ_c قابل تصور در منحنی بار - تغییر مکان.

ناحیه‌ی کرنش‌های زیاد (L_s) یکی از فرض‌های اساسی مسئله است. در لحظه‌ی که به حد کشسانی میله می‌رسیم، تغییر طول میله برابر است با: $u = L \cdot \epsilon_u$. با فراتر رفتن از حد کشسانی، تغییر مکان‌های میله بزرگ‌تر خواهد بود. برای آنکه تغییر مکان تحلیلی با تغییر مکان اندازه‌گیری شده اختلاف فاحشی نداشته باشد باید از اندازه‌ی طول ناحیه‌ی کرنش‌های بزرگ تخمینی واقعی (عینی) داشته باشیم. به راحتی مشاهده می‌شود در یک سطح تنش مشخص ($0 \leq \sigma \leq f_t$) پس از عبور از حد کشسانی، ($U \geq L \cdot \epsilon_u$) اگر فرض کنیم کرنش‌های زیاد در سراسر طول میله اتفاق بیفتند، تغییر طول میله برابر خواهد شد با: $U = L \cdot \epsilon_s$. با فرض این که کرنش‌های زیاد در طولی بی‌نهایت کوچک مکان‌یابی شوند، یا به عبارتی چنانچه $L_s = 0$ ، تغییر طول میله، عبارت خواهد بود از: $U = L \cdot \epsilon_u$ ؛ و این بدان معنی است که روی بخش کشسان منحنی رفتاری، باربرداری صورت گرفته است (شکل ۲ ب). چنان که دیده می‌شود، بسته به اینکه مقدار L_s چقدر فرض شده باشد، پاسخ‌های به دست آمده از تحلیل مقادیر به شدت متفاوت خواهد بود. بنابراین توافق جواب تحلیلی با مقدار اندازه‌گیری شده، کاملاً بستگی به فرض مسئله، یعنی L_s ، دارد و این بدان معناست که تحلیل، به‌نوعی تقسیم محیط حساس است. همین امر، تحلیل مسئله‌ی مکان‌یابی کرنش را ذاتاً غیرعینی می‌کند. اما امروزه می‌دانیم که مقدار L_s یکی از مشخصه‌های ذاتی مواد است. در مکانیک شکست، این طول را طول مشخصه‌ی^۳ ماده می‌نامند، که

قرار می‌گیرد. بارگذاری میله به شکل اعمال تغییر مکان (ازدیاد طول) فرض می‌شود.

فرض می‌شود طول اولیه‌ی میله برابر L ، سطح مقطع میله برابر A ، مقاومت کششی مصالح برابر f_t و مدول الاستیسیته برابر E باشد. مفروضات در این مسئله از یک قانون رفتاری ساده‌ی دوخطی پیروی می‌کند. تا قبل از رسیدن به مقاومت حداکثر، مصالح رفتار کشسانی خطی دارند، و درست پس از رسیدن به نقطه‌ی مقاومت حداکثر رفتار مصالح به نرم‌شدگی خطی^۲ تبدیل خواهد شد. کرنش در نقطه‌ی انتهایی بخش کشسان خطی (کرنش حد کشسان) را با $\epsilon_0 = f_t/E$ نمایش می‌دهیم. میله‌ی مورد بحث در یک انتها ثابت است و در انتهای دیگر با اعمال تغییر مکان کششی بارگذاری می‌شود.

رفتار میله تا رسیدن تغییر طولش به حد $u_0 = L \cdot \epsilon_0$ کشسان خطی باقی می‌ماند. به همین ترتیب، بیشترین نیرویی که میله تحمل خواهد کرد (حد کشسانی) برابر $F_0 = A \cdot f_t$ است. از این نقطه به بعد پدیده‌ی نرم‌شدگی میله شروع می‌شود. بدین ترتیب که در صورت ادامه‌ی بارگذاری، یعنی زمانی که میزان تغییر شکل از u_0 فراتر می‌رود، بخش کوچکی از میله رفتار نرم‌شونده از خود نشان می‌دهد و روی خط نرم‌شونده‌ی منحنی رفتاری تنش - کرنش حرکت خواهد کرد در صورتی که در بقیه‌ی میله باربرداری اتفاق می‌افتد، بدین معنی که بخش کوچکی از میله از این پس تغییر رفتار (جنس) داده و رفتار آن با نرم‌شدگی خطی تعریف می‌شود، در حالی که بقیه میله همچنان رفتار کشسان خطی خواهد داشت.^[۴] در این وضعیت مشاهده می‌شود که کرنش‌های بزرگ ناشی از رفتار نرم‌شدگی ماده، در ناحیه‌ی کوچکی از میله جای‌گیر می‌شوند و به همین دلیل این پدیده را مکان‌یابی کرنش (Strain Localization) می‌نامند. فرض کنیم طول ناحیه‌ی کرنش‌های زیاد (بخشی از میله که رفتار نرم‌شونده دارد)، برابر L_s و طول ناحیه‌ی باربرداری (بقیه‌ی طول میله، یعنی بخشی که رفتار کشسانی خطی داشته و باربرداری می‌شود) برابر L_u باشد، همچنین کرنش در ناحیه‌های دارای کرنش‌های زیاد را برابر ϵ_s و کرنش ناحیه‌ی باربرداری را برابر ϵ_u فرض می‌کنیم (شکل ۲ الف). بنابراین تغییر طول سراسری میله هنگامی که تغییر شکل از حد کشسان فراتر رود عبارت خواهد بود از: $u = L_s \cdot \epsilon_s + L_u \cdot \epsilon_u$. طول

طریق انتگرال‌گیری است. میدان تعریف شده‌ی زیر را در نظر بگیرید:

$$\bar{f}(x) = \int_V \alpha(x, \xi) \cdot f(\xi) d\xi \quad (1)$$

این یک میدان غیر محلی است که بر پایه‌ی میدان محلی $f(x)$ ساخته شده است. $\alpha(x, \xi)$ یک تابع وزن غیر محلی است. مقدار این تابع تنها به فاصله‌ی نقاط مرکز و پیرامونی که با مختصات x و ξ نمایندگی می‌شوند بستگی دارد. انتگرال‌گیری بر روی دامنه‌ی V انجام می‌شود که ناحیه‌ی است به مرکزیت نقطه‌ی مرکزی x . دامنه‌ی انتگرال‌گیری (V) در مسئله‌ی یک‌بعدی ممکن است پاره خطی به مرکز x و با طولی برابر طول مشخصه‌ی ماده باشد و یا در مسئله‌ی دوبعدی، دایره‌ی به مرکزیت x و به قطر برابر طول مشخصه باشد.

بنابراین چنان که دیده می‌شود، در غیر محلی‌سازی انتگرالی دو عامل تعیین‌کننده وجود دارد: یکی دامنه‌ی انتگرال V و دیگری تابع وزن α . دامنه‌ی انتگرال به‌گونه‌ی انتخاب می‌شود که نقطه‌ی مرجع x در مرکز آن قرار گیرد. مثلاً در محیط دوبعدی، V دایره‌ی به مرکز x و در محیط یک‌بعدی پاره‌خطی است که نقطه‌ی وسط آن x است. میدان غیرمحلی ساخته شده براساس میدان محلی یکنواخت منطقیاً باید بر میدان یکنواخت منطبق باشد، بنابراین تابع وزن انتگرال‌گیری باید دارای مساحت واحد باشد. لذا می‌توان چنین شکلی برای آن متصور بود:

$$\alpha(x, \xi) = \frac{\alpha_0 (|x - \xi|)}{\int_V \alpha_0 (|x - \zeta|) d\zeta} \quad (2)$$

بدین منظور توابع گوناگونی را می‌توانیم تشکیل دهیم. مثلاً در مسئله‌ی یک‌بعدی با دامنه‌ی انتگرال‌گیری $2a$ تابع وزن را می‌توان طبق روابط زیر تعریف کرد:

$$\alpha(x, \xi) = \frac{1}{2a} \quad \text{و} \quad \xi \in (x - a, x + a) \quad (3)$$

(۴) تابع خطی:

$$\alpha(x, \xi) = -\frac{1}{a^2} |\xi - x| + \frac{1}{a} \quad \text{و} \quad \xi \in (x - a, x + a)$$

(۵) تابع گاوسی:

$$\alpha(r) = \frac{\sqrt{2}}{l \cdot \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{r^2}{2l^2}\right) \quad \text{و}$$

$$l = a \quad r = |\xi - x|$$

(۶) تابع زنگوله‌یی:

$$\alpha(r) = \frac{15}{\lambda R} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 \quad \text{و} \quad 0 \leq r \leq R$$

نشان‌دهنده‌ی پهنای نوار ترک است و روش‌هایی نیز برای اندازه‌گیری آن وجود دارد.^[۳]

در مسئله یک‌بعدی، نظیر مسئله‌ی که بررسی می‌شود، دست‌یابی به پاسخ عینی، با دانستن مقدار طول مشخصه بسیار ساده است. اما در مسائل دوبعدی و سه‌بعدی، که خط ترک شکل مشخص و از قبل تعیین شده‌ی ندارد، وارد کردن طول مشخصه‌ی ماده در فرضیات تحلیل به این سادگی نیست. باید شیوه‌ی اتخاذ کرد که مستقل از نحوه‌ی تقسیم محیط (مش‌بندی در روش اجزاء محدود)، طول مشخصه‌ی ماده در تحلیل منظور شده و پاسخ عینی به دست آید.

مرتب کردن دنباله‌ی نرم شونده

باید راهی بیابیم تا دنباله‌ی نرم شونده‌ی منحنی بار - تغییر مکان از آشفستگی رهایی یابد و از بین بی‌نهایت حالت ممکن تنها یک حالت نزدیک به واقعیت موجود به دست آید. به عبارت دیگر باید شیوه‌ی اتخاذ کنیم تا براساس آن بتوانیم به یک تحلیل منظم و دارای یک جواب واحد، مستقل از فرض تقسیم، دست یابیم. بنابراین برای هر چه نزدیک‌تر کردن نتیجه‌ی تحلیل به آنچه در عالم واقع رخ می‌دهد و پیش روی ماست باید تمهیداتی اندیشید تا تحلیل از آشفستگی رهایی یابد و به پاسخی هرچه عینی‌تر منجر شود.

میدان‌های غیرمحلی^۴

ایده‌ی میدان‌های غیرمحلی در تاریخ ریاضیات به زمان‌های بسیار دور باز می‌گردد. اما از زمانی که دانشمندان عرصه‌ی مکانیک مواد با پدیده‌ی مکان‌یابی کرنش و عارضه‌ی همزاد آن - غیرعینی شدن تحلیل - آشنا شدند، به‌کارگیری این مفهوم در تحلیل‌های مهندسی کم و بیش مورد توجه واقع شده است. شاید بتوان از ارینگن به‌عنوان نخستین کسی که ایده‌ی میدان‌های غیرمحلی را در تحلیل محیط‌های پیوسته به کار گرفت، نام برد.^[۵] البته ارینگن رفتار میکروسکوپی محیط‌های پیوسته را مد نظر قرار داده بود و مطالعاتش جنبه‌ی مهندسی نداشت. بعدها بازانت آسیب‌شناسی پدیده‌ی مکان‌یابی کرنش را به‌دقت مورد بررسی قرار داد و به لزوم یافتن شیوه‌های عددی خاص برای رسیدن به پاسخ یکتا در مسئله‌ی مکان‌یابی کرنش دست یافت.^[۶]

یک میدان محلی را در دامنه‌ی D ، به‌سادگی می‌توان به‌صورت تابع $y = f(x)$ تعریف کرد، به طوری که مقدار y در هر نقطه فقط به مقدار x در همان نقطه بستگی داشته باشد. در این صورت $f(x)$ یک میدان محلی است به این مفهوم که مقدار y در هر محل (نقطه) تنها به موقعیت مکانی (مقدار) x بستگی دارد.

به شیوه‌های مختلف می‌توانیم یک میدان غیرمحلی را بر پایه‌ی میدان محلی تعریف شده، ایجاد کنیم. یکی از این شیوه‌ها غیرمحلی‌سازی از

اولین اثری که میانگین‌گیری یاد شده ممکن است داشته باشد، ماهیت اندرکنشی است که به مقادیر این میدان در هر نقطه از محیط (x) می‌بخشد. برای درک این مفهوم فرض کنید میدان محلی $f(x)$ میدان کرنش در یک تحلیل غیرکشسان مکانیک شکست باشد. در این صورت قابل تصور است که مقدار این میدان در یک نقطه بیانگر ایجاد ترک در آن نقطه از محیط است، در حالی که مقادیر این میدان در نقاط مجاور نقطه‌ی یاد شده فقط بیانگر کرنش کشسان محیط است. حال چنانچه بر پایه‌ی این میدان محلی یک میدان غیرمحلی تشکیل دهیم، در نقاط مجاور ترک تأثیر کرنش‌های غیرکشسان ناشی از ترک نیز دیده می‌شود، به عبارت بهتر مرز مشخص بین ناحیه‌ی ترک‌دار و ناحیه‌ی بدون ترک از بین می‌رود. چنین میدانی سازگاری بیشتری با واقعیت دارد. دیگر این که میدان غیرمحلی یک میدان نرم است و چنانچه در میدان محلی تغییرات ناگهانی مقادیر وجود داشته باشد، در میدان غیرمحلی شکل گرفته بر پایه‌ی آن چنین تغییراتی دیده نمی‌شود.

یکی دیگر از اثرات غیرمحلی سازی به شیوه‌ی انتگرال‌گیری یاد شده این است که اثر پدیده‌های محدود و موضعی را بسط می‌دهد. به عنوان مثال چنانچه در یک مسئله‌ی مکان‌یابی کرنش، کرنش‌های بزرگ ناشی از خرابی، ترک و یا خمیری شدن در محدوده‌ی بسیار کوچک‌تر از طول مشخصه‌ی L_s متمرکز شوند، با تشکیل میدان غیرمحلی توسط انتگرال‌گیری با دامنه‌ی انتگرال برابر L_s اثر کرنش‌های بزرگ در محدوده‌ی به اندازه‌ی طول مشخصه L_s گسترده می‌شود. شاید این مهم‌ترین خاصیتی باشد که ما را به کاربرد شیوه‌ی غیرمحلی سازی ترغیب می‌کند.

اما به راستی کدام متغیر برای تشکیل میدان غیرمحلی مناسب‌تر است؟ تنش، کرنش یا متغیری دیگر؟ از دیدگاه پدیدارشناسی انتخاب متغیر مناسب باید دو شرط اساسی را تأمین کند: نخست، در محدوده‌ی تحلیل کشسان باید نتیجه‌ی تحلیل محلی کاملاً منطبق بر تحلیل غیرمحلی باشد. به عبارت دیگر غیرمحلی سازی نباید نتیجه‌ی تحلیل کشسان را مخدوش کند. دیگر این که تحلیل غیرمحلی باید موجب دست‌یابی به بازتاب واقعی (عینی) شود بدان معنی که رفتار نرم شونده‌ی سازه (شکل ۲ ب) به شاخه درست (منطبق بر نتیجه‌ی به دست آمده در عمل) همگرا شود.

آشکارا دیده می‌شود که میدان کرنش برای غیرمحلی سازی مناسب نیست زیرا عموماً شرط اول را برآورده نمی‌کند. فقط هنگامی که میدان کرنش میدانی یکنواخت باشد، غیرمحلی سازی در مسئله‌ی کشسان میدانی منطبق بر میدان محلی را ارائه می‌دهد.^[۷] اما از آنجا که بردار کرنش قابل تفکیک به دو بردار کرنش کشسان (ε^e) و کرنش غیرکشسان، یا در زمینه‌ی مکانیک شکست کرنش ناشی از ایجاد ترک (ε^t) است:

$$\bar{K} = K(\bar{\varepsilon}) \quad (۷)$$

$$\bar{K} = \overline{K(\varepsilon)} \quad (۸)$$

$$\bar{K} = K(\bar{Y}) \quad (۹)$$

$$\bar{K} = \overline{K(Y)} \quad (۱۰)$$

رابطه‌ی ۷ به این معنی است که ابتدا میدان غیرمحلی کرنش $(\bar{\varepsilon})$ محاسبه شده و سپس ماتریس سختی بر آن اساس به دست آمده است. رابطه‌ی ۸ نشان می‌دهد که ابتدا میزان سختی در هر نقطه بر اساس میدان محلی کرنش محاسبه شده و سپس با انتگرال‌گیری، میدان غیرمحلی سختی به دست آمده و بر آن اساس ماتریس سختی

که در آن D^e ماتریس رفتار کشسان ماده است. پارامتر خرابی آشکارا به میزان کرنش بستگی دارد، ولی از آنجا که کرنش ماهیت برداری دارد و پارامتر خرابی اسکالر است بسیاری ترجیح داده‌اند آن را برحسب نرخ آزاد شدن انرژی شکست بیان کنند. نرخ آزاد شدن انرژی شکست در هر نقطه برحسب بردار کرنش در آن نقطه مطابق رابطه‌ی ۱۲ بیان می‌شود: [۱۰]

$$Y = \frac{1}{\nu} \varepsilon^T D^e \varepsilon \quad (12)$$

بنابراین پارامتر خرابی را می‌توان مطابق یکی از رابطه‌های ۱۳ یا ۱۴ ارائه داد:

$$\omega = f(\varepsilon) \quad (13)$$

$$\omega = f(Y) \quad (14)$$

پس از حل محلی مسئله می‌توانیم با تعیین مجدد پارامتر خرابی بر پایه‌ی میدان‌های غیرمحلی کرنش یا محتوای انرژی کشسانی، ماتریس سختی را دوباره تشکیل دهیم و با حل مجدد مسئله به پاسخ‌های عینی دست یابیم:

$$\bar{\omega} = f(\bar{\varepsilon}) \quad (15)$$

$$\bar{\omega} = f(\bar{Y}) \quad (16)$$

$$\bar{K} = \sum (\bar{1} - \bar{\omega}) B^T D^e B . m \quad (17)$$

حال با یک مثال به توضیح مسئله می‌پردازیم:

میله‌ی را در نظر بگیرید که در یک انتها جلوی حرکت آن گرفته شده است و در انتهای دیگر بارگذاری کششی می‌شود. میله به سه المان مساوی هر یک به طول واحد تقسیم شده است و مساحت مقطع آن نیز برابر واحد است. مسئله سه درجه آزادی دارد و در هر المان یک نقطه انتگرال‌گیری وجود دارد (شکل ۴).

رفتار ماده‌ی تشکیل‌دهنده میله نیز یک رفتار کشسان خطی - نرم شوندگی خطی است (شکل ۵). تا رسیدن به وضعیت تعریف شده‌ی ذیل، رفتار میله (منحنی P-U) به صورت کشسان خطی است:

$$U = 3/0 \text{ و } P = 2/0 \text{ و } \sigma = 2 \text{ و } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1/0$$

از آن پس داریم:

$$\omega = \frac{1/0 \cdot \varepsilon - 1}{\varepsilon} = \frac{1/0 \cdot \sqrt{Y} - 1}{\sqrt{Y}} \quad (18)$$

فرض کنیم طول مشخصه میله برابر ۱/۵ باشد (یعنی $L_s = 1/5$). در این صورت چنانچه مقدار تابع محلی f در المان‌های اول و سوم برابر f_1 و در المان دوم برابر f_2 باشد، با انتگرال‌گیری با تابع وزن انتگرال‌گیری یکنواخت و $2a = 1/5$ مقادیر غیرمحلی این تابع در

محاسبه شده است. رابطه‌های ۹ و ۱۰ نیز، مانند رابطه‌های ۷ و ۸، تعبیر می‌شوند با این تفاوت که در آنها به جای «کرنش»، از «نرخ آزاد شدن انرژی شکست» (Y) استفاده شده است. همان‌طور در چهار رابطه‌ی بالا به‌عنوان نمونه نشان داده شده است، به شیوه‌های گوناگونی می‌توانیم مقادیر درایه‌های تشکیل‌دهنده‌ی ماتریس سختی را غیرمحلی کنیم.

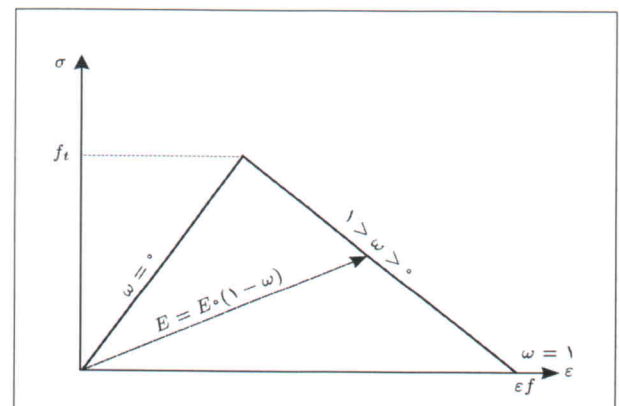
هر شیوه‌ی دارای مزایا و معایبی است. ممکن است یک فرمول‌بندی خاص به یک حل عددی پایدار و یا سازگار منجر نشود. همچنین ممکن است یک روش خاص از سرعت همگرایی بیشتری برخوردار باشد، یا در مواردی اصلاً همگرا نشود. لذا استفاده از یک ایده برای غیرمحلی‌سازی ماتریس سختی باید از پشتوانه‌ی نظری مناسبی برخوردار باشد.

ماتریس سختی سکانت

به‌طور کلی می‌توان گفت تاکنون فقط نظریه‌ی به‌کارگیری مدول سکانت در مسائل نرم شونده مورد توجه واقع شده است. شاید مهم‌ترین علت این امر تغییر علامت مدول تانژانت باشد که باعث ایجاد نقاط منفرد در فرایند حل عددی مسئله می‌شود.

در اینجا مدل خرابی ایزوتروپ اسکالر «مازاس» را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مازاس مجموعه‌ی از مدل‌های خرابی را فرمول‌بندی کرد. [۹، ۸] این مدل‌ها مبتنی بر کاهش تدریجی مدول سکانت حین نرم شدن هستند. پارامتر خرابی ω نقش محوری را در مدل مازاس بازی می‌کند. مقدار ω در قسمت کشسان و ترک نخورده‌ی ماده برابر صفر است. به تدریج همراه با توسعه‌ی خرابی ω افزایش می‌یابد تا این‌که در نقطه‌ی خرابی کامل به مقدار یک می‌رسد. بنابراین ماتریس سختی در مدل مازاس چنین خواهد بود:

$$K = \sum (\bar{1} - \omega) B^T D^e B . m \quad (11)$$



شکل ۳. پارامتر خرابی مازاس.

به همین ترتیب حل غیرمحلّی به نتایج زیر منجر می‌شود:

$$U = 9/0, P = 1/12, \varepsilon_1 = 0/95, \varepsilon_2 = 7/09$$

$$U = 12/0, P = 0/50, \varepsilon_1 = 0/52, \varepsilon_2 = 10/96$$

$$U = 15/0, P = 0/0, \varepsilon_1 = -0/269, \varepsilon_2 = 15/537$$

از آنجا که طول مشخصه‌ی ماده (L_s یا $2a$) برابر $1/5$ است، در عمل (اندازه‌گیری آزمایش کششی میله، آنچه در واقع اتفاق می‌افتد) و در انتهای بارگذاری ($P=0$) به دست می‌آید:

$$U = L_s \cdot \varepsilon_f = 1/5 \times 10 = 15$$

ماتریس سختی مماسی (تانژانت)

تلاش برای حل مسائل مکان‌یابی کرنش از طریق مدول مماسی چندی است که به‌طور نه چندان جدی آغاز شده است.^[۱۱] اما تاکنون به فرایند حل عددی این شیوه پرداخته نشده است. در اینجا، روشی را برای حل مسئله‌ی مکان‌یابی کرنش بر پایه‌ی مدول مماسی، با الهام از روش ابداعی مازاس ارائه خواهیم کرد. مشابه ماتریس سختی سکانت و مدل مازاس، ماتریس سختی مماسی به ترتیب زیر پیشنهاد می‌شود:

$$D^t = \beta \cdot D^e \quad (20)$$

$$K^t = \sum \beta \cdot B^T D^e B \cdot m \quad (21)$$

$$\beta = f(\varepsilon) \quad (22)$$

$$\beta = f(Y) \quad (23)$$

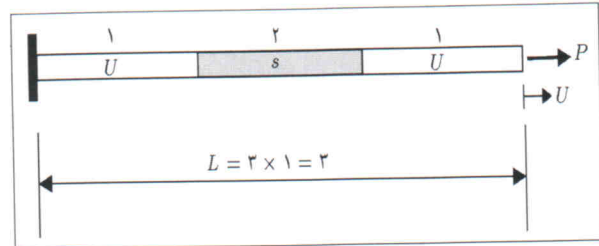
پارامتر β سختی مماسی را تعیین می‌کند. در محدوده‌ی کشسان خطی مقدار این پارامتر برابر ۱ و در ناحیه‌ی غیرخطی مقداری کوچک‌تر از ۱ و حتی منفی به خود می‌گیرد. در یک مسئله‌ی یک‌بعدی (یا در مکانیک خرابی ایزوتروپ) این پارامتر با پارامتر خرابی مدل مازاس به‌صورت زیر مربوط می‌شود:

$$\beta = \frac{d\sigma}{E d\varepsilon} = (1 - \omega) - \frac{d\omega}{d\varepsilon} \cdot \varepsilon \quad (24)$$

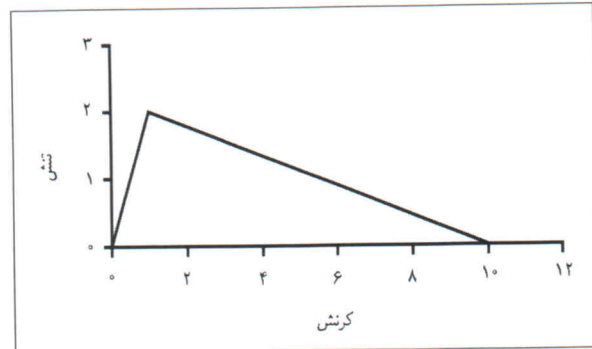
مثلاً در مسئله‌ی طرح شده در بالا، مقدار این پارامتر در ناحیه‌ی نرم‌شونده مطابق رابطه‌ی ۲۵ است:

$$\omega = \frac{1}{9} \cdot \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{9} \quad (25)$$

شیوه‌ی حل مسئله با استفاده از مدول مماسی یک راه حل پله‌یی^۵ است و بنابراین خطای محاسباتی در هر مرحله به خطای مرحله‌ی قبل افزوده می‌شود. چنین روش‌هایی به‌شدت نیازمند یک روش آزمون و خطا است. از طرفی هرچه میزان افزایش بار در یک مرحله بیشتر باشد



شکل ۴. مسئله‌ی مکان‌یابی کرنش با سه درجه آزادی ($A = 1/0, L = 3$)، $\varepsilon_f = 10/0, \varepsilon_0 = 1/0, f_t = 2/0$



شکل ۵. رفتار دوخطی ماده‌ی نرم‌شونده.

المان‌های باربرداری شونده (المان‌های اول و سوم) و المان نرم‌شونده (المان میانی) چنین خواهند بود:

$$\bar{f}_1 = \frac{5f_1 + f_2}{6} \quad \text{و} \quad \bar{f}_2 = \frac{f_1 + 2f_2}{3} \quad (19)$$

المان میانی بارگذاری می‌شود و المان‌های اول و سوم باربرداری می‌شوند. حل دقیق (محلّی) مسئله در پنج مرحله‌ی بارگذاری بدین ترتیب به دست می‌آید:

$$U = 3/0, P = 2/0, \varepsilon_1 = 1/0, \varepsilon_2 = 1/0$$

$$U = 6/0, P = 1/14, \varepsilon_1 = 0/57, \varepsilon_2 = 4/86$$

$$U = 9/0, P = 0/29, \varepsilon_1 = 0/143, \varepsilon_2$$

$$U = 10/0, P = 0/0, \varepsilon_1 = 0/0, \varepsilon_2 = 10/0$$

در مرحله‌ی اول بارگذاری داریم:

$$U = 6/0, \varepsilon_1 = 0/57, \varepsilon_2 = 4/86 \Rightarrow \bar{\varepsilon}_1 = 1/285,$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = 3/43 \Rightarrow \bar{\omega}_1 = 0/246, \bar{\omega}_2 = 0/787 \Rightarrow$$

$$\bar{E}_1 = (1 - \bar{\omega}_1) E_0 = 1/508, \bar{E}_2 = (1 - \bar{\omega}_2)$$

$$E_0 = 0/426 \Rightarrow \varepsilon_1 = 1/083, \varepsilon_2 = 3/834$$

$$\Rightarrow P = \bar{E}_1 \cdot \varepsilon_1 = 1/633$$

مرحله از بارگذاری به‌طور غیرمحملی حل شود و لذا به‌طور مضاعف انباشتگی خطا به‌وجود خواهد آمد.
فرایند حل غیرمحملی در این روش، مطابق رابطه‌ی ۳۲ است:

$$\begin{aligned} & i P^{nl}, \Delta U^{Loading}, i \varepsilon^{nl} \rightarrow i \beta^l \rightarrow i K_t^l \rightarrow i \Delta \varepsilon^l \\ & \rightarrow \varepsilon^* = i \varepsilon^{nl} + i \Delta \varepsilon^l \rightarrow Y^* = \frac{1}{V} \varepsilon^{*T} D^e \varepsilon^* \\ & \rightarrow i \beta^{nl} \rightarrow i K_t^{nl} \rightarrow i \Delta \varepsilon^{nl}, i \Delta \sigma^{nl} \rightarrow i \Delta P^{nl} \\ & \rightarrow i^{+1} P^{nl} = i P^{nl} + i \Delta P^{nl} \end{aligned} \quad (32)$$

در روند نمای بالا، i معرف مرحله‌ی افزایش بار، l پارامتر محلی یا مقدار به دست آمده از حل محلی، nl پارامتر غیرمحملی یا مقدار به دست آمده از حل غیرمحملی و t نشان‌دهنده‌ی پارامتر مماسی (ماتریس سختی تشکیل شده بر پایه‌ی مدول مماسی) است. نکته‌ی باقی‌مانده چگونگی غیرمحملی‌سازی پارامتر β است که دشوارترین قسمت مسئله است.

با اندکی بررسی معلوم می‌شود که مانند ω ، به‌سادگی نمی‌توانیم به این پارامتر یک مقدار غیرمحملی نسبت دهیم، به‌خصوص وضعیت انتخاب شده در این نوشتار یعنی خطی بودن بخش نرم‌شونده‌ی منحنی رفتاری و بنابراین ثابت بودن پارامتر β معرف موردی دشوار است. لذا برای دستیابی به یک شیوه‌ی تحلیل پایدار بر مبنای سختی مماسی غیرمحملی، برای رسیدن به یک مقدار غیر محلی پارامتر β رابطه‌ی ۳۳ پیشنهاد می‌شود:

$$\begin{aligned} \overline{\beta \cdot Y^n} &= \int_v \alpha(x, \xi) \cdot \beta(\xi) [Y(\xi)]^n d\xi = \\ & [Y(x)]^n \int_v \alpha(x, \xi) \cdot \beta(\xi) \cdot d\xi - \\ & \int_v \left(\int_v \alpha(x, \varsigma) \cdot \beta(\varsigma) d\varsigma \right) [Y(\xi)]^{n-1} Y'(\xi) \cdot d\xi \end{aligned} \quad (33)$$

رابطه‌ی ۳۳ به نوعی الهام‌گیری از روش انتگرال‌گیری جزء به جزء است. در طرف دوم این رابطه به مشتق نرخ آزاد شدن انرژی شکست نسبت به مکان برمی‌خوریم. می‌دانیم که این تابع پیوسته است و تغییرات آن نسبت به مکان (نقاط مجاور یک نقطه‌ی مفروض) بسیار نامحسوس است. در بسیاری از حالات نیز مقدار Y در المان ثابت است، از آن جمله در المان CST که اتفاقاً معمول‌ترین المان در تحلیل محیط‌های پیوسته است (در تمامی نقاط المان مثلثی با شش درجه آزادی مقدار کرنش و در نتیجه مقدار نرخ آزاد شدن انرژی شکست ثابت است). بنابراین در چنین المان‌هایی می‌توانیم مشتق Y را برابر صفر بگیریم و

مقدار خطا نیز بیشتر خواهد بود؛ بنابراین لازم است در این‌گونه روش‌ها بارگذاری به مراحل تا حد امکان ریز تقسیم شود.
برای دستیابی به رابطه‌ی تصحیح خطا به شیوه‌ی زیر عمل می‌کنیم (شکل ۶):

$$\Delta F = K^t \cdot \Delta U = \sum \beta \cdot B^T \cdot D^e \cdot B \cdot m \cdot \Delta U = \sum \beta \cdot K_e^t \cdot \Delta U, \Delta U = \delta \Rightarrow \Delta F = \sum \beta \cdot K_e^t \cdot \delta \quad (26)$$

$$K_{modified}^t = \frac{\partial(\Delta F)}{\partial \delta} = \sum \beta \cdot K_e^t + \sum \frac{\partial \beta}{\partial \delta} \cdot K_e^t \cdot \delta \quad (27)$$

$$\beta = \beta(Y) \Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial \delta} = \frac{\partial \beta}{\partial Y} \cdot \frac{\partial Y}{\partial \delta} \quad (28)$$

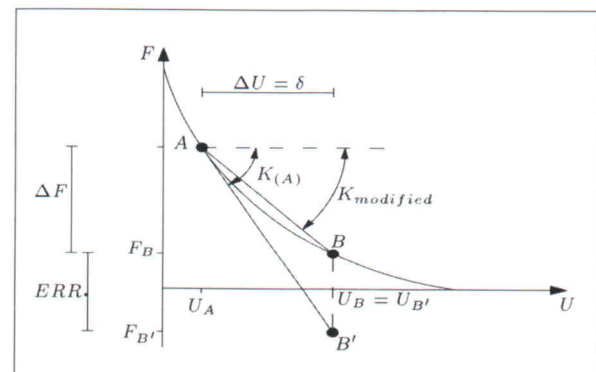
$$Y = \frac{1}{V} \cdot \varepsilon^T \cdot D \cdot \varepsilon = \frac{1}{V} U^T \cdot B^T \cdot D \cdot B \cdot U \quad (29)$$

$$U = U_0 + \delta \Rightarrow \frac{\partial Y}{\partial \delta} = \frac{\partial Y}{\partial U} = K_e^t \cdot U \quad (30)$$

$$K_{modified}^t = \sum \beta \cdot K_e^t + \sum \beta'_Y \cdot K_e^t \cdot U \cdot \delta^T \cdot K_e^t \quad (31)$$

در رابطه‌های بالا K_e^t ماتریس سختی مماسی المان e و Y نرخ آزاد شدن انرژی شکست است. در مسئله‌ی مورد نظر این نوشتار، رفتار نرم‌شوندگی ماده به‌صورت خطی در نظر گرفته شده است و بنابراین β در طول شاخه‌ی نرم‌شونده مقداری ثابت دارد؛ به‌همین دلیل چنان‌که از رابطه‌ی ۳۱ مشخص است، اصلاح ماتریس سختی مفهومی ندارد.

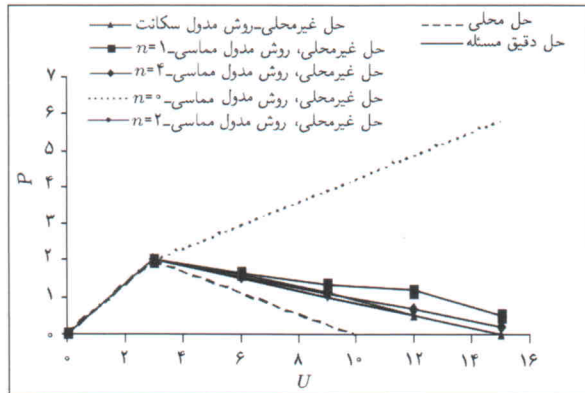
مشکل اساسی حل عینی مسئله با استفاده از مدول مماسی، در پله‌ی بودن این روش است. در حل مسئله با استفاده از مدول سکانت می‌توان ابتدا تمامی مسئله را به‌طور محلی حل کرد و سپس آن بخش از مسئله را که وارد مکان‌یابی کرنش شده است یکبار دیگر به‌طور غیرمحملی حل کرد. همچنین می‌توان جواب غیرمحملی مسئله را فقط برای یک مرحله‌ی خاص از بارگذاری به دست آورد. اما حل با استفاده از مدول مماسی به‌گونه‌ی دیگری است. در این شیوه به‌ناچار باید هر



شکل ۶. تصحیح خطا در شیوه مدول مماسی.

جدول ۱. نتایج حاصله از تحلیل‌های مختلف.

$\bar{\beta}_4$	$\bar{\beta}_2$	$\bar{\beta}_1$	$\bar{\beta}_0$	$\bar{\omega}$	حل دقیق	P
۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰
۲	۲	۲	۲	۲	۲	۳
۱,۵۵۶	۱,۵۵۷	۱,۶۷۳	۲,۹۵	۱,۶۳	۱,۵	۶
۱,۱۱۱	۱,۱۱۲	۱,۳۷۱	۳,۹	۱,۱۲	۱,۰	۹
۰,۶۶۷	۰,۶۶۸	۱,۱۶۸	۴,۸۵	۰,۵	۰,۵	۱۲
۰,۲۲۲	۰,۲۲۴	۰,۵۴۲	۵,۸	۰	۰	۱۵



شکل ۷. نمودار مقایسه‌ی پاسخ تحلیل‌های مسئله حل شده.

بقیه‌ی اعداد ثبت شده در جدول، مقادیر نیروی نظیر یک تغییر مکان و به دست آمده از یک روش تحلیلی تعریف شده در ردیف اول‌اند. به عنوان مثال، عدد سوم ذیل $\bar{\beta}_2$ (۱,۵۵۷) نشان‌گر مقدار نیروی نظیر $U=6,0$ به دست آمده از تحلیل غیرمحلّی از مرتبه ۲ است. چنان‌که مشاهده می‌شود، در تحلیل با استفاده از مدول مماسی، با افزایش مرتبه‌ی تحلیل غیرمحلّی، جواب‌ها به یک پاسخ همگرا می‌شوند؛ همچنین می‌توان دید که تحلیل غیرمحلّی از مرتبه‌ی صفر تماماً غلط است و با افزایش مرتبه‌ی تحلیل غیرمحلّی، پاسخ به دست آمده با حل عینی و دقیق وفاق بیشتری دارد. در این مسئله مشاهده می‌شود که چنانچه مرتبه‌ی تحلیل غیرمحلّی از چهار بیشتر شود تأثیری در پاسخ به دست آمده نخواهد داشت. برای مقایسه‌ی بهتر، نتایج تحلیل‌های مختلف در شکل ۷ ترسیم شده‌اند.

نتیجه‌گیری

در این نوشتار کوشش شد تا مسئله‌ی عینیت — که اساسی‌ترین آسیب را متوجه تحلیل‌های مسئله‌ی مکان‌یابی کرنش می‌کند — توضیح داده شود. سپس یکی از شیوه‌های متداول، یا شاید متداول‌ترین شیوه‌ی عینیت بخشیدن به این پدیده، یعنی به‌کارگیری میدان‌های غیرمحلّی در قالب یک مثال عددی مرور شد. پس از آن پیشنهاد نگارندگان این نوشتار برای یافتن راهی برای تحلیل عینی مسئله‌ی مکان‌یابی کرنش بر بنیاد ماتریس سختی مماسی مطرح شد. همچنین نشان داده شد که تحلیل غیر محلّی بر پایه‌ی مدول مماسی به‌سادگی امکان‌پذیر نیست، و نیز راه حلی برای یک حالت خاص ارائه شد که در آن برای رسیدن به حد قابل قبولی از دقت و همچنین همگرایی باید تحلیل غیر عینی از مرتبه‌ی بالا انجام شود. با این حال، تحلیل مسئله مکان‌یابی کرنش، آن هم بر پایه‌ی مدول مماسی، دارای پیچیدگی‌ها و موارد حل نشده‌ی بسیاری است که پژوهش‌های دیگری را می‌طلبد.

لذا خواهیم داشت:

$$\frac{dY}{dx} \cong 0 \Rightarrow \overline{\beta \cdot Y^n} \approx Y^n \cdot \bar{\beta} \Rightarrow \bar{\beta}_n \cong \frac{\overline{\beta \cdot Y^n}}{Y^n} \quad (34)$$

رابطه‌ی ۳۴ رابطه‌ی اصلی ارائه شده در این نوشتار است و راه حلی عملی برای حل عینی مسئله‌ی مکان‌یابی کرنش از طریق استفاده از مدول مماسی ارائه می‌دهد. در این رابطه $\bar{\beta}_n$ مقدار غیرمحلّی پارامتر $\bar{\beta}$ براساس توان n ام مقدار نرخ آزاد شدن انرژی شکست است و ما در اینجا، تحلیل غیرمحلّی با استفاده از این پارامتر را «تحلیل غیرمحلّی از مرتبه n » می‌نامیم.

حال مثال حل شده‌ی قبلی را یک‌بار دیگر با روش اخیر تحلیل می‌کنیم. خواننده به‌راحتی مشاهده خواهد کرد که تحلیل با $\bar{\beta}_0$ (تحلیل غیرمحلّی از مرتبه‌ی صفر) به نتیجه‌ی کاملاً نادرست منجر می‌شود. در اینجا یک مرحله از حل مسئله با $\bar{\beta}_1$ (تحلیل غیرمحلّی از مرتبه یک) را مرور می‌کنیم:

$$\begin{aligned} {}^0 P^{nl} = {}^0 P^l = 2,0, \Delta U = 3,0, {}^0 \varepsilon_1^{nl} = {}^0 \varepsilon_1^l = 1,0 \rightarrow \\ {}^0 \beta_1^l = 1,0, {}^0 \beta_1^l = -\frac{1}{9} \rightarrow {}^0 \delta \varepsilon_1^l = -0,429, \\ {}^0 \delta \varepsilon_1^l = 3,857 \rightarrow \varepsilon_1^* = 0,571, \varepsilon_1^* = 4,857 \rightarrow \\ Y_1^* = 0,326, Y_1^* = 23,590 \rightarrow ({}^0 \beta_1^{nl})_1 = -0,507, \\ ({}^0 \beta_1^{nl})_2 = -0,069 \rightarrow ({}^0 E_t^{nl})_1 = -1,014, \\ ({}^0 E_t^{nl})_2 = -0,138 \rightarrow {}^0 \delta \varepsilon_1^{nl} = 0,321, {}^0 \delta \varepsilon_2^{nl} = \\ 2,358 \rightarrow {}^1 \Delta P^{nl} = -0,327 \rightarrow {}^1 P^{nl} = 1,673 \end{aligned}$$

حال نتیجه‌ی چند تحلیل مختلف را با هم مقایسه می‌کنیم:

در جدول ۱، به معنای حل غیرمحلّی از مرتبه‌ی چهار با استفاده از مدول مماسی و $\bar{\omega}$ حل غیرمحلّی مسئله با استفاده از مدول سکانت است. در این جدول، در ستون اول مقادیر تغییر مکان جای گرفته است.

پانوشت

1. strain localization
2. linear softening
3. characteristic length
4. nonlocal fields
5. incremental

منابع

1. Jirasek, M. "Objective modeling of strain localization". *Revue de genie civil*, **6** (6), pp. 1119-1132 (2002).
2. Jirasek, M. and Bazant, Z. P. "Inelastic analysis of structures". John Wiley and Sons, pp. 517-523 (2002).
3. Bazant, Z. P. and Pijaudier-Cabot, G. "Measurement of characteristic length of nonlocal continuum." *J. of Eng. Mech.- ASCE*, **115** (4), pp. 755-767 (1989).
4. Eringen, A. C. "A unified theory of thermomechanical materials". *Int. J. of Engineering Science*, **4**, pp. 179-202 (1966).
5. Eringen, A. C. "Theories of nonlocal plasticity". *Int. J. of engineering science*, **21**, pp.741-751 (1983).
6. Bazant, Z. P. "Instability, ductility, and size effect in strain-softening solids". *J. of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, **102**, pp. 331-344 (1976).
7. Bazant, Z. P. and Jirasek, M. "Nonlocal integral formulations of plasticity and damage: survey of progress." *J. of Engineering Mechanics, ASCE*, **128** (11), pp. 1119-1149 (2002).
8. Mazars, J. "Mechanical damage and fracture of concrete th Int. Conf. Fracture, **4**, pp. 1499-1506 structures". 5 (1981).
9. Mazars, J. "A model for a unilateral elastic damageable material and its application to concrete". In fracture toughness and fracture energy of concrete, Elsevier, Amsterdam, pp. 61-71 (1986).
10. Bazant, Z. P. and Pijaudier-Cabot, G. "Nonlocal continuum damage, localization instability and convergence." *J. of Applied Mechanics*, **55**, pp. 287-293 (1988).
11. Jirasek, M. "Computational aspects of nonlocal models". European Conference on Computational Mechanics, ECCM 99, (1999).

