

تنش‌های باقی‌مانده از جوشکاری بر مبنای انجماد

حوضچه‌ی مذاب متحرک

سید عبدالعظیم امیرشاه کریمی (استاد یار)
محمود حسن پور متی کلایی (دانشجوی دکتری)
دانشکده‌ی مهندسی عمران
دانشگاه صنعتی امیرکبیر

برای محاسبه‌ی تنش‌های باقی‌مانده از جوشکاری، تعیین تاریخچه‌ی توزیع دمای ناشی از جوشکاری ضرورت دارد. در این مقاله ضمن معرفی مدل حرارتی جدید و تشریح مفهوم حوضچه‌ی مذاب معادل، تاریخچه‌ی توزیع دمای ناشی از حرکت حوضچه‌ی مذاب معادل محاسبه شده است. در این مرحله به منظور در نظر گرفتن حرارت نهان ناشی از تغییر حالت ماده‌ی مذاب به جامد، از مفهوم انتالپی به عنوان تابعی از دما استفاده شده است. در مرحله‌ی دوم با پذیرش مدل فون میسز و بررسی سختی‌پذیری سینماتیکی وابسته به دما، تنش‌های باقی‌مانده از جوشکاری محاسبه شده‌اند. در هر کدام از دو مرحله‌ی فوق، به دلیل تغییر خواص حرارتی و مکانیکی مصالح در برابر دما، معادلات غیرخطی مربوطه به روش اجزاء محدود حل شده‌اند. مزیت این روش، نسبت به روش‌های موجود، واقعی‌تر بودن فرایند جوشکاری، سادگی داده‌ها و کاهش زمان تحلیل و تخمین توان حرارتی جوشکاری است.

مقدمه

موضعی سازه‌ها می‌شوند. همچنین اعتمادپذیری سازه‌های جوش شده به تنش‌های باقی‌مانده در آنها بستگی دارد. در این نوشتار، ضمن معرفی مدل حرارتی جدید و در نظر گرفتن تغییر حالت حوضچه‌ی مذاب جوش، و نیز با استفاده از مفهوم حوضچه‌ی مذاب معادل، حوزه‌ی مورد بررسی دوبعدی شده است. در نهایت، با رعایت تغییرات خواص مصالح نسبت به دما، ابتدا تاریخچه‌ی زمانی توزیع دمای حاصل از جوشکاری و سپس تنش‌های باقی‌مانده از یک جوش لب‌به‌لب^۲ پس از به تعادل رسیدن دمای حوزه‌ی منظور و دمای محیط اطراف، بررسی و محاسبه شده است.

از بین انواع اتصالاتی که در صنعت مورد استفاده قرار می‌گیرند، «جوش» از رونق و رواجی روزافزون برخوردار است و این به دلیل سادگی، سرعت عمل و عدم کاربرد وسایل اتصال جانبی است. عمل جوشکاری شامل یک حرارت‌دهی موضعی کوتاه‌مدت در یک محیط فلزی، همراه با افزودن ماده‌ی مذاب فلز الکتروود به محل اتصال دو قطعه است. در اثر این عمل شیب دمای فوق‌العاده‌ی در اطراف منطقه‌ی جوش به وجود می‌آید که منجر به تولید کرنش حرارتی و در نتیجه تنش‌های حرارتی می‌شود. از آنجا که تنش تسلیم مصالح محیط فلزی با افزایش دما کاهش می‌یابد و از سوی دیگر کرنش حرارتی با ازدیاد دما افزایش می‌یابد، تنش‌های حرارتی تولید شده از مرز تسلیم عبور می‌کنند و مصالح محیط در اطراف منطقه‌ی جوش رفتار خمیری-کشسانی^۱ بروز می‌دهند. به همین سبب پس از عمل جوشکاری و متعادل شدن دما با محیط اطراف، تنش‌ها و تغییر شکل‌هایی در مصالح محیط فلزی باقی می‌مانند که آنها را تنش‌ها و تغییر شکل‌های باقی‌مانده می‌نامند. همچنین، در دمای بالا ریزساختار مصالح نیز تغییر می‌کند که البته این تغییر به صورت تغییر خواص حرارتی و مکانیکی مصالح نسبت به دما ظاهر می‌شود. تعیین تنش‌های باقی‌مانده از جوشکاری یکی از موضوعات روز مراکز تحقیقاتی و پژوهشی دنیاست و بدیهی است که این تنش‌ها سبب افزایش آهنگ انتشار ترک ناشی از خستگی، خوردگی و کماتش

در این تحقیق، دو ورق مشابه از نوع فولاد St-۳۷ با ابعاد ۱۰×۶۰×۷۵ میلی‌متر، مطابق شکل ۱، در لبه‌ی ۶۰ میلی‌متری از طریق جوش لب‌به‌لب به هم متصل شده‌اند. نتایج حاصل از تجزیه‌ی انتقال حرارت یک نقطه از حوزه با اندازه‌گیری‌های انجام شده توسط ترموکوپل بر نمونه‌ی از کارخانه‌ی شرکت مهندسی و ماشین‌سازی ایران مطابقت دارد.

معادلات حاکم بر انتقال حرارت

طبق قانون اول ترمودینامیک، معادله‌ی تعادل گرمایی در یک حوزه‌ی پیوسته‌ی دیفرانسیلی به صورت زیر است:

$$\rho \dot{C}_T + q_{i,i} = \dot{Q} \quad (1)$$

جاب‌جایی و تابشی، باشد.

$$K \frac{\partial T}{\partial n} = q \quad (ب) \text{ شار حرارتی}$$

$$-K \frac{\partial T}{\partial n} = \beta_1(T - T_0) + \beta_2(T^f - T_0^f) \quad (ج) \text{ جاب‌جایی و تابشی}$$

معادله‌ی ۴ الف به همراه معادله‌های ۴ ب و ۴ ج، مجموعاً معادلات تاریخچه‌ی زمانی توزیع دمای حوزه را تشکیل می‌دهند. برای در نظر گرفتن حرارت ناشی از تغییر حالت ماده‌ی مذاب به جامد در آلیاژهایی مثل فولاد که فاصله‌ی دمایی تغییر حالت دارند، انتالی (H) به صورت زیر تعریف می‌شود. با استفاده از این انتالی، به عنوان متغیر وابسته، معادله‌ی ۴ به معادله‌ی ۸ تبدیل می‌شود.

$$H = \int^T C(T) dT \quad (۵)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = C^{\circ} T \quad (۶)$$

C در رابطه‌ی ۶ ظرفیت گرمایی مؤثر با در نظر گرفتن گرمای نهان ذوب است که Lemmon آن را در حالت دو بعدی به دست آورده است. [۲ و ۱]

$$C = \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (۷)$$

$$\left(\frac{K}{C} H_{,i} \right)_{,i} + \dot{Q} = \rho \dot{H} \quad (الف) \quad (۸)$$

$$\frac{K}{C} \frac{\partial T}{\partial n} = q \quad (ب) \quad (۸)$$

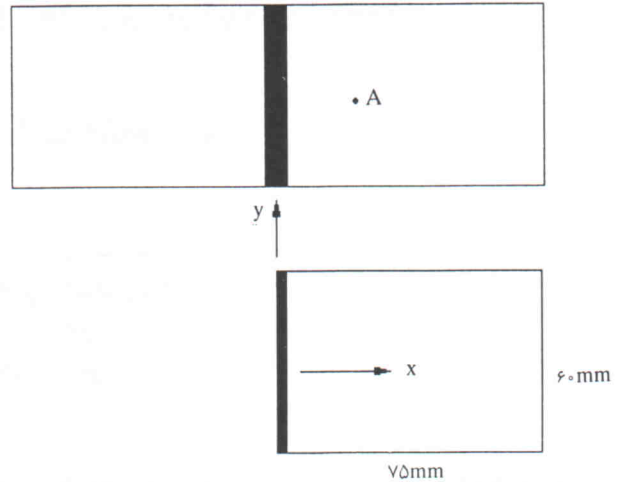
$$-\frac{K}{C} \frac{\partial H}{\partial n} = \beta_1 [T(H) - T_0] + \beta_2 [T^f(H) - T_0^f] \quad (ج) \quad (۸)$$

در روش اجزاء محدود، کل معادله‌ی ۸ به فرم انتگرالی معادل تبدیل می‌شود. سپس این انتگرال با استفاده از روش گالرکین تبدیل به یک معادله‌ی ماتریسی، شامل معادله‌های دیفرانسیل معمولی، و همزمان غیرخطی، خواهد شد. [۳]

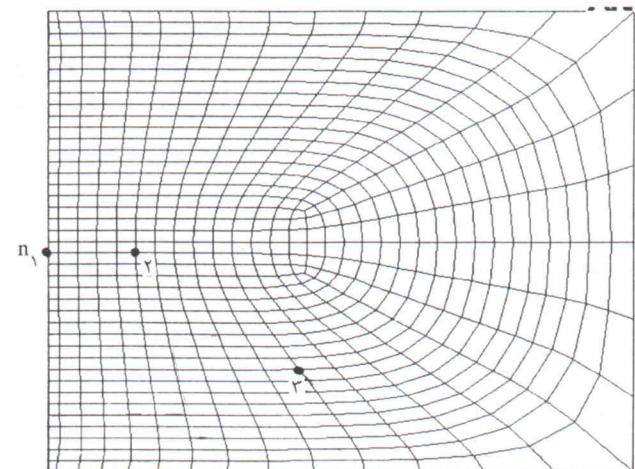
در این نوشتار از عناصر صفحه‌ی ۴ گرهی استفاده شده و توزیع عناصر مطابق شکل ۲ و به گونه‌ی انجام شده که در نواحی با شیب دمای بالا، نسبت به نواحی دورتر جوش، عناصر بیشتر و با شبکه‌ی ریزتر قرار دارند. به دلیل تقارن فقط نصف حوزه در نظر گرفته شده و تعداد عناصر و گره‌ها به ترتیب برابر ۷۴۲ و ۷۸۲ است.

مدل حرارتی و حوضچه‌ی مذاب معادل

در روش‌های موجود، حرارت ورودی ناشی از جوشکاری به حوزه‌ی فلزی را مطابق شکل ۳، به صورت شار حرارتی سطحی در



شکل ۱. ورق‌های تحت بررسی



شکل ۲. شبکه‌ی عناصر ۴ گرهی نیم‌حوزه

می‌دانیم که برای یک حوزه‌ی همسان^۳ (ایزوتروپ) قانون دوم ترمودینامیک به صورت قانون فوریه بیان می‌شود. یعنی:

$$q_i = -KT_{,i} \quad (۲)$$

با جایگزینی معادله‌ی ۲ در معادله‌ی ۱ خواهیم داشت:

$$\rho C \dot{T} = (KT_{,i})_{,i} + \dot{Q} \quad (۳)$$

و با فرض استقلال فضایی ضریب K

$$KT_{,ii} + \dot{Q} = \rho C \dot{T} \quad (الف) \quad (۴)$$

معادله‌ی ۴ الف معادله‌ی بنیادی تاریخچه‌ی زمانی توزیع دماست که با معلوم بودن شرایط اولیه و شرایط مرزی می‌توان آن را حل کرد. شرایط اولیه بیانگر توزیع دما در حوزه و مرزهای آن در زمان صفر، و شرایط مرزی تعیین‌کننده‌ی وضعیت مرز حوزه از نظر تبدلات حرارتی با محیط اطراف است. تبادل حرارت ممکن است به صورت عایق حرارتی، شار حرارتی ورودی، و انتقال حرارت، اعم از

گرفته شده است. به عبارت دیگر ورق‌های جوش شونده، به غیر از بخش کوچکی در همسایگی مرز هندسه جوش، به عنوان قالب حوضچه‌ی مذاب جوش منظور شده‌اند. همچنین، در این نوشتار به منظور دوبردی کردن مسئله، به جای مقطع حوضچه‌ی مذاب شکل ۴-الف از مقطع مستطیلی معادل آن (شکل ۴-ب) استفاده شده است. عرض مقطع معادل حوضچه‌ی مذاب (e) با توجه به اطلاعات شکل ۴-الف برابر ۴/۴ میلی‌متر است.

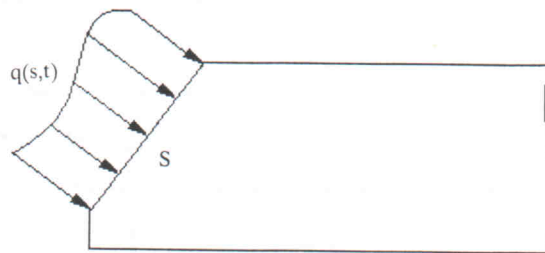
از سوی دیگر، چون طول حوضچه‌ی مذاب همان اندازه‌ی سرعت الکتروود در جوشکاری است، بنابراین با معلوم شدن کل ماده‌ی مذاب در واحد زمان، توان حرارتی لازم برای جوشکاری را می‌توان با استفاده از فرمول تعادل گرمایی زیر محاسبه کرد:

$$\eta P = \rho A v (L + \int C dT) \quad (9)$$

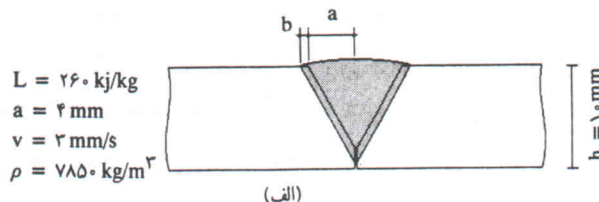
نتیجه آن که حوضچه‌ی مذاب با ابعاد $4/4 \times 10 \times 3$ میلی‌متر مدت یک ثانیه دوام دارد و سپس به اندازه‌ی ۳ میلی‌متر (اندازه سرعت الکتروود) جابه‌جا می‌شود. با این مدل حرارتی انتقال حرارت در ورق‌های نازک، یعنی ورق‌هایی که با یک خط جوش^۴ (مه‌جوش) اتصال‌شان کامل می‌شود، تبدیل به انتقال حرارت دوبردی در ورق‌ها می‌شود. از آنجا که در شکل ۲، به دلیل تقارن، فقط شبکه‌ی عناصر نیم‌حوزه ارائه شده است، عناصر ستون سمت چپ این شبکه به عرض $2/2$ میلی‌متر، همان عناصر نیم‌عرض حوضچه‌ی مذاب معادل را تشکیل می‌دهند. جدول ۱ اندازه‌ی خواص حرارتی و مکانیکی فولاد را در دماهای مختلف نشان می‌دهد. تغییرات این خواص در بین این دماها به صورت خطی در نظر گرفته شده است.

رابطه‌ی تنش- کرنش

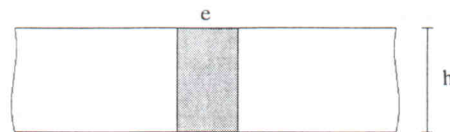
رابطه‌ی تنش- کرنش خمیری-کشسانی در یک حوزه‌ی همسان با کرنش‌های کوچک را می‌توان با استفاده از رابطه‌های زیر محاسبه کرد، مشروط بر آن که بپذیریم که تغییر شکل خمیری منجر به تغییر حجم نمی‌شود و صرفاً تغییر دما سبب تغییر حجم می‌شود.



شکل ۳. شار حرارتی سطحی ورودی



(الف)



(ب)

شکل ۴. مقطع حوضچه‌ی مذاب و مقطع معادل

نظر می‌گیرند. یعنی مجموع شار حرارتی ورودی و حرارت لازم برای ذوب مصالح الکتروود برابر است با توان مفید قوس الکتریکی. همچنین تابع شار حرارتی، $q(s,t)$ ، با در نظر گرفتن فرض‌هایی تشکیل می‌شود. [۵، ۶، ۷، ۸]

می‌دانیم که در جوشکاری مطابق شکل ۴، ماده‌ی مذاب الکتروود را به داخل کانال تهیه‌شده (هندسه جوش) می‌ریزند. همچنین، مقداری از مصالح فلزی جنب کانال در اثر حرارت قوس الکتریکی ذوب می‌شوند. تحقیق و بررسی روی جوش‌های مرغوب و استاندارد نشان می‌دهد که مقطع حوضچه‌ی مذاب جوش مطابق شکل ۴-الف تشکیل می‌شود و اندازه‌ی b نزدیک به $2/5a$ است.

در این مقاله با در نظر گرفتن مطالب فوق و با توجه به مشابهت‌های جوشکاری و ریخته‌گری، موضوع انتقال حرارت در جوشکاری همانند ریخته‌گری متحرک در ورق‌های نازک در نظر

جدول ۱. اندازه‌ی خواص حرارتی و مکانیکی فولاد در دماهای مختلف

۱۶۰۰ °C	۱۴۵۰ °C	۱۱۰۰ °C	۹۰۰ °C	۸۰۰ °C	۵۰۰ °C	۲۰ °C	دما
۹۸۰۰	۷۲۰۰	۵۲۰۸	۴۰۷۰	۳۵۰۰	۲۱۵۴	۰	H: j/cm ^۳
۷۰۰	۷۰۰	۷۳۲	۷۵۱	۷۶۰	۶۱۴	۳۸۰	C: j/kg°C
۰/۴	۰/۴	۰/۳۷۳	۰/۳۵۸	۰/۳۵	۰/۴۱	۰/۵	K: w/cm°C
۲۱۰۰۰	۲۱۰۰۰	۲۱۰۰۰	۲/۱×۱۰ ^۵	۵/۸×۱۰ ^۶	۱/۷×۱۰ ^۶	۲/۱×۱۰ ^۶	E: kg/cm ^۲
۰/۴۷	۰/۴۶۷	۰/۴۶	۰/۳۷	۰/۳۶	۰/۲۳	۰/۲	ν

جدول ۲. تنش تسلیم و مدول مماسی فولاد در دماهای مختلف

دما	۱۶۰۰	۶۰۰	۴۰۰	۲۰۰	۲۰
$\sigma_y : \text{kg/cm}^2$	۰/۱	۱۰	۱۰۰۰	۲۱۰۰	۲۴۰۰
$E_T : \text{kg/cm}^2$	۳۰۰	۲۰۰۰۰	۱۳۶۰۰	۲۴۰۰۰	۵۰۰۰

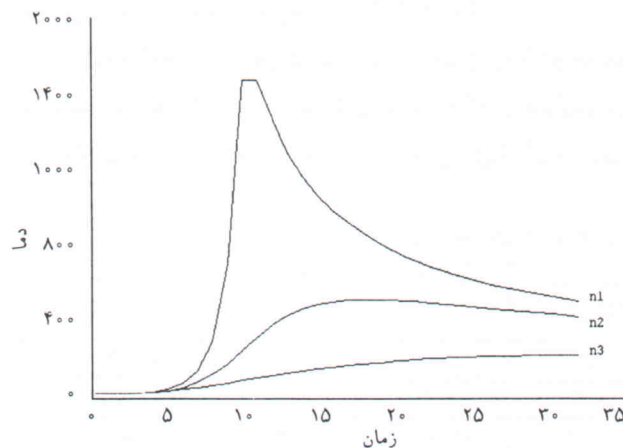
شرایط اولیه و مرزی

فاصله‌ی دمایی ذوب آلیاژ فولاد نرم بین دو دمای 1450°C تا 1580°C است و به دلیل وجود پوشش الکتروود و سرعت نسبتاً بالای سردشدگی از انتقال حرارت تابشی صرف نظر شده است. انتقال حرارت فقط از طریق جابه‌جایی، با ضریب انتقال حوضچه‌ی مذاب و فلز غیر مذاب به ترتیب برابر 1580°C و 20°C منظور شده است. شیوه‌ی تحلیل انتقال حرارت به این صورت است که دمای نیم‌حوزه‌ی مذاب معادل، یعنی دمای دو عنصر اول ستون چپ شکل ۲، پس از مدت یک ثانیه برابر 1580°C منظور شده است. نیم‌حوضچه‌ی مذاب معادل آنگاه به‌اندازه‌ی ۳ میلی‌متر جابه‌جا می‌شود و هم‌زمان انجماد نیم‌حوضچه‌ی مذاب قبلی شروع می‌شود. به‌علاوه در این تحقیق در تحلیل تنش، شرایط مرزی روی محور تقارن یعنی عدم جابه‌جایی افقی گره‌های روی محور تقارن متغیر است و همراه با حرکت حوضچه‌ی مذاب افزوده می‌شود. ضریب انبساط طولی فولاد نرم^۵ در تحلیل تنش برابر $\alpha = 1/2 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$ منظور شده است.

تابع زمانی توزیع دما

با اعمال شرایط فوق، پس از مدت ۱۰۰۰ ثانیه حوزه‌ی مورد نظر به دمای محیط بازمی‌گردد، که این مدت با واقعیت بسیار مطابقت دارد. با توجه به حرکت حوضچه‌ی مذاب، زمان فوق به ۲۱ قسمت و هر قسمت با رشد زمانی ۰/۱ ثانیه شروع شده است. این رشد زمانی بر مبنای اندازه و خواص عنصر تخمین زده شد.^[۹]

شکل ۵ تغییرات دمای نقاط n_1, n_2, n_3 را در مدت ۳۲/۵ ثانیه نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، پس از ۱۰ ثانیه الکتروود به گره n_1 می‌رسد و مدت یک ثانیه این گره در ذوب کامل قرار



شکل ۵. تغییرات دمای نقاط n_1, n_2, n_3 نسبت به زمان

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^T \quad (10)$$

$$\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} S_{ij} + \frac{1}{9K} \delta_{ij} \sigma_{kk} \quad (11)$$

$$d\sigma_{ij} = dS_{ij} + \frac{1}{3} \delta_{ij} d\sigma_{kk} \quad (12)$$

$$d\sigma_{ij} = 2G(d\varepsilon_{ij} + \frac{v}{1-2v} \delta_{ij} d\varepsilon_{kk} - d\varepsilon_{ij}^p) - GS_{ij}d(\frac{1}{G}) - \quad (13)$$

$$K\delta_{ij}[\sigma_{ij} d(\frac{1}{3K}) + \nu d\varepsilon^T]$$

در کلیه‌ی فرمول‌های فوق K مدول حجمی، و در رابطه‌ی ۱۳ نیز $\varepsilon^T = \alpha T$ است. حال باید برای کرنش خمیری در رابطه‌ی ۱۳ چاره‌ی اندیشید. اگر مدل فون میسز را به‌همراه سختی‌پذیری سینماتیکی برای رفتار مصالح حوزه‌ی پذیریم، آنگاه:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda S_{ij} \quad (14)$$

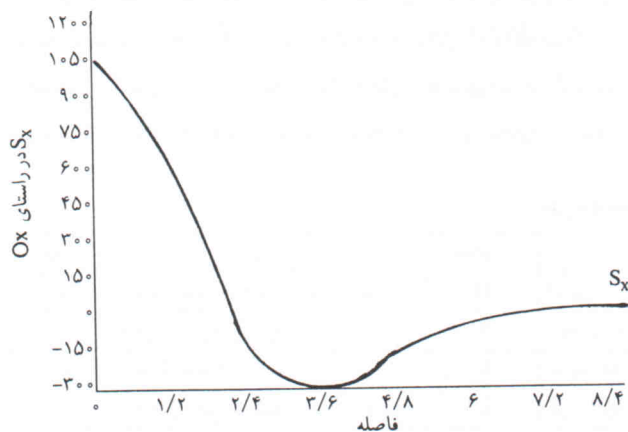
$$f = \frac{1}{\nu}(S_{ij} - \beta_{ij})(S_{ij} - \beta_{ij}) - \frac{1}{3} \sigma_y^2(\varepsilon^p, T) = 0 \quad (15)$$

$$\beta_{ij} = \alpha_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \alpha_{kk} \quad (16)$$

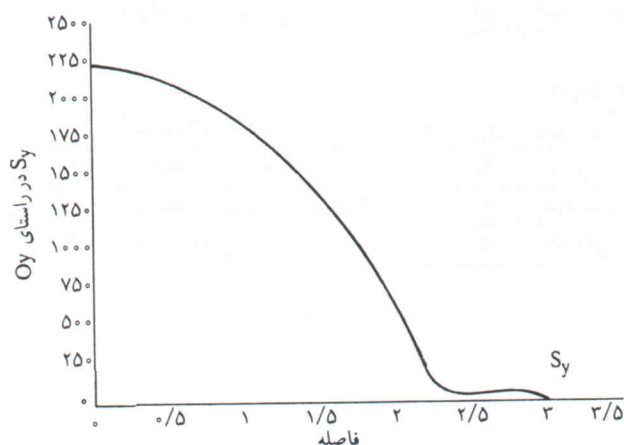
حال به شرط $df = 0$ مقدار $d\lambda$ به دست می‌آید و با جایگزینی آن در رابطه‌ی ۱۴ و سپس با جایگزینی در رابطه‌ی ۱۳، سرانجام رابطه‌ی تنش-کرنش خمیری-کشسانی به دست خواهد آمد.^[۴] البته می‌توان رابطه‌ی تنش-کرنش را به ماتریس تبدیل کرد تا از آن طریق ماتریس $[D^{ep}]$ مصالح حوزه‌ی منظور برای حل به روش اجزاء محدود به دست آید.

در بررسی به‌عمل آمده، محاسبه‌ی تنش‌های باقی‌مانده از طریق همان شبکه‌ی عنصربندی انتقال حرارت صورت گرفته است و با توجه به مفهوم حوضچه‌ی مذاب معادل، مسئله به‌صورت دوبعدی و در حالت تنش مسطح تحلیل شده است.

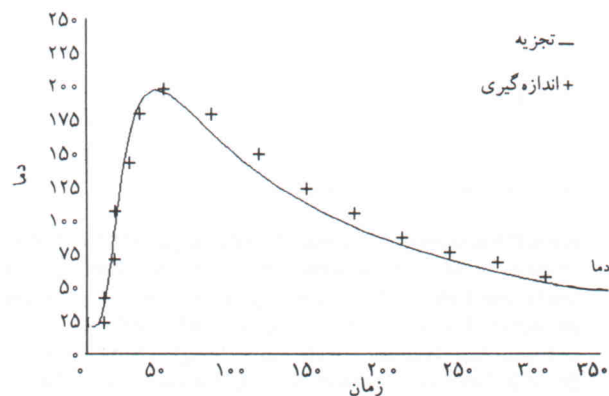
تغییرات نسبت به دمای ضریب کشسانی و نسبت پواسون در جدول ۱ و اندازه‌ی تنش تسلیم و مدول مماسی در دماهای مختلف در جدول ۲ ارائه شده است. تغییرات این خواص مکانیکی در بین دماها به‌صورت خطی اند.



شکل ۸. تغییرات تنش باقی مانده S_x در راستای Ox



شکل ۹. تغییرات تنش باقی مانده S_y در راستای Oy



شکل ۱۰. دمای نقطه A در زمان‌های مختلف، در تجزیه و اندازه گیری

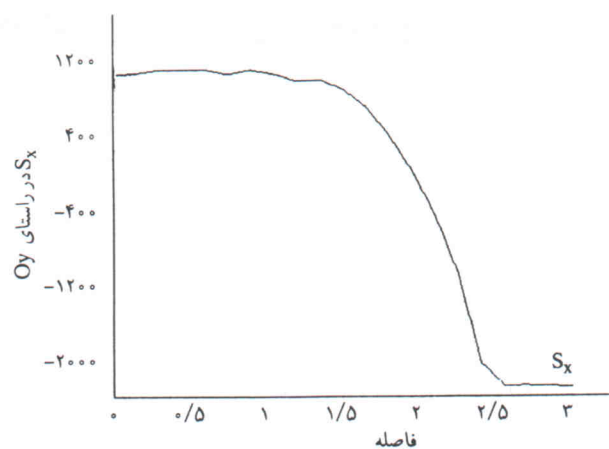
نتیجه گیری

نتایج حاصل از تحلیل انتقال حرارت و تنش به خوبی با طرح دستی استاندارد دما و تنش‌های باقی مانده مطابقت دارد. اما از آنجا که تنش‌های باقی مانده از جوشکاری به شدت تحت تأثیر تابع دما-زمان کل نقاط حوزه‌اند، برای ارزیابی نتایج تحلیل انتقال حرارت با مدل حرارتی و محاسباتی ارائه شده در این نوشتار، دمای

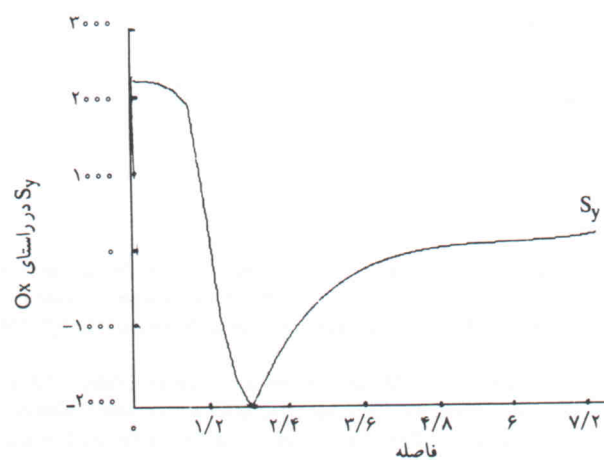
می‌گیرد. سپس با دور شدن الکتروود، این گره شروع به انجماد و سرد شدن می‌کند (به مکان گره‌های n_1, n_2, n_3 در شکل ۲ توجه کنید).

تنش‌های باقی مانده

با توجه به شیب بالای دما در زمان‌های اولیه و نیز حرکت حوضچه مذاب، تنش‌های ایجاد شده مجموعاً در ۳۸ قسمت حل شده‌اند که ۲۰ قسمت آن به صورت پله‌یی و مابقی به صورت خطی است. رشد زمانی در هر مرحله، عبارت است از اختلاف زمان بین آن مرحله و مرحله‌ی قبلی. شکل‌های ۶ و ۷ توزیع تنش‌های باقی مانده‌ی S_x و S_y را به ترتیب در راستای خط جوش Oy و عمود بر خط جوش Ox نشان می‌دهند. همچنین شکل‌های ۸ و ۹ تغییرات تنش‌های باقی مانده‌ی S_x و S_y را به ترتیب در راستای Ox و Oy نشان می‌دهند. مشاهده می‌شود که تنش‌های باقی مانده‌ی تولید شده نزدیک حد تنش تسلیم در دمای معمولی فولادند.



شکل ۶. توزیع تنش باقی مانده S_x در راستای خط جوش Oy



شکل ۷. توزیع تنش باقی مانده S_y در راستای عمود بر خط جوش Ox

نمونه‌ی مشابیه‌ی از کارخانه‌ی شرکت مهندسی و ماشین‌سازی ایران توسط ترموکوپل اندازه‌گیری شد. با توجه به شکل ۱، نقطه‌ی A در فاصله‌ی ۳۰ میلی‌متر روی محور OX به‌عنوان نقطه‌ی اندازه‌گیری انتخاب شد. شکل ۱۰ مقایسه‌ی بین نتایج حاصل از تحلیل انتقال حرارت و آزمایش، و مطابقت آنها را نشان می‌دهد. یکی از علل اختلاف دما در دوره‌ی سردشدگی نقطه‌ی مورد نظر را می‌توان ناشی از تفاوت ضریب جابه‌جایی واقعی با مقدار مفروض در تجزیه دانست.

فهرست علائم انگلیسی

علامت	توضیح	علامت	توضیح	علامت	توضیح
A	سطح مقطع حوضچه‌ی مذاب معادل	H	انتالی	q	شار حرارتی
C	ظرفیت گرمایی ویژه	h	ضخامت ورق	Q	آهنگ حرارت تولیدی
E	مدول کشسانی	K	ضریب هدایت حرارتی	T	دما
e	عرض مقطع حوضچه‌ی مذاب معادل	L	گرمای نهان	T_0	دمای محیط
f	تابع تسلیم	n	بردار عمود بر مرز	t	زمان
G	مدول برشی	P	توان حرارتی	v	سرعت الکتروود
S_{ij}	مؤلفه‌ی تنش انحرافی	$d\lambda$	ضریب تناسب		

فهرست علائم یونانی

α	ضریب انبساط حرارتی	β_{ij}	مؤلفه‌ی انحرافی مرکز سطح تسلیم	ν	نسبت پواسون
α_{ij}	مؤلفه‌ی مرکز سطح تسلیم	δ_{ij}	دلتای کرونگر	ρ	چگالی
β_1	ضریب جابه‌جایی یا انتقال گرما	ϵ_{ij}	مؤلفه‌ی کرنش	σ_{ij}	مؤلفه‌ی تنش
β_2	ضریب تابش	η	بازده قوس الکتریکی	σ_y	تنش تسلیم

پانوشتها

1. elastoplastic
2. butt welding
3. isotrope
4. bead
5. mild steel

منابع

1. Lemmon, E.C. "Phase change techniques for finite element conduction code". *Numerical Methods for Thermal Problems*, Ed. Lewis, K. Morgan, Pineridge Press, Swansea, pp. 149-158 (1979).
2. Lemmon, E.C. "Multidimensional integral phase change approximations for finite element conduction code", *Numerical Methods for Thermal Problems*, Ed. W. Lewis, K. Morgan, Wiley, Chichester, pp. 201-213 (1981).
3. Andersson, B., and Karlsson, L., "Thermal stresses in large butt-welded plates", *J. Thermal Stresses*, 4, pp. 491-500 (1981).
4. Naghdi, P.M., "Stress-strain relations in plasticity and thermoplasticity", *Proc 2th Symp.on Naval Structural Mechanics*, Pergamon, Oxford, pp. 121-167 (1960).
5. Karlsson, L., "Thermal stresses in welding", *Thermal Stresses*, Ed. R.B. Hetnarski, Elsevier Science Publishers B.V. (1986).
6. Andersson, B., "Thermal stresses in a submerged-arc-welded joint considering phase transformation", *J. Eng. Mater. Technol. (ASME)*, 100, pp. 356-362 (1987).
7. Jonsson, M., Karlsson, L., and Lingren, L.E., "Thermal stresses and plate motion in butt-welding", *3th int. Conf. on Numerical Methods in Thermal Problems*, Pineridge Press (1983).
8. Park, J.S., and Na, S.J., "Heat transfer in a stud-to-plate laser braze considering filler metal movement", *Welding Journal*, 4, (1998).
9. ANSYS Thermal Analysis Guide, Chapter 3, 2th edition. SAS.IP, INC (1997).
10. Masubuchi, K., *Analysis of Welded Structures*, Pergamon, Oxford (1980).