مجله‌ی علمی و پژوهشی شریف
اسفند ۱۳۸۷، شماره‌ی چهل و ششم، ص. ۵۲-۵۸

حل مسئله‌ی تخصیص ترافیک با محدودیت ظرفیت کمان با استفاده از تابع جریمه

هدایت ذکایی‌آشتیانی (استاد)

امیرحسین شهپر (دانشجوی‌دکتری)
دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

عباس بابازاده (استادیار)
پردیس دانشکده‌های فنی، دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه تهران

در ادبیات تخصیص ترافیک، با فرض نامحدودبودن ظرفیت کمان‌های شبکه، روش‌هایی نظیر روش فرانک - ولف قابلیت حل کارای این مسئله را دارند. زیرا در این روش‌ها زیرمسئله‌ی خطی‌شده معادل یافتن کوتاه‌ترین مسیر بین مبدأ ـ مقصدها است. ولی در واقعیت ظرفیت کمان‌های شبکه محدود است و برای دست‌یابی به نتایج واقعی‌تر از حجم جریان ترافیک کمان‌ها، در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت کمان‌ها لازم است. در نظر گرفتن صریح این نوع محدودیت در مسئله‌ی تخصیص ترافیک سبب تبدیل زیرمسئله‌ی خطی‌شده به مسئله‌ی جریان چندکالایی با هزینه‌ی کمینه می‌شود که حل آن را مشکل می‌سازد. روش دیگر درنظر گرفتن محدودیت ظرفیت کمان‌ها به‌صورت ضمنی، و استفاده از تابع جریمه‌ی حساس به ظرفیت کمان‌های شبکه است به‌نحوی که افزودن این تابع به توابع زمانِ سفر کمان‌ها سبب رعایت محدودیت ظرفیت کمان‌ها شود. در این نوشتار تابع جریمه‌ی مناسب برای این منظور پیشنهاد، و کارایی آن در حل مسئله‌ی تخصیص ترافیک با محدودیت ظرفیت با حل چند مثال مورد بررسی قرار می‌گیرد. نتایج این روش با سایر روش‌های درنظر گرفتن محدودیت ظرفیت، نظیر استفاده از روش تابع جریمه‌ی داخلی (IPF) و ضریب لاگرانژ افزایشی(ALM)، مورد مقایسه قرار گرفته است. همچنین نتایج کاربرد این روش برای شبکه‌ی واقعی شهر مشهد، به‌عنوان یک مثال واقعی، که در آن کمان‌های منتهی به چراغ‌های راهنمایی با محدودیت ظرفیت در نظر گرفته شده‌اند، ارائه شده است.

ashtiani@sharif.edu
am shahpar@civil.sharif.edu
ababazadeh@ut.ac.ir

واژگان کلیدی: تخصیص ترافیک، محدودیت ظرفیت، تابع جریمه.

مقدمه

مدل تخصیص ترافیک چگونگی تخصیص تقاضای بین زوج‌های مبدأ ـ مقصد به کمان‌های شبکه را توضیح می‌دهد. این مدل براساس دو اصل واردراپ به دو گروه تعادل استفاده‌کننده و تعادل سیستم تقسیم می‌شوند[۱]. اولین‌بار بکمن با فرض این که تابع زمان سفر هر کمان پیوسته، غیرنزولی، و تنها تابعی از حجم جریان در همان کمان باشد، مسئله‌ی تخصیص ترافیک تعادل استفاده‌کننده را به‌صورت یک مسئله‌ی بهینه‌سازی فرمول‌بندی کرد[۲].

کاربرد وسیع مدل تخصیص ترافیک در ارزیابی و انتخاب راهکارهای مناسب‌برای بهبود عملکرد شبکه‌های حمل‌ونقل نیازمند واقعی‌تر شدن هرچه بیشتر نتایج حاصل از آن است. یکی از عوامل واقعی‌تر شدن نتایج این مدل، مستقل از روش حل آن، در نظرگرفتن محدودیت ظرفیت کمان‌ها است. اگرچه روش دقیق درنظرگرفتن ظرفیت کمان‌ها استفاده از مدل‌های دینامیکی است، درنظرگرفتن محدودیت ظرفیت کمان‌ها در مدل بهینه‌سازی تخصیص ترافیک روشی دیگر است.

اضافه‌شدن محدودیت ظرفیت به مدل بهینه‌سازی تخصیص ترافیک سبب از بین رفتن کارایی روش‌های حل موجود نظیر روش حل لبلانک می‌شود[۳]. زیرا در این حالت زیرمسئله‌ی خطی‌شده‌ی مدل بهینه‌سازی ــ که معادل مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر است ــ به مسئله‌ی جریان چندکالایی با هزینه‌ی کمینه در شبکه تبدیل می‌شود که حل آن نسبت به مسئله‌ی کوتاه‌ترین مسیر بسیار دشوارتر و زمان‌برتر است. به‌طور کلی در اغلب روش‌های حل مسئله‌ی تخصیص ترافیک با محدودیت ظرفیت تلاش می‌شود از حل مسئله‌ی جریان چندکالایی پرهیز شود. امروزه برای رهایی از این مشکل از دو رویکرد استفاده می‌شود. یکی از این روش‌ها استفاده از توابع زمان سفر مجانبی برای کمان‌هایی است که محدودیت ظرفیت دارند، و دیگری استفاده از توابع جریمه در تابع هدف مسئله‌ی تخصیص ترافیک است. دگنزو نشان داد که توابع زمان سفر مجانبی به‌نحو مؤثری توانایی در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت کمان‌ها را دارند، اگرچه سبب بروز مشکلات جدیدی می‌شوند[۴]. استفاده از این توابع از یک‌سو سبب برآورد زمان سفرهای غیرواقعی (به‌طور معمول بسیار زیاد) برای کمان‌های با جریان نزدیک ظرفیت، و از دیگر سو سبب جابه‌جایی چرخشی مسیرها در نزدیکی

نقطه‌ی تعادل، بالا رفتن زمان حل، و بروز مشکلات عددی در حل مسئله می‌شوند.

روش‌های نوع دوم که معروف‌ترین آن‌ها روش‌های تابع جریمه‌ی داخلی (IPF) و ضریب لاگرانژ افزایشی (ALM) هستند[۵و۶]، بر آزادسازی محدودیت ظرفیت کمان‌ها از مجموعه محدودیت‌ها و انتقال آن به تابع هدف مبتنی هستند. در این روش‌ها مسئله‌ی اصلی با حل دنباله‌یی از مسائل تخصیص ترافیک بدون محدودیت ظرفیت حل می‌شود. به‌دلیل مشکلات یادشده برای استفاده از توابع زمان سفر مجانبی، روش‌های نوع دوم در کاربردهای عملی از عمومیت بیشتری برخوردار شده‌اند.

ایده‌ی این نوشتار برای در نظرگرفتن محدودیت ظرفیت کمان‌های شبکه «استفاده از تابع جریمه» است، به‌نحوی که افزودن این تابع به توابع زمان سفر کمان‌ها از یک‌سو سبب رعایت محدودیت ظرفیت کمان‌ها شود و از سوی دیگر ضمن جلوگیری از برآوردهای غیر واقعی برای زمان سفر کمان‌ها از کارایی مناسبی در حل مسئله‌ی تخصیص ترافیک برخوردار باشد. همچنین به‌منظور افزایش سرعت هم‌گرایی مسئله‌ی تخصیص ترافیک از مدل تخصیص ترافیک تکمیلی غیرخطی استفاده شده است. این مدل در گروه مدل‌های تخصیص ترافیکِ مبتنی بر مسیر است که به‌طور کلی نسبت به مدل‌های تخصیص ترافیک مبتنی بر کمان ــ نظیر روش فرانک ولف ــ از سرعت هم‌گرایی بسیار بالاتری برخوردارند[۷].

در ادامه، پس از ارائه‌ی مدل تخصیص ترافیک با محدودیت ظرفیت کمان در قالب یک مدل تکمیلی غیر خطی، تابع جریمه‌ی مناسب برای در نظرگرفتن ضمنی محدودیت ظرفیت کمان معرفی می‌شود. سپس یک دستور حل مناسب برای حل این مدل ارائه و نتایج استفاده از آن برای شبکه‌هایی با ابعاد کوچک و واقعی گزارش شده است. همچنین نحوه‌ی عملکرد روش ارائه‌شده در این نوشتار با روش‌های IPF و ALM مقایسه شده است.

مدل تخصیص ترافیک با محدودیت ظرفیت

مسئله‌ی تخصیص ترافیک با استفاده از فرض‌های ضعیفی که در مسائل حمل‌ونقلی محدودکننده نیستند به یک مدل تکمیلی غیرخطی تبدیل، و یک روش حل خطی‌سازی برای آن ارائه شده است[۸]. مدل تکمیلی غیرخطی علاوه بر دارا بودن ویژگی اصلی مدل‌های تخصیص ترافیک مبتنی بر مسیر، یعنی سرعت هم‌گرایی بسیار بالاتر نسبت به مدل‌های تخصیص ترافیک مبتنی بر کمان، دارای این ویژگی منحصر به فرد است که از قابلیت در نظر گرفتن توابع زمان سفر غیرمتقارن برخوردار است. در واقع مدل تخصیص ترافیک تنها زمانی قابل تبدیل به یک مسئله‌ی بهینه‌سازی است که توابع زمان سفر هر کمان متقارن باشد[۹]. این در حالی است که این فرض در بسیاری از موارد نظیر کمان‌های ورودی به تقاطع‌های با و بدون چراغ راهنمایی فرض صحیحی نیست.

اگرچه مدل تکمیلی غیرخطی ارائه شده محدودیت ظرفیت کمان‌ها را در نظر نگرفته است ولی می‌توان این مدل را برای در نظر گرفتن ظرفیت کمان‌ها تعمیم داد. در واقع چنانچه شبکه‌ی ترافیکی یک شهر را(G(N,A بنامیم که در آن N مجموعه گره‌ها و A مجموعه کمان‌ها، و برای هر کمان $a \in A$ ظرفیت آن را c_a بنامیم، مدل تخصیص ترافیک با محدودیت ظرفیت به‌صورت مدل تکمیلی (P۱) قابل بیان است.

$$f_k^{rs}\left(\sum_{a\in A} t_a(f)\delta_{ak}^{rs}+\sum_{a\in A} v_a\delta_{ak}^{rs}-u_{rs}\right)=0$$
$$\forall k\in K_{rs}, r\in R, s\in S \qquad (\text{P۱-۱})$$

$$\sum_{a\in A} t_a(f)\delta_{ak}^{rs}+\sum_{a\in A} v_a\delta_{ak}^{rs}-u_{rs}\geq 0$$
$$\forall k\in K_{rs}, r\in R, s\in S \qquad (\text{P۱-۲})$$

$$f_k^{rs}\geq 0,\quad \forall k\in K_{rs}, r\in R, s\in S \qquad (\text{P۱-۳})$$

$$\Big(\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs}-q_{rs}\Big)u_{rs}=0,\quad \forall r\in R, s\in S \qquad (\text{P۱-۴})$$

$$\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs}-q_{rs}\geq 0,\quad \forall r\in R, s\in S \qquad (\text{P۱-۵})$$

$$u_{rs}\geq 0,\quad \forall r\in R, s\in S \qquad (\text{P۱-۶})$$

$$(c_a-x_a)v_a=0,\quad \forall a\in A \qquad (\text{P۱-۷})$$

$$c_a-x_a\geq 0,\quad \forall a\in A \qquad (\text{P۱-۸})$$

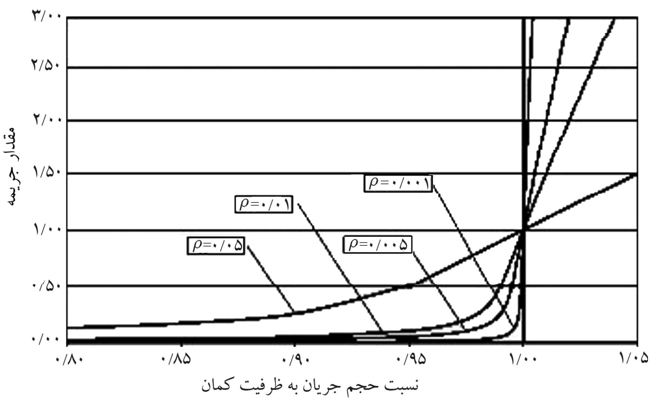
$$v_a\geq 0,\quad \forall a\in A \qquad (\text{P۱-۹})$$

در این روابط R مجموعه گره‌های مبدأ، S مجموعه گره‌های مقصد، K_{rs} مجموعه مسیرهای از مبدأ r به مقصد، f_k^{rs} جریان ترافیک مسیر k از مبدأ r به مقصد، f بردار $\{f_k^{rs}\}$، u_{rs} کوتاه‌ترین زمان سفر از مبدأ r به مقصد، q_{rs} تقاضای سفر از مبدأ r به مقصد s ، و δ_{ak}^{rs} برابر ۱ است اگر کمان a به مسیر k از مبدأ r به مقصد s تعلق داشته باشد و در غیر این‌صورت برابر صفر است. همچنین v_a متغیر همزاد و $t_a(.)$ تابع زمان سفر کمان a است. در این روابط x_a ، کل حجم جریان ترافیک کمان a است و از رابطه‌ی ۱ به دست می‌آید.

$$x_a=\sum_{r\in R}\sum_{s\in S}\sum_{k\in K_{rs}} f_k^{rs}\delta_{ak}^{rs},\quad \forall a\in A \qquad (۱)$$

در مدل (P۱)، روابط (P۱-۱) تا (P۱-۳) بازگوی اصل اول واردراپ ــ یعنی تعادل استفاده‌کننده ــ در یک شبکه‌ی حمل‌ونقل با محدودیت ظرفیت هستند. درواقع همانند مسئله‌ی تخصیص ترافیک بدون محدودیت ظرفیت، در جواب تعادلی مسئله‌ی تخصیص ترافیک با محدودیت ظرفیت، زمان سفر مسیرهای استفاده شده کوچک‌تر یا مساوی مسیرهای استفاده نشده است[۶]. با این تفاوت که زمان سفر هر کمان از مجموع دو بخش زمان طی کمان، $t_a(.)$ ، و زمان تأخیر ناشی از وجود محدودیت ظرفیت، v_a، تشکیل شده است. در این حالت زمان سفر کمان را زمان سفر عمومیت داده‌شده‌ی کمان می‌نامند. روابط (P۱-۴) تا (P۱-۶) نشان‌دهنده‌ی تأمین تقاضای هر مبدأ ـ مقصد توسط مسیرهای موجود بین آنها است. همچنین روابط (P۱-۷) تا (P۱-۹) فرم تکمیلی محدودیت ظرفیت هریک از کمان‌های شبکه را نشان می‌دهد. درواقع چنانچه جریان ترافیکِ کمانی نظیر a از ظرفیت آن کم‌تر باشد یعنی $x_a < c_a$، براساس رابطه‌ی (P۱-۷) متغیر همزاد محدودیت ظرفیت آن یعنی v_a، باید صفر باشد؛ و در غیر این‌صورت یعنی برابری جریان ترافیک با ظرفیت کمان، متغیر v_a می‌تواند مثبت شود که همان زمان تأخیر کمان a است[۶].

اگرچه روش حل خطی‌سازی یادشده برای حل مدل (P۱) قابل تعمیم است[۸]، تجربه نشان داده که در نظرگرفتن محدودیت صریح ظرفیت کمان در مدل تخصیص ترافیک سبب طولانی‌شدن زمان حل مسئله برای دست‌یابی به جواب تعادلی می‌شود[۱۰]. از این‌رو، در این نوشتار برای در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت از یک روش ضمنی استفاده می‌شود. برای در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت ناوگان در خطوط حمل‌ونقل همگانی نیز از نوعی تابع جریمه استفاده شده و محدودیت ظرفیت به‌صورت ضمنی در نظر گرفته شده است[۱۱]. در این روش برای هر کمان a با محدودیت ظرفیت، تابع جریمه‌یی با نام τ_a در نظرگرفته می‌شود که مقدار این جریمه با زمان سفر طی آن کمان، t_a جمع می‌شود. این تابع مادامی که نسبت جریان به



شکل ۱. نمایش تغییرات مقدار تابع جریمه برای $\gamma_a = 1$ و مقادیر مختلف پارامتر ρ.

ظرفیت کمان از مقدار مطلوب آن کم‌تر باشد، جریمه‌یی ناچیز و در غیر این‌صورت جریمه‌یی بزرگ را برای طی کمان در نظر می‌گیرد. این نحوه‌ی عملکرد تابع جریمه سبب رعایت محدودیت ظرفیت کمان‌ها در جواب تعادلی مسئله می‌شود.

تابع جریمه‌ی پیشنهادی این نوشتار برای در نظرگرفتن ضمنی محدودیت ظرفیت کمان‌های شبکه براساس رابطه‌ی ۲ است.

$$\tau_a(f)=0/5*\gamma_a*\begin{cases}\rho/(1-x_a/c_a) & x_a/c_a<1-\rho\\ (x_a/c_a-1+2\rho)/\rho & x_a/c_a\geq 1-\rho\end{cases} \quad (2)$$

در این رابطه، $\tau_a(.)$ و γ_a به‌ترتیب مقدار جریمه و ضریب تعدیل آن برای کمان a، و ρ پارامتر تابع جریمه است. همچنین وقتی $x_a/c_a = 1$ می‌شود مقدار $\tau_a(x_a)$ برابر γ_a شده و برآوردی از متغیر همزاد محدودیت ظرفیت را فراهم می‌آورد. تابع $\tau_a(.)$ برای تمام مقادیر ρ پیوسته، مشتق‌پذیر و اکیداً صعودی است. شکل ۱ چگونگی تغییرات تابع $\tau_a(.)$ را برای مقادیر مختلف پارامتر ρ نشان می‌دهد.

با اضافه‌کردن تابع جریمه‌ی τ_a به زمان‌سفر t_a هر کمان، مدل (P۱) را می‌توان به‌شکل مدل (P۲) بازنویسی کرد. البته به‌دلیل درنظر گرفتن ضمنی محدودیت ظرفیت کمان‌ها، در مدل (P۲) روابط (P۱-۷) تا (P۱-۹) مدل (P۱) وجود ندارد.

$$f_k^{rs}\Big(\sum_{a\in A}(t_a(f)+\tau_a(f))\delta_{ak}^{rs}-u_{rs}\Big)=0$$

$$\forall k\in K_{rs}, r\in R, s\in S \quad (\text{P2-1})$$

$$\sum_{a\in A}(t_a(f)+\tau_a(f))\delta_{ak}^{rs}-u_{rs}\geq 0$$

$$\forall k\in K_{rs}, r\in R, s\in S \quad (\text{P2-2})$$

$$(\text{P1}-3)\text{تا}(\text{P1}-6) \quad (\text{P2-3})$$

مدل (P۲) نیز یک مدل تعادل ترافیکی و روابط (P۲-۱) و (P۲-۲) معادل قانون اول واردراپ با زمان سفرکمان a به فرم $t_a(.)+\tau_a(.)$ است. با توجه به تعریف تابع جریمه τ_a، وقتی که مقدار پارامتر ρ به سمت صفرمیل می‌کند، مدل (P۲) معادل مدل (P۱) خواهد بود.

روش حل

حل مستقیم مدل تکمیلی غیر خطی (P۲) درکاربردهای عملی، حتی بدون در نظرگرفتن ظرفیت، به‌علت تعداد زیاد متغیرها و غیر خطی بودن آن شدیداً زمان‌بر و عملاً غیر ممکن است. با استفاده از تکنیک‌های تجزیه، تولید مسیر، و خطی‌سازی روش کارایی برای حل مسئله‌ی تخصیص ترافیک بدون ظرفیت ارائه شده است[8]. در این نوشتار از این روش برای حل مدل (P۲) استفاده شده است؛ ولی با توجه به تغییرات شدید تابع جریمه برای مقادیر کوچک ρ در محدوده‌یی که جریان درکمان به نزدیکی ظرفیت آن می‌رسد، به‌منظور جلوگیری از مشکلات محاسباتی تغییراتی در روش حل ضروری است. قبل از بیان جزییات روش حل، ایده‌ی کلی آن به‌طور خلاصه تشریح می‌شود.

در این روش حل، به‌منظورکاهش ابعاد مسئله از یک الگوی تجزیه‌ی دوسطحی استفاده می‌شود. در سطح اول تجزیه برحسب مبدأها، و در سطح دوم تجزیه بر حسب مبدأ ـ مقصدها انجام می‌گیرد. بدین‌ترتیب زیرمسئله‌ی محدودشده‌یی از مدل اولیه‌ی (P۲) برای هر مبدأ ـ مقصد تولید می‌شود. هرچند ابعاد هر زیرمسئله در مقایسه با مدل (P۲) بسیار کوچک‌تر است، ولی با توجه به تعداد بسیار زیاد مسیرهای بین هر مبدأ ـ مقصد، هنوز ابعاد آن به‌قدری بزرگ است که حل مستقیم آن عملی نیست.

به‌منظور کاهش ابعاد زیرمسئله از شیوه‌ی تولید مسیر استفاده می‌شود. در این شیوه برای هر مبدأ ـ مقصد (s و r) زیرمجموعه‌یی از مسیرهای K_{rs} با نام مجموعه مسیرهای فعال، K_{rs}^w، در نظرگرفته می‌شود و هر زیرمسئله تنها برای مسیرهای متعلق به این مجموعه حل می‌شود و جریان در سایر مسیرها برابر صفر فرض می‌شود. مجموعه‌ی K_{rs}^w در ابتدا یک مجموعه‌ی کوچک دلخواه و حداقل شامل یک مسیر است. این مسیر می‌تواند کوتاه‌ترین مسیر از r به s براساس زمان‌های سفر آزاد، $t_a(0)$ برای هرکمان $a\in A$ باشد. سپس در تکرارهای بعد پیش از حل زیرمسئله‌ی مربوط به مبدأ ـ مقصد (s و r)، چنانچه نسبت اختلاف کمینه‌ی زمان سفر مسیرهای متعلق به مجموعه مسیرهای فعال مبدأ ـ مقصد، با زمان سفرکوتاه‌ترین مسیر جدید بین آن مبدأ ـ مقصد از مقدارکوچکی، ε، کم‌تر باشد، کوتاه‌ترین مسیر جدید به این مجموعه اضافه می‌شود. رابطه‌ی ۳ این شرایط را نشان می‌دهد.

$$\Big|\underset{\substack{k\in K_{rs}^w\\ f_k>0}}{Min}\{T_k(f)\}-u_{rs}\Big|/u_{rs}\leq\varepsilon \quad (3)$$

در این رابطه u_{rs} کوتاه‌ترین زمان سفر بین مبدأ ـ مقصد (s و r) و ε سطح دقت مسئله از نظر برابری زمان سفر مسیرهای مختلف یک مبدأ ـ مقصد در جواب تعادلی است. همچنین $T_k(f)$ زمان سفر مسیر k است که از رابطه‌ی ۴ به دست می‌آید.

$$T_k(f)=\sum_{a\in A}(t_a(f)+\tau_a(f))\delta_{ak}^{rs},\ \ \forall k\in K_{rs}^w \quad (4)$$

هرچند ابعاد هر زیرمسئله روی مجموعه مسیرهای فعال، K_{rs}^w، در مقایسه با مسئله‌ی اصلی (P۲) بسیار کوچک‌تر است، ولی به‌دلیل غیر خطی بودن تابع زمان سفر کمان‌ها، هنوز حل آن بسیار مشکل است. برای حل این مشکل از روش تکراری خطی‌سازی استفاده می‌شود. در این روش هر زیرمسئله روی مجموعه مسیرهای فعال آن مادامی که اختلاف نسبی زمان سفر این مسیرها از مقدار کوچکی، ε کم‌تر نباشد خطی‌سازی و حل می‌شود. رابطه‌ی ۵ نشان دهنده‌ی مفهوم بیان شده است.

$$\Big(\underset{\substack{k\in K_{rs}^w\\ f_k>0}}{Max}\{T_k(f)\}-\underset{k\in K_{rs}^w}{Min}\{T_k(f)\}\Big)/\underset{\substack{k\in K_{rs}^w\\ f_k>0}}{Max}\{T_k(f)\}\leq\varepsilon \quad (5)$$

با برقراری رابطه‌ی فوق یک جواب تعادلی، و با تقریب ε برای مبدأ ـ مقصد (s و r) به دست می‌آید، و همین مراحل به‌صورت تکراری و برای همه‌ی مبدأ ـ مقصدها

ادامه می‌یابد. در پایان یک دور از حل مسئله برای تمام مبدأ ـ مقصدها، زمان سفر کمان‌ها و مقدار جریمه‌ی آنها با توجه به تغییر جریان در مسیرها (کمان‌ها) به‌هنگام می‌شود، و الگوریتم تا دست‌یابی به شرایط توقف نهایی به‌صورت تکراری ادامه می‌یابد.

شرایط توقف نهایی در پایان هر دور از انجام روش حل کنترل می‌شود. این شرایط از دو بخش تشکیل شده است که بخش اول آن کنترل‌کننده‌ی امکان‌پذیری جریان ترافیک هر کمان، و بخش دوم کنترل‌کننده‌ی متوسط خطای جریان تعادلی است. این شرایط برای تکرار nام روش حل به‌صورت روابط ۶ و ۷ قابل بیان است.

$$\underset{a\in A}{Max}\{x_a^n/c_a\} \leq ۱ \qquad (۶)$$

$$AError^n = (\sum_{r\in R}\sum_{s\in S} q_{rs}E_{rs}^n)/\sum_{r\in R}\sum_{s\in S} q_{rs} \leq \varepsilon \qquad (۷)$$

که در آن E_{rs}^n از رابطه‌ی ۸ به دست می‌آید.

$$E_{rs}^n = |\underset{\substack{K=K_{rs}^w\\ f_k>۰}}{Max}\{T_k^n(f)\} - u_{rs}^n|/u_{rs}^n, \quad \forall r\in R, s\in S \qquad (۸)$$

براساس مطالب عنوان‌شده، دستور حل زیر برای حل مدل (P۲) و دست‌یابی به جوابی امکان‌پذیر و با خطای متوسطی کم‌تر از ε پیشنهاد می‌شود.

گام صفر- انتخاب مقادیر اولیه. مقادیر اولیه‌ی پارامترهای ρ، ε، و ضریب γ_a برای هر کمان $a\in A$ را انتخاب کنید و قرار دهید $n=۰$.

گام۱- تعیین جواب اولیه. برای هر کمان $a\in A$ قرار دهید. $t_a = t_a(۰)+\tau_a(۰)$. برای هر مبدأ $r\in R$ درخت کوتاه‌ترین مسیر با ریشه‌ی r را پیدا کنید. برای هر مقصد $s\in S$ با $q_{rs}>۰$، کوتاه‌ترین مسیر از r به s را با k_{rs} نشان دهید و قراردهید $K_{rs}^w=\{k_{rs}\}$ و $f_{k_{rs}}^{rs}=q_{rs}$.

گام ۲- تجزیه برحسب مبدأ. برای هر مبدأ $r\in R$ انجام دهید:

۲-۱- تولید مسیر. براساس زمان سفرهای کنونی کمان‌ها، $t_a = t_a(x_a) +$ $\tau_a(x_a)$، درخت کوتاه‌ترین مسیر با ریشه‌ی r پیدا کنید. برای هر مقصد $s\in S$ با $q_{rs}>۰$، کوتاه‌ترین مسیر از r به s را k_{rs} و زمان آن را u_{rs} بنامید.

۲-۲- تجزیه برحسب مقصد. برای گره r و هر $s\in S$ با $q_{rs}>۰$ انجام دهید:

۲-۲-۱- مسیرهای با جریان صفر را از مجموعه مسیرهای فعال K_{rs}^w حذف کنید.

۲-۲-۲- اگر رابطه‌ی ۳ برقرار نیست، قرار دهید $K_{rs}^w = K_{rs}^w \cup \{k_{rs}\}$ و $f_{k_{rs}}^{rs}=۰$.

۲-۲-۳- خطی‌سازی. تا وقتی که رابطه‌ی ۵ برقرار نیست انجام دهید:

۲-۲-۳-۱- مسئله‌ی تکمیلی غیرخطی مربوط به مبدأ ـ مقصد (r و s) با مسیرهای فعال K_{rs}^w را در مقدار کنونی f خطی‌سازی کنید. مسئله‌ی تکمیلی خطی را حل کرده و f_k^{rs} برای $k\in K_{rs}^w$ را به‌هنگام کنید.

گام۳- (پایان). اگر شرایط ۶ و ۷ برقرارند توقف کنید. در غیر این‌صورت برای هر کمان $a\in A$ قرار دهید $n=n+۱$ و $\gamma_a=\tau_a(f)$ و به ابتدای گام ۲ بروید.

در این دستور حل، انجام گام ۱ معادل با دور صفر، و انجام تخصیص همه یا هیچ، و هر بار انجام گام ۲ معادل با یک دور دستور حل تکمیلی است. همچنین n شمارنده‌ی دورها است.

درکاربرد روش پیشنهادی فوق برای حل مسائل واقعی، می‌توان از سازوکارهایی به‌منظور افزایش کارایی الگوریتم استفاده کرد. ازجمله، مقادیر مربوط به دقت جواب، یعنی پارامترهای ε، و ρ را می‌توان در تکرارهای اولیه‌مقادیر بزرگ‌تری در نظر گرفت و به‌تدریج آنها را کاهش داد. همچنین می‌توان مقدار اولیه‌ی ضریب تعدیل تابع جریمه γ_a، را برای هر کمان $a\in A$ در تکرارهای اولیه مقداری کوچک و برابر متوسط زمان سفر آزاد کمان‌های شبکه درنظر گرفت و پس از نهایی‌شدن مقادیر پارامترهای ε، و ρ مقدار آن را در هر تکرار از رابطه‌ی ۹ به‌هنگام کرد.

$$\gamma_a^n = \tau_a^{n-۱}(f) \qquad (۹)$$

نتایج عددی

توانایی تابع جریمه‌ی ۲ برای در نظرگرفتن محدودیت ظرفیت و نیزکارایی روش حل تکمیلی، ابتدا در شبکه‌هایی با ابعاد کوچک و سپس برای شبکه‌ی با ابعاد واقعی شهر مشهد مورد آزمایش قرارگرفت. دستور حل ارائه‌شده برای مدل (P۲) در محیط زبان برنامه‌نویسی VISUAL C++ پیاده شد و آزمایش‌ها بر روی رایانه‌یی با قدرت پردازش ۱٫۸GHz و حافظه‌ی ۵۱۲M SDRAM انجام شد. در تمام شبکه‌ها تابع زمان سفرکمان‌ها تابع BPR با ضریب ۰٫۱۵ و درجه‌ی ۴ است.

نتایج استفاده از روش حل برای شبکه‌های هیرن و سایوکس فالز

شبکه‌ی هیرن که با نام شبکه‌ی ۹ گرهی نیز شناخته می‌شود دارای ۱۸ کمان، ۹ گره و ۴ زوج مبدأ ـ مقصد است و این مقادیر برای شبکه‌ی سایوکس فالز به‌ترتیب برابر۷۶، ۲۴ و ۵۲۸ است[۱۰]. این دو شبکه بدان سبب برای بررسی کارایی تابع جریمه و روش حل انتخاب شده‌اند که پیش‌تر توسط سایر پژوهش‌گران برای آزمایش کارایی دو روش IPF و ALM نیز استفاده شده‌اند. از این‌رو می‌توان کارایی روش حل پیشنهادی ارائه‌شده در این مقاله را با دو روش اشاره شده مقایسه کرد. البته با توجه به رعایت‌کامل محدودیت ظرفیت‌کمان‌ها توسط تابع جریمه و روش پیشنهادی از میان دو روش اشاره شده، فقط روش اول برای مقایسه با روش حل پیشنهادی این نوشتار مناسب است. زیرا روش IPF قادر به رعایت‌کامل محدودیت ظرفیت کمان‌ها است، در صورتی‌که روش ALM ممکن است برای برخی ازکمان‌ها جریانی بیش از ظرفیت برآورد کند.

از آنجا که مسئله‌ی تخصیص ترافیک با محدودیت ظرفیت معادل مسئله‌ی تخصیص ترافیک به شکل مسئله‌ی بهینه‌سازی بکمن است[۲]، یک معیار مقایسه‌ی مناسب برای روش‌ها مقدار تابع هدف بکمن است. از این‌رو برای شبکه‌های آزمایش‌شده بهترین مقدار تابع هدف بکمن به دست آمده با روش پیشنهادی این نوشتار و روش IPF گزارش شده است. تابع هدف مسئله‌ی بکمن بر اساس رابطه‌ی ۱۰ محاسبه شده است.

$$Min\sum_{a\in A}\int_۰^{x_a} t_a(x)dx \qquad (۱۰)$$

جدول ۱ نتایج استفاده از تابع جریمه و روش حل پیشنهادی این نوشتار را برای دست‌یابی به جوابی امکان‌پذیر برای کمان‌های با محدودیت ظرفیت و جریان

جدول ۱. نتایج حل شبکه‌ی هیرن و سایوکس فالز.

نام‌شبکه	روش حل پیشنهادی					روش حل IPF	
	ρ	تعداد دور	تعداد خطی‌سازی	مقدار تابع هدف بکمن	حداکثر نسبت جریان به‌ظرفیت کمان	تعداد دور	مقدار تابع هدف بکمن
هیرن	۰٫۰۱	۲۹	۱۷۸	۱۵۷۲٫۳۲۹	۰٫۹۹۹۹۴۱	۱۵۶	۱۵۷۲٫۳۱
	۰٫۰۰۱	۳۸	۲۲۹	۱۵۷۲٫۲۷۷	۰٫۹۹۹۹۹۷		
سایوکس فالز	۰٫۰۵	۱۵	۵۲۷	۳۳٫۳۰۴	۰٫۹۹۶۰۱۳	۱۴۱	۳۳٫۳۱
	۰٫۰۱	۳۱	۱۳۷۱	۳۳٫۲۸۸	۰٫۹۹۹۲۸۴		

تعادلی با دقت $\varepsilon = ۰/۰۰۱$ در شبکه‌های هیرن و سایوکس فالز نشان می‌دهد. چنان که در این جدول مشاهده می‌شود، در هر دو شبکه با کاهش پارامتر ρ، تعداد دورهای دستور حل و تعداد خطی‌سازی که نقش به‌سزایی در زمان حل مسئله دارد افزایش یافته و در مقابل مقدار تابع هدف بهبود یافته است. بهبود تابع هدف متناسب با افزایش حداکثر نسبت حجم جریان به ظرفیت کمان‌های شبکه است. در واقع با توجه به نقش پارامتر ρ در تعیین جریمه‌ی کمان‌های با محدودیت ظرفیت در تابع جریمه‌ی رابطه‌ی ۲، انتخاب مقادیر کوچک‌تر برای این پارامتر سبب استفاده‌ی بیشتر از ظرفیت کمان‌های شبکه و بهبود تابع هدف بکمن می‌شود. در مقایسه با روشIPF، استفاده از تابع جریمه و روش حل پیشنهادی با تعداد دورهای کم‌تری به مقادیر بهتری از تابع هدف بکمن دست یافته است. همچنین از آنجا که در هر دو روش، در هر دور یک‌بار درخت کوتاه‌ترین مسیر ساخته می‌شود که بخش عمده‌ی محاسبات این روش‌ها است، به نظر می‌رسد که روش حل پیشنهادی این نوشتار از نظر زمان حل به‌خصوص در شبکه‌های بزرگ و با ابعاد واقعی سریع‌تر عمل کند.

نتایج استفاده از روش حل برای شبکه‌ی واقعی شهر مشهد

در آزمایشی دیگر، روش حل پیشنهادی برای شبکه با ابعاد بزرگ و واقعی شهر مشهد مورد استفاده قرارگرفت. این شبکه دارای ۲۵۲۶ کمان، ۹۱۷ گره و ۷۱۵۷ زوج مبدأ ـ مقصد است. از آنجا که در تقاطع‌های چراغ‌دار وسایل نقلیه تنها در طول مدت زمان سبز چراغ قادر به استفاده از ظرفیت خیابان ورودی به تقاطع هستند، بنابراین وجود چراغ راهنمایی در تقاطع‌های چراغ‌دار سبب محدودکردن ظرفیت کمان‌های ورودی به تقاطع می‌شود. از این‌رو تعداد ۱۸۷ کمان منتهی به تقاطع‌های چراغ‌دار در شبکه‌ی شهر مشهد با محدودیت ظرفیت در نظر گرفته شدند. ظرفیت این کمان‌ها برابر با ضریبی از حاصل‌ضرب نرخ تردد اشباع در نسبت زمان سبز به‌طول سیکل چراغ در نظر گرفته شد.

روش پیشنهادی این نوشتار برای شبکه‌ی شهر مشهد، جوابی امکان‌پذیر و تعادلی با دقت $\varepsilon = ۰/۰۰۱$ و مقدار پارامتر تابع جریمه، $\rho = ۰/۰۵$ را پس از ۱۴ دور و صرف زمان ۴٫۶۹ ثانیه، به دست می‌آورد. مقدار تابع هدف بکمن این جواب برابر با ۱۲۳۶۰۶۱ و بیشینه‌ی نسبت حجم جریان به ظرفیت کمان‌های شبکه برابر ۰٫۹۹۹۹۷۱ است. این در حالی است که جواب تعادلی با دقت $\varepsilon = ۰/۰۰۱$ برای این شبکه بدون در نظرگرفتن محدودیت ظرفیت برای کمان‌های منتهی به تقاطع‌های چراغ‌دار نیازمند ۶ دور و صرف زمان ۲٫۴۷ ثانیه است. در این جواب بیشینه‌ی نسبت حجم به ظرفیت کمان‌های شبکه برابر ۱٫۶۱ و ۲۰ کمان دارای نسبت حجم به ظرفیت بالای ۱ هستند. این مشاهده نشان می‌دهد که استفاده از تابع جریمه و روش حل پیشنهادی تنها با صرف زمانی کم‌تر از۲ برابر حل مسئله بدون در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت، جوابی واقعی‌تر برای مسئله تخصیص ترافیک به دست می‌دهد.

اگرچه نتایج حل شبکه‌ی شهر مشهد با روش IPF موجود نیست ولی استفاده از روش IPF برای شبکه‌یی با ۹۱۴ کمان، ۴۱۶ گره و۱۴۰۶ زوج مبدأ ـ مقصد نیازمند ۱۸۱ دور و صرف زمان ۱۱٫۸۲ ثانیه گزارش شده است که در مقایسه با روش پیشنهادی این نوشتار بالا است[۱۰].

نتیجه‌گیری

در نظر گرفتن محدودیت ظرفیت کمان‌های شبکه‌ی خیابانی سبب واقعی‌ترشدن نتایج مدل تخصیص ترافیک می‌شود. در این نوشتار یک تابع جریمه‌ی مناسب برای در نظرگرفتن ضمنی محدودیت ظرفیت کمان‌ها معرفی، و مدل تخصیص ترافیک با محدودیت ظرفیت به‌شکل یک مدل تکمیلی غیر خطی بیان شد. همچنین دستور حل مناسب برای حل این مدل با استفاده از روش پیشنهادی موجود برای حل مسئله‌ی تخصیص ترافیک تکمیلی غیر خطی ارائه شد. روش حل پیشنهادی برای شبکه‌های کوچک هیرن و سایوکس فالز و نیز شبکه‌ی واقعی مشهد به‌کارگرفته شد. در تمام این مثال‌ها جوابی امکان‌پذیر و نیز تعادلی با خطای کم‌تر از ۰٫۰۰۱ تعیین شد.

استفاده از تابع جریمه و روش حل پیشنهادی این نوشتار قادر به رعایت کامل محدودیت ظرفیت کمان‌ها است. از این‌رو در مقایسه با روش ALM که در آن ممکن است محدودیت ظرفیت برای برخی ازکمان‌ها رعایت نشود، نتایج واقعی‌تری به دست آمده است. همچنین استفاده از تابع جریمه‌ی پیشنهادی این نوشتار در مقایسه با روش IPF مقادیر بهتری از تابع هدف را برای شبکه‌های با ابعاد کوچک هیرن و سایوکس فالز به دست می‌دهد و برای شبکه‌های با ابعاد واقعی از نظر زمان حل نیز برتری دارد.

منابع

1. Wardrop J.G. Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research, *In: Proceedings of the Institute of Civil Engineering* **1**, Part II , pp. 325-378, (1952).

2. Beckman, M.J.; McGuire, C.B.and Winsten, C.B. Studies in the, Economics of Transportation, Yale University Press, U.S.A., (1956).

3. LeBlanc, L.J. Mathematical Programming Algorithms for Large Scale Network Equilibrium and Network De-

sign Problem, Ph.D. Dissertation, Department of Industrial Engineering, Northwestern University, (1973).

4. Daganzo, C.F. "On the traffic assignment problem with flow dependent costs", *Transportation Research* 11 (I, II), pp. 433-441, (1977a.b).
5. Prashker, I.N. and Toledo T. "Adaptation of the gradient projection algorithm for the traffic assignment problem with side constraints", Paper Presented at the 80th Annual meeting of Transportation Research Board, Washington, D.C., (2001).
6. Larsson, T.and Patriksson, M. "An augmented lagrangian dual algorithm link capacity side constrained traffic assignment problems", *Transportation Research 29B*, pp. 433-455, (1995).
7. Chen, A.; Lee, D.H.and Nie, Y. "Path and link based traffic assignment algorithms: a comprehensive computational study". *Paper presented at the 6th International Conference on Application of Advanced Technologies in Transportation Engineering, Singapore*, (2000)
8. Aashtiani, H.Z. The Multi-Modal Traffic Assignment Problem, Ph.D. Dissertation, MIT, (1979).
9. Patriksson, M. "The traffic assignment problem–models and methods". VSP, Utrecht, BV, the Netherlands, (1994)
10. Yu, N.; Zhang, H.M.and Lee, D.H. "Models and algorithms for the traffic assignment problem with link capacity constraints", *Transportation Research 38B*, pp. 285-312, (2003)
11. Babazadeh, A. and Aashtiani, H.Z. "Solving transit assignment problem with fleet capacity constraints", First National Congress on Civil Engineering, Sharif University of Technology, (2004).