مجله‌ی علمی و پژوهشی شریف
اسفند ۱۳۸۸، شماره‌ی پنجاه و دوم، ص. ۱۱-۱۹

طراحی کنترل‌کننده‌ی تکه‌تکه‌ی $\mathbf{H}_\infty$ برای سیستم‌های تکه‌یی مستوی

بهروز مولائی (کارشناس ارشد)
محمد موبد (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف

behrooz.molaei@gmail.com
mobed@sharif.ir

موضوعِ این پژوهش، طراحی کنترل‌کننده‌ی تکه‌تکه‌ی خطی‌دینامیکی از نوع تکه‌تکه‌ی H_∞ برای سیستم‌های تکه‌تکه‌ی مستوی است. مسئله‌ی اصلی به‌صورت مجموعه‌یی از مسائل طراحی کنترل‌کننده‌های H_∞ در نظر گرفته می‌شود و نشان داده می‌شود که می‌توان این مجموعه از مسائل را در قالبِ مسائلِ بهینه‌سازی محدب با قیدهای نابرابریِ ماتریسِ خطی بیان کرد که از طریق نرم‌افزارهای موجود به‌نحوی کارآمد قابلِ حل‌اند. حلقه‌ی بسته‌ی متشکل از کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی و سیستمِ تکه‌تکه‌ی مستوی قادر به تعقیبِ ورودی مبنا در خروجی همراه با در نظر گرفتن محدودیت در انرژی سیگنال کنترلی است. به‌علاوه می‌توان در طراحی کنترل‌کننده شرایطی اعمال کرد که تأمین‌کننده‌ی پیوستگی سیگنال کنترلی باشد. به‌منظور بررسیِ پایداریِ حلقه‌ی بسته از توابع لیاپونوف تکه‌تکه‌ی مربعی استفاده می‌شود. کارآیی کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی از طریقِ شبیه‌سازی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژگان کلیدی: سیستمِ تکه‌تکه‌ی مستوی، کنترل‌کننده‌ی تکه‌تکه‌ی خطی، کنترل‌کننده‌ی H_∞، نابرابریِ ماتریسیِ خطی.

مقدمه

الگوهایِ تکه‌تکه‌ی خطی[1] و تکه‌تکه‌ی مستوی[2] رفتارِ بسیاری از سیستم‌هایِ غیرخطی را به‌نحوِ احسن توصیف می‌کنند.[۱و۲] این الگوها گونه‌ی خاصی از سیستم‌های هیبریدی‌اند که در آن‌ها دینامیک متناظر با هریک از حالت‌های سیستمِ هیبرید، خطی یا مستوی است. سیستم‌های تکه‌تکه‌ی خطی و تکه‌تکه‌ی مستوی عملاً به‌واسطه‌ی وجود اجزایی مانند اشباع، رله، هیسترزیس و نظیر آن مشاهده می‌شوند. بنابراین تحلیل سیستم‌های تکه‌تکه‌ی مستوی و طراحی کنترل‌کننده‌ی مناسب برای آن‌ها، مبحثِ مهمی در نظریه‌یِ کنترل است.

در این دهه و نیز در دهه‌ی قبل، نتایجی در زمینه‌ی تحلیل و طراحی این‌گونه سیستم‌ها به‌دست آمده است. برخی از این نتایج نشان‌گر آن است که می‌توان با استفاده از توابع لیاپونوف تکه‌تکه‌ی مربعی، پایداری و کارآییِ سیستم‌های تکه‌تکه‌ی مستوی را در قالبِ مسائلِ برنامه‌ریزیِ نیم‌معین بیان کرد،[۱و۳] و در صورت برآورده شدنِ مجموعه‌یی از شرایط کافی، پایداریِ نمایی و کارآییِ بهینه به دست می‌آید. همچنین مسئله‌ی پایداری و کارآیی H_∞ برای سیستم‌های تکه‌تکه‌ی مستوی با استفاده از توابع لیاپونوف و تکه‌تکه‌ی مربعی بررسی، و نتایج حاصله در چارچوبِ نابرابری‌هایِ ماتریسیِ خطی (LMI)[3] بیان شده‌اند.[۴] به‌علاوه، مسئله‌یِ طراحیِ کنترل‌کننده با فیدبکِ حالت تکه‌تکه‌ی خطی با استفاده از تابع لیاپونوفِ مربعی، به‌شکلِ مسئله‌یِ بهینه‌سازیِ محدب تحت قیدهای نابرابری‌های ماتریسیِ خطی بیان شده است. باید توجه داشت که در برخی از این بررسی‌ها فقط به کنترل‌کننده با فیدبک حالت پرداخته شده، و هیچ‌کدام موضوعِ کنترل‌کننده‌ی دینامیکی را موردِ توجه قرار نداده‌اند.[۱و۳و۴] نکته‌ی دیگر این است که روشِ موردِ استفاده در این بررسی‌ها تبدیلِ مسئله‌یِ اصلی به برنامه‌ریزی نیمه‌معین است که به‌دلیل وجود الگوریتم‌های کارآمد برای حل مسائل بهینه‌سازی نیمه‌معین، به نظر روشی مناسب و قابل اطمینان است. در برخی دیگر از این بررسی‌ها کاربردهایی از نابرابری‌هایِ ماتریسیِ خطی در نظریه‌یِ کنترل و سیستم‌ها،[۵و۶] و نیز شرحی‌از الگوریتم‌های رایج در حل مسائل بهینه‌سازیِ محدب تحت قیدهای نابرابری‌های ماتریسیِ خطی ارائه شده است.[۷]

تحقیقات‌نشان داده که برای سیستم‌های تکه‌تکه‌ی مستوی می‌توان کنترل‌کننده‌یی با ساختارِ تخمین‌گر و تنظیم‌کننده طراحی کرد.[۸] این کار، اولین تلاش در زمینه‌ی طراحی کنترل‌کننده‌ی دینامیکی برای سیستم‌های تکه‌تکه‌ی مستوی است. در تحقیق یادشده جست‌وجو برای‌تابعِ لیاپونوفِ تکه‌تکه‌ی مربعی و کنترل‌کننده‌ی تکه‌تکه‌ی مستوی به‌صورت مسئله‌ی نابرابری ماتریسی دوخطی (BMI)[4] عنوان می‌شود. البته چون قید نابرابری ماتریسِ دوخطی یک قید محدب نیست، حل این مسئله ممکن است دشوار باشد. روش پیشنهادی برای رفعِ این مشکل، استفاده از V-K است که یک روش تکراری[5] است و براساس اطلاعات موجود، تضمینی برای همگراییِ سراسری ندارد.[۸]

به نظر می‌رسد طراحیِ کنترل‌کننده‌ی دینامیکی برای سیستم‌های تکه‌تکه‌ی

تاریخ: دریافت ۱۳۸۵/۸/۱۰، داوری ۱۳۸۶/۲/۲۹، پذیرش ۱۳۸۶/۶/۱۲.

مستوی موضوعی‌است که کم‌تر مورد توجه‌قرار گرفته است. نوآوری نوشتار حاضر، تبدیل مسئله‌ی طراحی کنترل‌کننده‌ی دینامیکی برای سیستم‌های تکه‌تکه‌ی مستوی به مسئله‌ی بهینه‌سازی نیمه‌معین است. دو گام کلیدی در این راستا وجود دارد: گام اول استفاده از نمادسازی مناسبی است که از طریق آن سیستم تکه‌تکه‌ی مستوی توسط یک سیستم تکه‌تکه‌ی خطی نمایش داده می‌شود. گام دوم اعمالِ تغییر متغیرهای مناسب در ماتریس‌های کنترل‌کننده است که قیدهای BMI را به قیدهای LMI تبدیل می‌کند. سیستمِ تکه‌تکه‌ی خطی حاصل از گام‌اول، مجموعه‌یی از دینامیک‌های خطی است که برای هر یک از آن‌ها، یک کنترل‌کننده‌ی H_∞ طراحی می‌شود. برای این منظور، نخست با تثبیت ساختار کنترلیِ حلقه‌ی بسته و معرفیِ خروجی‌های کارآیی، سیستم‌افزایش‌یافته تشکیل داده می‌شود و سپس با استفاده از شیوه‌هایِ LMI در طراحیِ کنترل‌کننده‌های H_∞،[۹] یک مسئله‌ی بهینه‌سازی محدب تحت قیدهای LMI به دست می‌آید که می‌توان توسط نرم‌افزارهای موجود، آن را با سرعت و دقت حل کرد.

کنترل‌کننده‌ی نهایی، کنترل‌کننده‌ی «تکه‌یی H_∞» یا «خانواده‌یی از کنترل‌کننده‌های H_∞» است. لذا کنترل‌کننده‌ی نهایی را نمی‌توان یک کنترل‌کننده‌ی H_∞ دانست. سیستم‌کنترل‌شونده یا اصطلاحاً «plant» بنا به فرض تکه‌تکه‌ی مستوی است و بنابراین سیستمی خطی نیست. روشن است که حتی اگر سیستمِ کنترل‌شونده تکه‌تکه‌ی خطی بود، هنوز نمی‌توانستیم آن را سیستمی خطی به حساب آوریم. این دو ویژگی یعنی خطی‌نبودنِ سیستم کنترل‌شونده و H_∞ نبودنِ کنترل‌کننده، نتیجه‌ی مهمی درباره‌ی پایداری یا عدم پایداری حلقه‌ی بسته ارائه می‌دهند: به‌طور عام، پایداری حلقه‌ی بسته به‌خودیِ خود و صرفاً به این دلیل که در طراحیِ کنترل‌کننده‌ی نهایی از روشِ H_∞ استفاده شده، تضمین شده نیست. بنابراین، پایداری حلقه‌ی بسته نیاز به بررسی جداگانه دارد.

یکی از دلایل انتخاب کنترل‌کننده‌های H_∞ برای تکه‌های خطی‌شده‌ی plant، پایداری است. کنترل‌کننده‌های H_∞ از نظر کارآیی و پایداری در مقابل شرایط مختلف کاری و تغییرات احتمالی مقادیر پارامترها مقاوم‌اند؛ لذا انتظار می‌رود که کنترل‌کننده‌های تکه‌تکه‌ی H_∞ نیز با بهره‌گیری از تمام یا بعضی از ویژگی‌های کنترل‌کننده‌های H_∞ مقاوم باشند. بدیهی است این نتیجه‌گیری کاملاً شهودی است و هرگونه اثبات مستلزم تحلیل یا شبیه‌سازی است. در این نوشتار موضوع پایداری بیش از این پی‌گیری نشده است.

موضوع‌دیگری که در این نوشتار به‌آن اشاره شده است، پیوستگیِ سیگنالِ کنترلی است. در اینجا شرایطی ارائه می‌شود که درنتیجه‌ی اعمالِ آن‌ها در طراحیِ کنترل‌کننده، سیگنالِ کنترلی پیوسته باشد. در این نوشتار پس از مقدمه، سیستم‌های تکه‌تکه‌ی مستوی توصیف می‌شود. و پس از آن مطالبی که برای بررسی پایداریِ حلقه‌ی بسته مورد استفاده قرار خواهند گرفت ارائه می‌شود. در قسمت اصلی این نوشتار به بحث پیرامون روشِ طراحیِ کنترل‌کننده‌ی تکه‌تکه‌ی خطیِ دینامیکی، برای سیستم‌های تکه‌تکه‌ی مستوی خواهیم پرداخت. و در نهایت مثالی از یک سیستم غیرخطی، تقریبِ تکه‌تکه‌ی مستویِ آن ارائه می‌شود، و یک کنترل‌کننده‌ی تکه‌تکه‌ی خطی و بررسیِ کارآییِ کنترل‌کننده و پایداریِ حلقه‌ی بسته بررسی می‌شود.

سیستم‌های تکه‌تکه‌ی مستوی

طبقِ تعاریف ارائه شده سیستم تکه‌تکه‌ی مستوی عبارت است از سیستمی که معادلات حاکم بر بردارِ متغیرهای حالت $x(t)\in R^n$، بردار ورودی‌ها $u(t)\in R^p$، و بردار خروجی‌ها $y(t)\in R^q$ چنین باشند:[۴و۸]

$$H_i \quad \begin{array}{l} \dot{x}(t)=A_i x(t)+b_i+B_i u(t) \\ y(t)=C_i x(t)+D_i u(t) \end{array} \quad x(t)\in X_i \quad i\in I=\{۱,...,m\} \qquad (۱)$$

در اینجا $\{X_i\}_{i=۱}^m$ نوعی تقسیم‌بندی یا افراز برای فضای حالت به m ناحیه یا سلولِ چندوجهی محدب است که دوبه‌دو نامتداخل‌اند. مجموعه‌یِ اندیس‌های این ناحیه‌ها با I نمایش داده می‌شود و $I=\{۱,..,m\}$. اجتماع X_i و نقاط مرزی‌اش با نماد $\overline{X_i}$ نمایش داده می‌شود. H_i نمایشگرِ iاُمین دینامیک مستوی (نه تکه‌تکه‌ی مستوی) است. هر X_i از اشتراک تعداد p_i نیم‌فضا در فضای R^n تشکیل شده است:

$$X_i=\left\{x\in R^n \mid h_{ij}^T x<g_{ij}, j=۱,...,p_i\right\} \qquad (۲)$$

و البته می‌توان رابطه‌ی ۲ را به‌صورت یک نابرابری برداری نیز نوشت:

$$X_i=\left\{x\in R^n \mid H_i^T x<g_i\right\} \qquad (۳)$$

که در آن $H_i=[h_{i۱}\ ...\ h_{ip_i}]$ و $g_i=[g_{i۱}\ ...\ g_{ip_i}]^T$. به‌علاوه، فرض می‌شود که یک توصیف پارامتری برای مرز بین دو ناحیه‌ی X_i و X_j در دسترس است:

$$\overline{X_i}\cap\overline{X_j}\subseteq\left\{f_{ij}+F_{ij}z \mid z\in R^{n-۱}\right\} \qquad i=۱,...,m \qquad j\in\nu_i \qquad (۴)$$

که در آن ν_i مجموعه‌ی اندیس‌های سلول‌های مجاور با سلولِ X_i است،
$F_{ij}\in R^{n\times(n-۱)}$، یک ماتریس رتبه‌تمام است،
و $f_{ij}\in R^n$ یک بردار حقیقی است.
یک روش‌اصولی برای به‌دست آوردن تقریب تکه‌تکه‌ی مستوی برای سیستم‌های غیرخطی ارائه شده است.[۱و۲]

پایداریِ سیستم‌های تکه‌تکه‌ی مستوی

قبل از هرگونه خواص کارآیی، حلقه‌ی بسته باید دست‌کم طبقِ یکی از تعاریف موجود، پایدار باشد. یکی از اهداف طرحِ موضوعِ پایداری در این نوشتار، تأکید بر لزومِ بررسیِ پایداری حلقه‌ی بسته‌ی نهایی به‌عنوان گامی مستقل از گام‌طراحی است. در کنترل‌خطی، هنگامی که برای یک plant خطی یک کنترل‌کننده‌ی H_∞ طراحی می‌شود، حلقه‌ی بسته‌ی نهایی خودبه‌خود پایدار است و پس از اتمامِ طراحی، دیگر نیازی به بررسی پایداری وجود نخواهد داشت. اما همان‌طور که قبلاً در مقدمه ذکر شد، در اینجا plant و کنترل‌کننده به‌ترتیب خطی و H_∞ نیستند. بنابراین، از قبل تضمینی برای پایداری حلقه‌ی بسته وجود ندارد و لازم است مستقلاً بررسی شود. آنچه تحت عنوان «پایداری» در این نوشتار ارائه می‌شود، براساس نظریه‌ی پایداری لیاپونوف و دیگر نتایج محققین برداشت شده است.[۳و۴و۸] مطالب این بخش برای هر سیستمِ تکه‌تکه‌ی مستوی با معادلاتی نظیر معادله‌ی ۱ صادق‌اند. البته معادلات ۱ سیستمِ حلقه‌باز را الگو می‌کنند، اما پس از طراحی کنترل‌کننده‌ی تکه‌تکه‌ی خطی می‌توانِ معادلات حلقه‌ی بسته‌ی کل را نیز به‌صورت تکه‌تکه‌ی مستوی نوشته و مطالب این بخش را به حلقه‌ی بسته نیز اِعمال کرد. این یکی از کارهایی است که

در بخش پنجم انجام شده است. تابع لیاپانوف تکه‌تکه‌ی مربعی[۶] $V(x)$ طبقِ m ضابطه‌ی زیر تعریف می‌شود:

$$V(x) = x^T P_i x + 2q_i^T x + r_i \qquad x \in X_i \qquad i = 1, ..., m \tag{5}$$

که در آن $P_i = P_i^T \in R^{n\times n}$، $q_i \in R^n$، و $r_i \in R$. ماتریس‌های P_i و بردارهای q_i و اعداد r_i دلبخواه نیستند بلکه به‌گونه‌یی هستند که $V(x)$ مثبت و پیوسته باشد. شرط کافی برای مثبت بودن $V(x)$ این است که:

$$\begin{bmatrix} P_i & q_i \\ q_i^T & r_i \end{bmatrix} > 0 \qquad i = 1, ..., m \tag{6}$$

شرط لازم و کافی برای پیوسته‌بودن $V(x)$ از توصیف‌پارامتری برای مرزبین X_i و X_j به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & F_{ij}^T (P_i - P_j) F_{ij} = 0 \\ & F_{ij}^T (P_i - P_j) f_{ij} + F_{ij}^T (q_i - q_j) = 0 \qquad i = 1, ..., m \qquad j \in \nu_i \\ & f_{ij}^T (P_i - P_j) f_{ij} + 2 f_{ij}^T (q_i - q_j) + (r_i - r_j) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

تعریفی که برای پایداری در نظرگرفته می‌شود این است که تحت $u(t) \equiv 0$، یعنی وقتی ورودی متحداً برابر با صفر باشد، به‌ازای هر $x(0)$، حالت به سمت نقطه‌یی از مجموعه‌ی Q میل کند:

$$Q = \left\{ -P_1^{-1} q_1, ..., -P_m^{-1} q_m \right\} \tag{8}$$

به‌عبارت دیگر، طبقِ تعریف سیستمِ ۱ پایدار است اگر و فقط اگر:

$$u(t) \equiv 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \to \infty} x(t) \in Q \quad \forall x(0) \in R^n \tag{9}$$

نقاطی که تابع $V(x)$ در آن‌ها دارای کمینه‌ی محلی است، متعلق به مجموعه‌ی Q هستند. با محاسبه‌ی مشتقِ $V(x)$ در امتداد مسیرهای حالت سیستمِ ۱ خواهیم داشت:

$$\frac{dV(x(t))}{dt} = \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i & P_i b_i + A_i^T q_i \\ b_i^T P_i + q_i^T A_i & 2 b_i^T q_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$x(t) \in X_i \qquad i = 1, ..., m$$

با توجه به نظریه‌ی لیاپونوف نتیجه می‌شود که شرط کافی برای پایداری سیستم ۱ این است که سه‌تایی‌های $\{P_i, q_i, r_i\}_{i=1}^m$ یافت شوند به‌گونه‌یی که علاوه بر نابرابری‌های ۶ و برابری‌های ۷، نابرابری‌های ۱۰ نیز ارضا شوند:

$$\begin{bmatrix} A_i^T P_i + P_i A_i & P_i b_i + A_i^T q_i \\ b_i^T P_i + q_i^T A_i & 2 b_i^T q_i \end{bmatrix} < 0 \qquad i = 1, ..., m \tag{10}$$

طراحی کنترل‌کننده

چنان که پیش‌تر یادآور شدیم، گام اول در روش پیشنهادی برای طراحی کنترل‌کننده، نمایش سیستمِ تکه‌تکه‌ی مستوی‌به‌صورت یک سیستم تکه‌تکه‌ی خطی است که از طریقِ نمادسازیِ مناسب انجام می‌شود. اما قبل از اعمالِ نمادسازی و رسیدن‌به سیستمِ تکه‌تکه‌ی خطیِ موعود، معادلات plant تکه‌تکه‌ی مستوی به‌گونه‌یی که در مراحل بعدی برای تشکیلِ معادلاتِ حلقه‌یِ بسته و استفاده از ابزارِ H_∞ به‌منظور طراحی کنترل‌کننده مناسب باشند، به‌صورتی جدید بازنویسی می‌شوند. این صورت جدید، کماکان تکه‌تکه‌ی مستوی است و سیستم یا plant افزایش‌یافته نامیده خواهد شد. بنابراین سیستمِ تکه‌تکه‌ی خطی مستقیماً از معادلات ۱ به دست نمی‌آید بلکه از سیستمِ افزایش‌یافته که معادلات آن ذیلاً آورده شده‌اند به دست می‌آید.

برای رسیدن به plant افزایش‌یافته، ابتدا با هدف نهاییِ استفاده از مفاهیم شکل‌دهیِ حلقه[۷] توسط‌ابزار H_∞[۱۰] به معرفی سیگنال‌های $w(t)$ (ورودی‌های بیرونیِ plant ازقبیل سیگنالِ مبنا و اغتشاشات)، $z(t)$ (خروجی‌های کارآیی)، و $e(t)$ (خروجی‌های درونیِ plant که ورودی‌های کنترل‌کننده‌اند) معرفی می‌شوند. سپس معادلاتِ plant افزایش‌یافته چنین نوشته می‌شوند:

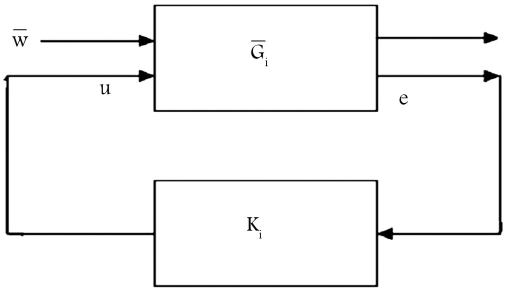
$$G_i: \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_i x(t) + b_i + B_i^w w(t) + B_i^u u(t) \\ z(t) &= C_i^z x(t) + D_i^{zw} w(t) + D_i^{zu} u(t) \\ e(t) &= C_i^e x(t) + D_i^{ew} w(t) \end{aligned}$$
$$x(t) \in X_i \qquad i = 1, ..., m \tag{11}$$

سیگنال‌های w، z و e بُرداری و به‌ترتیب از ابعاد n_w، n_z و n_e هستند. این سیگنال‌ها در معادلات ۱ حضور نداشتند. سیگنالِ u در معادلات ۱۱ همان u در معادلات ۱ است که ورودی کنترلی (خروجیِ کنترل‌کننده و ورودیِ درونیِ plant) و از بُعد p است. اما x در معادلات ۱۱ ممکن‌است با x در معادلات ۱، حتی از نظر بُعد، متفاوت باشد و عموماً هم چنین است. درنتیجه، X_iها در معادلات ۱۱ ممکن است با X_iها در معادلات ۱ متفاوت باشند. در معادلات ۱۱ فرض می‌شود که $x(t)$ از بُعدِ $\overline{n}$ باشد. به‌علاوه ماتریس‌های A_i و بردارهای b_i نیز در معادلات ۱۱ می‌توانند با A_iها و b_iها در معادلات ۱ متفاوت باشند. با این حال، به‌منظور اجتناب از تعدد علامات، از همان حروف قبلی برای نمایش x و A_i و b_i و X_i در معادلات ۱۱ استفاده شده است. به‌طور خلاصه، نقطه‌ی شروع برای طراحی کنترل‌کننده، معادلات ۱۱ هستند و G_i نمایشگرِ iاُمین دینامیک مستوی (نه تکه‌تکه‌ی مستوی) است. گوییم plant در مُد یا وجه iاُم است هرگاه $x(t) \in X_i$. حال ماتریس‌های $\overline{A_i}$ و $\overline{B_i^w}$ و $\overline{B_i^u}$ تا $\overline{D_i^{ew}}$ به‌ترتیب برحسب ماتریس‌های A_i و B_i^w و B_i^u تا D_i^{ew}، و بردار $\overline{w}(t)$ برحسب بردار $w(t)$ طبق نمادسازی ۱۲ تعریف می‌شوند:

$$\overline{w}(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} \overline{A_i} & \overline{B_i^w} & \overline{B_i^u} \\ \overline{C_i^z} & \overline{D_i^{zw}} & \overline{D_i^{zu}} \\ \overline{C_i^e} & \overline{D_i^{ew}} & \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} A_i & \begin{bmatrix} B_i^w & b_i \end{bmatrix} & B_i^u \\ C_i^z & \begin{bmatrix} D_i^{zw} & 0 \end{bmatrix} & D_i^{zu} \\ C_i^e & \begin{bmatrix} D_i^{ew} & 0 \end{bmatrix} & \end{bmatrix} \tag{12}$$

یعنی $\overline{A_i} = A_i$ و $\overline{B_i^w} = \begin{bmatrix} B_i^w & b_i \end{bmatrix}$ الی آخر. با استفاده از معادله‌ی ۱۲، می‌توان معادلات ۱۱ را چنین بازنویسی کرد:

$$\overline{G_i}: \quad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \overline{A_i} x(t) + \overline{B_i^w}\, \overline{w}(t) + \overline{B_i^u} u(t) \\ z(t) &= \overline{C_i^z} x(t) + \overline{D_i^{zw}}\, \overline{w}(t) + \overline{D_i^{zu}} u(t) \\ e(t) &= \overline{C_i^e} x(t) + \overline{D_i^{ew}}\, \overline{w}(t) \end{aligned}$$
$$x(t) \in X_i \qquad i = 1, ..., m \tag{13}$$



شکل ۱. حلقه‌ی بسته برای سیستم افزایش‌یافته در وجهِ iاُم.

و به‌این ترتیب، با در نظر گرفتن عامل مستوی به‌عنوان یک ورودیِ ثابت، سیستمِ تکه‌تکه‌ی مستوی در معادله‌ی ۱۱ توسط سیستم تکه‌تکه‌ی خطی در معادله‌ی ۱۳ نمایش داده می‌شود که در آن $\overline{G_i}$ نمایش‌گر iاُمین دینامیک خطی (نه تکه‌تکه‌ی خطی) است. گام بعدی طراحی یک کنترل‌کننده‌ی H_∞ برای هر $\overline{G_i}$ است. دینامیک کنترل‌کننده‌یی که برای $\overline{G_i}$ طراحی می‌شود با K_i نمایش داده خواهد شد. کنترل‌کننده نهایی به این صورت عمل می‌کند که هرگاه plant در وجه iاُم باشد، K_i در حلقه‌ی بسته قرار خواهد گرفت و ساختار حلقه‌ی بسته مطابق شکل ۱ خواهد بود.

معادلات حاکم بر K_i به‌صورت دستگاه معادلات ۱۴ است که در آن‌ها $\xi(t) \in R^k$ بردارحالت کنترل‌کننده است:

$$K_i: \quad \begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= A_i^K \xi(t) + B_i^K e(t) \\ u(t) &= C_i^K \xi(t) + D_i^K e(t) \end{aligned} \qquad x(t) \in X_i \qquad i = ۱, ..., m \tag{۱۴}$$

با توجه به معادلات ۱۳ و ۱۴، و با معرفی بردار حالت سیستم حلقه‌بسته به‌صورت $x_{CL}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix}$، دینامیک حلقه‌ی بسته برای وقتی که plant در وجه iاُم قرار داشته باشد به دست می‌آید:

$$T_i: \quad \begin{aligned} \dot{x}_{CL}(t) &= A_i^{CL} x_{CL}(t) + B_i^{CL} \bar{w}(t) \\ z(t) &= C_i^{CL} x_{CL}(t) + D_i^{CL} \bar{w}(t) \end{aligned} \qquad x(t) \in X_i \quad i = ۱, ..., m \tag{۱۵}$$

در معادلات ۱۵، ماتریس‌های A_i^{CL} و B_i^{CL} و C_i^{CL} و D_i^{CL} برحسب ماتریس‌های قبلی چنین محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} A_i^{CL} &= \begin{bmatrix} \overline{A_i} + \overline{B_i^u} D_i^K \overline{C_i^e} & \overline{B_i^u} C_i^K \\ B_i^K \overline{C_i^e} & A_i^K \end{bmatrix} \\ B_i^{CL} &= \begin{bmatrix} \overline{B_i^w} + \overline{B_i^u} D_i^K \overline{D_i^{ew}} \\ B_i^K \overline{D_i^{ew}} \end{bmatrix} \\ C_i^{CL} &= \begin{bmatrix} \overline{C_i^z} + \overline{D_i^{zu}} D_i^K \overline{C_i^e} & \overline{D_i^{zu}} C_i^K \end{bmatrix} \\ D_i^{CL} &= \overline{D_i^{zw}} + \overline{D_i^{zw}} D_i^K \overline{D_i^{ew}} \end{aligned} \tag{۱۶}$$

کنترل‌کننده‌ی K_i که با $\overline{G_i}$ و T_i متناظر است به‌نحوی طراحی می‌شود که $\|T_i\|$ کمینه شود جایی که:

$$\|T_i\| = \sup \left\{ \frac{\|z\|}{\|\bar{w}\|} \middle| \quad x_{CL}(۰) = ۰, \quad \|\bar{w}\| \neq ۰ \right\} \tag{۱۷}$$

و $\|z\| = \left[\int_۰^\infty z(t)^T z(t)\, dt \right]^{۱/۲}$ و همین‌طور برای $\|\overline{w}\|$. کارآییِ H_∞ برای سیستم‌حلقه‌بسته‌ی T_i بزرگ‌تر از γ_i ($\gamma_i > ۰$) خواهد بود هرگاه $\|T_i\| < \gamma_i$. در بررسی‌های پیشین[۹] نشان داده شده است که هرگاه دو نابرابریِ ماتریسیِ ۱۸ و ۱۹ برقرار باشند:

$$\begin{bmatrix} P_i A_i^{CL} + (P_i A_i^{CL})^T & P_i B_i^{CL} & (C_i^{CL})^T \\ (P_i B_i^{CL})^T & -\gamma_i^۲ I & (D_i^{CL})^T \\ C_i^{CL} & D_i^{CL} & -I \end{bmatrix} < ۰ \tag{۱۸}$$

$$P_i > ۰ \tag{۱۹}$$

جایی که $P_i = P_i^T \in R^{(\overline{n}+k)\times(\overline{n}+k)}$. نابرابریِ ماتریسیِ ۱۸، یک قید نابرابری ماتریسیِ دوخطی یا BMI است. بهترین‌کارآییِ H_∞، ازکمینه‌سازی γ_i تحت قیودِ ۱۸ و ۱۹ به دست می‌آید. یعنی ماتریسِ P_i و ماتریس‌های کنترل‌کننده باید به‌نحوی محاسبه شوند که γ_i تحت ۱۸ و ۱۹ کمینه شود. مسئله‌ی‌بهینه‌سازی با قیدهای BMI یک مسئله‌ی غیر محدب است که دشوار محسوب می‌شود و طبق اطلاعات موجود، روش کارآمدی در دست نیست که بتواند چنین مسئله‌یی را، حتی در صورت وجود جواب، حل کند. در اینجا روشی معرفی می‌شود که با استفاده از آن بتوان قید ۱۸ را که یک نابرابریِ ماتریسیِ دوخطی است، به قید نابرابریِ ماتریسیِ خطی تبدیل کرد.

الف) تبدیل به نابرابری ماتریسیِ خطی

در این بخش با نگاهی به اطلاعات موجود[۴و۹] تغییر متغیر مناسبی برای ماتریس‌های کنترل‌کننده معرفی خواهد شد که باعث می‌شود نابرابری ماتریسیِ دوخطیِ ۱۸ به نابرابری ماتریسیِ خطی تبدیل شود. ماتریسِ P_i را که در ۱۸ و ۱۹ معرفی شد همواره می‌توان به‌صورت‌معادله‌ی ۲۰ نوشت:

$$P_i = \begin{bmatrix} S_i & N_i \\ N_i^T & U_i \end{bmatrix} \qquad i = ۱, ..., m \tag{۲۰}$$

که در آن $S_i = S_i^T \in R^{\overline{n}\times\overline{n}}$، $U_i = U_i^T \in R^{k\times k}$، و $N_i \in R^{\overline{n}\times k}$. فرض می‌شود که P_i در رابطه‌ی ۲۱ صدق کند:

$$P_i \chi_i^۱ = \chi_i^۲ \tag{۲۱}$$

که در آن

$$\chi_i^۲ = \begin{bmatrix} I & S_i \\ ۰ & N_i^T \end{bmatrix} \qquad و \qquad \chi_i^۱ = \begin{bmatrix} R_i & I \\ M_i^T & ۰ \end{bmatrix} \tag{۲۲}$$

و $R_i = R_i^T \in R^{\overline{n}\times\overline{n}}$، $M_i \in R^{\overline{n}\times k}$، و $\chi_i^۱, \chi_i^۲ \in R^{(\overline{n}+k)\times ۲\overline{n}}$. اما تحتِ قید ۲۲، رابطه‌ی ۲۱ با دو معادله‌ی ۲۳ و ۲۴ هم‌ارز است:

$$S_i R_i + N_i M_i^T = I \tag{۲۳}$$

$$N_i^T R_i + U_i M_i^T = ۰ \tag{۲۴}$$

حال تغییر متغیرهای زیر را درمورد ماتریس‌های کنترل‌کننده معرفی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\overline{A_i^K} =& N_i A_i^K M_i^T + N_i B_i^K C_i^e R_i + S_i B_i^u C_i^K M_i^T \\ &+ S_i \left(A_i + B_i^u D_i^K C_i^e\right) R_i \\ \overline{B_i^K} =& N_i B_i^K + S_i B_i^u D_i^K \qquad \overline{C_i^K} = C_i^K M_i^T + D_i^K C_i^e R_i \\ \overline{D_i^K} =& D_i^K \end{aligned} \tag{۲۵}$$

ماتریس‌های $\overline{A_i^K}$ و $\overline{B_i^K}$ و $\overline{C_i^K}$ و $\overline{D_i^K}$ ماتریس‌های کنترل‌کننده‌ی تغییریافته، و ماتریس‌های A_i^K و B_i^K و C_i^K و D_i^K ماتریس‌های کنترل‌کننده‌ی اصلی‌اند. اگر ماتریس‌های M_i و N_i دارای رتبه‌ی سطریِ تمام باشند آنگاه می‌توان ماتریس‌های کنترل‌کننده‌ی اصلی را از ماتریس‌های کنترل‌کننده‌ی تغییریافته محاسبه کرد. نیاز به برابری رابطه‌ی ۲۱ و تغییر متغیرهای ۲۵ طبق روابط ۲۶ توجیه می‌شود:

$$\begin{aligned}\left(\chi_i^1\right)^T P_i A_i^{CL} \chi_i^1 &= \left(\chi_i^2\right)^T A_i^{CL} \chi_i^1 \\ &= \begin{bmatrix} \overline{A_i} R_i + \overline{B_i^u}\,\overline{C_i^K} & \overline{A_i} + \overline{B_i^u}\,\overline{D_i^K}\,\overline{C_i^e} \\ \overline{A_i^K} & S_i \overline{A_i} + \overline{B_i^K}\,\overline{C_i^e} \end{bmatrix} \\ \left(\chi_i^1\right)^T P_i B_i^{CL} &= \left(\chi_i^2\right)^T B_i^{CL} = \begin{bmatrix} \overline{B_i^w} + \overline{B_i^u}\,\overline{D_i^K}\,\overline{D_i^{ew}} \\ S_i \overline{B_i^w} + \overline{B_i^K}\,\overline{D_i^{ew}} \end{bmatrix} \\ C_i^{CL} \chi_i^1 &= \begin{bmatrix} \overline{C_i^z} R_i + \overline{D_i^{zu}}\,\overline{C_i^K} & \overline{C_i^z} + \overline{D_i^{zu}}\,\overline{D_i^K}\,\overline{C_i^e} \end{bmatrix} \\ \left(\chi_i^1\right)^T P_i \chi_i^1 &= \left(\chi_i^2\right)^T \chi_i^1 = \begin{bmatrix} R_i & I \\ I & S_i \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۲۶}$$

به‌سادگی می‌توان نشان داد که اگر ماتریس M_i دارای رتبه‌ی سطریِ تمام‌باشد آنگاه ماتریس‌های χ_i^1 و $\mathrm{diag}\{\chi_i^1, I, I\}$ دارای رتبه‌ی ستونیِ تمام خواهند بود. در ادامه با فرض این که ماتریس M_i دارای رتبه‌ی سطری تمام باشد، می‌توان χ_i^1 و $\mathrm{diag}\{\chi_i^1, I, I\}$ را به‌طریقی شبیه به آنچه برای تبدیلات همنهشتی[8] انجام می‌شود به‌ترتیب به نامعادلات ۱۸ و ۱۹ اعمال کرد و دو معادله‌ی ماتریسی ۲۷ را نتیجه گرفت:

$$\begin{gathered}\left(\chi_i^1\right)^T P_i \chi_i^1 > 0 \quad \text{و} \\ \begin{bmatrix} \left(\chi_i^1\right)^T P_i A_i^{CL} \chi_i^1 + \left(P_i A_i^{CL} \chi_i^1\right)^T \chi_i^1 & \left(\chi_i^1\right)^T P_i B_i^{CL} & \left(C_i^{CL}\chi_i^1\right)^T \\ \left(P_i B_i^{CL}\right)^T \chi_i^1 & -\gamma_i^2 I & \left(D_i^{CL}\right)^T \\ C_i^{CL} \chi_i^1 & D_i^{CL} & -I \end{bmatrix} < 0 \end{gathered} \tag{۲۷}$$

با فرضِ $\gamma_i^2 = \eta_i$ و با استفاده از روابط ۲۶ در ۲۷ نتیجه می‌شود که نابرابری‌های ماتریسی ۲۷ با نابرابری‌های ماتریسیِ زیر هم‌ارزند:

$$\begin{bmatrix} R_i & I \\ I & S_i \end{bmatrix} > 0 \quad \text{و} \quad \begin{bmatrix} \phi_i^{11} & \phi_i^{12} \\ \left(\phi_i^{12}\right)^T & \phi_i^{22} \end{bmatrix} < 0 \tag{۲۸}$$

که در آن

$$\begin{aligned}\phi_i^{11} &= \begin{bmatrix} \overline{A_i} R_i + \overline{B_i^u}\,\overline{C_i^K} + \left(\overline{A_i} R_i + \overline{B_i^u}\,\overline{C_i^K}\right)^T & \overline{A_i} + \left(\overline{A_i^K}\right)^T + \overline{B_i^u}\,\overline{D_i^K}\,\overline{C_i^e} \\ \left[\overline{A_i} + \left(\overline{A_i^K}\right)^T + \overline{B_i^u}\,\overline{D_i^K}\,\overline{C_i^e}\right]^T & S_i \overline{A_i} + \overline{B_i^K}\,\overline{C_i^e} + \left(S_i \overline{A_i} + \overline{B_i^K}\,\overline{C_i^e}\right)^T \end{bmatrix} \\ \phi_i^{12} &= \begin{bmatrix} \overline{B_i^w} + \overline{B_i^u}\,\overline{D_i^K}\,\overline{D_i^{ew}} & \left(\overline{C_i^z} R_i + \overline{D_i^{zu}}\,\overline{C_i^K}\right)^T \\ S_i \overline{B_i^w} + \overline{B_i^K}\,\overline{D_i^{ew}} & \left(\overline{C_i^z} + \overline{D_i^{zu}}\,\overline{D_i^K}\,\overline{C_i^e}\right)^T \end{bmatrix} \\ \phi_i^{22} &= \begin{bmatrix} -\eta_i I & \left(\overline{D_i^{zw}} + \overline{D_i^{zw}}\,\overline{D_i^K}\,\overline{D_i^{ew}}\right)^T \\ \overline{D_i^{zw}} + \overline{D_i^{zw}}\,\overline{D_i^K}\,\overline{D_i^{ew}} & -I \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۲۹}$$

بهترین عملکرد H_∞ با کمینه‌سازی η_i نسبت به قیدهای ۲۸ به دست می‌آید. قیدهای ۲۸ از نوع LMI و قیدهای ۱۸ از نوع BMI هستند. کمینه‌سازی η_i نسبت به قیدهای ۲۸ یک مسئله‌ی بهینه‌سازی نیمه‌معین است که توسط نرم‌افزارهای کارآمد قابل حل است.

ب) پیوستگی سیگنال کنترلی

هنگامی که حالت plant از ناحیه‌ی X_i به ناحیه‌ی X_j می‌گذرد، کنترل‌کننده‌ی تکه‌یی خطی، کنترل‌کننده‌ی خطی K_i را توسط کنترل‌کننده‌ی خطی K_j جایگزین می‌کند. این عملِ تعویض یا سوییچ ممکن است منجر به ناپیوستگی در سیگنال‌های حلقه‌ی بسته که از مهم‌ترین آن‌ها سیگنال کنترلی است بشود و این ناپیوستگی معمولاً نامطلوب است. طبق معادلات ۱۱ و ۱۴، سیگنال کنترلی از رابطه‌ی ۳۰ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} u(t) &= C_i^K \xi(t) + D_i^K C_i^e x(t) + D_i^K D_i^{ew} w(t) \\ & x(t) \in X_i \qquad i = 1, ..., m \end{aligned} \tag{۳۰}$$

برای تضمین پیوستگی سیگنال کنترلی کافی است داشته باشیم:

$$D_1^K = ... = D_m^K = 0 \tag{۳۱}$$

$$C_1^K = ... = C_m^K = C^K \tag{۳۲}$$

نظر به این که طراحی مستقیماً برای کنترل‌کننده‌ی تغییریافته انجام می‌شود، قیدهای ۳۱ و ۳۲ باید به قیدهایی برحسب ماتریس‌های کنترل‌کننده‌ی تغییریافته تبدیل شوند. با استفاده از روابط ۲۵ برای ماتریس‌های کنترل‌کننده‌ی تغییریافته، قیدهای ۳۱ و ۳۲ را می‌توان چنین نوشت:

$$\overline{D_1^K} = ... = \overline{D_m^K} = 0 \tag{۳۳}$$

$$\overline{C_1^K} = ... = \overline{C_m^K} = \overline{C^K} \tag{۳۴}$$

$$M_1 = ... = M_m = M \tag{۳۵}$$

قیدهای پیوستگی سیگنال کنترلی، به ماتریس‌های کنترل‌کننده اعمال می‌شوند، نه به ماتریس‌های plant و لذا این قیدها مستقیماً محدودیتی را برای plant موجب

نمی‌شوند. اما در مسئله‌ی بهینه‌سازی دو حالت ممکن است رخ دهد: اول این که مسئله‌ی بهینه‌سازی پس از اعمال قیود ۳۳ تا ۳۵ کماکان دارای جواب باشد. روشن است که در این حالت، جواب نسبت به حالتی که قیدی اعمال نشود از بعضی لحاظ زیربهینه خواهد بود. دوم این که قیود پیوستگی باعث شوند مسئله‌ی بهینه‌سازی جواب نداشته باشد. در این حالت ساده‌ترین رویکرد این است که قیدهای پیوستگی در طراحی اِعمال نشوند یا از روش دیگری برای طراحی استفاده شود. البته رویکرد بهتر که مستلزم تلاش تحلیلی و محاسباتی بیشتری نیز هست، پیراستن قیدهای پیوستگی و رسیدن به شرایطی لازم و کافی است زیرا به نظر می‌رسد قیدهای ارائه‌شده صرفاً شرایطی کافی و بنابراین محافظه‌کارانه باشند.

ج) کنترل‌کننده از مرتبه‌ی $\overline{n}$

در تکمیلِ مطالبِ گفته‌شده خلاصه‌یی از مراحل طراحی و معدودی نکات‌عملی ارائه می‌شود. دیدیم که طراحی کنترل‌کننده، منجر به کمینه‌سازی کمیت مثبت η_i تحت قیدهای ۲۸ می‌شود، که یک مسئله‌ی بهینه‌سازی نیمه‌معین است. پس از انجام این مرحله، ماتریس‌های S_i، R_i، $\overline{A_i^K}$، $\overline{B_i^K}$، $\overline{C_i^K}$ و $\overline{D_i^K}$ به دست خواهد آمد. در مرحله‌ی بعد، ماتریس‌های M_i، N_i، و U_i به‌گونه‌یی تعیین می‌شوند که قیود ۲۳، ۲۴ و ۳۵ ارضا شوند و به‌علاوه M_i، و N_i که $k \times \overline{n}$ هستند دارای رتبه‌ی سطری تمام باشند. از شرط رتبه‌ی سطری تمام نتیجه می‌شود که نامعادله‌ی $\overline{n} \geq k$ باید برقرار باشد، یعنی مرتبه‌ی کنترل‌کننده نباید از $\overline{n}$ پایین‌تر باشد (k مرتبه‌ی کنترل‌کننده است.) در ادامه، فرض بر این است که کنترل‌کننده از مرتبه‌ی $\overline{n}$ است یعنی $k = \overline{n}$ و در نتیجه M_i و N_i مربعی و $\overline{n} \times \overline{n}$ هستند. روابط ۲۳ و ۲۴ را چنین می‌نویسیم:

$$N_i M_i^T = I - S_i R_i \tag{۳۶}$$

$$U_i = -N_i^T R_i \left(M_i^T\right)^{-۱} \tag{۳۷}$$

از نابرابری ماتریسی‌خطیِ ۲۸ نتیجه می‌شود که $R_i > ۰$ و $S_i - R_i^{-۱} > ۰$. بنابراین ماتریس $I - S_i R_i$ در معادله‌ی ۳۶ ناویژه است و می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس‌های ناویژه‌ی M_i و N_i وجود دارند به‌طوری که در معادله‌ی ۳۶ صدق کنند. تعداد ماتریس‌های ناویژه‌ی M_i و N_i که معادلات ۳۵ و ۳۶ را ارضا کنند بی‌نهایت است. به‌عنوان مثال:

$$M_i = M \quad \text{و} \quad N_i = (I - S_i R_i)\left(M^T\right)^{-۱} \tag{۳۸}$$

که در آن ماتریسِ M می‌تواند هر ماتریس ناویژه‌ی حقیقی $\overline{n} \times \overline{n}$ باشد. پس از تعیین M_i و N_i که ناویژه‌اند، U_i از رابطه‌ی ۳۷ محاسبه، و P_i طبق رابطه‌ی ۲۰ تشکیل می‌شود. ماتریس‌های اصلی کنترل‌کننده را می‌توان از روابط ۲۵ محاسبه کرد:

$$\begin{aligned}
D_i^K &= \overline{D_i^K} \qquad B_i^K = N_i^{-۱}\left(\overline{B_i^K} - S_i \overline{B_i^u} D_i^K\right)\\
C_i^K &= \left(\overline{C_i^K} - D_i^K \overline{C_i^{eu}} R_i\right)\left(M_i^T\right)^{-۱}\\
A_i^K &= N_i^{-۱}\Big[\overline{A_i^K} - N_i B_i^K \overline{C_i^e} R_i - S_i \overline{B_i^u} C_i^K M_i^T\\
&\quad - S_i\left(\overline{A_i} + \overline{B_i^u} D_i^K \overline{C_i^e}\right) R_i\Big]\left(M_i^T\right)^{-۱}
\end{aligned} \tag{۳۹}$$

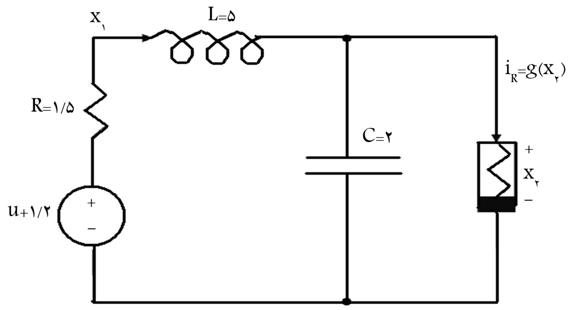
شبیه‌سازی

در این بخش، از یک سیستم الکتریکی که مداری متشکل از یک مقاومت، یک خازن، یک القاگر، یک مقاومت متغیر، و یک منبعِ ولتاژ است، به‌عنوان مثالی برای نمایش قابلیت اجرا و کارآیی کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی استفاده می‌شود.[۴و۸] مدار مورد بحث در شکل ۲ نمایش داده شده است. در این شکل، مقادیر مقاومت و خازن و القاگر و شدت‌جریان و اختلاف پتانسیل و زمان به‌ترتیب برحسب کیلواهم، پیکوفاراد، نانوهنری، میلی‌آمپر، ولت و نانوثانیه هستند. متغیرهای حالت عبارت‌اند از شدت جریان القاگر ($x_۱$) و ولتاژِ خازن ($x_۲$). مشخصه‌یِ غیرخطیِ مقاومت‌متغیر در شکل ۳ نمایش داده شده است. در این مثال، $n = ۲$، $m = ۳$، $X_۱ = \{x|x_۲ < ۰٫۲\}$، $X_۲ = \{x|۰٫۲ < x_۲ < ۰٫۶\}$، $X_۳ = \{x|x_۲ > ۰٫۶\}$، $F_{۱۲} = F_{۲۳} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ \end{bmatrix}^T$، $f_{۱۲} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰٫۲ \end{bmatrix}^T$ و $f_{۲۳} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰٫۶ \end{bmatrix}^T$. معادلات فضای حالت plant چنین هستند:

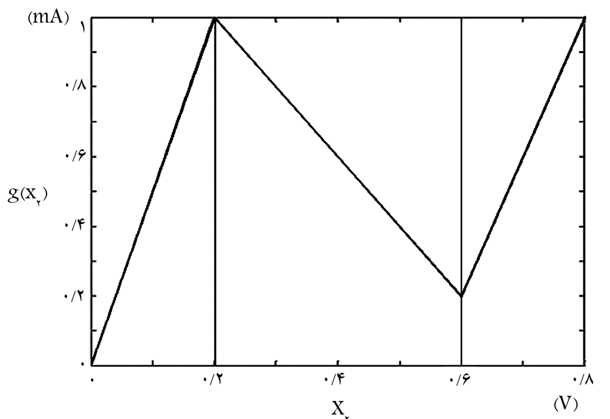
$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} -۳۰ & -۲۰ \\ ۰٫۰۵ & ۰ \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} ۲۴ \\ -۵۰ g(x_۲) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲۰ \\ ۰ \end{bmatrix} u(t)\\
y(t) &= \begin{bmatrix} ۰ & ۱ \end{bmatrix} x(t)
\end{aligned} \tag{۴۰}$$

توصیف تکه‌تکه‌ی مستوی plant عبارت است از:

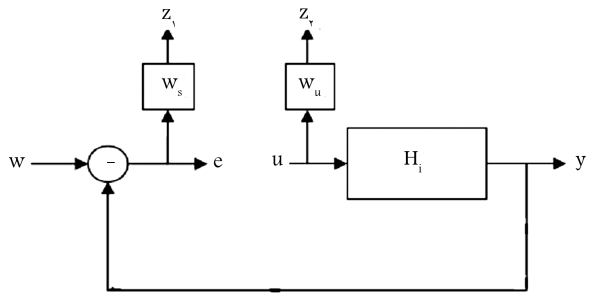
$$H_i: \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A_i x(t) + b_i + B_i u(t) \\ y(t) = C_i x(t) + D_i u(t) \end{array} \quad x(t) \in X_i \quad i = ۱, ۲, ۳ \tag{۴۱}$$



شکل ۲. مدار مقاومت متغیر.



شکل ۳. مشخصه‌ی غیرخطی ولتاژ جریان برای مقاومت‌متغیر.



شکل ۴. سیستم افزایش یافته برای کنترلِ مدارِ مقاومت متغیر در وجه iاُم.

که در آن

$$A_1 = \begin{bmatrix} -30 & -20 \\ 0.05 & -250 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -30 & -20 \\ 0.05 & 100 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -30 & -20 \\ 0.05 & -200 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 24 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 24 \\ -70 \end{bmatrix}, \quad b_3 = \begin{bmatrix} 24 \\ 110 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = B_3 = \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = C_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1 = D_2 = D_3 = 0.$$

نقاط تعادل سیستم حلقه‌باز عبارت‌اند از:

$$x^1_{eq} = \begin{bmatrix} 0.71 & 0.14 \end{bmatrix}^T \qquad x^2_{eq} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.45 \end{bmatrix}^T$$

$$x^3_{eq} = \begin{bmatrix} 0.37 & 0.64 \end{bmatrix}^T$$

هدف، طراحی کنترل‌کننده به‌گونه‌یی‌است که حلقه‌ی بسته، ورودی مبنا یعنی $w(t)$ را در خروجی سیستم ۴۰ تعقیب کند. سیستم افزایش‌یافته در شکل ۴ نمایش داده شده است. در این شکل توابعِ تبدیلِ $W_s(s)$ و $W_u(s)$ به‌ترتیب خطای تعقیب و ورودی کنترلی را وزن‌دهی می‌کنند. انتخاب $W_s(s)$ و $W_u(s)$ براساس شکل‌دهیِ حلقه[۱۰] و معرفی خروجی‌های کارآیی حلقه‌ی بسته صورت می‌گیرد و نهایتاً با سعی و خطا همراه است. عامل مهم دیگری نیز در گزینش $W_s(s)$ و $W_u(s)$ دخیل است و آن اجتناب از بالارفتن مرتبه‌ی کنترل‌کننده و حلقه‌ی بسته است که باعث می‌شود توابع وزن‌دهی حتی‌الامکان ساده انتخاب شوند. انتخاب نهایی در این مثال عبارت است از: $W_u(s) \equiv 0.1$ و $W_s(s) = 0.1(s+20)/(s+0.001)$. ملاحظه می‌شود که $W_u(s)$ فاقد دینامیک است اما $W_s(s)$ را می‌توان به‌صورت یک سیستمِ دینامیکی از مرتبه‌ی ۱ در نظر گرفت. بنابراین $\overline{n} = 3$.

با داشتنِ plant افزایش‌یافته، چنان که پیش‌تر گفته شد، طراحی کنترل‌کننده به یک مسئله‌ی بهینه‌سازی‌تحویل می‌شود که توسط نرم‌افزاری مانند matlab قابل حل است و جواب آن ماتریس‌های $\overline{A^K_i}$ تا $\overline{D^u_i}$ یعنی ماتریس‌های کنترل‌کننده‌ی تغییریافته و نیز ماتریس‌های R_i و S_i هستند. برای به دست آوردن ماتریس‌های کنترل‌کننده‌ی اصلی ابتدا M را یک ماتریسِ ثابت در نظر می‌گیریم که در این مثال $M = 10^3 I$ اختیار شده و I ماتریسِ همانیِ 3×3 است. سپس N_i را از رابطه‌ی ۳۸ و U_i را از رابطه‌ی ۳۷ محاسبه کرده و P_i راکه در این مورد یک ماتریسِ 6×6 است طبق رابطه‌ی ۲۰ به دست می‌آوریم. ذکر همه‌ی نتایج عددی‌در اینجا ممکن نیست، اما ماتریس‌های کنترل‌کننده‌ی اصلی از روابط ۳۹ چنین به دست می‌آیند:

$$A^K_1 = 10^3 \begin{bmatrix} 24 & 0 & 0 \\ 14111 & -42 & -8 \\ -12230 & 36 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^K_2 = 10^3 \begin{bmatrix} 47 & 0 & 0 \\ 27260 & -71 & -4 \\ -20941 & 54 & 3 \end{bmatrix}$$

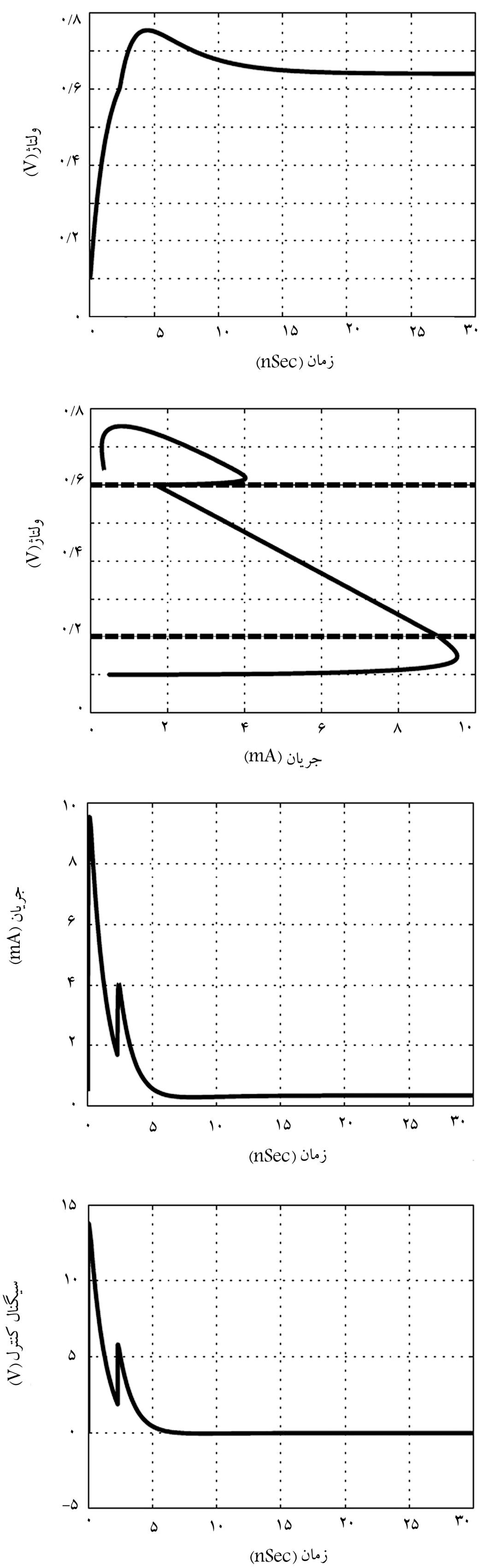
$$A^K_3 = 10^3 \begin{bmatrix} 26 & 0 & 0 \\ 15322 & -44 & -8 \\ -12902 & 37 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B^K_1 = 10^3 \begin{bmatrix} -163 \\ -93775 \\ 81276 \end{bmatrix} \qquad B^K_2 = 10^4 \begin{bmatrix} -33 \\ -19426 \\ 14923 \end{bmatrix}$$

$$B^K_3 = 10^4 \begin{bmatrix} -18 \\ -10332 \\ 8700 \end{bmatrix} \qquad C^K_i = \begin{bmatrix} 4.5901 & -0.011 & -0.0003 \end{bmatrix}$$

$$D^K_i = 0 \qquad i = 1, 2, 3$$

برای حلقه‌ی بسته وکنترل‌کننده‌ی پیشنهادی دو شبیه‌سازی انجام شده است. نتایج شبیه‌سازی اول در شکل ۵ نمایش داده شده‌اند[۸] و علاوه بر بررسی کارآیی می‌توان از آن برای مقایسه نیز استفاده کرد. در این شبیه‌سازی، ورودی مبنا $w(t) \equiv 0.64V$ است و حالت از $x(0) = \begin{bmatrix} 0.5mA & 0.1V \end{bmatrix}^T$ به x^3_{eq} میل می‌کند. زمانِ خیز[۹] را می‌توان به‌عنوان مدت زمان لازم برای رسیدن از $y(0) + 0.1\,[y(\infty) - y(0)]$ به $y(0) + 0.9\,[y(\infty) - y(0)]$ تعریف کرد. طبق این تعریف، زمانِ خیز متناظر با کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی در این مقاله تقریباً ۲ نانوثانیه، و زمان خیزِ متناظر با کنترل‌کننده‌ی حلقه‌بسته[۸] تقریباً ۷ نانوثانیه است. همچنین زمانِ نشست[۱۰] را می‌توان به‌عنوان مدت زمان لازم برای رفتن از $y(0)$ و رسیدن و ماندن در محدوده‌ی $(1 \pm 0.02)y(\infty)$ تعریف کرد. با این تعریف، زمان نشست متناظر با کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی در این مقاله در حدود ۱۲ نانوثانیه، و زمان نشست متناظر با کنترل‌کننده‌ی حلقه‌بسته[۸] تقریباً برابر با ۸ نانوثانیه است. به‌علاوه بالازدگی[۱۱] ناشی از کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی برابر با تقریباً ۱۸ درصد است در حالی‌که کنترل‌کننده‌ی حلقه‌بسته[۸] منجر به بالازدگی نمی‌شود. از سوی دیگر، طراحی کنترل‌کننده‌ی حلقه‌بسته[۸] برمبنای بهینه‌سازی BMI است که از لحاظ محاسبات نسبت به بهینه‌سازی LMI از پیچیدگی بیشتری برخوردار است. در حقیقت نتایج به دست آمده در این مورد محصول ۷۶ بار تکرار هستند. شکل ۵ نیز نشان می‌دهد که چگونه شدت جریان القاگر و ورودی کنترلی در لحظاتی از زمان دچار تغییرات می‌شوند. این رفتار در کنترل‌کننده‌ی حلقه‌بسته[۸] نیز مشاهده می‌شود. در شکل۵ مسیر حالت و نواحی سه‌گانه‌ی X_1 و X_2 و X_3 و مرزهای بین آن‌ها نیز نمایش داده شده‌اند. حالت plant به‌وضوح همه‌ی نواحی را سیر می‌کند. پیوستگی سیگنال کنترلی در لحظات عبور از مرزها علی‌رغم تغییرات در آن لحظات مشخص است. مقایسه‌ی نتایجِ این نوشتار با نتایج موجود[۸] نشان می‌دهد که کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی از لحاظ زمانِ خیز و سرعت و سهولت‌محاسبات از کنترل‌کننده‌ی حلقه‌بسته[۸] برتر است، در حالی که



شکل ۵. کارآیی مدار مقاومت متغیر در کنترل خروجی به ۰٫۶۴V از حالت‌اولیه‌ی $\mathbf{x(0)=[۰٫۵mA \quad ۰٫۱V]}^T$.

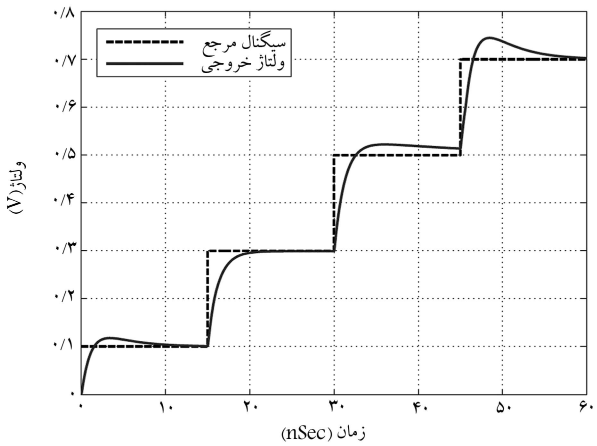
از نظر زمان نشست و میزان بالازدگی، کنترل‌کننده‌ی حلقه‌بسته[۸] رفتار مطلوب‌تری دارد.

شبیه‌سازی دوم، کارآیی کنترل‌کننده‌ی پیشنهادی را در تعقیبِ ورودیِ مبنا بررسی می‌کند. نتایج در شکل ۶ نمایش داده شده‌اند. دامنه‌ی تغییرات ورودی مبنای پله‌یی طوری انتخاب شده است که حالت plant هر سه ناحیه‌ی فضای حالت را سیر کند. مشاهده می‌شود که ورودی مبنا در همه‌ی حالات با تقریب بسیار خوبی دنبال می‌شود. برای بررسی پایداری حلقه‌بسته، با قرار دادن $w(t) \equiv ۰$ در معادلات ۱۵، آن معادلات به‌معادلات ۴۲ تبدیل خواهند شد:

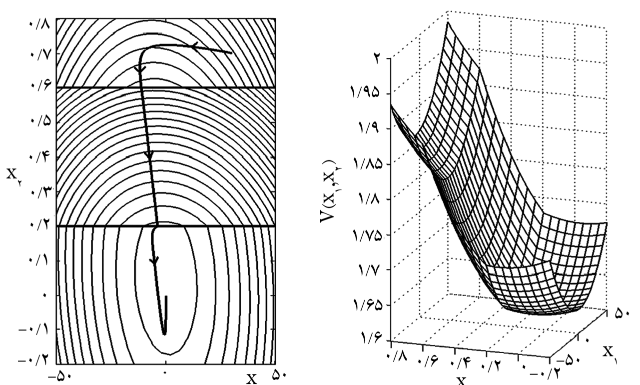
$$T_i \quad \begin{array}{l}\dot{x}_{CL}(t)=A_i^{CL}x_{CL}(t)+b_i^{CL}\\ z(t)=C_i^{CL}x_{CL}(t)\end{array} \qquad x(t)\in X_i \quad i=۱,۲,۳$$

(۴۲)

که در آن $b_i^{CL}=\begin{bmatrix}b_i & ۰\end{bmatrix}^T$. هرگاه سه‌تایی‌های $\{P_i,q_i,r_i\}_{i=۱}^{۳}$ یافت شوند به‌گونه‌یی که نامعادله‌های ۶، معادلات ۷، و نامعادلات ۱۰ ارضا شوند، دستگاه فوق ۴۲ پایدار است. پس از محاسبه‌ی A_i^{CL} و b_i^{CL} و F_{ij} و f_{ij} و استفاده از نرم‌افزار مطلب برای حل این مسئله‌ی محدب، سه‌تایی‌های مزبور یافت شدند و به این ترتیب پایداری حلقه‌ی بسته محرز شد. با داشتنِ $\{P_i,q_i,r_i\}_{i=۱}^{۳}$، تابع لیاپونوف تکه‌تکه‌ی مربعی طبقِ ضوابطِ ۵ تعیین شد و از آنجا مجموعه‌ی $Q=\{Q_۱,Q_۲,Q_۳\}$ نیز



شکل ۶. کارآییِ مدارِ مقاومتِ متغیر در تعقیبِ ورودیِ مبنایِ پله‌یی.



الف) نمودار تابع لیاپانوف برحسب $x_۱$ و $x_۲$ $(x_۳,x_۴,x_۵,x_۶=۰)$؛

ب) خم‌های ترازبرای تابع لیاپانوف در صفحه‌ی $x_۱$ و $x_۲$ و همگرایی مسیر حالت به مبدا.

شکل ۷. نمودار و خم‌های تراز برای تابع لیاپانوف.

طبق تعریف ۸ به دست آمد که در معادلات ۴۳ آورده شده است:

$$Q_۱ = \begin{Bmatrix} ۰ \\ ۰ \\ ۲۴٫۹ \\ -۴۵٫۵ \\ -۲۶۲۴۰ \\ ۱۹۹۹۵ \end{Bmatrix} \qquad Q_۲ = \begin{Bmatrix} ۱٫۳ \\ ۰ \\ ۲۴٫۱ \\ -۹٫۴ \\ -۵۴۹۴ \\ ۴۴۰۸ \end{Bmatrix} \qquad Q_۳ = \begin{Bmatrix} -۲٫۱ \\ ۰ \\ ۲۳٫۹ \\ ۱۸٫۷ \\ ۱۰۷۴۶ \\ -۱۷۴۴۰ \end{Bmatrix} \tag{۴۳}$$

نقاط $Q_۲$ و $Q_۳$ در داخل نواحی دوم و سوم قرار نمی‌گیرند؛ لذا تنها نقطه‌یی از مجموعه‌ی Q که مسیرهای حالت سیستمِ حلقه‌بسته تحت $w(t) \equiv ۰$ به آن میل می‌کند نقطه‌ی $Q_۱$ است. تابع لیاپانوفِ مورد بحث شش‌متغیره است که دو متغیر اول‌آن عبارت‌اند از شدت‌جریان القاگر و ولتاژ خازن. لذا در شکل ۷ الف نمودار $V(x_۱, x_۲, ۰, ۰, ۰, ۰)$ به‌عنوان تابعی از این دو متغیر نمایش داده شده است. مسیر حالت سیستمِ حلقه‌بسته، یک منحنی در فضای شش‌بُعدی است. در شکل ۷ ب تصویراین منحنی بر صفحه‌ی $x_۱x_۲$ با شروع از نقطه‌ی اولیه‌ی $x(۰) = \begin{bmatrix} ۳۰mA & ۰٫۷۷V & ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ همراه با مرزهای‌بین نواحیِ سه‌گانه نمایش داده شده است. مشاهده می‌شود که مطابق انتظار:

$$\lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} x_۱(t) \\ x_۲(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{bmatrix}$$

در این شکل همچنین منحنی‌های ترازِ مقطعِ تابع لیاپونوف مزبور ـ منحنی‌هایی با معادله‌ی $V(x_۱, x_۲, ۰, ۰, ۰, ۰) = c$ ـ به‌ازای مقادیر مختلف c دیده می‌شوند.

نتیجه‌گیری

در این مقاله روشی برای طراحی کنترل‌کننده‌ی دینامیکی تکه‌تکه‌ی خطی که می‌توان آن را کنترل‌کننده‌ی تکه‌تکه‌ی H_∞ نامید، برای سیستم‌های تکه‌تکه‌ی مستوی ارائه شد. نشان داده شد که مسئله‌ی طراحی را می‌توان در قالب بهینه‌سازیِ نیمه‌معین بیان و حل کرد. پایداری حلقه‌بسته و پیوستگی سیگنالِ کنترلی نیز بررسی شد. اجرایی‌بودن روش طراحی پیشنهادی با شبیه‌سازی برای یک سیستمِ الکتریکیِ ساده و مقایسه‌ی کارآیی کنترل‌کننده‌ی طراحی‌شده با کارآیی کنترل‌کننده‌ی دیگری که برای همان سیستم طراحی شده بود[۸] نشان داده شد.

پانوشت

1. piecewise linear
2. piecewise affine
3. linear matrix inequality (LMI)
4. bilinear matrix inequality (BMI)
5. iterative method
6. piecewise quadratic lyapunov function
7. loop shaping
8. congruence transformations
9. rise-time
10. settling-time
11. overshot

منابع

1. Rantzer, A., and Johanson, M. "Piecewise linear quadratic optimal control," *IEEE Transactions on Automatic Control,* **45**(4) pp. 629-637 (2000).
2. Rodrigues, L., and How, J.P. "Automated control design for a piecewise affine approximation of a class of nonlinear systems," *Proceedings of the American Control Conference,* Arlington, VA, pp. 3189-3194 (2001).
3. Johanson, M., and Rantzer, A. "Computation of piecewise quadratic lyapunov functions for hybrid systems," *IEEE Transactions on Automatic Control,* **43**(4) pp.555-559 (1998).
4. Hassibi, A., and Boyd, S. "Quadratic stabilization and control of piecewise linear systems," *Proceedings of the American Control Conference,* Philadelphia, PA, pp. 3659-3664 (June 1998).
5. Boyd, S.; El Ghaoui, L.; Feron, E., and Balakrishnan, V. "Linear matrix inequalities in system and control theory," *SIAM Studies in Applied Mathematics,* **15** (1994).
6. Gahinet, P.; Nemirovski, A.; Laub, A., and Chilali, M. *LMI Control Toolbox User's Guide,* The Mathworks, Inc. (1995).
7. Nesterov, Y., and Nemirovsky, A."Interior-point polynomial methods in convex programming," *SIAM Studies in Applied Mathematics,* **13**, (1994).
8. Rodrigues, L,; Hassibi, A., and How, J.P. "Output feedback controller synthesis for piecewise-affine systems with multiple equilibria," *Proceedings of the American Control Conference,* Chicago, IL, pp. 1784-1789 (June 2000).
9. Scherer, C.; Gahinet, P., and Chilali, M."Multiobjective output-feedback control via LMI optimization," *IEEE Transactions on Automatic Control,* **42**(7), pp. 896-911 (July 1997).
10. McFarlane, D. and Glover, K. "A loop shaping design procedure using H_∞ synthesis," *IEEE Transactions on Automatic Control,* **37**(6), pp. 759-769 (1992).